Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, О физической интерпретации некоторых линейчатых поверхностей в E^3 с помощью движения точечного заряда, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 12, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:49:13

УДК 514.7+514.85/.862+533.922

Ю. А. Аминов

О физической интерпретации некоторых линейчатых поверхностей в E^3 с помощью движения точечного заряда

В работе дается физическая интерпретация некоторых линейчатых поверхностей в E^3 с помощью движения электрона в постоянном магнитном поле и излучения им электромагнитного поля. Доказывается теорема о существовании и единственности “сопряженного” электрона.

Библиография: 4 названия.

В работе [1] были построены некоторые стандартные линейчатые поверхности Φ_i в n -мерном евклидовом пространстве. При $n = 3$ поверхность Φ_1 составлена из касательных к винтовой линии, Φ_2 – прямой геликоид, Φ_3 – поверхность, образованная движением бинормальной прямой винтовой линии.

В настоящей работе дается физическая интерпретация этих стандартных и других линейчатых поверхностей в E^3 , связанная с движением электрона в постоянном магнитном поле и излучением им электромагнитного поля.

Пусть $H = H_0 = \text{const}$ – постоянное по времени и в пространстве магнитное поле. На заряженную частицу, например электрон, действует сила Лоренца $[v, H_0]$, где v – вектор скорости частицы. Если $x(t)$ – радиус-вектор точки, в которой расположена частица, то уравнение движения записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu_0 \left[\frac{dx}{dt}, H_0 \right], \quad (1)$$

где μ_0 – некоторая физическая постоянная. Хорошо известно, что в этом случае электрон движется либо по окружности, либо по винтовой линии, либо по прямой (в зависимости от начальных условий).

Действительно, из (1) получаем

$$\frac{dx}{dt} = \mu_0 [x, H_0] + c, \quad (2)$$

где $c = (c_i)$ – постоянный вектор. Пусть e_1, e_2, e_3 – ортонормированный базис в E^3 и $H_0 = h e_3$, где h – число. Тогда уравнения (2) переписываются в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu_0 x_2 h + c_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\mu_0 x_1 h + c_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= c_3. \end{aligned}$$

Если $c_3 = 0$, то движение частицы происходит по окружности, если $c_3 \neq 0$, то частица движется по винтовой линии или прямой. С помощью переноса начала координат

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{c_2}{\mu_0 h}, \quad \bar{x}_2 = x_2 + \frac{c_1}{\mu_0 h}$$

получим уравнения этой кривой

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= R \cos \mu_0 h t, \\ \bar{x}_2 &= -R \sin \mu_0 h t, \\ x_3 &= c_3 t + c_4,\end{aligned}$$

где радиус R цилиндра, на котором лежит винтовая линия, определяется начальными условиями

$$R^2 = \left(x_{10} - \frac{c_2}{\mu_0 h} \right)^2 + \left(x_{20} + \frac{c_1}{\mu_0 h} \right)^2,$$

x_{i0} – координаты частицы в начальный момент времени. Если $R = 0$, то частица движется по прямой, параллельной оси x_3 .

Легко найти связь времени t и длины дуги s винтовой линии:

$$s = \mu t, \quad \mu = \sqrt{(\mu_0 h)^2 R^2 + c_3^2}.$$

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – натуральный базис винтовой линии и k – ее кривизна, $\varkappa$ – кручение. Тогда

$$v = \frac{dx}{dt} = \mu \xi_1, \quad \frac{dv}{dt} = k \mu^2 \xi_2.$$

Известно, что если провести прямые по направлению главных нормалей винтовой линии, то множество точек этих прямых образует прямой геликоид. Таким образом, *сила Лоренца, действующая на электрон в постоянном магнитном поле, направлена по лучам геликоида.*

Построенные ниже линейчатые поверхности связаны с излучением электрона. Так как траектория искривлена, то электрон имеет ненулевое ускорение и поэтому излучает электромагнитное поле. Это явление хорошо изучено в классической электродинамике и описывается формулами, см. [2; формула (19.17)]. Пусть начало координат расположено в точке, в которой находится электрон в данный момент времени. Обозначим эту точку Q_1 .

