Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Голинский, Потоки Шура и ортогональные полиномы на единичной окружности, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 41–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:36:53

УДК 517.53+517.91

Л. Б. Голинский

Потоки Шура и ортогональные полиномы на единичной окружности

Связь между цепочкой Тоды и подобными ей нелинейными цепочками и теорией ортогональных полиномов на вещественной оси была детально исследована за последние десятилетия. В работе рассматривается иная система дифференциально-разностных уравнений, известная как поток Шура, в рамках теории ортогональных полиномов на единичной окружности. Для этой системы находится пара Лакса и описывается динамика соответствующей спектральной меры. Общий результат проиллюстрирован на примере модифицированных мер Бесселя на единичной окружности, для круговых параметров которых найдена асимптотика при больших значениях времени.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

В 1975 г. Ю. Мозер [1], [2] предложил метод интегрирования уравнений конечной цепочки Тоды, в частности, решения задачи Коши для такой цепочки, основанный на спектральной теории конечных якобиевых матриц. Позднее Ю. М. Березанский перенес этот метод на полубесконечные цепочки Тоды

$$\begin{aligned} a'_n &= a_n(b_{n+1} - b_n), \\ b'_n &= 2(a_n^2 - a_{n-1}^2), \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}, \quad a_{-1} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где под $'$ понимается дифференцирование по t в классе ограниченных вещественных функций $b_n, a_n > 0$ с начальными данными $\{b_n(0) = \bar{b}_n(0), a_n(0) > 0\}$. Основная идея состоит в построении полубесконечной якобиевой матрицы

$$J = J(\{a_n\}, \{b_n\}) = \begin{pmatrix} b_0(t) & a_0(t) & & & \\ a_0(t) & b_1(t) & a_1(t) & & \\ & a_1(t) & b_2(t) & a_2(t) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS Research Network NeCCA (грант № 03-51-6637) и NATO Collaborative linkage grant PST.CLG.979738.

и исследовании эволюции матрицы $J = J(t)$ и ее спектральных характеристик. Как оказалось, (1.1) может быть перефразировано в терминах самой матрицы J (уравнение Лакса):

$$J'(t) = [A, J] = AJ - JA, \quad (1.3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0(t) & & & \\ -a_0(t) & 0 & a_1(t) & & \\ & -a_1(t) & 0 & a_2(t) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \pi(J) := J_+ - J_-, \quad (1.4)$$

где использованы стандартные обозначения X_+ для верхнетреугольной и X_- для нижнетреугольной проекций матрицы X . В то же самое время соответствующая спектральная мера (мера ортогональности) $d\mu(x, t)$ претерпевает простое преобразование

$$d\mu(x, t) = e^{-xt} d\mu(x, 0). \quad (1.5)$$

Таким образом, решение (1.1) представляет собой комбинацию обратной спектральной задачи (от $\{a_n(0), b_n(0)\}$ к $d\mu(x, 0)$) при $t = 0$, преобразования (1.5) и прямой спектральной задачи (от $d\mu(x, t)$ к $\{a_n(t), b_n(t)\}$) при $t > 0$.

Ортогональные полиномы на вещественной оси исполняют одну из главных ролей при решении этих задач, хотя и не входят непосредственно в окончательные формулировки результатов. В последние годы наблюдается бурный всплеск активности в параллельной теории ортогональных полиномов на единичной окружности (ОПЕО) в значительной степени благодаря вышедшему недавно трактату Б. Саймона [3], [4]. Целый ряд проблем в этой теории имеет своих явно выраженных “двойников” в теории ортогональных полиномов на оси. В настоящей работе рассматривается вопрос о нелинейных цепочках (которые естественно было бы назвать “цепочками Тоды для единичной окружности”) и об аналоге метода Мозера–Березанского решения соответствующей задачи Коши. Оказывается, что в роли этой цепочки выступает система дифференциально-разностных уравнений, известная как *поток Шура*, а метод основан на спектральной теории одного класса бесконечных унитарных матриц.

Напомним некоторые основополагающие факты теории ОПЕО [5], [3]. Пусть задана нетривиальная вероятностная мера μ на единичной окружности $\mathbb{T}$ (под тривиальной мерой мы понимаем меру, сосредоточенную в конечном числе точек). Обозначим ее моменты через

$$\mu_k := \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-k} d\mu, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\},$$

и определим монические ортогональные полиномы $\Phi_n(z, \mu)$ (или просто Φ_n) из соотношений

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-k} \Phi_n(\zeta, \mu) d\mu &= 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \\ \Phi_n(z, \mu) &= z^n + l_n z^{n-1} + \dots + \Phi_n(0, \mu). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ясно, что такая система определена однозначно и

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi_m(\zeta, \mu) \overline{\Phi_n(\zeta, \mu)} d\mu = 0, \quad m \neq n. \quad (1.7)$$

Ортонормированные полиномы $\varphi_n = \kappa_n \Phi_n$, $\kappa_n > 0$, удовлетворяют соотношению

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_m(\zeta, \mu) \overline{\varphi_n(\zeta, \mu)} d\mu = \delta_{mn}.$$

Ключевую роль в теории играют последовательности комплексных чисел $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $|\alpha_n| < 1$, определенные равенствами

$$\alpha_n = \alpha_n(\mu) = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha_{-1} := -1, \quad (1.8)$$

и известные как *круговые параметры* системы или *коэффициенты Верблунского*. Во-первых, согласно теореме Верблунского [3; теорема 1.7.11] существует взаимно однозначное соответствие между классом $\mathcal{P}$ всех нетривиальных вероятностных мер на $\mathbb{T}$ и множеством $\mathbb{D}^\infty$, так что каждая последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ из открытого единичного круга $\mathbb{D}$ является системой параметров для единственной меры $\mu \in \mathcal{P}$. Во-вторых, круговые параметры (1.8) входят в рекуррентные соотношения Сегё, векторная форма которых имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Phi_{n+1}(z) \\ \Phi_{n+1}^*(z) \end{bmatrix} = T_n(z) \begin{bmatrix} \Phi_n(z) \\ \Phi_n^*(z) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где $T_n(z) = \begin{pmatrix} z & -\bar{\alpha}_n \\ -\alpha_n z & 1 \end{pmatrix}$ называется матрицей Сегё. Таким образом, имеем

$$\begin{bmatrix} \Phi_{n+1}(z) \\ \Phi_{n+1}^*(z) \end{bmatrix} = \mathcal{T}_n(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{T}_n(z) = T_n(z)T_{n-1}(z) \cdots T_0(z)$ есть фундаментальная матрица. В этих соотношениях

$$\Phi_n^*(z) = \overline{z^n \Phi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Тем самым, как монические, так и ортонормированные полиномы полностью восстанавливаются по последовательности α_n , последние – в силу равенства

$$\kappa_n^{-2} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - |\alpha_j|^2).$$

Завершая обзор основных свойств ОПЕО, отметим явные формулы для монических полиномов и круговых параметров в терминах моментов меры ортогональности [5; гл. VIII, п. 8.1]:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\Phi_n(0) = -\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{(-1)^n}{D_n} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n} \\ \mu_0 & \dots & \mu_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-2} & \dots & \mu_{-1} \end{vmatrix},$$

$$D_{n+1} := \det \|\mu_{k-j}\|_{k,j=0}^n.$$

Одним из наиболее важных достижений теории ОПЕО последних лет является обнаруженная Кантеро, Моралом и Веласкесом [6] матричная реализация оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mathbb{T}, \mu)$, которая имеет вид бесконечной “ленточной” матрицы: $|\langle \zeta \chi_m, \chi_n \rangle| = 0$, где $|m - n| > k$ при некотором k ; в нашем случае $k = 2$, т.е. матрица пятидиагональная (ср. с $k = 1$ для случая вещественной оси). Соответствующий базис (и в этом состоит основная находка авторов [6]) $\{\chi_n\}$ получается путем ортогонализации последовательности $\{1, \zeta, \zeta^{-1}, \zeta^2, \zeta^{-2}, \dots\}$. Интересно, что ортогональные рациональные функции χ_n просто выражаются через φ_n и φ_n^* (см. [3; предложение 4.2.2]):

$$\chi_{2n}(z) = z^{-n} \varphi_{2n}^*(z), \quad \chi_{2n+1}(z) = z^{-n} \varphi_{2n+1}(z), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.11)$$

а матричные элементы

$$\mathcal{C}(\mu) = \|c_{nm}\| = \langle \zeta \chi_m, \chi_n \rangle, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

– через коэффициенты Верблунского:

$$\mathcal{C}(\mu) = \mathcal{C}(\{\alpha_n\}) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1 \rho_0 & \rho_0 \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ \rho_0 & -\bar{\alpha}_1 \alpha_0 & -\alpha_0 \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\alpha}_2 \rho_1 & -\bar{\alpha}_2 \alpha_1 & \bar{\alpha}_3 \rho_2 & \rho_2 \rho_3 & \dots \\ 0 & \rho_1 \rho_2 & -\alpha_1 \rho_2 & -\bar{\alpha}_3 \alpha_2 & -\alpha_2 \rho_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_4 \rho_3 & -\bar{\alpha}_4 \alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где $\rho_n^2 := 1 - |\alpha_n|^2$, $0 < \rho \leq 1$. Матрица (1.12) носит название *КМВ-матрицы*.

