Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 21–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:26:00

УДК 517.988.28

В. В. Волчков

Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах

Изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса на римановых некомпактных симметрических пространствах X ранга 1. Для таких классов получено описание в виде ряда по гипергеометрическим функциям и доказана теорема единственности. Эти результаты позволили получить локальную теорему о двух радиусах на X в окончательной форме.

Библиография: 45 названий.

Введение

Известная теорема Л. Зальцмана о двух радиусах [1] утверждает, что если функция $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ имеет нулевые интегралы по всем шарам из $\mathbb{R}^n$ с радиусами r_1, r_2 и число r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$, то $f = 0$. Примеры показывают (см. [1]), что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым.

Теорема о двух радиусах получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и др. (см. обзоры [2], [3] с обширной библиографией, а также [4]–[16]). Одним из основных направлений в этих исследованиях является изучение функций с заданными шаровыми средними на различных классах однородных пространств с инвариантной мерой. В частности, были получены аналоги теоремы о двух радиусах для пространств постоянной кривизны [5]–[7], а затем для симметрических пространств ранга 1 и группы Гейзенберга (см. [8]–[11]).

Получение локального варианта теоремы о двух радиусах (например, когда функция с указанным свойством задана в шаре радиуса $R > \max(r_1, r_2)$) является существенно более трудной задачей. Возникающее при этом нарушение групповой структуры сдвигов, действующей на множестве рассматриваемых функций, создает серьезные препятствия для эффективного применения методов, использованных в [1], [4]–[11]. Первые локальные результаты для евклидовых и некоторых гиперболических пространств получены в работах [13]–[16], где рассмотрен случай, когда функция задана в шаре радиуса $R > r_1 + r_2$.

Доказательства основных результатов из цитированных выше работ основаны на применении аппарата преобразования Фурье и соответствующей техники многомерного комплексного анализа (см., например, обзор [3]).

В последние годы автором настоящей работы разработана принципиально новая методика, основанная на описании различных функциональных пространств в терминах разложений по специальным функциям, которая позволила

получить окончательные результаты в ряде известных задач о шаровых средних на евклидовых и гиперболических пространствах (см. [17]–[31] и библиографию к этим работам). Среди них отметим окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на евклидовых и вещественных гиперболических пространствах (см. [1], [18]), полное решение проблемы Л. Зальцмана о голоморфности функции с нулевыми интегралами по конформно-инвариантному семейству окружностей [19], решение проблемы носителя для шаровых средних [20], описание множеств инъективности преобразования Радона на сферах [21], а также ряд приложений к проблеме инъективности преобразования Помпейю [22]–[28], к теории тригонометрических рядов (см. [29], а также [30]) и к теории аппроксимации [31]. В этих задачах прежние методы оказались либо неприменимыми, либо недостаточно тонкими. В связи с этим большой интерес представляет развитие техники, разработанной в [17]–[31], для более широкого класса однородных пространств.

Первые результаты в этом направлении получены в [32], где существенно усилена глобальная теорема о двух радиусах на римановых симметрических пространствах X некомпактного типа ранга 1. В соответствии с их классификацией (см., например, [33; гл. 1, § 4, п. 3]) это в точности вещественное, комплексное, кватернионное гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ соответственно, а также гиперболическое пространство Кэли $H^{16}(\text{Cay})$.

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [32]. Существенное развитие техники, предложенной в [32], позволило доказать локальную теорему о двух радиусах на X в окончательной форме (см. теорему 1 в § 1). Ряд промежуточных результатов, полученных в работе, представляет самостоятельный интерес (см., например, теоремы 4–7).

§ 1. Формулировка основного результата

По поводу используемых ниже основных понятий и фактов из теории симметрических пространств см., например, [33]–[36].

Пусть G – связная некомпактная полупростая группа Ли с конечным центром, $K \subset G$ – максимальная компактная группа и $X = G/K$ – соответствующее симметрическое пространство некомпактного типа. Всюду в дальнейшем предполагается, что ранг X равен 1. Как обычно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{f}$ группы K и ее ортогонального дополнения $\mathfrak{p}$ относительно формы Киллинга на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ – максимальное абелево подпространство (в данном случае одномерное), γ – единственный положительный неделимый корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$, m_γ и $m_{2\gamma}$ – кратности корней γ и 2γ соответственно, $\alpha = \frac{1}{2}(m_\gamma + m_{2\gamma} - 1)$, $\beta = \frac{1}{2}(m_{2\gamma} - 1)$, ρ – полусумма положительных корней с учетом кратностей, $\mathfrak{a}^*$ и $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ – соответственно множества всех вещественнозначных и комплекснозначных линейных функционалов на $\mathfrak{a}$, $o = \{K\}$ – образ единичного элемента группы G при канонической проекции $G \rightarrow X$.

Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ определяет норму $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$ и G -инвариантную риманову структуру на X с соответствующей функцией расстояния $d(\cdot, \cdot)$ и римановой мерой dx . Пусть $B_R(y) = \{x \in X : d(x, y) < R\}$ – открытый геодезический шар радиуса R с центром $y \in X$, $B_R = B_R(o)$, $B_\infty = X$. Через $L_{\text{loc}}(U)$ обозначим класс функций $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, локально интегрируемых по мере dx в области

$U \subset X$. Выберем $H \in \mathfrak{a}$ так, чтобы $\gamma(H) = 1$ и для $r > 0$ положим

$$N(r) = \left\{ \mu > 0 : \varphi_{\mu}^{\alpha+1, \beta+1} \left(\frac{r}{\|H\|} \right) = 0 \right\},$$

где

$$\varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t) = F \left(\frac{\xi + \eta + 1 + i\mu}{2}, \frac{\xi + \eta + 1 - i\mu}{2}, \xi + 1, -\operatorname{sh}^2 t \right) \quad (1)$$

и F – гипергеометрическая функция.

Следуя [17], [18], обозначим $V_r(B_R)$, $r < R \leq \infty$, – множество функций $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ таких, что

$$\int_{B_r(y)} f(x) dx = 0 \quad \text{для всех } y \in B_{R-r},$$

$V_{r_1, r_2}(B_R) = V_{r_1}(B_R) \cap V_{r_2}(B_R)$. Для целого неотрицательного m (или для $m = \infty$) положим

$$V_r^m(B_R) = V_r(B_R) \cap C^m(B_R), \quad V_{r_1, r_2}^m(B_R) \cap C^m(B_R).$$

Отметим, что условие $f \in V_r(B_R)$ можно записать в виде уравнения свертки

$$(f \times \chi_r)(y) = 0, \quad y \in B_{R-r}, \quad (2)$$

где χ_r – характеристическая функция (индикатор) шара B_r (определение и основные свойства свертки вида (2) см. в [33; гл. 2, § 5]). Пусть $\mathscr{D}(B_R)$ – множество функций из $C^\infty(B_R)$ с компактными носителями, $\mathscr{D}'(B_R)$ – пространство распределений на B_R (см. [33; гл. 2, § 2]), $V_r^{-\infty}(B_R)$ – множество распределений $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, удовлетворяющих (2), и $V_{r_1, r_2}^{-\infty}(B_R) = V_{r_1}^{-\infty}(B_R) \cap V_{r_2}^{-\infty}(B_R)$.

Обозначим через Ω множество пар (r_1, r_2) положительных чисел со следующим свойством: для любого $m > 0$ существуют $\lambda_1 \in N(r_1)$, $\lambda_2 \in N(r_2)$ такие, что $|\lambda_1 - \lambda_2| < (2 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-m}$. Перечислим некоторые свойства множеств Ω и $N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2)$ (см. лемму 9):

- а) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \neq \emptyset\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, +\infty)$;
- б) при любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(a, b) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума;
- в) при любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$;
- г) если $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то число r_1/r_2 иррационально.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r_1, r_2 > 0$ и $R > \max(r_1, r_2)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $r_1 + r_2 < R$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $f \in V_{r_1, r_2}^{-\infty}(B_R)$, то $f = 0$;
- 2) если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $f \in V_{r_1, r_2}^{\infty}(B_R)$, то $f = 0$;
- 3) если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$, $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $f \in V_{r_1, r_2}^{-\infty}(B_R)$, то $f = 0$;
- 4) если $r_1 + r_2 = R$, $(r_1, r_2) \notin \Omega$, то для любого натурального m существует ненулевая $f \in V_{r_1, r_2}^m(B_R)$;
- 5) если $r_1 + r_2 > R$, то существует ненулевая $f \in V_{r_1, r_2}^{\infty}(B_R)$;
- 6) если $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_{r_1, r_2}(X)$.

Перечисленные выше свойства множеств Ω и $N(r_1, r_2)$ показывают, что все ситуации, описанные в утверждениях теоремы 1, реализуются при подходящих $r_1, r_2 > 0$.

Утверждения 1), 2) теоремы 1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$ ранее были доказаны разными методами в [14]–[18]. Простое утверждение 6) является известным для любого X (см. [8]). Утверждения 3)–5) для пространств $\mathbb{R}^n$ и $H^n(\mathbb{R})$ (утверждение 3) для $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$) впервые были получены автором в [17], [18]. Позже Вит. В. Волчков показал (см. [37], [38]), что метод, предложенный в [18], позволяет получить аналогичные результаты и для $X = H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$. В остальных случаях утверждения теоремы 1 являются новыми и доказываются в § 10.

В отличие от прежних подходов метод, предложенный в настоящей работе, позволяет изучить произвольные конечномерные K -инвариантные подпространства в $V_r^{-\infty}(B_R)$ сразу для всех X без использования классификации и конкретных моделей этих пространств, как это делалось ранее в [16]–[18], [37], [38]. Для известных ранее случаев это дает новые доказательства утверждений 1)–4). Утверждение 5) доказывается методом, предложенным в [18], с использованием некоторых результатов, полученных в [32] (см. § 10). Утверждение 3) в приведенной выше формулировке является новым для любого X . Отметим, что прежние методы не позволяют доказать утверждение 3) ни для одного из X , поскольку существенно используют условие локальной суммируемости функции (см. [17], [18]).

§ 2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Из разложения Ивасава $G = NAK$ (см. [35]) следует, что каждый элемент $x = go \in X$, где $g \in G$, имеет вид $x = n(g) \exp A(g)o$, где $n(g) \in N$ и $A(g) \in \mathfrak{a}$ определяются по x однозначно. При этом $\|A(g)\| \leq d(o, go)$ и равенство выполнено лишь в случае $g \in AK$ (см. [33; гл. 4, § 10]). В частности, если $a_t = \exp(tH)$, $t \in \mathbb{R}^1$, то

$$d(o, a_t o) = |t| \cdot \|H\|. \quad (3)$$

Отметим также, что любой $x \in X$ имеет вид

$$x = ka_t o \quad (4)$$

при некоторых $k \in K$, $t \geq 0$ (см. [35]).