Пусть r – радиус-вектор точки пространства, dv/dt – ускорение частицы. Тогда для излучения электрического и магнитного полей в точке с радиус-вектором r имеют место формулы

$$E_{\text{emit}}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 l^3} \left[r, \left[r - \frac{v|r|}{c}, \frac{dv}{dt} \right] \right], \quad (3)$$

$$B_{\text{emit}}(r) = \frac{[r, E]}{|r|c}, \quad (4)$$

где $l = |r| - (vr)/c$, e, ϵ_0, c – некоторые физические постоянные.

Рассмотрим последовательно излучение в направлении векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_3 . Обозначим $|r| = \rho$, $r = \rho \xi_1$. Применяя формулы (3) и (4), получим

$$E_{\text{emit}}(\rho \xi_1) = -\frac{\sigma_1}{\rho} \xi_2,$$

где постоянная

$$\sigma_1 = \frac{e \mu^2 k}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{\mu}{c} \right)^{-2}.$$

Аналогично найдем

$$B_{\text{emit}}(\rho\xi_1) = -\frac{\sigma_1}{\rho c} \xi_3.$$

Перенесем вектор $E_{\text{emit}}(\rho\xi_1)$ параллельно так, чтобы его начало было в точке Q_1 . Тогда его конец P будет располагаться на луче вдоль главной нормали винтовой линии. При изменении ρ точка P перемещается вдоль луча, причем при $\rho \rightarrow 0$ точка удаляется в бесконечность, а при $\rho \rightarrow \infty$ точка приближается к точке Q_1 . Заметим, что $E_{\text{emit}}(-\rho\xi_1) = E_{\text{emit}}(\rho\xi_1)$, поэтому луч покрывается дважды. При движении электрона вдоль винтовой линии луч Q_1P опишет часть геликоида, лежащую вне цилиндра, на котором располагается винтовая линия.

Аналогично построим поверхность с помощью магнитного поля $B_{\text{emit}}(\rho\xi_1)$. Конец вектора B_{emit} после параллельного переноса располагается на бинормали винтовой линии. Эту точку обозначим через M . Так как $B_{\text{emit}}(-\rho\xi_1) = -B_{\text{emit}}(\rho\xi_1)$, то точка M пробегает всю прямую, идущую вдоль бинормали, за исключением точки Q_1 . При движении точки Q_1 вдоль винтовой линии точки этой прямой описывают стандартную линейчатую поверхность Φ_3 .

Подобное рассмотрение излучения в направлении других базисных векторов приводит к другим стандартным линейчатым поверхностям. Выпишем результат, опуская для простоты сокращение “emit”:

$$\begin{aligned} E(\rho\xi_1) &= -\frac{\sigma_1\xi_2}{\rho}, & E(\rho\xi_2) &= -\frac{\sigma_2\xi_1}{\rho c}, & E(\rho\xi_3) &= -\frac{\sigma_3\xi_2}{\rho}, \\ B(\rho\xi_1) &= -\frac{\sigma_1\xi_3}{\rho c}, & B(\rho\xi_2) &= \frac{\sigma_2\xi_3}{\rho c^2}, & B(\rho\xi_3) &= \frac{\sigma_3\xi_1}{\rho c}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_2 = -\frac{ek}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mu}{c}\right)^3, \quad \sigma_3 = -\frac{ek}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mu}{c}\right)^2.$$

Получаем следующие стандартные линейчатые поверхности:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_2, & \Phi_1, & \Phi_2, \\ \Phi_3, & \Phi_3, & \Phi_1. \end{array}$$