Справедливо важное соотношение между КМВ-матрицей и моническими ортогональными полиномами, аналогичное хорошо известному соотношению в теории ортогональных полиномов на вещественной оси:

$$\Phi_n(z) = \det(zI_n - \mathcal{C}^{(n)}), \quad (1.13)$$

где $\mathcal{C}^{(n)}$ есть главный блок порядка n матрицы $\mathcal{C}$ (см., например, [3; (4.2.47)]).

КМВ-матрицы играют в нашем исследовании потоков Шура ту же самую роль, что якобиевы матрицы (1.2) в теории цепочек Тоды.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\alpha_n(t)\}_{n \geq 0}$ – последовательность комплекснозначных функций с $|\alpha_n(t)| < 1$ при $t \geq 0$ и $\alpha_{-1} \equiv -1$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) α_n удовлетворяют уравнениям потока Шура

$$\alpha'_n(t) = (1 - |\alpha_n(t)|^2)(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0; \quad (1.14)$$

2) КМВ-матрицы $\mathcal{C}(t)$ удовлетворяют уравнению Лакса

$$\mathcal{C}'(t) = [A, \mathcal{C}], \quad (1.15)$$

где A – верхнетреугольная и трехдиагональная матрица

$$A = \|a_{mn}\|_0^\infty = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \bar{\alpha}_0 & \rho_0 \bar{\Delta}_0 & \rho_0 \rho_1 & & \\ & -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_1 \alpha_0 & \rho_1 \Delta_1 & \rho_1 \rho_2 & \\ & & -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_2 \alpha_1 & \rho_2 \bar{\Delta}_2 & \rho_2 \rho_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где $\Delta_n := \alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)$;

3) мера ортогональности $\mu(\zeta, t)$, имеющая $\alpha_n(t)$ своими коэффициентами Верблунского, допускает представление

$$d\mu(\zeta, t) = C(t) e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} d\mu(\zeta, 0), \quad (1.17)$$

где C – нормирующий множитель: $\mu(\mathbb{T}, t) = 1$.

Назовем (1.17) преобразованием Бесселя меры $d\mu = d\mu(\zeta, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если $\{\alpha_n(t)\}$ удовлетворяет (1.14) с произвольными начальными данными $|\alpha_n(0)| < 1$, то, как нетрудно видеть, $|\alpha_n(t)| < 1$ при всех $t > 0$. В самом деле, предположим противное, т.е. что при некотором $n \geq 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что $|\alpha_n(t_0)| = 1$ и $|\alpha_n(t)| < 1$ при всех $0 < t < t_0$. Из (1.14) и $\rho_n^2 = 1 - |\alpha_n|^2$ следует, что

$$(\rho_n^2)' = 2\rho_n \rho_n' = -\alpha_n' \bar{\alpha}_n - \alpha_n \bar{\alpha}_n' = -2\rho_n^2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{n+1} \alpha_n - \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1})$$

и, значит,

$$\rho_n' = -\rho_n \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{n+1} \alpha_n - \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1}), \quad 0 < t < t_0. \quad (1.18)$$

Поэтому

$$\rho_n(t) = \rho_n(0) \exp \left\{ - \int_0^t \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{n+1}(s) \alpha_n(s) - \bar{\alpha}_n(s) \alpha_{n-1}(s)) ds \right\} \quad (1.19)$$

и, тем самым, правая часть равенства отделена от нуля при $t \rightarrow t_0$, тогда как левая часть стремится к нулю. Противоречие показывает, что $|\alpha_n(t)| < 1$ при

всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $t > 0$. Следовательно, по теореме 1, п. 3) решение начально-граничной задачи

$$\alpha'_n(t) = (1 - |\alpha_n(t)|^2)(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)), \quad t > 0, \quad |\alpha_n(0)| < 1, \quad (1.20)$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_{-1} \equiv -1$, существует и единственно.

2) Мы можем видоизменить второе утверждение с учетом равенства

$$A + A^* = \mathcal{C} + \mathcal{C}^* = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}_0 & \rho_0 \bar{\Delta}_0 & \rho_0 \rho_1 & & & \\ \rho_0 \Delta_0 & -2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}_1 \alpha_0 & \rho_1 \Delta_1 & \rho_1 \rho_2 & & \\ \rho_0 \rho_1 & \rho_1 \bar{\Delta}_1 & -2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}_2 \alpha_1 & \rho_2 \bar{\Delta}_2 & \rho_2 \rho_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\mathcal{C}'(t) = [B, \mathcal{C}], \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} B = \frac{(\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)_+ - (\mathcal{C} + \mathcal{C}^*)_-}{2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \bar{\Delta}_0 & \rho_0 \rho_1 & & & \\ -\rho_0 \Delta_0 & 0 & \rho_1 \Delta_1 & \rho_1 \rho_2 & & \\ -\rho_0 \rho_1 & -\rho_1 \bar{\Delta}_1 & 0 & \rho_2 \bar{\Delta}_2 & \rho_2 \rho_3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= A - \frac{\mathcal{C} + \mathcal{C}^*}{2} = -B^*, \end{aligned} \quad (1.22)$$

что приближает полученное уравнение Лакса к его аналогу (1.3)–(1.4).

Итак, суммируя вышесказанное, решение проблемы (1.20) сводится к комбинации прямой и обратной спектральных задач, соединенных преобразованием Бесселя (1.17). Отметим, что меру $\mu(\zeta, 0)$ можно восстановить по начальным данным (по ее круговым параметрам $\alpha_n(0)$) с помощью либо спектральной теоремы для унитарной КМВ-матрицы $\mathcal{C}(0)$ (1.12), либо через ортонормированные полиномы, поскольку $d\mu(\zeta, 0)$ возникает как *-слабый предел последовательности мер $|\varphi_n|^{-2} dm$ (теорема Рахманова); здесь и далее dm обозначает нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}$. В свою очередь, круговые параметры $\alpha_n(t)$ выражаются через меру $\mu(\zeta, t)$ из равенств (1.10).

Уравнения потока Шура (1.14) впервые возникли в [7], [8] под именем *дискретное модифицированное уравнение КдФ* как пространственная дискретизация модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза

$$\partial_t f = 6f^2 \partial_x f - \partial_x^3 f.$$

Название “поток Шура” предложено в [9], где авторы ассоциируют величины α_n с параметрами Шура (альтернативное название коэффициентов Верблунского) мер на окружности. В [9] изучаются конечные вещественные потоки Шура и предлагаются два других уравнения Лакса, основанные на представлении оператора умножения в виде матрицы Хессенберга (см. также [10]). В [11], [12] появляется преобразование Бесселя мер и часть 3) $\Rightarrow$ 1) нашего результата доказана для вещественных потоков Шура. В недавней работе [13] (см. также [14])

авторы обсуждают структуру Пуассона и пары Лакса для систем Абловица–Ладика, включающих потоки Шура в качестве частного случая. Потоки Шура возникают также в связи с уравнениями “нулевой кривизны” для уравнений Бакстера [15]

$$T'_n(z, t) + T_n(z, t)W_n(z, t) - W_{n+1}(z, t)T_n(z, t) = 0, \quad (1.23)$$

$$W_n(z, t) := \begin{pmatrix} z + 1 - \alpha_{n-1}\bar{\alpha}_n & -\bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{n-1}z^{-1} \\ -\alpha_{n-1}z - \alpha_n & 1 - \bar{\alpha}_{n-1}\alpha_n + z^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Настоящая работа построена следующим образом. Доказательство основного результата приведено в §2 и §3, с некоторыми комментариями относительно общей начально-граничной задачи и бесконечных в обе стороны потоков Шура. Мы покажем также, что некоторые свойства начальных данных $\{\alpha_n(0)\}$, такие как характер убывания при $n \rightarrow \infty$, наследуются решениями $\{\alpha_n(t)\}$ при всех $t > 0$. В §4 изучаются модифицированные меры Бесселя на единичной окружности, круговые параметры которых суть решения уравнений потока Шура с нулевыми начальными данными. В этом случае получена информация о поведении решений (круговых параметров) при $t \rightarrow \infty$.