Пусть $\mathfrak{e} = H/\|H\|$. Рассмотрим функцию $h: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданную следующим образом: если $x = go$, $g \in G$, то $h(x)\mathfrak{e} = A(g)$. Очевидно, в этом определении $h(x)$ не зависит от выбора $g \in G$ с условием $x = go$, и если $g = nak$, $n \in N$, $a \in A$, $k \in K$, то $h(x) = \|H\|\gamma(\log a)$. В частности, для любых $x \in X$, $n \in N$, $a \in A$

$$h(nx) = h(x), \quad (5)$$

$$h(ax) = h(x) + h(ao) \quad (6)$$

и, кроме того,

$$|h(x)| \leq d(o, x) \quad (7)$$

(см. [33; гл. 4, § 10, оценка (13)]).

Пусть $\widehat{K}$ – множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных конечномерных представлений группы K . Для каждого $\delta \in \widehat{K}$ обозначим через W_δ векторное пространство размерности d_δ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в котором действует некоторое представление класса δ (это представление также обозначим δ). Пусть M – централизатор A в K и

$$W_\delta^M = \{w \in W_\delta : \delta(m)w = w \text{ для всех } m \in M\},$$

тогда $\dim W_\delta^M = 1$ (см. [36]). Обозначим через $w_1, \dots, w_{d_\delta}$ ортонормированный базис в W_δ такой, что w_1 порождает W_δ^M , и положим $\widehat{K}_M = \{\delta \in \widehat{K} : W_\delta^M \neq \{0\}\}$. Тогда справедливо ортогональное разложение

$$L^2\left(\frac{K}{M}\right) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{K}_M} \mathcal{H}_\delta^M,$$

где пространство $\mathcal{H}_\delta^M$ имеет базис

$$Y_j^\delta(\tau M) = \langle \delta(\tau)w_1, w_j \rangle, \quad \tau \in K, \quad 1 \leq j \leq d_\delta \quad (8)$$

(см. [33; гл. 4, § 1]). Обозначим через $t_{i,j}^\delta(k)$, $k \in K$, $1 \leq i, j \leq d_\delta$, элементы матрицы квазирегулярного представления t^δ группы K в $\mathcal{H}_\delta^M$, т.е.

$$t^\delta(k)Y_j^\delta(\tau M) = Y_j^\delta(k^{-1}\tau M) = \sum_{i=1}^{d_\delta} t_{i,j}^\delta(k)Y_i^\delta(\tau M), \quad (9)$$

где $k, \tau \in K$. В силу неэквивалентности представлений t^δ для различных $\delta \in \widehat{K}_M$ (см. [33; гл. 4, § 1, теорема 1.6]) имеем

$$\int_K t_{i,j}^{\delta_1}(\tau) \overline{t_{\mu,\nu}^{\delta_2}(\tau)} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } (\delta_1, i, j) \neq (\delta_2, \mu, \nu), \\ \frac{1}{d_\delta}, & \text{если } \delta_1 = \delta_2 = \delta, (i, j) = (\mu, \nu), \end{cases} \quad (10)$$

где $d\tau$ – нормированная мера Хаара на K и черта обозначает комплексное сопряжение (см. [39; гл. 1, § 4, доказательство теоремы 1]). Для $f \in C(B_R)$ из (10) следует, что

$$\int_K f(\tau^{-1}x) \overline{t_{i,j}^\delta(\tau)} d\tau = Y_j^\delta(kM) \int_K f(\tau a o) \overline{Y_j^\delta(\tau M)} d\tau, \quad (11)$$

где $x = kao \in B_R$, $k \in K$, $a \in A$ (см. [25; доказательство леммы 1] и [33; гл. 4, § 1, формула (8)]).

Для $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $\delta \in \widehat{K}_M$, $1 \leq j \leq d_\delta$, определим распределение $f_{\delta,j} \in \mathcal{D}'(B_R)$, действующее на $u \in \mathcal{D}(B_R)$ по формуле

$$(f_{\delta,j}, u(x)) = \left(f, d_\delta \int_K u(\tau^{-1}x) t_{j,j}^\delta(\tau) d\tau \right). \quad (12)$$

Тогда имеет место равенство

$$f = \sum_{\delta \in \widehat{K}_M} \sum_{j=1}^{d_\delta} f_{\delta,j}, \quad (13)$$

в котором ряд сходится безусловно в $\mathcal{D}'(B_R)$ (см. [33; гл. 5, § 3, п. 1]). Для любого множества $\mathcal{P}(B_R)$ распределений из $\mathcal{D}'(B_R)$, $0 < R \leq \infty$, положим $\mathcal{P}_{\delta,j}(B_R) = \{f \in \mathcal{P}(B_R) : f = f_{\delta,j}\}$. Пусть также $\mathcal{P}_K(B_R)$ – множество K -инвариантных распределений из $\mathcal{P}(B_R)$ и $\mathcal{E}'(B_R)$ – множество распределений из $\mathcal{D}'(B_R)$ с компактными носителями. Для $f \in \mathcal{E}'(X)$ обозначим через $r(f)$ наименьший из радиусов замкнутых геодезических шаров в X , содержащих носитель f . Следуя [36], для $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $a \in A$, $\delta \in \widehat{K}_M$ положим

$$\varphi_{\lambda,\delta}(ao) = \int_K e^{(i\lambda+\rho)(A(\tau^{-1}a))} Y_1^\delta(\tau M) d\tau. \quad (14)$$

Из (14) и [36] следует, что существуют и определяются однозначно целые неотрицательные числа $s_1 = s_1(\delta)$, $s_2 = s_2(\delta)$ такие, что при $\alpha_1 = s_1 + \alpha$, $\beta_1 = s_2 + \beta$ и всех $t \in \mathbb{R}^1$

$$\varphi_{\lambda,\delta}(a_t o) = P_\delta(\lambda(H)) \operatorname{sh}^{s_1} t \operatorname{ch}^{s_2} t \varphi_{\lambda(H)}^{\alpha_1, \beta_1}(t), \quad (15)$$

где

$$P_\delta(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{s_1} \Gamma(\alpha_1+1)} \prod_{p=0}^{\frac{s_1+s_2-2}{2}} (iz + \rho(H) + 2p) \prod_{q=0}^{\frac{s_1-s_2-2}{2}} (iz + \rho(H) - 2\beta + 2q) \quad (16)$$

и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Кроме того, для любых $a \in A$, $k \in K$, $j = 1, \dots, d_\delta$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda,\delta}(ao) Y_j^\delta(kM) &= \int_K e^{(i\lambda+\rho)(h(\tau^{-1}kao)\mathfrak{e})} Y_j^\delta(\tau M) d\tau \\ &= \int_K e^{(i\lambda+\rho)(h(k^{-1}\tau ao)\mathfrak{e})} Y_j^\delta(\tau M) d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

первое из которых доказано в [36], а второе получается стандартными рассуждениями с использованием леммы Шура (см. [33; гл. 4, § 1, п. 2]), соотношений (9), (11) и первого равенства в (17) при $j = 1$. Обозначим $D^\delta = P_\delta(d/dz)$. Для $z \in \mathbb{C}$, $x \in X$ положим $\Phi_z^{\delta,j}(x) = \varphi_{\lambda,\delta}(ao) Y_j^\delta(kM)$, где $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ такое, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ и $x = kao$ (см. (4)). Тогда (см. [36])

$$\Delta \Phi_z^{\delta,j} = -(z^2 + \rho^2(\mathfrak{e})) \Phi_z^{\delta,j}, \quad (18)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на X . Для тривиального $\delta \in \widehat{K}_M$ из (8) имеем $Y_1^\delta = 1$ и $d_\delta = 1$. В этом случае $\Phi_z^{\delta,1}$ совпадает с элементарной сферической функцией $\varphi_\lambda(x)$, соответствующей элементу $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ такому, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ (см. [33; гл. 4, § 4, п. 2]). Для таких λ , z положим $\Phi_z = \varphi_\lambda$.

Преобразование Фурье распределения $f \in \mathcal{E}'(X)$ определяется равенством (см. [36])

$$\widetilde{f}(z, b) = (f, e^{(-i\lambda+\rho)A(x,b)}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad b \in \frac{K}{M}, \quad (19)$$

где $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ такое, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ и $A(x, \tau M) = h(\tau^{-1}x)\mathfrak{e}$. Отметим, что для $f \in \mathcal{E}'_K(X)$ функция $\widetilde{f}(z, b)$ не зависит от b и совпадает со сферическим преобразованием

$$\widetilde{f}(z) = (f, \varphi_\lambda(x)), \quad \lambda(\mathfrak{e}) = z \quad (20)$$

(см. (19) и [36; гл. 4, § 4, теорема 4.3]). Из (19) имеем равенство

$$\Delta^m \widetilde{f}(z, b) = (-1)^m (z^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))^m \widetilde{f}(z, b), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad (21)$$

из которого следует, что для $f \in \mathcal{E}'(X) \cap C^{2m}(X)$

$$\widetilde{f}(z, b) = O(|z|^{-2m}), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{R}^1, \quad (22)$$

причем постоянная в знаке O не зависит от z, b . Если для $f \in \mathcal{E}'(X) \cap C(X)$ выполнено (22) при $m \geq \alpha + \frac{3}{2}$, то при всех $x \in X$ имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{a}^*} \int_{K/M} e^{(i\lambda + \rho)(A(x, b))} \widetilde{f}(\lambda(\mathfrak{e}), b) |c(\lambda)|^{-2} db d\lambda, \quad (23)$$

где $c(\lambda)$ – функция Хариш-Чандры (см. [36], а также [32; формулы (14), (25)] и [36; гл. 3, § 5, доказательство следствия 5.9]). Равенства (11), (12) и (17) показывают, что для $f \in \mathcal{E}'_{\delta, j}(X)$

$$\widetilde{f}(z, b) = (f, d_\delta \varphi_{-\lambda, \delta}(ao) \overline{Y_j^\delta(kM)}) Y_j^\delta(b), \quad (24)$$

где, как и выше, $\lambda(\mathfrak{e}) = z$.

§ 3. Свойства функций Якоби

В этом параграфе содержатся некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций $\varphi_\mu^{\xi, \eta}$ (см. (1)), которые носят название функций Якоби. Эти функции хорошо изучены в работах [40], [41] (см. также [32; §§ 3, 4]).