Пусть τ – единичный вектор, касательный к цилиндру в точке траектории. Так как вектор ξ_2 является нормалью к цилиндру, то

$$\tau = \cos \omega \xi_1 + \sin \omega \xi_3.$$

Рассмотрим излучение в направлении τ . Имеем

$$E(\rho\tau) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 l^3} \left[\rho\tau, \left[\rho\tau - \frac{\rho\mu}{c} \xi_1, k\mu^2 \xi_2 \right] \right] = \sigma_3 \left(1 - \frac{\mu \cos \omega}{c} \right)^{-2} \xi_2.$$

Таким образом, справедливо следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Электрическая компонента излучения для любого направления τ , касательного к цилиндру в точке излучения, направлена по нормали к цилиндру. Вектор Умова–Пойтинга направлен по τ :

$$[E_{\text{emit}}(\tau), B_{\text{emit}}(\tau)] = \frac{\sigma}{\rho^2} \tau,$$

где σ – некоторое число, зависящее от ω . Первую часть этого утверждения можно переформулировать так: во всех точках плоскости, касательной к цилиндру в точке излучения, электрическая компонента излучения ортогональна этой плоскости.

Поверхности нулевого излучения. Две естественные линейчатые поверхности возникают при рассмотрении направлений, для которых излучение равно нулю. Эти направления определяются уравнением (см. [2])

$$\left[r - \rho \frac{v}{c}, \frac{dv}{dt} \right] = 0.$$

Пусть $r = \rho\nu$, где ν – единичный вектор. Тогда

$$\nu = \frac{\mu}{c}\xi_1 + \lambda k\mu^2\xi_2,$$

где λ – неизвестный множитель. Из условия единичности вектора ν получим выражение для λ

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{k\mu^2 c}.$$

Эти направления расположены симметрично относительно вектора ξ_1 и составляют с ним постоянный угол φ при движении точки Q_1 вдоль винтовой линии. Назовем φ *углом нулевого излучения*. Проведя через каждую точку винтовой линии прямую в направлении ν , получим некоторую линейчатую поверхность, которую назовем *поверхностью нулевого излучения*. Так как имеются два направления с нулевым излучением, то имеются две такие поверхности. Обозначим их $\Psi_i(Q_1)$, $i = 1, 2$. Пусть поверхность $\Psi_1(Q_1)$ соответствует углу $\varphi > 0$. Имеем

$$\nu = \cos \varphi \xi_1 + \sin \varphi \xi_2,$$

причем $\cos \varphi = \mu/c$. Таким образом, *угол нулевого излучения φ зависит от скорости движения частицы по винтовой линии: чем больше скорость, тем меньше угол*. Запишем радиус-вектор линейчатой поверхности $\Psi_1(Q_1)$:

$$r(p, q) = \rho(p) + q(\cos \varphi \xi_1 + \sin \varphi \xi_2),$$

где $\rho(p)$ – радиус-вектор винтовой линии, по которой движется электрон, p – длина ее дуги. Отметим следующее свойство: *так как главная нормаль к этой кривой лежит в касательной плоскости поверхности, то эта кривая асимптотическая*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Линейчатую поверхность нулевого излучения можно построить и в общем случае излучающего электрона (не обязательно в постоянном магнитном поле). При этом траектория его движения будет на ней асимптотической линией.

Рассмотрим вопрос: существует ли второй электрон Q_2 такой, что его поверхность нулевого излучения совпадает с поверхностью нулевого излучения первого электрона. Второй электрон должен располагаться на поверхности $\Psi_i(Q_1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что он располагается на $\Psi_1(Q_1)$. Найдем касательные векторы этой линейчатой поверхности:

$$r_p = \xi_1(1 - qk \sin \varphi) + q(k \cos \varphi \xi_2 + \kappa \sin \varphi \xi_3), \quad (5)$$

$$r_q = \cos \varphi \xi_1 + \sin \varphi \xi_2. \quad (6)$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$E = (1 - qk \sin \varphi)^2 + q^2(k^2 \cos^2 \varphi + \kappa^2 \sin^2 \varphi), \quad F = \cos \varphi, \quad G = 1.$$

Так как $EG - F^2 = (\sin \varphi - qk)^2 + \varkappa^2 \sin^2 \varphi > 0$, то поверхность регулярна во всех точках.