§2. Доказательство теоремы 1: 1) $\Leftrightarrow$ 2)

Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку уравнение Лакса уже предъявлено (мы не обсуждаем здесь его происхождение), проверка (1.15)–(1.16) представляет собой весьма громоздкое, хотя и вполне элементарное вычисление.

Пусть $2\varepsilon_m := 1 - (-1)^m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $\varepsilon_{-1} = 1$, так что

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_m\}_{m \geq 0} &= \{0, 1, 0, 1, \dots\}, \\ \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} &= 1, \quad \varepsilon_m \varepsilon_{m+1} = 0, \quad \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1} = (-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно записать диагонали матрицы $\mathcal{C}$ (1.12) единообразно:

$$c_{mm} = -\bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}, \quad (2.1)$$

$$c_{m+2,m} = \rho_m \rho_{m+1} \varepsilon_m, \quad c_{m,m+2} = \rho_m \rho_{m+1} \varepsilon_{m+1} \quad (2.2)$$

и

$$c_{m+1,m} = \bar{\alpha}_{m+1} \rho_m \varepsilon_m - \alpha_{m-1} \rho_m \varepsilon_{m+1}, \quad (2.3)$$

$$c_{m,m+1} = \bar{\alpha}_{m+1} \rho_m \varepsilon_{m+1} - \alpha_{m-1} \rho_m \varepsilon_m. \quad (2.4)$$

Аналогично, для матричных элементов матрицы A (1.16) мы имеем

$$a_{mm} = -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}, \quad a_{m,m+2} = \rho_m \rho_{m+1} \quad (2.5)$$

и

$$a_{m,m+1} = \rho_m \bar{\Delta}_m \varepsilon_{m+1} + \rho_m \Delta_m \varepsilon_m. \quad (2.6)$$

Далее, из (1.14) и (1.18) следует, что

$$\begin{aligned} (\rho_m \rho_{m+1})' &= -\rho_m \rho_{m+1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+2} \alpha_{m+1} - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}), \\ (\bar{\alpha}_m \alpha_{m-1})' &= \alpha_{m-1} \rho_m^2 \bar{\Delta}_m + \bar{\alpha}_m \rho_{m-1}^2 \Delta_{m-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(\alpha_{m-1}\rho_m)' &= [\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1} - \alpha_{m-1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})]\rho_m, \\
(\bar{\alpha}_{m+1}\rho_m)' &= [\rho_{m+1}^2\bar{\Delta}_{m+1} - \bar{\alpha}_{m+1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})]\rho_m.
\end{aligned}$$

Поэтому для производных элементов КМВ-матрицы выполняются соотношения

$$c'_{mm} = -(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})' = -\alpha_{m-1}\rho_m^2\bar{\Delta}_m - \bar{\alpha}_m\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1}, \quad (2.7)$$

$$c'_{m,m+2} = -\rho_m\rho_{m+1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+2}\alpha_{m+1} - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})\varepsilon_{m+1}, \quad (2.8)$$

$$c'_{m,m-2} = -\rho_{m-2}\rho_{m-1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m-2}\alpha_{m-3})\varepsilon_m \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned}
c'_{m,m+1} &= [\rho_{m+1}^2\bar{\Delta}_{m+1} - \bar{\alpha}_{m+1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})]\rho_m\varepsilon_{m+1} \\
&\quad - [\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1} - \alpha_{m-1}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})]\rho_m\varepsilon_m, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'_{m,m-1} &= [\rho_m^2\bar{\Delta}_m - \bar{\alpha}_m\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m-1}\alpha_{m-2})]\rho_{m-1}\varepsilon_{m+1} \\
&\quad - [\rho_{m-2}^2\Delta_{m-2} - \alpha_{m-2}\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m-1}\alpha_{m-2})]\rho_{m-1}\varepsilon_m. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Пусть $K = \|K_{mn}\| = [A, \mathcal{C}]$, $K_{mn} = \sum_i (a_{mi}c_{in} - c_{mi}a_{in})$. Так как обе матрицы A и $\mathcal{C}$ ленточные порядка 2: $a_{mn} = c_{mn} = 0$ при $|m-n| > 2$, и, дополнительно, A верхнетреугольная: $a_{mn} = 0$ при $m > n$, то на самом деле имеем

$$\begin{aligned}
K_{mn} &= a_{mm}c_{mn} + a_{m,m+1}c_{m+1,n} + a_{m,m+2}c_{m+2,n} \\
&\quad - c_{mn}a_{nn} - c_{m,n-1}a_{n-1,n} - c_{m,n-2}a_{n-2,n}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Мы хотим убедиться в том, что

$$c'_{m,m+j}(t) = K_{m,m+j}(t), \quad m, m+j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.13)$$

С этой целью подставим (2.1)–(2.6) в (2.12) и сравним полученный результат с (2.7)–(2.11). При $j \geq 5$ и $j \leq -3$ равенство выполняется по тривиальной причине: обе части в (2.13) обращаются в нуль. При $j = 4$ имеем

$$\begin{aligned}
K_{m,m+4} &= a_{m,m+2}c_{m+2,m+4} - c_{m,m+2}a_{m+2,m+4} \\
&= \rho_m\rho_{m+1}\rho_{m+2}\rho_{m+3}(\varepsilon_{m+3} - \varepsilon_{m+1}) = 0.
\end{aligned}$$

При $j = 3$ по (2.2) и (2.4)–(2.6) получаем

$$\begin{aligned}
K_{m,m+3} &= a_{m,m+1}c_{m+1,m+3} + a_{m,m+2}c_{m+2,m+3} \\
&\quad - c_{m,m+1}a_{m+1,m+3} - c_{m,m+2}a_{m+2,m+3} \\
&= \rho_m\rho_{m+1}\rho_{m+2}[\varepsilon_m(\Delta_m - \alpha_{m+1} + \alpha_{m-1}) \\
&\quad + \varepsilon_{m+1}(\bar{\alpha}_{m+3} - \bar{\alpha}_{m+1} - \bar{\Delta}_{m+2})] = 0,
\end{aligned}$$

что вполне согласуется с ленточной структурой порядка 2 матрицы $\mathcal{C}'$.

Основные сложности возникают при $j = 0, \pm 1, \pm 2$.

Случай $j = -2$. Мы имеем по (2.2) и (2.5)

$$\begin{aligned} K_{m,m-2} &= c_{m,m-2}(a_{mm} - a_{m-2,m-2}) \\ &= \rho_{m-2}\rho_{m-1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m-2}\alpha_{m-3} - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1})\varepsilon_m, \end{aligned} \quad (2.14)$$

так что (2.13) вытекает из (2.9).

Случай $j = -1$. Запишем $K_{m,m-1} = K_{m,m-1}^{(1)} + K_{m,m-1}^{(2)}$ с

$$\begin{aligned} K_{m,m-1}^{(1)} &= c_{m,m-1}(a_{mm} - a_{m-1,m-1}) \\ &= (\bar{\alpha}_m\rho_{m-1}\varepsilon_{m+1} - \alpha_{m-2}\rho_{m-1}\varepsilon_m) \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m-1}\alpha_{m-2} - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1}), \\ K_{m,m-1}^{(2)} &= a_{m,m+1}c_{m+1,m-1} - a_{m-2,m-1}c_{m,m-2} \\ &= \rho_{m-1}(\rho_m^2\bar{\Delta}_m\varepsilon_{m+1} - \rho_{m-2}^2\Delta_{m-2}\varepsilon_m) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} K_{m,m-1} &= [\rho_m^2\bar{\Delta}_m - \bar{\alpha}_m \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m-1}\alpha_{m-2})]\rho_{m-1}\varepsilon_{m+1} \\ &\quad - [\rho_{m-2}^2\Delta_{m-2} - \alpha_{m-2} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_m\alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m-1}\alpha_{m-2})]\rho_{m-1}\varepsilon_m. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь (2.13) следует из (2.11).