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\mu \in \mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$, $\xi \geq \eta$ и $\xi > -\frac{1}{2}$. Пусть также

$$A_{\xi, \eta}(t) = (\text{sh } t)^{1+2\xi} (\text{ch } t)^{1+2\eta}. \quad (25)$$

Полагая $\sigma = \xi + \eta + 1$, из (1), (25) и [42; гл. 2, § 2.1, формулы (1), (7), (22)] имеем равенства

$$4(1 + \xi) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\mu^{\xi, \eta}(t) = -(\sigma^2 + \mu^2) \text{sh}(2t) \varphi_\mu^{1+\xi, 1+\eta}(t), \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_{\xi, \eta}(t) \text{sh}(2t) \varphi_\mu^{1+\xi, 1+\eta}(t)) = 4(1 + \xi) A_{\xi, \eta}(t) \varphi_\mu^{\xi, \eta}(t). \quad (27)$$

Из (26), (27) получаем

$$\Delta_{\xi, \eta} \varphi_\mu^{\xi, \eta} = -(\sigma^2 + \mu^2) \varphi_\mu^{\xi, \eta}, \quad (28)$$

где оператор $\Delta_{\xi, \eta}$ задается равенством

$$\Delta_{\xi, \eta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{A'_{\xi, \eta}(t)}{A_{\xi, \eta}(t)} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (29)$$

Для любой $u \in C^{2m}[0, t]$ и всех $\mu \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t A_{\xi, \eta}(\zeta) u(\zeta) \varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(\zeta) d\zeta &= \frac{(-1)^m}{(\sigma^2 + \mu^2)^m} \int_0^t A_{\xi, \eta}(\zeta) (\Delta_{\xi, \eta}^m u)(\zeta) \varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(\zeta) d\zeta \\ &+ \frac{\varphi_{\mu}^{1+\xi, 1+\eta}(t) A_{\xi, \eta}(t)}{4(1+\xi)} \operatorname{sh}(2t) \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\Delta_{\xi, \eta}^n u)(t) (-1)^n}{(\sigma^2 + \mu^2)^n} \\ &+ \varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t) A_{\xi, \eta}(t) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(\sigma^2 + \mu^2)^{\nu+1}} \left(\frac{d}{dt} \Delta_{\xi, \eta}^{\nu} u \right)(t) \end{aligned} \quad (30)$$

(равенство (30) получается интегрированием по частям с использованием (26)–(29)).

Далее, при $t > 0$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t) &= \frac{\Gamma(\xi + 1) 2^{3/2-\xi}}{\Gamma(\xi + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi}} (\operatorname{sh} t)^{-2\xi} (\operatorname{ch} t)^{-\xi-\eta} \\ &\times \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\zeta)^{\xi-1/2} F\left(\xi + \eta, \xi - \eta, \xi + \frac{1}{2}, \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \zeta}{2 \operatorname{ch} t}\right) \cos \mu \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (31)$$

(см. [41; равенство (2.21)]). Из (31) следует, в частности, что при фиксированном $t > 0$ функция $\varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t)$ является четной целой функцией экспоненциального типа (равного t) по переменной μ . Отсюда и из теоремы Адамара заключаем (см. [43; гл. 1, теорема 13]), что функция $\varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t)$ имеет бесконечно много корней. Кроме того, из (31) и разложения F в гипергеометрический ряд (см. [42; гл. 2, § 2.1, формула (1)]) вытекает, что $\varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t) > 0$ на мнимой оси. Полагая в (30) $u = \varphi_{\mu_1}^{\xi, \eta}$, $\mu = \mu_2$, где μ_1, μ_2 – корни $\varphi_{\mu}^{\xi+1, \eta+1}(t)$, имеем отношения ортогональности

$$I(\mu_1, \mu_2, t) = \int_0^t A_{\xi, \eta}(\zeta) \varphi_{\mu_1}^{\xi, \eta}(\zeta) \varphi_{\mu_2}^{\xi, \eta}(\zeta) d\zeta = 0, \quad \mu_1 \neq \pm \mu_2. \quad (32)$$

Из (32) следует, в частности, вещественность и простота корней $\varphi_{\mu}^{\xi+1, \eta+1}(t)$ при любом $t > 0$ (см., например, [32; лемма 6]).

Обозначим $N^{\xi, \eta}(t) = \{\mu > 0 : \varphi_{\mu}^{1+\xi, 1+\eta}(t) = 0\}$. Из известной связи между порядком целой функции и показателем сходимости ее корней (см. [43; гл. 1, теорема 6]) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mu \in N^{\xi, \eta}(t)} \mu^{-1-\varepsilon} < \infty. \quad (33)$$

Кроме того, известные рассуждения показывают (см. [32; доказательство леммы 9]), что имеет место неравенство

$$I(\mu, \mu, t) > C \mu^{-2\xi-2}, \quad \mu \in N^{\xi, \eta}(t), \quad (34)$$

в котором постоянная $C > 0$ не зависит от μ . Нам потребуется также

ЛЕММА 1. Пусть $u \in C^m[0, l]$, где $m > 2\xi + 3$ и $\frac{d}{dt} \Delta_{\xi, \eta}^{\nu} u|_{t=l} = 0$ при всех $\nu = 0, \dots, [(m-1)/2]$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть). Тогда имеет место равенство

$$u(t) = c_0 + \sum_{\mu \in N^{\xi, \eta}(l)} c_{\mu} \varphi_{\mu}^{\xi, \eta}(t), \quad t \in [0, l], \quad (35)$$

где $c_0 \in \mathbb{C}$,

$$c_\mu = \frac{1}{I(\mu, \mu, l)} \int_0^l A_{\xi, \eta}(\zeta) u(\zeta) \varphi_\mu^{\xi, \eta}(\zeta) d\zeta = O(\mu^{-m+2\xi+2}) \quad (36)$$

при $\mu \rightarrow \infty$, и ряд (35) сходится абсолютно и равномерно на $[0, l]$.

Доказательство равенств (35), (36) проводится стандартными рассуждениями (см., например, [44; гл. 1, 2]) с использованием соотношений (28), (30)–(34).

§ 4. Свойства решений некоторых интегральных уравнений

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$, $k \in K$ фиксированы, $Y_j^\delta(kM) \neq 0$, $s = s_1(\delta)$, $u \in C^{s+1}[-l, l]$ и при всех $t \in [0, l]$

$$\int_K u \left(\frac{h(\tau^{-1}ka_t o)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}ka_t o)\epsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau = 0. \quad (37)$$

Тогда функция $D^\delta u$ является нечетной на $[-l, l]$.

Для доказательства потребуется

ЛЕММА 2. Пусть $R > 0$, $l = R/\|H\|$, $x \in B_R$ фиксировано, $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$ и $s = s_1(\delta)$. Тогда для любой $u \in C^s[-l, l]$ имеет место равенство

$$\int_K u \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau = \int_{-d_1}^{d_1} (D^\delta u)(t) \varkappa(t) dt, \quad (38)$$

где $d_1 = d(0, x)/\|H\|$ и $\varkappa$ – четная функция класса $L[-d_1, d_1]$, не зависящие от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $u(t) = e^{zt}$, $z \in \mathbb{C}$, равенство (38) следует из (17), (15) и (31). В силу произвольности z отсюда имеем (38) для любой $u \in C^s[-l, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть u_1 – произвольное решение уравнения $(D^\delta u_1)(t) = (D^\delta u)(t) + (D^\delta u)(-t)$. Тогда $u_1 \in C^{s+1}[-l, l]$ и вместе с u удовлетворяет (37) (см. лемму 2). Докажем, что $D^\delta u_1 = 0$. Пусть $\varepsilon \in (0, l)$ и $u_2 \in C^\infty(-l, l)$ – четная функция с носителем на $[-l + \varepsilon, l - \varepsilon]$. Преобразование Фурье $\widehat{u}_2(z) = \int_{R_1} u_2(t) e^{-itz} dt$ является целой функцией экспоненциального типа не выше $l - \varepsilon$ и для любого $m > 0$ $\widehat{u}_2(z) = O(|z|^{-m})$ при $z \rightarrow \infty$ по вещественной оси. Отсюда следует (см. [40; доказательство теоремы 4]), что существует $u_3 \in C[0, l - \varepsilon]$ такая, что

$$\widehat{u}_2(z) = \int_0^{l-\varepsilon} u_3(t) \varphi_z^{\alpha_1, \beta_1}(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (39)$$

Пусть $u_4 \in C^{s+1}(\mathbb{R}^1)$ – функция с носителем на $(-l, l)$, совпадающая с u_1 на $(-l + \varepsilon, l - \varepsilon)$. Используя (39), (17) и формулу обращения для преобразования

Фурье на $\mathbb{R}^1$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^1} \widehat{D^\delta u_4}(t) \widehat{u_2}(t) dt \\ &= \int_0^{l-\varepsilon} u_5(t) \int_K u_4 \left(\frac{h(\tau^{-1} k a_t o)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1} k a_t o) \mathfrak{e})} Y_j^\delta(\tau M) d\tau dt \end{aligned}$$

для некоторой функции $u_5 \in C[0, l - \varepsilon]$. Из условия теоремы и (3), (7) вытекает, что интеграл в правой части последнего равенства равен нулю. Тогда из равенства Парсеваля и четности $D^\delta u_1$ и u_2 имеем $\int_0^l (D^\delta u_1)(t) u_2(t) dt = 0$. В силу произвольности u_2 отсюда получаем $D^\delta u_1 = 0$, т.е. функция $D^\delta u$ является нечетной.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $Y_j^\delta(kM) = 0$ утверждение теоремы 2 не имеет места. В этом случае равенство (37) выполнено для любой $u \in C[-l, l]$ (см. (17) и доказательство леммы 2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$, $s = s_1(\delta)$ и $F \in C_{\delta, j}^{2m}(B_R)$, где $m \geq s/2 + \alpha + 2$. Тогда существует функция $u \in C^{m_1}(-l, l)$, $l = R/\|H\|$, $m_1 = 2m - 2\alpha - 3$, такая, что при всех $x \in B_R$

$$\int_K u \left(\frac{h(\tau^{-1} x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1} x) \mathfrak{e})} Y_j^\delta(\tau M) d\tau = F(x) \quad (40)$$

и функция $D^\delta u$ является четной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_n \in \mathcal{D}_K(B_R)$ и $\eta_n = 1$ в $B_{Rn/(n+1)}$, $n = 1, 2, \dots$. Полагая $F_n = F\eta_n$, из (24), (15), (16) получаем, что $\widetilde{F}_n(z, b) = \psi_n(z) Y_j^\delta(b)$, где функция $\psi_n(z) P_\delta(z\|H\|)$ является четной и $\psi_n(z) = O(|z|^{-2m})$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{R}^1$ (см. (22)). Пусть

$$u_n(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{a}^*} \psi_n(\lambda(\mathfrak{e})) e^{it\lambda(H)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (41)$$

тогда $u_n \in C^{m_1}(\mathbb{R}^1)$ (см. [32; формула (25)]) и функция $D^\delta u_n$ является четной (см. (16) и [32; формула (26)]). Кроме того, из (41), (17) и (23) получаем, что u_n удовлетворяет (40) при всех $x \in B_{Rn/(n+1)}$. Из (38) следует, что этими же свойствами обладает любая функция вида $u_n + w$, где w – решение уравнения $D^\delta w = 0$ на $(-l, l)$. Поскольку $D^\delta(u_{n+1} - u_n) = 0$ на $(-ln/(n+1), ln/(n+1))$ (см. теорему 2), то существует последовательность функций $w_n \in C^\infty(-l, l)$ таких, что $D^\delta w_n = 0$ и $u_n + w_n = u_{n+1} + w_{n+1}$ на $(-ln/(n+1), ln/(n+1))$. Тогда функция $u \in C^{m_1}(-l, l)$, совпадающая с $u_n + w_n$ на $(-ln/(n+1), ln/(n+1))$ при всех n , удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.

