Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, Разложение целых функций на произведение двух функций эквивалентного роста, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 7, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:03:51

УДК 517.547

Р. С. Юлмухаметов

Разложение целых функций на произведение двух функций эквивалентного роста

Работа посвящена проблеме Л. Эйренпрайса о факторизации в алгебре гладких финитных функций относительно операции свертки. В начале 80-х годов было доказано, что не всякая гладкая финитная функция в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, может быть представлена как свертка двух гладких финитных функций. Д. Г. Диксоном показано, что гладкая финитная функция одной переменной представляется как свертка двух гладких финитных функций, если нули преобразования Фурье–Лапласа этой функции лежат в некоторой горизонтальной полосе и выполнено условие

$$\sum_{|\lambda_k| \leq r} 1 = Dr + O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

где λ_k – нули преобразования Фурье–Лапласа.

В данной работе доказывается, что факторизация возможна при условии: все нули преобразования Фурье–Лапласа лежат в области вида

$$G_a = \{z = x + iy, |y| \leq \exp(a\sqrt{\ln(|x| + 1)})\}.$$

Библиография: 11 названий.

0. Введение. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Если φ_1, φ_2 – функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то их свертка

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int \varphi_1(x - t)\varphi_2(t) dt$$

также является элементом $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. В работе [1] Л. Эйренпрайс поставил вопрос: можно ли любую функцию из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ представить в виде свертки двух функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$? С помощью преобразования Фурье–Лапласа эту проблему можно сформулировать в терминах целых функций. Пусть $\widehat{\varphi}(\lambda)$ обозначает преобразование Фурье–Лапласа функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(t) \exp\langle i\lambda, t \rangle dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n, \quad \langle \lambda, t \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k t_k,$$

и

$$\widehat{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n) = \{\widehat{\varphi}(\lambda), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

По теореме Пэли–Винера–Шварца $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классом целых функций f экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$|f(x)| = O(|x|^{-N}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (1)$$

(см. [2]). Кроме того, как известно,

$$\widehat{\varphi_1 * \varphi_2} = \widehat{\varphi_1} \cdot \widehat{\varphi_2}.$$

Двойственная постановка проблемы Эйренпрайса теперь звучит так: можно ли любую целую функцию экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющую условию (1), представить в виде произведения двух целых функций, обладающих теми же свойствами?

В работах [3]–[5] получен отрицательный ответ на этот вопрос при $n \geq 2$. В $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ вопрос остается открытым. В работе [6] Д. Г. Диксон показал, что если нули функции $\widehat{\varphi}$ расположены в некоторой горизонтальной полосе и

$$\sum_{|\lambda_k| \leq r} 1 = Dr + O(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

то функция φ представляется в виде свертки двух функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. В работе [7] доказана возможность факторизации в более общей ситуации. Автору в [9] удалось показать, что в теореме Д. Г. Диксона расположение нулей в полосе уже является достаточным условием для факторизации и, тем самым, условие (2) в этом случае излишне. В данной работе мы рассмотрим вопрос о факторизации целых функций с нулями, лежащими в области более широкой, чем полоса. Будет доказана следующая, основная для этой работы, теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть f – целая функция, все нули которой лежат в области

$$G_a = \{z = x + iy, |y| \leq \exp(a\sqrt{\ln(|x| + 1)})\},$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная. Предположим также, что существует целая функция $F(\lambda)$, $F(0) = 1$, делящаяся на функцию $f(\lambda)$ и удовлетворяющая условию

$$\ln |F(\lambda)| \leq H(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $H(\lambda)$ – некоторая липшицева функция:

$$|H(\lambda) - H(z)| \leq \sigma |\lambda - z|, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда функция f представляется в виде произведения двух целых функций f_1 , f_2 таких, что для любого $p > 1$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(x)| - \ln |f_2(x)|| &\leq \frac{C_0}{p} [H(x) - \ln |F(x)|] \\ &+ C_1 \ln^+ \frac{1}{\rho(x)} + C_2 \ln(|x| + 1) + C_3 e^p, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $\rho(\lambda)$ – расстояние от точки λ до множества нулей функции f , C_i – постоянные, не зависящие от p . Кроме того, для всех $z = r \exp(i\varphi)$, $\varphi \neq 0$, π и $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$|\ln |f_1(x)| - \ln |f_2(x)|| \leq C(\varphi, \varepsilon) |\lambda|^\varepsilon, \quad |\lambda| \geq r(\varphi, \varepsilon).$$