Случай $j = 0$. Запишем $K_{mm} = K_{mm}^{(1)} + K_{mm}^{(2)}$ с

$$\begin{aligned} K_{mm}^{(1)} &= a_{m,m+2}c_{m+2,m} - c_{m,m-2}a_{m-2,m} \\ &= [(\rho_m\rho_{m+1})^2 - (\rho_{m-2}\rho_{m-1})^2]\varepsilon_m, \\ K_{mm}^{(2)} &= a_{m,m+1}c_{m+1,m} - c_{m,m-1}a_{m-1,m} \\ &= (\bar{\alpha}_{m+1}\rho_m^2\Delta_m + \alpha_{m-2}\rho_{m-1}^2\bar{\Delta}_{m-1})\varepsilon_m \\ &\quad - (\alpha_{m-1}\rho_m^2\bar{\Delta}_m + \bar{\alpha}_m\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1})\varepsilon_{m+1}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &(\rho_m\rho_{m+1})^2 - (\rho_{m-2}\rho_{m-1})^2 + \bar{\alpha}_{m+1}\rho_m^2\Delta_m + \alpha_{m-2}\rho_{m-1}^2\bar{\Delta}_{m-1} \\ &= \rho_m^2(1 - \bar{\alpha}_{m+1}\alpha_{m-1}) - \rho_{m-1}^2(1 - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-2}) \\ &= -\alpha_{m-1}\rho_m^2\bar{\Delta}_m - \bar{\alpha}_m\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1}, \end{aligned}$$

так что в силу (2.7)

$$K_{mm} = -(\alpha_{m-1}\rho_m^2\bar{\Delta}_m + \bar{\alpha}_m\rho_{m-1}^2\Delta_{m-1})(\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}) = c'_{mm}.$$

Случай $j = 1$. Сейчас $K_{m,m+1} = K_{m,m+1}^{(1)} + K_{m,m+1}^{(2)} + K_{m,m+1}^{(3)}$ с

$$\begin{aligned} K_{m,m+1}^{(1)} &= c_{m,m+1}(a_{mm} - a_{m+1,m+1}) \\ &= (\bar{\alpha}_{m+1}\varepsilon_{m+1} - \alpha_{m-1}\varepsilon_m)\rho_m \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1}), \\ K_{m,m+1}^{(2)} &= a_{m,m+1}(c_{m+1,m+1} - c_{mm}) \\ &= -(\bar{\Delta}_m\varepsilon_{m+1} - \Delta_m\varepsilon_m)\rho_m(\bar{\alpha}_{m+1}\alpha_m - \bar{\alpha}_m\alpha_{m-1}), \\ K_{m,m+1}^{(3)} &= a_{m,m+2}c_{m+2,m+1} - a_{m-1,m+1}c_{m,m-1} \\ &= [(\bar{\alpha}_{m+2}\rho_{m+1}^2 - \bar{\alpha}_m\rho_{m-1}^2)\varepsilon_{m+1} - (\alpha_m\rho_{m+1}^2 - \alpha_{m-2}\rho_{m-1}^2)\varepsilon_m]\rho_m. \end{aligned}$$

Значит, $\rho_m^{-1} K_{m,m+1} = u_m \varepsilon_m + v_m \varepsilon_{m+1}$ с

$$\begin{aligned} u_m &= -\alpha_{m-1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) + \alpha_{m-2} \rho_{m-1}^2 - \alpha_m \rho_{m+1}^2 \\ &\quad - \Delta_m (\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}), \\ v_m &= \bar{\alpha}_{m+1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) + \bar{\alpha}_{m+2} \rho_{m+1}^2 - \bar{\alpha}_m \rho_{m-1}^2 \\ &\quad - \bar{\Delta}_m (\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} u_m^{(1)} &:= \alpha_{m-2} \rho_{m-1}^2 - \alpha_m \rho_{m+1}^2 + (\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) \\ &= \alpha_{m+1} \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}^2 + \bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m \alpha_{m-1} - \alpha_m + \alpha_{m-2} \rho_{m-1}^2 \\ &= 2\alpha_{m-1} \operatorname{Re} \bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - 2\alpha_{m-1} \operatorname{Re} \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1} - (\alpha_m - \alpha_{m-2}) \rho_{m-1}^2, \end{aligned}$$

так что

$$u_m = \alpha_{m-1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) - \rho_{m-1}^2 \Delta_{m-1}.$$

Аналогичным образом

$$v_m = -\bar{\alpha}_{m+1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) + \rho_{m+1}^2 \bar{\Delta}_{m+1}$$

и, окончательно,

$$\begin{aligned} K_{m,m+1} &= [\rho_{m+1}^2 \bar{\Delta}_{m+1} - \bar{\alpha}_{m+1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1})] \rho_m \varepsilon_{m+1} \\ &\quad - [\rho_{m-1}^2 \Delta_{m-1} - \alpha_{m-1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+1} \alpha_m - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1})] \rho_m \varepsilon_m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Мы приходим к (2.13) согласно (2.10).

Случай $j = 2$. Запишем $K_{m,m+2} = K_{m,m+2}^{(1)} + K_{m,m+2}^{(2)} + K_{m,m+2}^{(3)}$ с

$$\begin{aligned} K_{m,m+2}^{(1)} &= a_{m,m+2}(c_{m+2,m+2} - c_{mm}) \\ &= \rho_m \rho_{m+1} (\bar{\alpha}_m \alpha_{m-1} - \bar{\alpha}_{m+2} \alpha_{m+1})(\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}), \\ K_{m,m+2}^{(2)} &= c_{m,m+2}(a_{mm} - a_{m+2,m+2}) \\ &= \rho_m \rho_{m+1} \varepsilon_{m+1} \operatorname{Re}(-\bar{\alpha}_m \alpha_{m-1} + \bar{\alpha}_{m+2} \alpha_{m+1}), \\ K_{m,m+2}^{(3)} &= a_{m,m+1} c_{m+1,m+2} - c_{m,m+1} a_{m+1,m+2} \\ &= \rho_m \rho_{m+1} [(\bar{\alpha}_{m+2} \Delta_m + \alpha_{m-1} \bar{\Delta}_{m+1}) \varepsilon_m \\ &\quad - (\alpha_m \bar{\Delta}_m + \bar{\alpha}_{m+1} \Delta_{m+1}) \varepsilon_{m+1}]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{m+2} \Delta_m + \alpha_{m-1} \bar{\Delta}_{m+1} &= -\bar{\alpha}_m \alpha_{m-1} + \bar{\alpha}_{m+2} \alpha_{m+1}, \\ \alpha_m \bar{\Delta}_m + \bar{\alpha}_{m+1} \Delta_{m+1} &= -\alpha_m \bar{\alpha}_{m-1} + \alpha_{m+2} \bar{\alpha}_{m+1} \end{aligned}$$

и, как следует из (2.8),

$$K_{m,m+2} = -\rho_m \rho_{m+1} \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_{m+2} \alpha_{m+1} - \bar{\alpha}_m \alpha_{m-1}) \varepsilon_{m+1}, \quad (2.17)$$

тем самым (2.13) вновь справедливо. Доказательство завершено.

Докажем, что $2) \Rightarrow 1)$. Проблема, с которой мы сталкиваемся на этом шаге, состоит в том, что в противоположность ситуации с цепочкой Тоды КМВ-матрица $\mathcal{C}$ не содержит α_n в чистом виде. Тем самым, уравнения (1.14) надо извлекать, комбинируя соотношения для матричных элементов, вытекающие из уравнения Лакса.