§ 5. Определение и свойства оператора $\mathcal{A}$

Пусть $f \in \mathcal{O}'_{\delta, j}(X)$. Из (24) и (16) следует, что

$$\widetilde{F}(z, b) = \psi(z) Y_j^\delta(b), \quad (42)$$

где функция $\psi(z) P_\delta(z\|H\|)$ является четной целой функцией экспоненциального типа. Аналог теоремы Пэли–Винера для сферического преобразования

(см. (20) и [36]) показывает, что существует распределение $\mathcal{A}F \in \mathcal{E}'_K(X)$ такое, что

$$\widetilde{\mathcal{A}F}(z) = \psi(z)P_\delta(z\|H\|), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (43)$$

и $r(\mathcal{A}F) = r(F)$. Таким образом,

$$\widetilde{AF}(z)Y_j^\delta(b) = \widetilde{F}(z, b)P_\delta(z\|H\|). \quad (44)$$

Далее мы будем изучать свойства оператора $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 3. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) $\mathcal{A}(\Delta F) = \Delta(\mathcal{A}F)$ для любого $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$;
- 2) $\mathcal{A}(F \times \eta) = \mathcal{A}F \times \eta$ для любых $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$, $\eta \in \mathcal{E}'_K(X)$;
- 3) $F \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}F \in \mathcal{D}_K(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) является простым следствием равенств (43) и (21). Утверждение 2) вытекает из (44) и равенства $\widetilde{F \times \eta} = \widetilde{F} \times \widetilde{\eta}$. Утверждение 3) следует из (44) и теоремы Пэли–Винера (см. [36; теорема 5.1]).

ЛЕММА 4. *Пусть $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$ и $F = 0$ в B_R . Тогда $\mathcal{A}F = 0$ в B_R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение леммы для $F \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$. В этом случае в равенстве (42) $\psi(z) = O(|z|^{-m})$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{R}^1$ и любом фиксированном $m > 0$ (см. [36]). Тогда функция

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{a}^*} \psi(\lambda(\mathfrak{e})) e^{it\lambda(H)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (45)$$

принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и удовлетворяет (40) при всех $x \in X$ (см. доказательство теоремы 3). В частности, если x имеет вид (4), где $k \in K$, $t \in [0, R]$, то получаем равенство (37). Поскольку функция $D^\delta u$ является четной (см. (45), (16) и [32; формула (26)]), по теореме 2 $D^\delta u = 0$ на $[-R/\|H\|, R/\|H\|]$. Это означает (см. (45)), что при всех $x \in B_R$, $\tau \in K$, $b \in K/M$

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \widetilde{F}(\lambda(\mathfrak{e}), b) P_\delta(\lambda(\mathfrak{e})\|H\|) e^{(i\lambda + \rho)(h(\tau x)\mathfrak{e})} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda = 0. \quad (46)$$

Интегрируя (46) по τ на группе K и используя (17), получаем

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \widetilde{AF}(\lambda(\mathfrak{e})) \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda = 0, \quad x \in B_R, \quad (47)$$

откуда $\mathcal{A}F = 0$ в B_R (см. [33; гл. 4, теорема 7.5]).

Рассмотрим теперь общий случай, когда $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$. Можно считать, что $r(F) > 0$ (в противном случае утверждение леммы 4 очевидно). Пусть $\varepsilon \in (0, R)$, $\eta_\varepsilon \in \mathcal{D}_K(X)$ и $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon$. Тогда $f = F \times \eta_\varepsilon = 0$ в $B_{R-\varepsilon}$ и $f \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$. По доказанному выше $\mathcal{A}f = 0$ в $B_{R-\varepsilon}$, откуда $\mathcal{A}F \times \eta_\varepsilon = 0$ в $B_{R-\varepsilon}$ (см. утверждение 2) леммы 3). В силу произвольности $\varepsilon \in (0, R)$ отсюда следует утверждение леммы 4 в общем случае.

ЛЕММА 5. Пусть $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$ и $\mathcal{A}F = 0$ в B_R . Тогда $F = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 4, достаточно рассмотреть случай, когда $F \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$. Поскольку $\mathcal{A}F = 0$ в B_R , из [33; гл. 4, теорема 7.5] следует (47). Из (47) получаем

$$\int_K (D^\delta u) \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} d\tau = 0, \quad x \in B_R,$$

где $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ определяется равенствами (45) и (42) (см. (46) и (17)). В силу четности функции $D^\delta u$ (см. (45), (16) и [32; формула (26)]) по теореме 2 $D^\delta u = 0$ на $[-R/\|H\|, R/\|H\|]$. Учитывая, что u удовлетворяет (40), отсюда и из (38) получаем утверждение леммы 5.

Определим теперь оператор $\mathcal{A}$ на классе $\mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$, $0 < R \leq +\infty$. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность $\{R_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$. Пусть также $\eta_k \in \mathcal{D}_K(B_R)$ и $\eta_k = 1$ в B_{R_k} при всех k . Тогда для любого $F \in \mathcal{D}_{\delta,j}(B_R)$ имеем $F\eta_k \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$, и определено распределение $\mathcal{A}(F\eta_k) \in \mathcal{E}'_K(X)$. По лемме 4 сужение $\mathcal{A}(F\eta_k)$ на B_{R_k} не зависит от выбора $\eta_k \in \mathcal{D}_K(B_R)$ такого, что $\eta_k = 1$ в B_{R_k} . Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\mathcal{A}(F\eta_k)$ сходится в $\mathcal{D}'(B_R)$ к некоторому распределению, не зависящему ни от последовательности $\{R_k\}$, ни от выбора функций η_k . Это распределение обозначим $\mathcal{A}F$. Нетрудно видеть, что для $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(B_R)$ данное определение $\mathcal{A}F$ совпадает с введенным ранее (см. (43), (44)). Кроме того, для любых $F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$, $r \in (0, R)$ имеем $\mathcal{A}(F|_{B_r}) = (\mathcal{A}F)|_{B_r}$ (черта означает сужение), и очевидным образом сохраняются свойства $\mathcal{A}$, указанные в леммах 3–5. Для удобства ссылок мы перечислим их в виде следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$, $0 < R \leq +\infty$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) $\mathcal{A}(\Delta F) = \Delta(\mathcal{A}F)$;
- 2) $\mathcal{A}(F \times \eta) = \mathcal{A}F \times \eta$ для любого $\eta \in \mathcal{E}'_K(B_R)$;
- 3) если $r \in (0, R)$, то $F = 0$ в B_r тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}F = 0$ в B_r ;
- 4) $F \in C^\infty_{\delta,j}(B_R)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}F \in C^\infty_K(B_R)$.

Далее нам потребуется также

ЛЕММА 7. Для любых $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$(\mathcal{A}\Phi_z^{\delta,j})(x) = P_\delta(z\|H\|)\Phi_z(x), \quad x \in B_R. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in (0, R)$, $\eta \in \mathcal{D}_K(B_R)$ и $\eta = 1$ в B_r . Положим $F = \Phi_z^{\delta,j}\eta$, тогда $F \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$, $F = \Phi_z^{\delta,j}$ в B_r и из (17) получаем

$$\int_K e^{(i\lambda+\rho)(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} \eta(x) Y_j^\delta(\tau M) d\tau = \int_K u \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau, \quad (49)$$

где $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ такое, что $\lambda(\epsilon) = z$ и $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ определяется равенствами (45) и (42). Из (45), (43) и формулы обращения для сферического преобразования

(см. [33; гл. 4, теорема 7.5]) находим

$$(\mathcal{A}F)(x) = \int_K (D^\delta u) \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} d\tau. \quad (50)$$

Из (49) и теоремы 3 следует, что функция $D^\delta(e^{i\lambda(H)t}) - (D^\delta u)(t)$ является нечетной на $[-r/\|H\|, r/\|H\|]$. Используя (50), отсюда и из леммы 2 получаем, что при $x \in B_r$

$$(\mathcal{A}F)(x) = \int_K P_\delta(\lambda(H)) e^{(i\lambda+\rho)(h(\tau^{-1}x)\epsilon)} d\tau.$$

Это означает (см. (17)), что равенство (48) выполнено в B_r , и в силу произвольности $r \in (0, R)$ лемма 7 доказана.

§ 6. Свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω

Как уже отмечалось в § 3 (см. также [32; § 4]), при любом $r > 0$ функция $\varphi_\mu^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$ имеет бесконечно много корней, причем все они являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\mu = 0$. Множество $N(r)$ может быть представлено в виде $N(r) = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$, где $\mu_j = \mu_j(r)$ – последовательность всех положительных корней функции $\varphi_\mu^{1+\alpha, 1+\beta}(r/\|H\|)$, перенумерованных в порядке возрастания. Для изучения множества $N(r)$ потребуется

ЛЕММА 8. Пусть $0 < a < b$ и $\varepsilon \in (0, \pi)$ фиксированы. Тогда при любых $r \in [a, b]$, $\xi > -\frac{1}{2}$, $\eta \leq \xi$ и $z \rightarrow \infty$ таких, что $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \varphi_z^{\xi, \eta}(r) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\xi)}{(\operatorname{sh} r)^{\xi+1/2} (\operatorname{ch} r)^{\eta+1/2}} \left(\frac{\cos(zr - \xi\pi/2 - \pi/4)}{(\sqrt{z})^{2\xi+1}} \right. \\ & + \left(\left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \operatorname{cth} 2r + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \operatorname{th} r \right) \frac{\sin(zr - \xi\pi/2 - \pi/4)}{(\sqrt{z})^{2\xi+3}} \Bigg) \\ & + O \left(\frac{e^{r|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{\xi+7/2}} + \frac{|\cos(zr - \xi\pi/2 - \pi/4)|}{|z|^{\xi+5/2}} \right), \end{aligned} \quad (51)$$

в котором выбирается ветвь функции $\sqrt{z}$, принимающая положительные значения при $z > 0$ и постоянная в знаке O зависит только от $\xi, \eta, a, b, \varepsilon$.

Доказательство следует из (31) и асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [45; гл. 2, доказательство теоремы 10.2]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < a < b$, $r \in [a, b]$. Тогда при всех $j = 1, 2, \dots$

$$r\mu_j = \pi \left(j + \frac{2\xi+3}{4} + q(r) \right) + \left(\left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \operatorname{cth} 2r + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \operatorname{th} r \right) \mu_j^{-1} + O(\mu_j^{-3}), \quad (52)$$

где $q(r) \in \mathbb{Z}$ и не зависит от j , а постоянная в знаке O не зависит от j и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $l > 0$ и $r \in [a, b]$ количество элементов $N(r)$ на $[0, l]$ не превосходит $c_1(1+l)$, где $c_1 > 0$ не зависит от r (см. [43; формула (1.27)] и (51)). Учитывая, что $\alpha \geq \beta$, при $t \in [0, r]$ имеем оценку

$$F \left(\alpha + \beta + 2, \alpha - \beta, \alpha + \frac{3}{2}, \frac{\operatorname{ch} r - \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{ch} r} \right) > 0$$

(см. [42; гл. 2, § 2.1, формула (1)]). Отсюда и из (31) следует, что $\mu_j > c_2 > 0$, где c_2 не зависит от j и r . Теперь для доказательства (52) остается повторить рассуждения из [18; доказательство леммы 7] с использованием (31) и (26).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $r_1, r_2 > 0$ и $r_1 \neq r_2$. Предположим, что существует возрастающая последовательность $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что $\xi_m \in N(r_1)$ и $|\varphi_{\xi_m}^{1+\alpha, 1+\beta}(r_2)| < \xi_m^{-\alpha-9/2}$ при всех m . Тогда выполнено неравенство

$$\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m} > c > 1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (53)$$

в котором постоянная c не зависит от m .