Второй электрон Q_2 должен двигаться по линии $q = \text{const}$. Докажем это. Линия на линейчатой поверхности, по которой движется второй электрон, тоже является асимптотической.

ЛЕММА 1. *Уравнение асимптотических линий, отличных от прямолинейных образующих, кроме случаев $q = 0$ или $T = 0$, имеет вид*

$$dp + \frac{2 \sin^2 \varphi}{qT \cos \varphi} dq = 0, \quad (7)$$

где $T = 2k \sin \varphi - q\gamma$ и $\gamma = k^2 + \varkappa^2 \sin^2 \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с помощью (5) и (6) находим выражение для нормального вектора

$$[r_p, r_q] = q\varkappa \sin \varphi (-\sin \varphi \xi_1 + \cos \varphi \xi_2) + (\sin \varphi - qk) \xi_3.$$

Далее, запишем вторые производные радиус-вектора поверхности

$$\begin{aligned} r_{pp} &= -qk^2 (\cos \varphi \xi_1 + \sin \varphi \xi_2) + (k - q\varkappa^2 \sin \varphi) \xi_2 + qk\varkappa \cos \varphi \xi_3, \\ r_{pq} &= k(-\sin \varphi \xi_1 + \cos \varphi \xi_2) + \varkappa \sin \varphi \xi_3, \\ r_{qq} &= 0. \end{aligned}$$

С помощью этих выражений находим

$$(r_{pp}r_p r_q) = q\varkappa \cos \varphi T, \quad (r_{pq}r_p r_q) = \varkappa \sin^2 \varphi, \quad (r_{qq}r_p r_q) = 0.$$

В нашем случае уравнения асимптотических линий записываются либо в виде $dp = 0$, что соответствует прямолинейным образующим, либо в виде

$$L dp + 2M dq = 0,$$

где L и M – классические обозначения коэффициентов вторых квадратичных форм. Подставив сюда выражения, пропорциональные L и M , получим (7). Лемма 1 доказана.

Как мы отмечали, электрон движется по кривой постоянной кривизны. Но для асимптотической линии геодезическая кривизна совпадает с обычной кривизной.

ЛЕММА 2. *На рассматриваемой поверхности геодезическая кривизна асимптотической линии постоянна только для линии $q = 0$ или $q = (2k \sin \varphi)/\gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть асимптотические кривые задаются уравнением $\Phi(p, q) = \text{const}$. Тогда геодезическая кривизна k_g этих линий дается следующей формулой (см. [3]):

$$k_g = \frac{1}{W} \left\{ \left(\frac{F\Phi_q - G\Phi_p}{\sqrt{\Lambda}} \right)_p + \left(\frac{F\Phi_p - E\Phi_q}{\sqrt{\Lambda}} \right)_q \right\},$$

где $\Lambda = E\Phi_q^2 - 2F\Phi_p\Phi_q + G\Phi_p^2$ и $W = \sqrt{EG - F^2}$. В нашем случае

$$\Phi_p = 1, \quad \Phi_q = \frac{2 \sin^2 \varphi}{qT \cos \varphi}.$$

Так как все рассматриваемые функции не зависят от p , то в выражении для k_g останется лишь вторая скобка. Имеем

$$F\Phi_p - E\Phi_q = \frac{qT(1 + \sin^2 \varphi) - 2\sin^2 \varphi}{qT \cos \varphi}.$$

Далее,

$$\Lambda = \frac{q^2 T^2 \cos^2 \varphi - 4qT \sin^2 \varphi + 4\sin^4 \varphi}{(qT \cos \varphi)^2}.$$