Эта теорема в некоторых случаях позволяет решить проблему Л. Эйренпрайса. Например, если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и все нули функции $\widehat{\varphi}$ лежат в области типа G_a , то функция φ представима в виде свертки двух функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. В действительности эта теорема позволяет решить вопрос о факторизации в других классах функций.

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы, сделаем следующее замечание. Если функция f в условии теоремы является произведением целых функций u и v , то каждая из функций u и v удовлетворяет условиям теоремы, и если для каждой из этих функций доказано утверждение теоремы, то утверждение будет доказано и для функции f . Например, функцию f представим в виде произведения целых функций u и v так, что все нули функции u имеют четную кратность, а нули функции v все простые. Тогда функция u является квадратом целой функции и утверждение теоремы для нее выполняется тривиальным образом. Исходя из этого мы можем с самого начала считать, что все нули функции f простые. Далее, представим функцию f как произведение многочлена P и целой функции g так, что нули многочлена P в точности совпадают с нулями функции f в круге $\{z : |z| \leq 2\}$. Снова утверждение теоремы тривиально выполняется для многочлена P , и мы можем считать, что все нули функции f лежат вне круга радиуса 2.

Дальнейшие выводы из этого замечания требуют более тщательного изложения разбиения множества нулей функции f на части с теми или иными дополнительными свойствами.

Положим

$$a(x) = \exp(a\sqrt{\ln(x+1)}), \quad x \geq 0,$$

и построим последовательность x_n , $n = 0, 1, \dots$, следующим образом. Возьмем $x_0 = 0$, и x_1 выберем из условия

$$a(x_1) = x_1 - x_0 + 1.$$

Если выбраны точки $x_1, \dots, x_{n-1}$, то точку x_n найдем из условия

$$a(x_n) = x_n - x_{n-1} + 1.$$

Рассмотрим квадраты

$$\begin{aligned} K_n &= \{z = x + iy : 2n \leq x < 2(n+1), |y| \leq 1\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ Q_n &= \{z = x + iy : x_{n-1} \leq x < x_n, |y| \leq 1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

а также квадраты Q'_n , симметричные квадратам Q_n относительно вещественной оси, и квадраты $-Q_n, -Q'_n$. Объединение всех этих квадратов содержит область G_a и, следовательно, содержит все нули функции f . Это объединение само содержится в области

$$\widetilde{G}_a = \{z = x + iy : |y| < A \exp(a\sqrt{\ln(|x|+1)})\},$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная. Действительно, объединение всех квадратов содержится в области $\{z = x + iy : |y| \leq \widetilde{a}(|x|)\}$, где

$$\widetilde{a}(x) = x_n - x_{n-1} + 1, \quad x_{n-1} < x \leq x_n.$$

Так как $x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{a(x_{n+1})}{a(x_n)} = \exp \left[\frac{a \left(\ln \frac{x_{n+1} + 1}{x_n + 1} \right)}{\sqrt{\ln(x_n + 1)} + \sqrt{\ln(x_{n+1} + 1)}} \right] \rightarrow 1.$$

Поэтому для некоторой постоянной A имеем

$$a(x_{n+1}) \leq Aa(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, если $x \in [x_{n-1}, x_n]$, то

$$\tilde{a}(x) = a(x_n) \leq Aa(x_{n-1}) \leq Aa(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Множество $\{|y| \leq \tilde{a}(|x|)\}$ в точности совпадает с объединением всех квадратов $K_n, \pm Q_n, \pm Q'_n$. Последняя оценка показывает, что это объединение содержится в области $\tilde{G}_a$:

$$\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} K_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (Q_n \cup Q'_n \cup (-Q'_n) \cup (-Q_n)) \right) \subset \tilde{G}_a. \quad (3)$$