Доказательство оценки (53) получается из (52) известными рассуждениями (см. [18; доказательство леммы 21]).

ЛЕММА 9. Имеют место следующие утверждения:

- 1) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \neq \emptyset\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, +\infty)$;
- 2) $(r_1, r_2) \in \Omega$ в том и только том случае, когда для любого $p \in \mathbb{N}$ существует $\xi_p \in N(r_1)$ такое, что

$$|\tilde{\chi}_{r_2}(\xi_p)| < (2 + \xi_p)^{-p};$$

- 3) при любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(a, b) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума;
- 4) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \in \Omega\}$ имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$;
- 5) если $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то число r_1/r_2 иррационально.

Для доказательства леммы 9 достаточно повторить рассуждения из [18; доказательства лемм 22–25] с использованием равенств (51), (52).

§ 7. Свойства функций класса $V_r(B_R)$

ЛЕММА 10. Пусть $T \in \mathcal{E}'_k(X)$, $z \in \mathbb{C}$ и f – решение уравнения

$$\Delta f = -(z^2 + \rho^2(\epsilon))f$$

на X . Тогда

$$(f \times T)(x) = \tilde{T}(z)f(x), \quad x \in X. \quad (54)$$

В частности, функции $\Phi_z^{\delta, j}$ принадлежат $V_r^\infty(X)$ при всех $z \in N(r)$, $\delta \in \hat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (54) является следствием теоремы о среднем для собственных функций оператора Δ (см. [33; гл. 4, § 2, п. 2]). Второе утверждение леммы 10 следует из (54) и (18).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и для любых $\delta \in \hat{K}_M$, $j = 1, \dots, d_\delta$

$$f_{\delta, j}(x) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{\delta, j, \lambda} \Phi_\lambda^{\delta, j}(x), \quad (55)$$

где $c_{\delta, j, \lambda} \in \mathbb{C}$ и ряд (55) сходится в $\mathcal{D}'(B_R)$. Тогда $f \in V_r^{-\infty}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и леммы 10 получаем $f_{\delta,j} \in V_r^{-\infty}(B_R)$ при всех δ, j . Отсюда и из (13) имеем $f \in V_r^{-\infty}(B_R)$.

ЛЕММА 11. Пусть $f \in V_r^{-\infty}(B_R)$. Тогда имеют место утверждения:

- 1) для любых $\delta \in \widehat{K}_M$, $j = 1, \dots, d(\delta)$ $f_{\delta,j} \in V_r^{-\infty}(B_R)$; аналогичное утверждение верно и для классов $V_r(B_R)$, $V_r^m(B_R)$ при всех $m \in \mathbb{N}$;
- 2) если $f \in C^2(B_R)$ и $f(x) = u(d(0, x))$ при всех $x \in B_R$, то $u'(r) = 0$;
- 3) если $f \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$, то $\mathcal{A}f \in V_r^{-\infty}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех δ, j из (12) имеем $f_{\delta,j} \times \chi_r = (f \times \chi_r)_{\delta,j} = 0$. Отсюда получаем утверждение 1) для класса $V_r^{-\infty}(B_R)$. Аналогичное утверждение для $V_r(B_R)$, $V_r^m(B_R)$ следует из определения этих классов и равенства (11).

Утверждение 2) доказано в [32; доказательство леммы 11]. Утверждение 3) следует из леммы 6.

ЛЕММА 12. Пусть $F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R) \cap V_r^{2m}(B_R)$, где $m \geq s/2 + \alpha + 2$, $s = s_1(\delta)$. Пусть также $u \in C^{m_1}(-l, l)$, $l = R/\|H\|$, $m_1 = 2m - 2\alpha - 3$ – решение уравнения (40) и функция $D^\delta u$ является четной. Тогда функция

$$u_1(x) = (D^\delta u) \left(\frac{h(x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(x)}$$

принадлежит $V_r^{m_1-s}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$u_2(x) = u \left(\frac{h(x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(x)}, \quad u_3(x) = \int_{B_r(x)} u_2(y) dy,$$

тогда $u_3(nx) = u_3(x)$ для всех $x \in B_{R-r}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. (5)). Это означает, что $u_3(x) = u_4(h(x)/\|H\|) e^{\rho(\epsilon)h(x)}$ для некоторой функции $u_4 \in C^{m_1}(-l, l)$. Для любого $x \in B_{R-r}$ из (40) имеем

$$\int_K u_4 \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(\tau^{-1}x)} Y_j^s(\tau M) d\tau = \int_{B_r(x)} F(y) dy = 0. \quad (56)$$

Пусть $a \in A$ такое, что $aB_r \subset B_R$. Используя (6) и [32; лемма 10], из определения u_3 получаем

$$u_3 \left(\frac{h(ao)}{\|H\|} \right) = \int_{-r}^r u \left(\frac{t + h(ao)}{\|H\|} \right) \varkappa_r(t) dt e^{\rho(\epsilon)h(ao)}, \quad (57)$$

где $\varkappa_r \in C[-r, r]$ – четная функция, не зависящая от a . В силу четности $D^\delta u$ из (57) следует четность функции $D^\delta u_4$. Применяя теорему 2, из (56) имеем $D^\delta u_4 = 0$ на $(-(R-r)/\|H\|, (R-r)/\|H\|)$. Тогда

$$\int_{B_r} u_1(ax) dx = 0$$

при всех $a \in A$ таких, что $ab_r \subset B_R$ (см. (57)). Поскольку функция u_1 является N -инвариантной (см. (5)), отсюда и из разложения Ивасава (см. §2) следует утверждение леммы 12.

§ 8. Теоремы единственности

Различные теоремы единственности для функций с нулевыми шаровыми и сферическими средними в $\mathbb{R}^n$ изучались Ф. Йоном, Д. Смитом, А. Ситарамом и другими авторами (см. [13], [20] и библиографию к этим работам). Более сильные результаты окончательного характера, а также их аналоги на различных симметрических пространствах получены в [17], [18], [21], [32], [37]. Приложения теорем единственности к экстремальным задачам о множествах Помпейю, проблеме носителя и некоторым вопросам теории тригонометрических рядов см. в [20], [23], [24], [26], [29], [30]. В этом параграфе получены обобщения некоторых результатов из [17], [18], [37].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in V_r^{2m}(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f_{\delta,j} = 0$ в B_R для всех $\delta \in \hat{K}_M$ таких, что $s_1(\delta) \leq 2(m - \alpha - 2)$, и всех $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы и леммы 11 следует, что $f_{\delta,j} \in V_r^{2m}(B_R)$ и $f_{\delta,j} = 0$ в B_r при всех δ, j . Пусть $s_1(\delta) \leq 2(m - \alpha - 2)$, $F = f_{\delta,j}$ и $u \in C^{m_1}(-R/\|H\|, R/\|H\|)$, $m_1 = 2m - 2\alpha - 3$ – функция из теоремы 3. Тогда $D^\delta u$ является четной, и по теореме 2 $D^\delta u = 0$ на $[-r/\|H\|, r/\|H\|]$. Кроме того, по лемме 12 функция $D^\delta u(h(x)/\|H\|)e^{\rho(h(x)\epsilon)}$ принадлежит $V_r^{m_1-s_1(\delta)}$. Отсюда и из [32; лемма 10] вытекает, что для всех $a \in A$ таких, что $aB_r \subset B_R$,

$$\int_{-r}^r D^\delta u \left(\frac{t + h(ao)}{\|H\|} \right) H_r(t) dt = 0, \quad (58)$$

где $\varkappa_r \in C[-r, r]$ – неотрицательная четная функция, у которой $\pm r \in \text{supp } \varkappa_r$ (см. [32; формула (55)]). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4 в работе [32], из (58) получаем $D^\delta u = 0$ на $(R/\|H\|, R/\|H\|)$. Тогда из (38) и (40) следует, что $F = 0$ в B_r .

Одним из следствий теоремы 4 является

ТЕОРЕМА 5. Имеют место следующие утверждения:

- 1) если $f \in V_r^{-\infty}(B_R)$ и $f = 0$ в $B_{r+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r)$, то $f = 0$ в B_R ;
- 2) если $f \in V_r^\infty(B_R)$ и $f = 0$ в B_r , то $f = 0$ в B_R ;
- 3) для любого $q \in \mathbb{N}$ существует ненулевая $f \in V_r^q(X)$ такая, что $f = 0$ в B_r ;
- 4) для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует ненулевая $f \in V_r^\infty(X)$ такая, что $f = 0$ в $B_{r-\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) легко получить из ее утверждения 2) с помощью стандартного метода сглаживания (см. [32; начало § 7]). Утверждение 2) есть прямое следствие теоремы 4 и равенства (13). Утверждение 4) ранее получено в [32]. Докажем утверждение 3). Пусть $\lambda \in \mathbb{N}$ такое, что $2\lambda + 1 \geq m + 2\alpha + 6$ и $l = \bar{0}, \bar{1}$. Положим

$$U_l(t) = \sum_{p=1}^{2\lambda+1} c_p(\rho(H) + 2p)^l \cos(it(\rho(H) + 2p)), \quad t \in \left[-\frac{r}{\|H\|}, \frac{r}{\|H\|} \right], \quad (59)$$

где числа $c_p \in \mathbb{C}$ не все равны нулю и выбраны так, что функции

$$F_l(x) = \int_K U_l \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\mathfrak{e})h(\tau^{-1}x)} d\tau = \sum_{p=1}^{2\lambda+1} c_p (\rho(H) + 2p)^l \Phi_{i(\rho(H)+2p)}(x) \quad (60)$$

удовлетворяют следующим условиям:

- а) $\int_{B_r} F_l(x) dx = 0$;
- б) для функций $\psi_l: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\psi_l(d(0, x)) = F_l(x)$, выполнены равенства $\frac{d}{dt} \Delta_{\alpha, \beta}^\nu \psi_l|_{t=r} = 0$ при всех $\nu = 0, \dots, \lambda - 2$.