Кроме того,

$$W^2 = \sin^2 \varphi - qT.$$

Обозначим $u = qT$. Заметим, что в выражение для k_g аргумент q входит в комбинации qT . Положим

$$f(u) = \frac{F\Phi_p - E\Phi_q}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Имеем

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi - u}} f'(u) \frac{du}{dq}.$$

Покажем, что эта функция не может быть постоянной. Заметим, что

$$\frac{du}{dq} = T - q\gamma = 2k \sin \varphi - 2q(k^2 + \varkappa^2 \sin^2 \varphi).$$

Пусть $q = 0$, тогда $T = 2k \sin \varphi$. Получаем

$$k_g = f'(0)2k = A.$$

Далее, положим $T = 0$, тогда $q = (2k \sin \varphi)/\gamma$. Получим

$$k_g = -A,$$

т.е. $A = -A$. Но это невозможно, так как рассматриваемая геодезическая кривизна отлична от нуля. Остается случай $q = \text{const}$, при этом $L = 0$. Поэтому для этой линии должно выполняться уравнение

$$(r_{pp}r_p r_q) = 0. \quad (8)$$

С помощью (8) находим уравнение для определения положения электрона Q_2 : $T = 0$. Следовательно,

$$q = \frac{2k \sin \varphi}{k^2 + \varkappa^2 \sin^2 \varphi}.$$

Лемма 2 доказана.

Поэтому второй электрон тоже описывает винтовую линию, имеющую ту же ось, что и первый электрон. Найдем кривизну $\bar{k}$ и кручение $\bar{\varkappa}$ второй винтовой линии.

В точках второй винтовой линии получим $E = 1$. Имеем

$$\bar{k} = \sqrt{q^2(k^4 \cos^2 \varphi + k^2 \varkappa^2 \cos^2 \varphi) + (k - q(k^2 + \varkappa^2) \sin^2 \varphi)^2} = k.$$

Для вычисления кручения найдем третью производную радиус-вектора

$$r_{ppp} = -k(k - q(k^2 + \varkappa^2) \sin \varphi) \xi_1 - qk(k^2 + \varkappa^2) \cos \varphi \xi_2 + \varkappa(k - q(k^2 + \varkappa^2) \sin \varphi) \xi_3.$$

Воспользовавшись формулой

$$\overline{\varkappa} = \frac{(r_p r_{pp} r_{ppp})}{\bar{k}^2},$$

получим $\overline{\varkappa} = \varkappa$. Поэтому вторая винтовая линия конгруэнтна первой и располагается на том же цилиндре, что и первая кривая. Точка Q_2 – точка пересечения луча, идущего из Q_1 в направлении вектора ν , с цилиндром, на котором лежит первая винтовая линия.

Угол $\overline{\varphi}$, который составляет прямолинейная образующая в точке Q_2 с вектором, касательным ко второй винтовой линии, т.е. с r_p , определяется из уравнения

$$\cos \overline{\varphi} = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \cos \varphi.$$

Следовательно, $\overline{\varphi} = \pm \varphi$, т.е. прямая нулевого излучения второго электрона в точке Q_2 составляет с касательным вектором этой кривой тот же угол, что и у первого электрона. Однако из геометрического рассмотрения ясно, что $\Psi_1(Q_1) = \Psi_2(Q_2)$. Магнитное поле H действует на оба электрона одинаковым образом, и оба электрона во время движения находятся на одной поверхности нулевого излучения и на прямой нулевого излучения. Электроны Q_1 и Q_2 назовем *сопряженными* друг другу на поверхности $\Psi_1(Q_1)$.

Заметим, что на поверхности $\Psi_2(Q_1)$ тоже имеется электрон, для которого Q_1 выполняет роль Q_2 в предыдущем рассмотрении.

Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Для движущегося в постоянном магнитном поле электрона на каждой поверхности нулевого излучения существует и притом только один электрон такой, что в процессе движения они одновременно находятся на общей прямой нулевого излучения.*

Здесь под существованием второго электрона понимается существование траектории и движения электрона по ней.