Запишем $|\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n|^2 = (1 - \rho_{n+1}^2)\rho_n^2 = \rho_n^2 - (\rho_n\rho_{n+1})^2$, так что

$$(\rho_n^2)' = 2\rho_n\rho_{n+1}(\rho_n\rho_{n+1})' + (\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n)'(\alpha_{n+1}\rho_n) + (\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n)(\alpha_{n+1}\rho_n)'.$$

Поэтому

$$\rho_n' = \rho_{n+1}(\rho_n\rho_{n+1})' + \text{Re}[\alpha_{n+1}(\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n)']. \quad (2.18)$$

Далее, $(\alpha_{n-1}\rho_n)' = \alpha_{n-1}'\rho_n + \alpha_{n-1}\rho_n'$ и, значит,

$$\alpha_{n-1}' = \frac{1}{\rho_n}[(\alpha_{n-1}\rho_n)' - \alpha_{n-1}\rho_n']. \quad (2.19)$$

Выражение в правой части (2.19) можно выразить через производные матричных элементов КМВ-матрицы и, стало быть, с учетом уравнения Лакса, в терминах самих решений α_n . Во-первых, по (2.14) и (2.17)

$$\begin{aligned} (\rho_n\rho_{n+1})' &= c'_{n,n+2} + c'_{n+2,n} = K_{n,n+2} + K_{n+2,n} \\ &= \rho_n\rho_{n+1} \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+2}\alpha_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Далее, из (2.3), (2.4) немедленно следует $\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n = c_{n+1,n}\varepsilon_n + c_{n,n+1}\varepsilon_{n+1}$, так что в силу (2.15), (2.16)

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}_{n+1}\rho_n)' &= c'_{n+1,n}\varepsilon_n + c'_{n,n+1}\varepsilon_{n+1} = K_{n+1,n}\varepsilon_n + K_{n,n+1}\varepsilon_{n+1} \\ &= \bar{\alpha}_{n+1}\rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) + \rho_n\rho_{n+1}^2\bar{\Delta}_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подобным же образом

$$(\alpha_{n-1}\rho_n)' = \alpha_{n-1}\rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) + \rho_n\rho_{n-1}^2\Delta_{n-1}.$$

Подставляя (2.20) и (2.21) в (2.18), мы получаем

$$\begin{aligned} \rho_n' &= \rho_n\rho_{n+1}^2 \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+2}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}\bar{\Delta}_{n+1}) \\ &\quad + \rho_n|\alpha_{n+1}|^2 \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) \\ &= \rho_n\rho_{n+1}^2 \text{Re}(-\bar{\alpha}_{n+2}\alpha_{n+1} + \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n + \alpha_{n+1}\bar{\Delta}_{n+1}) \\ &\quad + \rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) \\ &= \rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n). \end{aligned}$$

В результате уравнения потока Шура возникают из (2.19):

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}'\rho_n &= \alpha_{n-1}\rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) + \rho_n\rho_{n-1}^2\Delta_{n-1} \\ &= -\alpha_{n-1}\rho_n \text{Re}(\bar{\alpha}_n\alpha_{n-1} - \bar{\alpha}_{n+1}\alpha_n) = \rho_n\rho_{n-1}^2\Delta_{n-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы могли бы с тем же успехом рассмотреть общую начально-граничную задачу, никак не связанную с теорией ОПЕО:

$$\alpha'_n(t) = (1 - |\alpha_n(t)|^2)(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

с непрерывной граничной функцией $|\alpha_{-1}(t)| \leq 1$. Приведенные выше вычисления показывают, что уравнение Лакса для такой задачи имеет вид $\mathcal{C}'_g = [A_g, \mathcal{C}_g]$ с

$$\mathcal{C}_g = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha}_0\alpha_{-1} & \bar{\alpha}_1\rho_0 & \rho_0\rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_{-1}\rho_0 & -\bar{\alpha}_1\alpha_0 & -\alpha_0\rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\alpha}_2\rho_1 & -\bar{\alpha}_2\alpha_1 & \bar{\alpha}_3\rho_2 & \rho_2\rho_3 & \dots \\ 0 & \rho_1\rho_2 & -\alpha_1\rho_2 & -\bar{\alpha}_3\alpha_2 & -\alpha_2\rho_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_4\rho_3 & -\bar{\alpha}_4\alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$A_g = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_0\alpha_{-1} & \rho_0\bar{\Delta}_0 & \rho_0\rho_1 & & & \\ & -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_1\alpha_0 & \rho_1\bar{\Delta}_1 & \rho_1\rho_2 & & \\ & & -\operatorname{Re} \bar{\alpha}_2\alpha_1 & \rho_2\bar{\Delta}_2 & \rho_2\rho_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

(что естественно сравнить с (1.12) и (1.16)). Более того, бесконечная в обе стороны система

$$\alpha'_n(t) = (1 - |\alpha_n(t)|^2)(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

с начальными данными $\{\alpha_n(0)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{D}$ также допускает эквивалентную запись в форме уравнения Лакса

$$\widehat{\mathcal{C}}' = [\widehat{A}, \widehat{\mathcal{C}}],$$

где $\widehat{\mathcal{C}}$ и $\widehat{A}$ суть бесконечные в обе стороны продолжения (1.12) и (1.16), задаваемые теми же выражениями (2.1)–(2.4) и (2.5)–(2.6) соответственно с

$$\varepsilon_m = \frac{1 - (-1)^{|m|}}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1: 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 3). Обозначим через

$$R_z(t) := (\mathcal{C} - zI)^{-1} = \|r_{mn}(z, t)\|_{m,n=0}^{\infty}$$

резольвенту КМВ-матрицы (1.12). Как легко видеть, R_z удовлетворяет тому же самому уравнению Лакса (1.15). В самом деле, дифференцирование по t тождества $(\mathcal{C} - zI)R_z = I$ дает

$$\mathcal{C}'(t)R_z(t) + (\mathcal{C}(t) - zI)R'_z(t) = 0,$$

так что

$$R'_z(t) = -R_z(t)\mathcal{C}'(t)R_z(t) = -R_z(t)[A, \mathcal{C}]R_z(t) = [A, R_z], \quad (3.1)$$

что и утверждалось.

Рассмотрим уравнение для $(0, 0)$ -матричного элемента (3.1):

$$\begin{aligned} r'_{00} &= \operatorname{Re} \bar{\alpha}_0 r_{00} + \rho_0 \bar{\Delta}_0 r_{10} + \rho_0 \rho_1 r_{20} - r_{00} \operatorname{Re} \bar{\alpha}_0 \\ &= \rho_0 (\bar{\alpha}_1 + 1) r_{10} + \rho_0 \rho_1 r_{20}. \end{aligned}$$

Из $(\mathcal{C} - zI)R_z = I$ вытекает

$$(\bar{\alpha}_0 - z)r_{00} + \bar{\alpha}_1 \rho_0 r_{10} + \rho_0 \rho_1 r_{20} = 1,$$

что позволяет исключить r_{20} и прийти к равенству

$$r'_{00} = \rho_0 r_{10} + 1 - (\bar{\alpha}_0 - z)r_{00}. \quad (3.2)$$

В силу спектральной теоремы для унитарных операторов матричные элементы резольвенты могут быть найдены из соотношения

$$r_{m,n}(z, t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\chi_n(\zeta) \overline{\chi_m(\zeta)}}{\zeta - z} d\mu(\zeta, t)$$

с χ_n , заданным (1.11), что особенно просто выглядит для первых двух элементов:

$$r_{00}(z, t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta, t)}{\zeta - z}, \quad r_{10}(z, t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_1(\zeta)}}{\zeta - z} d\mu(\zeta, t),$$

где $\varphi_1(z) = \rho_0^{-1}(z - \bar{\alpha}_0)$. Поэтому для правой части (3.2) справедливо

$$\rho_0 r_{10} + 1 - (\bar{\alpha}_0 - z)r_{00} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + \bar{\zeta} - 2 \operatorname{Re} \alpha_0}{\zeta - z} d\mu(\zeta, t),$$

и мы приходим к такому дифференциальному уравнению для спектральной меры:

$$d\mu'(\zeta, t) = (\zeta + \bar{\zeta} - 2 \operatorname{Re} \alpha_0) d\mu(\zeta, t).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} d\mu(\zeta, t) &= \exp \left\{ \int_0^t (\zeta + \bar{\zeta} - 2 \operatorname{Re} \alpha_0(s)) ds \right\} d\mu(\zeta, 0) \\ &= C(t) e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} d\mu(\zeta, 0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем, что $3) \Rightarrow 1)$. Мы исходим из преобразования спектральной меры $d\mu(\zeta, t) = \varphi(\zeta, t) d\mu(\zeta, 0)$ и хотим вывести дифференциальное уравнение для ее моментов

$$\mu_k(t) = \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-k} d\mu(\zeta, t) = \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-k} \varphi(\zeta, t) d\mu(\zeta, 0).$$