Тогда из леммы 1 вытекает, что в B_r имеют место разложения

$$F_l(x) = \sum_{\mu \in N(r)} c_{\mu, l} \Phi_\mu(x), \quad (61)$$

где $c_{\mu, l} \in \mathbb{C}$ и $|c_{\mu, 1}| + |c_{\mu, 2}| = O(\mu^{-3-q})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд

$$\sum_{\mu \in N(r)} c_{\mu, l} \cos \mu t \quad (62)$$

сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^1$ к функции класса $C^{q+1}(\mathbb{R}^1)$, совпадающей с U_l на $[-r/\|H\|, r/\|H\|]$ (см. (60), (61) и теорему 2 для случая тривиального δ). Для суммы ряда (62) на $\mathbb{R}^1$ мы сохраним обозначение U_l и положим

$$U_2(t) = U_0(t) - \int_0^t U_1(\zeta) d\zeta.$$

Пусть $\delta \in \widehat{K}_M$ такое, что $s_1(\delta) + s_2(\delta) \geq 4(q+1)$, $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$ и

$$f(x) = \int_K U_2 \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\mathfrak{e})h(\tau^{-1}x)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau, \quad x \in X. \quad (63)$$

Тогда $f \in C^{q+1}(X)$ и из (59), (15)–(17) следует, что $f = 0$ в B_r . Кроме того, равенства (63) и (17) показывают, что

$$f(x) = \sum_{\mu \in N(r)} b_\mu \Phi_\mu^{\delta, j}(x), \quad x \in X, \quad (64)$$

где

$$b_\mu = \frac{1}{2} \left(c_{\mu, 1} \left(1 + \frac{P_\delta(-i\mu)}{P_\delta(i\mu)} \right) + \frac{1}{\mu} c_{\mu, 2} \left(1 - \frac{P_\delta(-i\mu)}{P_\delta(i\mu)} \right) \right). \quad (65)$$

Из (65) и (16) имеем $b_\mu = O(\mu^{-3-q})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Далее, сравнивая (59) и (62) на $[-r/\|H\|, r/\|H\|]$, получаем, что среди чисел $c_{\mu, l}$, $l = 0, 1$, есть бесконечно много отличных от нуля. Поэтому из (65) и (16) вытекает, что при некотором $\delta \in \widehat{K}_M$ (таком, что $s_1(\delta) + s_2(\delta) \geq 4(q+1)$) и любом $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$ не все числа b_μ равны нулю. Докажем, что при этом δ и всех $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$

$f \neq 0$ в X . Предположим противное, тогда для любой $\eta \in \mathcal{D}_K(X)$ из (54), (64) получаем

$$0 = (f \times \eta)(x) = \sum_{\mu \in N(r)} b_\mu \tilde{\eta}(\mu) \Phi_\mu^{\delta,j}(x) \quad (66)$$

при всех $x \in X$. Быстрое убывание $\tilde{\eta}(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и (17) показывают, что ряд (66) сходится в $\mathcal{D}'(X)$. Из (66) и (48) имеем

$$\sum_{\mu \in N(r)} b_\mu \tilde{\eta}(\mu) P_\delta(\mu \|H\|) \Phi_\mu(x) = 0, \quad x \in X.$$

Используя (16) и (32), из последнего равенства находим $b_\mu \tilde{\eta}(\mu) = 0$. Отсюда в силу произвольности η все b_μ равны нулю, что противоречит доказанному выше. Таким образом, функция f удовлетворяет всем требованиям утверждения 3), и теорема 5 полностью доказана.

§ 9. Описание класса $V_r^{-\infty}(B_R)$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in V_r^{2m}(B_R)$, $m \geq 2\alpha + 5$. Тогда при всех $\delta \in \hat{K}_M$ таких, что $s_1(\delta) \leq 2m - 4\alpha - 9$, и всех $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$ имеет место равенство

$$f_{\delta,j}(x) = \sum_{\mu \in N(r)} c_{\mu,\delta,j} \Phi_\mu^{\delta,j}(x), \quad c_{\mu,\delta,j} \in \mathbb{C}, \quad x \in B_R, \quad (67)$$

где $c_{\mu,\delta,j} = O(\mu^{4\alpha+6-2m})$ при $\mu \rightarrow \infty$, и ряд (67) сходится абсолютно и равномерно в B_R .

Для доказательства теоремы 6 потребуются две леммы.

ЛЕММА 13. Пусть $f \in V_r(B_R) \cap C_K^m(B_R)$, $m \geq 2\alpha + 5$. Тогда имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{\mu \in N(r)} c_\mu(f) \Phi_\mu(x), \quad x \in B_R, \quad (68)$$

где

$$c_\mu(f) = \frac{\int_{B_r} f(x) \Phi_\mu(x) dx}{\int_{B_r} \Phi_\mu^2(x) dx} = O(\mu^{2\alpha+2-m}) \quad (69)$$

при $\mu \rightarrow \infty$, и ряд (68) сходится абсолютно и равномерно в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для констант $c_\mu(f)$, определенных левым равенством в (69), оценка в (69) следует из (34) и формулы

$$c_\mu(f) = (-1)^\nu (\mu^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))^{-\nu} c_\mu(\Delta^\nu f),$$

справедливой при $\nu = 0, 1, \dots, [\alpha + \frac{1}{2}] + 2$ (см. [32; формула 79]). Поэтому ряд (68) сходится абсолютно и равномерно в B_R (см. (17)), и его сумма является функцией класса $V_r(B_R) \cap C_K(B_R)$, совпадающей с f в B_r (см. леммы 1, 10). По теореме 4 отсюда получаем (68) при всех $x \in X$.

ЛЕММА 14. Пусть u – четная функция класса $C^m(-R, R)$, $m \geq 2\alpha + 6$, такая, что функция $w(x) = u(h(x))e^{\rho(\epsilon)h(x)}$ принадлежит $V_r(B_R)$. Тогда имеет место равенство

$$u(t) = \sum_{\mu \in N(r)} u_\mu \cos \mu t, \quad u_\mu \in \mathbb{C}, \quad t \in (-R, R), \quad (70)$$

где $u_\mu = O(\mu^{2\alpha+3-m})$ при $\mu \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что функция

$$f(x) = \int_K w(\tau^{-1}x) d\tau$$

принадлежит $V_r^m(B_R)$. По лемме 13 для f имеет место разложение (68), в котором коэффициенты $c_\mu(f)$ удовлетворяют оценке (69). Положим $u_\mu = c_\mu(f)$, тогда ряд в (70) сходится равномерно на $\mathbb{R}^1$ и допускает почленное дифференцирование. Обозначим его сумму $v(t)$ и докажем, что $v = u$ на $(-R, R)$. Действительно, из (17) и (68) имеем

$$f(x) = \int_K v(h(\tau^{-1}x))e^{\rho(\epsilon)h(\tau^{-1}x)} d\tau.$$

Применяя теорему 2, отсюда и из определения f получаем $v = u$ на $(-R, R)$. Таким образом, лемма 14 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Из условия теоремы и леммы 11 следует, что $f_{\delta,j} \in V_r^{2m}(B_R)$ при всех δ, j . Пусть $s = s_1(\delta) \leq 2m - 4\alpha - 9$, $F = f_{\delta,j}$ и $u \in C^{m_1}(-R/\|H\|, R/\|H\|)$, $m_1 = 2m - 2\alpha - 3$ – функция из теоремы 3. Тогда функция $D^\delta u$ является четной, и по лемме 12 функция

$$(D^\delta u)(h(x)/\|H\|)e^{\rho(X\epsilon)h(x)}$$

принадлежит $V_r^{m_1-s}(B_R)$. Применяя лемму 14, имеем равенство

$$(D^\delta u)(t) = \sum_{\mu \in N(r)} b_{\mu,\delta,j} \cos(\mu\|H\|t), \quad t \in (-R, R), \quad (71)$$

где $b_{\mu,\delta,j} \in \mathbb{C}$ и $b_{\mu,\delta,j} = O(\mu^{s-m_1-2\alpha-3})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Из (71) находим

$$u(t) = v(t) + \sum_{\mu \in N(r)} \frac{1}{2} b_{\mu,\delta,j} \left(\frac{e^{i\mu\|H\|t}}{P_\delta(i\mu\|H\|)} + \frac{e^{-i\mu\|H\|t}}{P_\delta(-i\mu\|H\|)} \right),$$

где $D^\delta v = 0$ на $(-R, R)$. Отсюда и из равенств (40), (38) и (17) получаем утверждение теоремы 6.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\delta \in \hat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$ имело место равенство (67), в котором $c_{\mu,\delta,j} = O(\mu^{-p})$ при $\mu \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $p > 0$.

Доказательство следует из (13) и теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Тогда для того чтобы $f \in V_r^{-\infty}(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$ имело место равенство (67), в котором ряд сходится в $\mathcal{D}'(B_R)$ и $c_{\mu, \delta, j} = O(\mu^p)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и некотором $p > 0$, не зависящем от μ .

Для доказательства потребуется

ЛЕММА 15. Для любых $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$, $r < R$ существует распределение $u \in \mathcal{E}'_{\delta, j}(X)$ такое, что $B_R \cap \text{supp } u = \emptyset$ и $\widetilde{u}(\pm\mu, b) \neq 0$ при всех $\mu \in N(r)$, $b \in K/M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу счетности множества $N(r)$ существует $R_1 > R$ такое, что $\varphi_{\pm\mu}^{\alpha, \beta}(R_1) \neq 0$ при любом $\mu \in N(r)$. Пусть $\varepsilon \in (0, R_1 - R)$ и

$$\psi(z, b) = \left(2 + \cos \frac{\varepsilon z}{2}\right) P_\delta(-z) Y_j^\delta(b), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует $u_1 \in \mathcal{E}'_{\delta, j}(X)$ такое, что $\text{supp } u_1 \subset B_\varepsilon$ и $\widetilde{u}(z, b) = \psi(z, b)$ (см. (24) и [36]). Пусть также u_2 – распределение из $\mathcal{E}'_K(X)$, действующее по формуле

$$(u_2, \varphi) = \int_{S_{R_1}} \varphi(x) d\omega(x), \quad \varphi \in \mathcal{E}(X),$$

где $d\omega$ – риманова мера на сфере $S_{R_1} = \{x \in X : d(o, x) = R_1\}$ (см. [33; гл. 2, § 5, п. 4]). Тогда распределение $u = u_1 \times u_2$ удовлетворяет (см. (24)) условиям леммы 15.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Достаточность следует из (13) и следствия из леммы 10. Докажем необходимость. Из условия теоремы и леммы 11 имеем $f_{\delta, j} \in V_r^{-\infty}(B_R)$ при всех δ, j . Пусть $\varepsilon \in (0, R - r)$, $\eta \in \mathcal{D}_K(B_R)$ и $\eta = 1$ в $B_{R-\varepsilon}$. Тогда $\mathcal{F} = \eta f_{\delta, j} \in \mathcal{D}'_{\delta, j}(B_R)$ и $(\mathcal{F} \times \chi_r) = 0$ в $B_{R-r-\varepsilon}$.