Если не принимать во внимание конечность скорости распространения излучения, то можно сказать, что их поля излучений не действуют друг на друга. Но вообще говоря, на первый электрон может действовать излучение второго электрона, выпущенное ранее из другой точки, так как излучение распространяется с некоторым запаздыванием. Кроме того, электроны обладают статическим кулоновским полем.

Можно построить бесконечную цепочку электронов, в которой каждые два соседних находятся на их общей прямой нулевого излучения. Представляется возможным уменьшить влияние кулоновского поля и получить устойчивый поток за счет введения нескольких таких цепочек электронов, расположенных на соосных цилиндрах.

Третий электрон на стрикционной линии. На каждой полной регулярной линейчатой поверхности с гауссовой кривизной $K < 0$ существует замечательная кривая – стрикционная линия – линия наибольшего сжатия. Другое название этой кривой – линия центров. Нормаль $n(P)$ к поверхности при движении точки P вдоль прямолинейной образующей находится все время в плоскости, ортогональной к этой прямолинейной образующей. При этом нормаль

совершает в ней оборот на угол π , когда точка P пробегает всю прямолинейную образующую. Точка P_c , в которой нормаль занимает среднее положение между своими крайними положениями, называется центральной. А множество всех центральных точек образует стрикционную линию. Стрикционная линия задается уравнением (см. [4])

$$q_c = -\frac{(\xi_1, d\nu/dp)}{(d\nu/dp)^2} = \frac{k \sin \varphi}{k^2 + \kappa^2 \sin^2 \varphi}.$$

Таким образом, центральная точка Q_c находится на середине отрезка Q_1Q_2 . В этой точке отрезок Q_1Q_2 касается цилиндра, соосного с цилиндром, на котором находятся первые две винтовые линии. Поверхность нулевого излучения в точках стрикционной линии имеет с этим внутренним цилиндром общую касательную плоскость. Поэтому *стрикционная линия на поверхности нулевого излучения является геодезической линией*.

Сделаем замену $\bar{q} = q - q_c$. Тогда, используя формулы из [4], можно найти выражение метрики и гауссовой кривизны

$$ds^2 = \frac{1}{\gamma} [k^2 \cos^2 \varphi + \kappa^2 \sin^2 \varphi + \bar{q}^2 \gamma^2] (dp)^2 + 2 \cos \varphi dp d\bar{q} + (d\bar{q})^2,$$

$$K = -\frac{\kappa^2 \gamma^2 \sin^4 \varphi}{[\kappa^2 \sin^4 \varphi + \bar{q}^2 \gamma^2]^2},$$

где $\gamma = k^2 + \kappa^2 \sin^2 \varphi$. Поэтому на рассматриваемой поверхности $K < 0$. Наименьшее значение K принимает на стрикционной линии.

Стрикционная линия тоже является винтовой линией. Пусть третий электрон движется по этой линии под действием магнитного поля. Согласно сделанному выше замечанию 1 электрическая компонента излучения третьего электрона в направлении τ в касательной плоскости поверхности нулевого излучения первых двух электронов будет направлена по нормали поверхности в точках этой стрикционной линии.

Автор выражает признательность Е. С. Сыркину за полезный совет.

Список литературы

- [1] О. А. Гончарова, “Стандартные линейчатые поверхности в E^n ”, *Доповіди НАН України*, 2006, № 3, 7–12.
- [2] В. Пановский, М. Филипс, *Классическая электродинамика*, ГИФМЛ, М., 1963.
- [3] В. Бляшке, *Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна*. Т. 1: *Элементарная дифференциальная геометрия*, ОНТИ, М., Л., 1935.
- [4] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей в тензорном изложении*. Часть I: *Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности*, ГИТТЛ, М., Л., 1947.

Ю. А. Аминов (Yu. A. Aminov)

Физико-технический институт низких температур
НАН Украины, г. Харьков
E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
10.01.2006