В нашем случае

$$\varphi(\zeta, t) = \frac{\exp(t(\zeta + \zeta^{-1}))}{f(t)}, \quad f(t) = \int_{\mathbb{T}} e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} d\mu(\zeta, 0),$$

так что

$$\varphi'(\zeta, t) = (\zeta + \zeta^{-1})\varphi(\zeta, t) - \frac{f'(t)}{f(t)}\varphi(\zeta, t).$$

Так как $f'f^{-1} = c_1 + c_{-1}$, то мы получаем

$$\mu'_k(t) = \mu_{k-1}(t) + \mu_{k+1}(t) - g(t)\mu_k(t), \quad g(t) = c_1(t) + c_{-1}(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Дальнейшее рассуждение существенно опирается на формулу (1.10), связывающую коэффициенты Верблунского и моменты меры ортогональности. Идея дифференцирования определителей с учетом (3.3) восходит к [16], см. также [11; лемма 1]. Для множества натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ обозначим

$$T(k_1, \dots, k_n) := \begin{pmatrix} \mu_{k_1} & \mu_{k_1-1} & \dots & \mu_{k_1-n+1} \\ \mu_{k_2} & \mu_{k_2-1} & \dots & \mu_{k_2-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k_n} & \mu_{k_n-1} & \dots & \mu_{k_n-n+1} \end{pmatrix},$$

$D(k_1, \dots, k_n) := \det T(k_1, \dots, k_n)$ и тем самым $D_n = D(0, 1, \dots, n-1)$. Положим $G_n = D(-1, 0, \dots, n-2)$ и запишем (1.10) как $\Phi_n(0, t) = (-1)^n G_n D_n^{-1}$. Тогда

$$\Phi'_n(0, t) = (-1)^n \frac{G'_n D_n - G_n D'_n}{D_n^2}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) ясно, что все промежуточные определители в сумме

$$D'_n = \begin{vmatrix} \mu'_0 & \mu'_{-1} & \dots & \mu'_{-n+1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n+1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu'_{n-1} & \mu'_{n-2} & \dots & \mu'_0 \end{vmatrix}$$

имеют одно и то же значение $-gD_n$, в то время как первый и последний определители равны соответственно

$$\begin{vmatrix} \mu'_0 & \mu'_{-1} & \dots & \mu'_{-n+1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \dots & \mu_0 \end{vmatrix} = D(-1, 1, 2, \dots, n-1) - g(t)D_n,$$

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \dots & \mu_{-n+1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \dots & \mu_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu'_{n-1} & \mu'_{n-2} & \dots & \mu'_0 \end{vmatrix} = D(0, 1, \dots, n-2, n) - g(t)D_n.$$

Значит,

$$D'_n(t) = -ng(t)D_n(t) + D(-1, 1, \dots, n-2, n-1) + D(0, 1, \dots, n-2, n). \quad (3.5)$$

Подобным же образом

$$G'_n(t) = -ng(t)G_n(t) + D(-2, 0, \dots, n-3, n-2) + D(-1, 0, \dots, n-3, n-1). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.4), мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Phi'_n(0, t) = \frac{(-1)^n}{D_n^2} \{ & D_n[D(-2, 0, \dots, n-2) + D(-1, \dots, n-3, n-1)] \\ & - G_n[D(-1, 1, \dots, n-1) + D(0, \dots, n-2, n)] \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Перейдем теперь к правой части (1.14), записанной для $\Phi_n(0)$:

$$(1 - |\Phi_n(0)|^2)(\Phi_{n+1}(0) - \Phi_{n-1}(0)) = (-1)^{n+1} \frac{D_n^2 - |G_n|^2}{D_n^2} \left\{ \frac{G_{n+1}}{D_{n+1}} - \frac{G_{n-1}}{D_{n-1}} \right\}.$$

Стандартное тождество Сильвестра, примененное к матрице $T(0, 1, \dots, n)$, дает

$$D_n^2 - |G_n|^2 = D_{n+1}D_{n-1},$$

так что

$$(1 - |\Phi_n(0)|^2)(\Phi_{n+1}(0) - \Phi_{n-1}(0)) = \frac{(-1)^{n+1}}{D_n^2} (G_{n+1}D_{n-1} - D_{n+1}G_{n-1}).$$

Повторное применение того же тождества (в несколько видоизмененной форме) показывает, что

$$\begin{aligned} G_{n+1}D_{n-1} &= G_n D(-1, 1, \dots, n-1) - D_n D(-2, 0, \dots, n-2), \\ D_{n+1}G_{n-1} &= D_n D(-1, 0, \dots, n-3, n-1) - G_n D(0, 1, \dots, n-2, n), \end{aligned}$$

и мы, тем самым, приходим к потоку Шура (1.14). Доказательство теоремы 1 полностью завершено.

Существует еще один способ доказательства соотношения $3) \Rightarrow 1)$ теоремы 1, который позволяет получить дифференциальное уравнение для монических полиномов $\Phi_n(z, t) = \Phi_n(z, \mu(\cdot, t))$. Соотношение (1.14) получается из этого уравнения при подстановке $z = 0$ (ср. [17; раздел 8.3]).

ТЕОРЕМА 2. *Монические полиномы $\Phi_n(\cdot, t)$, ортогональные по мере $\mu(\zeta, t)$ (1.17), удовлетворяют уравнению*

$$\Phi'_n(z, t) = \Phi_{n+1}(z, t) - (z + \bar{\alpha}_n \alpha_{n-1}) \Phi_n(z, t) - (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \Phi_{n-1}(z, t). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея состоит в дифференцировании соотношений ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi_m(\zeta, t) \overline{\Phi_n(\zeta, t)} d\mu(\zeta, t) = 0, \quad m \neq n,$$

по параметру t . Мы имеем при $m < n$

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi'_m \bar{\Phi}_n d\mu(\zeta, t) + \int_{\mathbb{T}} \Phi_m \bar{\Phi}'_n d\mu(\zeta, t) + \int_{\mathbb{T}} (\zeta + \bar{\zeta}) \Phi'_m \bar{\Phi}_n d\mu(\zeta, t) = 0. \quad (3.9)$$

Очевидно, что Φ'_m — полином степени не выше $m-1$, так что первый интеграл в левой части равен нулю. Если же $m \leq n-2$, то

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi_m \overline{(\Phi'_n + \zeta \Phi_n)} d\mu(\zeta, t) = 0$$

и, значит,

$$\Phi'_n(z) + z\Phi_n(z) = x_n\Phi_{n+1}(z) + y_n\Phi_n(z) + z_n\Phi_{n-1}(z) \quad (3.10)$$

с некоторыми константами x_n, y_n, z_n , зависящими от t . Сравнивая коэффициенты при z^{n+1} и z^n в (3.10) и используя (1.6), мы получаем

$$x_n = 1, \quad y_n = l_n(t) - l_{n+1}(t).$$

Для того чтобы найти значение z_n , возьмем (3.9) с $m = n - 1$ и применим рекуррентные соотношения Сегё (1.9):

$$0 = \int_{\mathbb{T}} \Phi_{n-1}(\overline{\Phi'_n + \zeta\Phi_n}) d\mu(\zeta, t) + \int_{\mathbb{T}} (\Phi_n + \bar{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*) \bar{\Phi}_n d\mu(\zeta, t),$$

так что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \Phi_{n-1}(\overline{\Phi'_n + \zeta\Phi_n}) d\mu(\zeta, t) &= -\|\Phi_n\|_{\mu}^2, \\ z_n &= -\frac{\|\Phi_n\|_{\mu}^2}{\|\Phi_{n-1}\|_{\mu}^2} = -\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2} = |\alpha_{n-1}|^2 - 1. \end{aligned}$$

Для определения l_n обратимся к (1.13):

$$\Phi_n(z) = z^n + l_n z^{n-1} + \dots = \prod_{j=0}^{n-1} (z + \bar{\alpha}_j \alpha_{j-1}) + \dots$$

и, тем самым, $l_n = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\alpha}_j \alpha_{j-1}$, что приводит к (3.8). Полагая $z = 0$, получаем (1.14), что и требовалось доказать.