Докажем сначала, что разложение (67) с указанной в теореме 7 оценкой констант $c_{\mu, \delta, j}$ имеет место в $B_{R-\varepsilon}$. Не ограничивая общности, можно считать, что множество

$$E = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \widetilde{\chi}_r(\mu) \neq 0 \text{ и } \widetilde{\mathcal{F}}(\mu, b) = 0 \text{ для всех } b \in \frac{K}{M} \right\}$$

бесконечно. Действительно, поскольку $\widetilde{\mathcal{F}}(z, b) = \psi(z) Y_j^\delta(b)$, где $\psi(z) P_\delta(z \|H\|)$ – четная целая функция экспоненциального типа (см. (24), (16)), то функция ψ имеет бесконечно много корней (см. [43; гл. 1, теорема 13]). Поэтому если лишь конечное число корней ψ не принадлежат $N(r)$, то вместо $\mathcal{F}$ можно рассмотреть $\mathcal{F} + u$, где u – распределение из леммы 15. Далее, пусть $E_q = \{\mu_1, \dots, \mu_q\}$ – подмножество E такое, что $\mu_i^2 \neq \mu_j^2$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq q$, и $p_q(z) = \prod_{j=1}^q (z + \rho^2(\epsilon) + \mu_j^2)$. Тогда при достаточно больших q имеет место равенство $\mathcal{F} = p_q(\Delta) \Phi$, где $\Phi \in \mathcal{E}'_{\delta, j}(x) \cap C^{2m}(x)$, $2m > s_1(\delta) + 14\alpha + 7$ (см. [36] и (18)). Полагая $T = \Phi \times \chi_r$, имеем $p_q(\Delta) T = 0$ в $B_{R-r-\varepsilon}$. Поскольку $T \in C^{2m}_{\delta, j}(X)$, то отсюда следует, что

$$T(x) = \sum_{\mu \in E_q} b_\mu \Phi_\mu^{\delta, j}(x), \quad x \in B_{R-r-\varepsilon},$$

для некоторых констант $b_\mu \in \mathbb{C}$ (см. [36; гл. 3, § 1]). Используя лемму 10, получаем, что функция

$$\Phi(x) - \sum_{\mu \in E_q} \frac{b_\mu}{\tilde{\chi}_r(\mu)} \Phi_\mu^{\delta,j}(x)$$

принадлежит $V_r^{2m}(B_{R-\varepsilon})$. Тогда по теореме 6 в $B_{R-\varepsilon}$

$$\Phi(x) = \sum_{\mu \in E_q} \frac{b_\mu}{\tilde{\chi}_r(\mu)} \Phi_\mu^{\delta,j}(x) + \sum_{\mu \in N(r)} b_{\mu,\delta,j} \Phi_\mu^{\delta,j}(x), \quad (72)$$

где $b_{\mu,\delta,j} \in \mathbb{C}$ и $b_{\mu,\delta,j} = O(\mu^{4\alpha+6-2m})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Применяя к (72) оператор $p_q(\Delta)$, получаем, что ряд

$$\sum_{\mu \in N(r)} b_{\mu,\delta,j} \prod_{\nu=1}^q (\mu_\nu^2 - \mu^2) \Phi_\mu^{\delta,j}(x)$$

сходится в $\mathscr{D}'(X)$ и его сумма совпадает с $f_{\delta,j}$ в $B_{R-\varepsilon}$. Полагая

$$c_{\mu,\delta,j} = b_{\mu,\delta,j} \prod_{\nu=1}^q (\mu_\nu^2 - \mu^2),$$

отсюда и из теоремы 5 заключаем, что ряд (67) сходится к $f_{\delta,j}$ в $\mathscr{D}'(B_R)$, причем $c_{\mu,\delta,j} = O(\mu^p)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и $p = 4\alpha + 6 - 2m + 2q$. Таким образом, теорема 7 полностью доказана.

§ 10. Доказательство основного результата

Прежде всего отметим, что утверждения 1)–3) теоремы 1 достаточно доказать для K -инвариантных f . Действительно, если f – произвольное распределение из класса $V_{r_1,r_2}^{-\infty}(B_R)$, то по лемме 11 $f_{\delta,j} \in V_{r_1,r_2}^{-\infty}(B_R)$ при всех $\delta \in \hat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$. Тогда $\mathscr{A}f_{\delta,j} \in V_{r_1,r_2}^{-\infty}(B_R) \cap \mathscr{D}'_K(B_R)$ (см. лемму 6). Если мы докажем, что при соответствующих условиях $\mathscr{A}f_{\delta,j} = 0$ в B_R , то по лемме 6 будем иметь $f_{\delta,j} = 0$ в B_R при всех δ, j . В силу (13) это и будет означать, что $f = 0$ в B_R и в общем случае. Аналогичные рассуждения применимы и для $f \in V_{r_1,r_2}^{\infty}(B_R)$. Таким образом, в доказательствах утверждений 1)–3) будем предполагать, что f является K -инвариантным. Отметим также, что утверждение 1) теоремы 1 легко получить из ее утверждения 2) с помощью стандартного метода сглаживания (см. [32; начало § 7]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2). Пусть f – K -инвариантная функция класса $V_{r_1,r_2}^{\infty}(B_R)$, где $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $r_1 + r_2 = R$. По лемме 13 при $r = r_1$ имеет место равенство (68), в котором коэффициенты $c_\mu(f)$ удовлетворяют (69) при $\mu \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $m > 0$. Поскольку $f \in V_{r_2}^{\infty}(B_R)$, то из (68), (69) и (54) следует, что при всех $x \in B_{r_1}$

$$\sum_{\mu \in N(r_1)} c_\mu(f) \tilde{\chi}_{r_2}(\mu) \Phi_\mu(x) = 0.$$

Учитывая, что $N(r_1, r_2) = \emptyset$, отсюда и из (32) получаем $c_\mu(f) = 0$ при всех $\mu \in N(r_1)$. В силу (68) это означает, что $f = 0$ в B_R , и утверждение 2) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3). Пусть f – K -инвариантная функция класса $V_{r_1, r_2}^{-\infty}(B_R)$, где $N(r_1, r_2) = \emptyset$, $r_1 + r_2 \in \Omega$ и $r_1 + r_2 = R$. По теореме 7 при $r = r_1$ имеет место равенство (68), в котором $c_\mu(f) = O(\mu^p)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и некотором $p > 0$, не зависящем от μ . Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \sum_{\mu \in N(r_1)} c_\mu(f)(\mu^2 + \rho^2(\epsilon))^{-m} \Phi_\mu(x), \quad x \in B_R, \quad (73)$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m > (p+1)/2$ (при таких m ряд в (73) сходится абсолютно и равномерно в B_R ; см. (33) и (17)). Тогда $f_1 \times \chi_{r_1} = 0$ в B_{r_2} (см. (54)) и

$$\Delta^m(f_1 \times \chi_{r_2}) = (-1)^m f \times \chi_{r_2} = 0$$

в B_{r_1} (см. (18)). Таким образом, функция $f_2 = f_1 \times \chi_{r_2}$ является K -инвариантным решением уравнения $\Delta^m f_2 = 0$ в B_{r_1} , которое имеет вид

$$f_2(x) = \sum_{\mu \in N(r_1)} c_\mu(f) \tilde{\chi}_{r_2}(\mu) (\mu^2 + \rho^2(\epsilon))^{-m} \Phi_\mu(x).$$

Используя (32), находим

$$\int_{B_{r_1}} f_2(x) \Phi_\mu(x) dx = \frac{c_\mu(f) \tilde{\chi}_{r_2}(\mu)}{(\mu^2 + \rho^2(\epsilon))^m} \int_{B_{r_1}} \Phi_\mu^2(x) dx = O(|c_\mu(f)| \cdot |\tilde{\chi}_{r_2}(\mu)| \mu^{-2m}), \quad (74)$$

где постоянная в знаке O не зависит от $\mu \in N(r_1)$. Далее, полагая $u(t) = f_2(a_t o)$, при $0 \leq t \leq r_1/\|H\|$ имеем $(\Delta_{\alpha, \beta}^m u)(t) = (\Delta^m f_2)(a_t o) = 0$. Тогда из (74) и (30) следует, что

$$\varphi_\mu^{\alpha, \beta} \left(\frac{r_1}{\|H\|} \right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{d}{dt} \Delta_{\alpha, \beta}^\nu u \right) \left(\frac{r_1}{\|H\|} \right)}{(\mu^2 + \rho^2(\epsilon))^{\nu+1}} = O(|c_\mu(f)| |\tilde{\chi}_{r_2}(\mu)| \mu^{-2m}) \quad (75)$$

при $\mu \rightarrow \infty$, $\mu \in N(r_1)$. Кроме того, из (51), (52) имеем оценку

$$\varphi_\mu^{\alpha, \beta} \left(\frac{r_1}{\|H\|} \right) > c \mu^{-\alpha-1/2}, \quad (76)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $\mu \in N(r_1)$. Предположим, что среди чисел $\left(\frac{d}{dt} \Delta_{\alpha, \beta}^\nu u \right) \left(\frac{r_1}{\|H\|} \right)$, $\nu = 0, \dots, m-1$, есть отличное от нуля. Тогда из (75), (76) и утверждения 2) леммы 9 следует, что $(r_1, r_2) \notin \Omega$.

Полученное противоречие показывает, что $\left(\frac{d}{dt} \Delta_{\alpha, \beta}^\nu u \right) \left(\frac{r_1}{\|H\|} \right) = 0$ при всех $\nu = 0, \dots, m-1$, т.е. интеграл в левой части (74) равен нулю (см. (30)). Поскольку $N(r_1, r_2) = \emptyset$, из (74) имеем $c_\mu(f) = 0$ при всех $\mu \in N(r_1)$. Таким образом, $f = 0$ (см. (68)), и утверждение 3) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4). Пусть $r_1 + r_2 = R$ и $(r_1, r_2) \notin \Omega$, тогда $N(r_1, r_2) = \emptyset$. Из утверждения 2) леммы 9 вытекает, что существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|\tilde{\chi}_{r_2}(\mu)|^{-1} < (2 + \mu)^c \quad (77)$$

при всех $\mu \in N(r_1)$. Пусть $m, q > 0$ целые и $q > m + c$. Для заданного q рассмотрим функцию f_1 , совпадающую с правой частью равенства (64) при $r = r_1$. Из доказательства теоремы 5 следует, что $f_1 = 0$ в B_{r_1} и коэффициенты b_μ в разложении (64) удовлетворяют условию $b_\mu = O(\mu^{-3-q})$ при $\mu \rightarrow \infty$. Для $x \in B_R$ положим

$$f(x) = \sum_{\mu \in N(r_1)} \frac{b_\mu}{\tilde{\chi}_{r_1}(\mu)} \Phi_\mu^{\delta, j}(x). \quad (78)$$

Учитывая, что $q > m + c$, из оценки b_μ , (77) и (33) получаем, что $f \in C^m(B_R)$ (см. также (17)). Кроме того, поскольку $f_1 = 0$ в B_{r_1} , то из (78) и (54) получаем $f \in V_{r_1, r_2}^m(B_R)$. Пусть $f = 0$ в B_R . Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5, из (78) заключаем, что $b_\mu = 0$ при всех $\mu \in N(r_1)$.

Однако при доказательстве теоремы 5 мы получили, что при некотором $\delta \in \hat{K}_M$ (таком, что $s_1(\delta) + s_2(\delta) \geq 4(q+1)$) и всех $j \in \{1, \dots, d_\delta\}$ не все числа b_μ равны нулю. Полученное противоречие показывает, что при указанных δ, j функция f ненулевая, и утверждение 4) доказано.

Для доказательства утверждения 5) потребуется

ЛЕММА 16. Пусть $\{\xi_m\}_{m=1}^\infty$ – возрастающая последовательность положительных чисел и $\xi_{m+1} - \xi_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ненулевая $\varphi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ такая, что $\tilde{\varphi}(\xi_m) = 0$ при всех m .

Для случая $X = H^n(\mathbb{R})$ доказательство леммы 16 содержится в [18; лемма 26]. В общем случае доказательство проводится аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5). Сначала рассмотрим случай, когда $N(r_1, r_2) = \emptyset$. Пусть $r_1 + r_2 > R$ и $\varepsilon = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 - R)$. Тогда существует ненулевая функция $u \in C_K^\infty(B_{r_2})$, носитель которой содержится в множестве $B_{r_2-2\varepsilon} \setminus B_{R-r_1+\varepsilon}$, и $\int_{B_{r_2}} f(x) dx = 0$. Из [32; доказательство теоремы 4] следует, что u можно продолжить на X до функции класса $V_{r_2}^\infty(X)$ (которую также обозначим u). При этом выполнено равенство

$$u(x) = \sum_{\mu \in N(r_2)} u_\mu \Phi_\mu(x), \quad u_\mu \in \mathbb{C}, \quad x \in X, \quad (79)$$

где $u_\mu = O(\mu^{-q})$ при $\mu \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 0$ (см. [32; теорема 5]). Пусть $\Sigma = \{\mu \in N(r_2) : |\tilde{\chi}_{r_2}(\mu)| < \mu^{-\alpha-5}\}$. Из [32; формула (38)] и следствия 2 из леммы 8 следует, что Σ либо пусто, либо конечно, либо может быть представлено в виде подпоследовательности $\{\xi_m\}_{m=1}^\infty$, удовлетворяющей условию (53). По лемме 16 существует ненулевая функция $\varphi \in \mathcal{D}_K(B_\varepsilon)$ такая, что $\tilde{\varphi}(\mu) = 0$ для любого $\mu \in \Sigma$. Кроме того, $B_{r_2} \cap \text{supp}(u \times \varphi) = \emptyset$ (см. [18; доказательство утверждения 5) теоремы 1]) и

$$(u \times \varphi)(x) = \sum_{\mu \in N(r_2) \setminus \Sigma} u_\mu \tilde{\varphi}(\mu) \Phi_\mu(x), \quad x \in X$$

(см. (79) и (54)). Повторяя рассуждения из [18; доказательство утверждения 5) теоремы 1], получаем, что функция

$$f(x) = \sum_{\mu \in N(r_2) \setminus \Sigma} \frac{u_\mu \tilde{\varphi}(\mu)}{\tilde{\chi}_{r_1}(\mu)} \Phi_\mu(x)$$

принадлежит $V_{r_1, r_2}^\infty(B_R)$ и $f \neq 0$ в B_R . Следовательно, при $N(r_1, r_2) = \emptyset$ утверждение 5) доказано. Теперь предположим, что $N(r_1, r_2) = \emptyset$. Тогда при любом $\mu \in N(r_1, r_2)$ функция $\Phi_\mu(x)$ является вещественно-аналитической в X и принадлежит $V_{r_1, r_2}(X)$ (см. лемму 10). Отсюда следует утверждение 5) при $N(r_1, r_2) = \emptyset$, а также утверждение 6). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

- [1] L. Zalcman, "Analyticity and the Pompeiu problem", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **47**:3 (1972), 237–254.
- [2] L. Zalcman, "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Approximation by solutions of partial differential equations*, Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Hanstholm, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **365**, Kluwer, Dordrecht, 1992, 185–194.
- [3] К. А. Беренштейн, Д. Струппа, "Комплексный анализ и уравнения в свертках", *Итоги науки и техн. Совер. пробл. матем. Фундамент. направления*, **54**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–111; англ. пер.: С. А. Berenstein, D. C. Struppa, "Complex analysis and convolution equations", *Several complex variables. V: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopedia Math. Sci., **54**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–108.
- [4] L. Zalcman, "Mean values and differential equations", *Israel. J. Math.*, **14** (1973), 339–352.
- [5] С. А. Berenstein, L. Zalcman, "Pompeiu's problem on spaces of constant curvature", *J. Analyse Math.*, **30** (1976), 113–130.
- [6] L. Zalcman, "Offbeat integral geometry", *Amer. Math. Monthly*, **87**:3 (1980), 161–175.
- [7] М. Л. Аграновский, "Преобразование Фурье на $SL_2(R)$ и теоремы типа Морера", *Докл. АН СССР*, **243**:6 (1978), 1353–1356; англ. пер.: М. Л. Agranovskii, "The Fourier transform on $SL_2(R)$ and theorems of Morera type", *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1522–1526.
- [8] С. А. Berenstein, L. Zalcman, "Pompeiu's problem on symmetric spaces", *Comment. Math. Helv.*, **55**:1 (1980), 593–621.
- [9] S. Thangavelu, "Spherical means and CR functions on the Heisenberg group", *J. Anal. Math.*, **63** (1994), 255–286.
- [10] М. Agranovsky, С. Berenstein, D.-Ch. Chang, D. Pascuas, "Théorèmes de Morera et Pompeiu pour le groupe de Heisenberg", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315**:6 (1992), 655–658.
- [11] М. Agranovsky, С. Berenstein, D.-Ch. Chang, "Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group", *J. Reine Angew. Math.*, **443** (1993), 49–89.
- [12] J. M. Cohen, M. A. Picardello, "The 2-circle and 2-disk problems on trees", *Israel J. Math.*, **64**:1 (1988), 73–86.
- [13] J. D. Smith, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.
- [14] С. А. Berenstein, R. Gay, "A local version of the two-circles theorem", *Israel J. Math.*, **55**:3 (1986), 267–288.
- [15] С. А. Berenstein, R. Gay, "Le problème de Pompeiu local", *J. Analyse Math.*, **52** (1989), 133–166.
- [16] M. El Harchaoui, "Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe: Cas des deux boules", *J. Anal. Math.*, **67** (1995), 1–37.

- [17] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A definitive version of the local two-radii theorem”, *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 783–802.
- [18] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 3–26; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A definitive version of the local two-radii theorem on hyperbolic spaces”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 207–229.
- [19] В. В. Волчков, “Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях”, *Матем. заметки*, **53**:2 (1993), 31–36; англ. пер.: V. V. Volchkov, “On a problem of Zalcman and its generalizations”, *Math. Notes*, **53**:2 (1993), 134–138.
- [20] В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Solution of the support problem for several function classes”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.
- [21] В. В. Волчков, “О множествах инъективности преобразования Радона на сферах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 63–76; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Injectivity sets for the Radon transform over a sphere”, *Izv. Math.*, **63**:3 (1999), 481–493.
- [22] В. В. Волчков, “О множествах инъективности преобразования Помпейю”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 51–66; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Injectivity sets of the Pompeiu transform”, *Sb. Math.*, **190**:11 (1999), 1607–1622.
- [23] В. В. Волчков, “Экстремальные задачи о множествах Помпейю”, *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), 3–22; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Extremal problems on Pompeiu sets”, *Sb. Math.*, **189**:7 (1998), 955–976.
- [24] В. В. Волчков, “Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 3–16; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Extremal problems on Pompeiu sets. II”, *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 619–632.
- [25] В. В. Волчков, “Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца”, *Матем. сб.*, **184**:7 (1993), 71–78; англ. пер.: V. V. Volchkov, “New theorems on the mean for solutions of the Helmholtz equation”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **79**:2 (1994), 281–286.
- [26] В. В. Волчков, “Экстремальные варианты проблемы Помпейю”, *Матем. заметки*, **59**:5 (1996), 671–680; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Extremal cases of the Pompeiu problem”, *Math. Notes*, **59**:5 (1996), 482–489.
- [27] В. В. Волчков, “О полиэдрах с локальным свойством Помпейю”, *Докл. РАН*, **373**:4 (2000), 448–450; англ. пер.: V. V. Volchkov, “On polyhedra with the local Pompeiu property”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **62**:1 (2000), 69–71.
- [28] В. В. Волчков, “О функциях с нулевыми интегралами по эллипсоидам”, *Докл. РАН*, **376**:2 (2001), 158–160; англ. пер.: V. V. Volchkov, “On functions with zero integrals over ellipsoids”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **63**:1 (2001), 25–27.
- [29] В. В. Волчков, “Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов”, *Матем. заметки*, **51**:6 (1992), 27–31; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Uniqueness theorems for multiple lacunary trigonometric series”, *Math. Notes*, **51**:6 (1992), 550–552.
- [30] В. В. Волчков, “Теоремы единственности для кратных тригонометрических рядов с пропусками”, *Укр. матем. журн.*, **50**:11 (1998), 1477–1481; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Uniqueness theorems for multiple lacunary trigonometric series”, *Ukrainian Math. J.*, **50**:11 (1998), 1686–1691.
- [31] В. В. Волчков, “Аппроксимация функций на ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$ линейными комбинациями сдвигов”, *Докл. РАН*, **334**:5 (1994), 560–561; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Approximation of functions on bounded domains in $\mathbb{R}^n$ by linear combinations of shifts”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49**:1 (1994), 160–162.
- [32] В. В. Волчков, “Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах”, *Матем. сб.*, **192**:9 (2001), 17–38; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Theorems on ball mean values in symmetric spaces”, *Sb. Math.*, **192**:9 (2001), 1275–1296.

- [33] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [34] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
- [35] S. Helgason, *Differential geometry, Lie group and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–London, 1978.
- [36] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [37] Вит. В. Волчков, “Теоремы о шаровых средних на комплексных гиперболических пространствах”, *Доповіді НАН України*, **4** (2000), 7–10.
- [38] Вит. В. Волчков, “Аналог модели Пуанкаре для кватернионного гиперболического пространства”, *Укр. матем. журн.*, **53**:10 (2001), 1337–1342; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, “An analog of the Poincaré model for a quaternion hyperbolic space”, *Ukrainian Math. J.*, **53**:10 (2001), 1618–1625.
- [39] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [40] M. Flensted-Jensen, “Paley–Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces”, *Ark. Mat.*, **10**:1 (1972), 143–162.
- [41] T. Koornwinder, “A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform”, *Ark. Mat.*, **13**:1 (1975), 145–159.
- [42] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. I: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. I, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1953.
- [43] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [44] Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. I*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1946.
- [45] Э. Я. Риекстыньш, *Асимптотические разложения интегралов*, т. 1, Зинатне, Рига, 1974.

В. В. Волчков (V. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет
E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступила в редакцию
28.12.2005