Следует отметить, что коэффициенты Верблунского $\{\alpha_n(t)\}_{n \geq 0}$ преобразования Бесселя наследуют некоторые свойства начальных данных $\{\alpha_n(0)\}_{n \geq 0}$, такие, например, как характер убывания по переменной n .

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\{\alpha_n(0)\} \in \ell^p \Rightarrow \{\alpha_n(t)\} \in \ell^p \quad \forall t > 0, p = 1, 2;$
- 2) $|\alpha_n(0)| \leq K e^{-\alpha n} \Rightarrow |\alpha_n(t)| \leq K(t) e^{-\alpha n} \quad \forall t > 0, \alpha > 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.17) очевидным образом следует, что $\mu(\zeta, t)$ принадлежит классу Сегё (т.е. $\log \mu' \in L^1(\mathbb{T})$) в том и только том случае, если $\mu(\zeta, 0)$ принадлежит этому классу, и, значит, первое утверждение с $p = 2$ есть непосредственное следствие фундаментальной теоремы Сегё [5; теорема 8.2]. Что касается случая $p = 1$, заметим, что по теореме Бакстера (см., например, [3; теорема 5.2.1]) $d\mu(\zeta, 0) = w dm$ с $w > 0$ и $w \in W$ – класс абсолютно сходящихся рядов Фурье. Из (1.17) и теоремы Винера–Леви вытекает:

$$d\mu(\zeta, t) = w(\zeta, t) dm, \quad w(\zeta, t) = e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} w(\zeta) \in W, \quad w(\zeta, t) > 0,$$

и повторное применение теоремы Бакстера приводит к нужному заключению.

Для того чтобы доказать второе утверждение, введем функцию Сегё

$$D(z, \mu) := \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log w(\zeta) dm\right), \quad (3.11)$$

определяемую для произвольной меры $d\mu = w dm + d\mu_s$ из класса Сегё. Непосредственное вычисление показывает, что для преобразования Бесселя (1.17)

$$D(z, \mu(t)) = C(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} [t(\zeta + \zeta^{-1}) + \log w(\zeta)] dm\right) = C(t) e^{tz} D(z, \mu(0)). \quad (3.12)$$

Обозначим через R_t радиус сходимости ряда Тейлора функции $D^{-1}(z, \mu(t))$ в нуле. По теореме Неваи–Тотика [18]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n(t)|^{1/n} = R_t^{-1},$$

и из (3.12) очевидно следует $R_t = R_0$ при всех $t > 0$, что и утверждалось.

Отметим, что в предположениях теоремы 3 ряд

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\alpha}_j(t) \alpha_{j-1}(t)$$

абсолютно сходится, и поток Шура можно записать в виде

$$\alpha'_j = \{\alpha_j, H\}, \quad H = -2 \operatorname{Im} \mathcal{H},$$

где (формальные) скобки Пуассона определяются равенством

$$\{f, g\} = i \sum_{j \geq 0} \rho_j^2 \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_j} \frac{\partial g}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}_j} \right].$$

Таким образом, (1.14) отражает эволюцию круговых параметров под действием потока, порождаемого гамильтонианом $-2 \operatorname{Im} \mathcal{H}$ (ср. [13]).

§ 4. Модифицированные меры Бесселя на единичной окружности

В силу граничного условия $\alpha_{-1} \equiv -1$ начально-граничная задача (1.20) с нулевыми начальными данными $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = \dots = 0$ имеет нетривиальное решение. Часть 3) теоремы 1 показывает, что мы имеем дело с преобразованием Бесселя меры Лебега

$$d\mu(\zeta, t) = C(t) e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} dm.$$

Такие меры в дальнейшем именуются *модифицированными мерами Бесселя* на единичной окружности, их круговые параметры будем обозначать $\beta_n(t)$. Соответствующая система ортогональных полиномов возникает при изучении распределения длины наибольшей неубывающей последовательности случайных слов [19], в некоторых матричных моделях [20] (относительно дальнейших свойств модифицированных мер и полиномов Бесселя см. [17; пример 8.3.4]).

Заметим для начала, что нормировочный коэффициент $C(t)$ можно легко вычислить:

$$\begin{aligned} C^{-1}(t) &= \int_{\mathbb{T}} e^{t(\zeta + \zeta^{-1})} dm = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos x} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} \int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} = I_0(2t), \end{aligned}$$

где I_k – модифицированная функция Бесселя порядка k . Аналогичным образом, для моментов мер выполняются соотношения

$$\mu_p(t) = \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-p} d\mu(\zeta, t) = \frac{I_p(2t)}{I_0(2t)}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad \mu_{-p} = \mu_p.$$

Характерной чертой мер Бесселя является тот факт, что их коэффициенты Верблунского удовлетворяют нелинейному рекуррентному соотношению, известному под именем *дискретное уравнение Пенлеве II* (см. [20] и [17; лемма 8.3.5])¹:

$$-(n+1) \frac{\beta_n(t)}{t(1-\beta_n^2(t))} = \beta_{n+1}(t) + \beta_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.1)$$

с $\beta_{-1} = -1$, $\beta_0(t) = I_1(2t)/I_0(2t)$. Ясно, что в силу симметрии мер $d\mu(\zeta, t)$ относительно вещественной оси все параметры β_n сейчас вещественны.

Прежде чем изучать асимптотическое поведение $\beta_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$, мы докажем один вспомогательный результат, касающийся общих потоков Шура.

ЛЕММА 4. *Для решения α_n потока Шура (1.14) справедливы такие предельные соотношения:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_n(t) \rho_{n+1}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_n(t) (\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \overline{\alpha_n(t)} \alpha_{n-1}(t) = \gamma_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.3)$$

Более того, последовательность γ_n монотонно не убывает: $-1 \leq \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы обратимся к форме (1.21)–(1.22) уравнения Лакса. Так как $B^* = -B$, то, как легко видеть,

$$L' = [\pi(L), L], \quad L := \frac{\mathcal{C} + \mathcal{C}^*}{2}, \quad \pi(L) = L_+ - L_-. \quad (4.4)$$

Уравнения вида (4.4) изучаются в [21] и называются *потоками Тоды*. Согласно [21; предложение 5] $L(t)$ сходится в сильной операторной топологии к некоторому диагональному оператору $\operatorname{diag}(d_0, d_1, \dots)$, что влечет (4.2)–(4.3) ввиду явных формул для L . Заметим, что (4.3) при $\gamma_n = -d_n$ получается из диагональных элементов $L(t)$, тогда как оба соотношения (4.2) возникают из внедиагональных элементов.

Второе утверждение леммы следует из (1.19):

$$\rho_n(t) = \rho_n(0) \exp \left\{ \int_0^t \operatorname{Re}(\bar{\alpha}_n(s) \alpha_{n-1}(s) - \bar{\alpha}_{n+1}(s) \alpha_n(s)) ds \right\},$$

и поскольку левая часть равенства ограничена при $t \rightarrow \infty$, мы имеем $\gamma_n \leq \gamma_{n+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют соотношения иного сорта, справедливые по крайней мере в классе Сегё (по теореме 3 поток Шура не выводит из этого класса).

¹В обозначениях [17] $r_n(t) = -\beta_{n-1}(t/2)$.

Пусть $\mu(\zeta, t)$ принадлежат классу Сегё, так что $\alpha_n(t) \in \ell^2$ при всех $t \geq 0$. Запишем разложение Тейлора в нуле для логарифма функции Сегё (3.11)

$$\log D(z, \mu(t)) = w_0(t) + w_1(t)z + w_2(t)z^2 + \dots$$

В силу теоремы Верблунского о взаимно однозначном соответствии между мерами и круговыми параметрами тейлоровские коэффициенты w_n суть функционалы от параметров α_k . Явные выражения для w_0 и w_1 приведены в [3; раздел 2.8]:

$$w_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \log \rho_k, \quad w_1 = - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{\alpha}_{k-1}.$$

Выражения для произвольного n обсуждаются в работе [22]. Например,

$$w_2 = - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{\alpha}_{k-2} \rho_{k-1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \bar{\alpha}_{k-1})^2.$$

Из (3.12) очевидны такие соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \log \rho_k(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \log \rho_k(0) + \log C(t), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) \bar{\alpha}_{k-1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(0) \bar{\alpha}_{k-1}(0) - t \end{aligned}$$

и

$$w_n(t) = w_n(0), \quad n \geq 2, \quad t > 0.$$

Последние равенства суть интегралы движения для потока Шура.

Для вещественных потоков Шура предельные соотношения (4.2)–(4.3) можно уточнить следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. *Для вещественных потоков Шура существуют пределы*

$$\hat{\alpha}_n := \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_n(t), \quad (4.5)$$

$-1 \leq \hat{\alpha}_n \leq 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, и $|\hat{\alpha}_k| < 1$ влечет $\hat{\alpha}_{k-1} = \hat{\alpha}_{k+1} = \pm 1$. Далее, если при некотором k выполняется $\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_{k+1}$, то $\hat{\alpha}_j = \hat{\alpha}_k = \pm 1$ при всех $j \geq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (4.3), при $n = 0$ существует $\hat{\alpha}_0$. Применяя (4.3) с $n = 1$, мы убеждаемся, что существует $\hat{\alpha}_1$, если только $\hat{\alpha}_0 \neq 0$. Предположим теперь, что $\hat{\alpha}_j$ существует при $j = 0, 1, \dots, n-1$ и $\hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 \cdots \hat{\alpha}_{n-1} \neq 0$. Если $\hat{\alpha}_n \neq 0$, то $\hat{\alpha}_{n+1}$ существует в силу (4.3). Если же эта величина равна нулю, то $\rho_n(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, и по второму соотношению (4.2) $\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t) \rightarrow 0$, так что $\hat{\alpha}_{n+1} = \hat{\alpha}_{n-1}$ существует и (4.5) тем самым доказано.

Предположим далее, что $|\hat{\alpha}_k| < 1$ при некотором k . Тогда, как показано выше, $\hat{\alpha}_{k+1} = \hat{\alpha}_{k-1}$. Первое соотношение (4.2) показывает, что эта величина равна по модулю 1.

Наконец, пусть $\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_{k+1}$ при некотором k . Как мы только что заметили, эта величина равна по модулю 1. В силу (4.3) $\gamma_{k+1} = 1$, так что последнее утверждение леммы 4 влечет $\gamma_j = 1$ при всех $j \geq k+1$, что и завершает доказательство.

Заметим, что нетрудно построить пример потока Шура (начальной меры $\mu(\zeta, 0)$) такой, что $|\hat{\alpha}_0| < 1$. В самом деле, пусть $\mu(\zeta, 0)$ – произвольная мера, симметричная относительно вещественной оси, носитель которой содержится в левой полукружности, за исключением двух равных точечных масс в симметричных точках $\tau, \bar{\tau}$, $0 < \operatorname{Re} \tau < 1$. Как легко видеть, для семейства мер $\mu(\zeta, t)$ (1.17) справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\zeta, t) = \frac{1}{2}(\delta(\tau) + \delta(\bar{\tau}))$$

в $*$ -слабой топологии пространства мер, так что $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_0(t) = \operatorname{Re} \tau$.

Возвращаясь к модифицированным мерам Бесселя и их круговым параметрам, докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *При всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_n(t) = (-1)^n, \quad (4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - \beta_n^2(t)) = \frac{n+1}{2}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко видеть, (4.7) есть непосредственное следствие (4.6) и (4.1). Доказательство (4.6) проведем в два шага.

1. Как показано в лемме 4, последовательность γ_n не убывает. Докажем, что для модифицированных мер Бесселя все γ_n на самом деле равны между собой. Предположим противное, т.е. $\gamma_k < \gamma_{k+1}$ при некотором k . Как следует из (1.19),

$$\rho_k^2(t) \leq C e^{-\delta t}, \quad \delta > 0, \quad \rho_k^2 = 1 - \beta_k^2.$$

Но тогда

$$\frac{|\beta_n(t)|}{t(1 - \beta_k^2(t))} = \frac{\sqrt{1 - \rho_k^2(t)}}{t\rho_k^2(t)} \geq \frac{\sqrt{1 - \rho_k^2(t)}}{Ct} e^{\delta t} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

что противоречит (4.1), поскольку правая часть этого равенства ограничена. Остается лишь найти общее значение величин γ_n .

2. Покажем, что $\gamma_n = -1$, вычисляя $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0(t)$. Как хорошо известно,

$$I_k(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_1(2t)}{I_0(2t)} = 1$$

и, значит, $\gamma_0 = -1$, что и требовалось доказать. Соотношение (4.6) теперь получается из (4.3) по индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Представляет интерес получение прямого доказательства соотношения (4.6), основанного на явной формуле (1.10), которая в нашем случае имеет вид

$$\beta_n(t) = (-1)^n \frac{\det \|I_{k-j-1}(2t)\|_{0 \leq k, j \leq n}}{\det \|I_{k-j}(2t)\|_{0 \leq k, j \leq n}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и на известном асимптотическом ряде для модифицированной функции Бесселя (см., например, [23; глава 7.8]):

$$I_k(t) \simeq \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(4k^2 - 1^2) \cdots (4k^2 - (2j-1)^2)}{j! (8t)^j}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Автору удалось провести вычисления при $n = 1$, используя два члена этого ряда. Можно ожидать, что в случае произвольного n потребуется $n + 1$ членов ряда (4.8).

Автор благодарен Ю. М. Березанскому, который обратил его внимание на проблемы, обсуждаемые в настоящей работе, и 80-летию которого она посвящается. Автор также признателен М. Измаилу за возможность ознакомиться с рукописью его книги [17].

Список литературы

- [1] J. Moser, “Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations”, *Adv. Math.*, **16** (1975), 197–220.
- [2] J. Moser, “Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system”, *Dynamical Systems. Theory and Application*, Lecture Notes in Phys., **38**, eds. J. Ehlers, K. Hepp, H. A. Weidenmüller, Springer, Berlin, 1975, 467–497.
- [3] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1: Classical theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [4] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 2: Spectral theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [5] Я. Л. Геронимус, *Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Оценки, асимптотические формулы, ортогональные ряды*, ГИФМЛ, М., 1958.
- [6] M. J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez, “Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle”, *Linear Algebra Appl.*, **362** (2003), 29–56.
- [7] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations”, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 598–603.
- [8] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis”, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 1011–1018.
- [9] L. Faybusovich, M. Gekhtman, “On Schur flows”, *J. Phys. A*, **32** (1999), 4671–4680.
- [10] G. S. Ammar, W. B. Gragg, “Schur flows for orthogonal Hessenberg matrices”, *Hamiltonian and gradient flows, algorithms and control*, Fields Inst. Commun., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 27–34.
- [11] A. Mukaihira, Y. Nakamura, “Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization”, *J. Comput. Appl. Math.*, **139**:1 (2002), 75–94.
- [12] A. Mukaihira, Y. Nakamura, “Integrable discretization of the modified KdV equation and applications”, *Inverse Problems*, **16** (2000), 413–424.
- [13] I. Nenciu, “Lax pairs for the Ablowitz–Ladik system via orthogonal polynomials on the unit circle”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2005**:11 (2005), 647–686.

- [14] R. Killip, I. Nenciu, *CMV: the unitary analogue of Jacobi matrices*, [arXiv:math.SG/0508113](#), 2005.
- [15] J. S. Geronimo, F. Gesztesy, H. Holden, “Algebro-geometric solution of the Baxter–Szegő difference equation”, *Comm. Math. Phys.*, **258** (2005), 149–177.
- [16] Yu. M. Berezanskii, “The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem”, *Rep. Math. Phys.*, **24**:1 (1986), 21–47.
- [17] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia Math. Appl., **98**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [18] P. Nevai, V. Totik, “Orthogonal polynomials and their zeros”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **53** (1989), 99–104.
- [19] J. Baik, P. Deift, K. Johansson, “On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **12** (1999), 1119–1178.
- [20] V. Periwal, D. Shevitz, “Unitary-matrix models as exactly solvable string theories”, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 1326–1329.
- [21] P. Deift, L. C. Li, C. Tomei, “Toda flows with infinitely many variables”, *J. Funct. Anal.*, **64** (1985), 358–402.
- [22] L. Golinskii, A. Zlatoš, *Coefficients of orthogonal polynomials on the unit circle and higher-order Szegő theorems*, [arXiv:math.CA/0509192](#), 2005.
- [23] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978.

Л. Б. Голинский (L. B. Golinskii)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Вернина НАН Украины, г. Харьков

E-mail: golinskii@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию

29.12.2005