Множество нулей Λ функции f разобьем на непересекающиеся части следующим образом. Через Λ_0 обозначим максимальное подмножество Λ , пересечение которого с каждым из квадратов $K_n, \pm Q_n, \pm Q'_n$ состоит из четного числа точек. Через Λ_1 обозначим пересечение $\Lambda \setminus \Lambda_0$ с объединением всех квадратов K_n . Тогда в каждом квадрате K_n находится не более одной точки из Λ_1 . Через Λ_2 обозначим оставшуюся часть Λ : $\Lambda_2 = \Lambda \setminus (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$. Таким образом, множество Λ_2 содержится в объединении квадратов $\pm Q_n, \pm Q'_n$, и в каждом из этих квадратов находится не более одной точки из Λ_2 . Соответственно этому разбиению множества нулей сама функция f может быть представлена как произведение трех целых функций с множеством нулей $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$. Каждая из этих трех целых функций удовлетворяет условиям основной теоремы, и мы будем доказывать теорему для каждой из них по отдельности. В первом пункте рассмотрим функцию с множеством нулей типа Λ_0 .

1. Воспользуемся теоремой 1 из работы [8].

ТЕОРЕМА А. Пусть мера μ – неотрицательная борелевская мера на плоскости с компактным носителем в квадрате K и $\mu\{z\} < 1$ для любой точки z . Если полная масса $\mu(\mathbb{C})$ меры μ – целое число N , то мера μ может быть представлена как сумма неотрицательных мер μ_k с единичной полной массой. Причем существует система прямоугольников $P_k \subset K$, $k = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющая следующим условиям.

- Р0. Носитель меры μ_k содержится в прямоугольнике P_k .
- Р1. Стороны прямоугольников P_k параллельны сторонам квадрата K . Отношение большей стороны прямоугольника P_k к меньшей стороне не превосходит трех.
- Р2. Каждая точка плоскости попадает во внутренность не более чем четырех прямоугольников P_k .

(В работе [8] теорема доказана для непрерывных мер μ . Здесь условие непрерывности заменено на условие $\mu(\{z\}) < 1$. Доказательство при такой замене условий не меняется.)

В качестве квадрата K возьмем один из квадратов $K_n, \pm Q, \pm Q'_n$, а в качестве меры μ возьмем атомарную меру, сосредоточенную в точках $\Lambda_0 \cap K$ и имеющую в каждой из этих точек массу, равную $1/2$. Теорема А, примененная в этой ситуации, означает, что точки множества $\Lambda_0 \cap K$ можно разбить на пары λ'_k, λ''_k так, что существует система прямоугольников $P_k \subset K, \lambda'_k, \lambda''_k \in P_k$, удовлетворяющая условиям Р1, Р2. Так как эту процедуру можно проделать в каждом из квадратов $K_n, \pm Q_n, \pm Q'_n$, то все множество Λ_0 разбивается на пары λ'_k, λ''_k , покрытые прямоугольниками P_k , удовлетворяющими условиям Р1, Р2. Множество Λ_0 разобьем на две непересекающиеся части. Через Λ'_0 обозначим те точки из Λ_0 , которые входят в пары, покрытые прямоугольниками с диаметром, большим, чем 3, а через Λ''_0 — множество остальных точек Λ_0 . Целая функция с множеством нулей Λ_0 , удовлетворяющая условиям основной теоремы, разлагается на произведение двух функций с множеством нулей Λ'_0 и Λ''_0 . Каждая из этих целых функций удовлетворяет условиям основной теоремы, и эту теорему будем доказывать для каждой из них по отдельности.

1.1. Здесь рассмотрим вопрос о факторизации целой функции с множеством нулей типа Λ''_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — целая функция, $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — нули функции f . Предположим, что нули функции f разбиты на пары $\lambda'_k, \lambda''_k, k \in \mathbb{N}$, так, что существует система прямоугольников P_k , обладающая следующими свойствами.

- Р0. Точки λ'_k, λ''_k лежат в прямоугольнике $P_k, k \in \mathbb{N}$.
- Р1. Стороны прямоугольников параллельны осям выбранной системы координат и отношение длины большей стороны P_k к длине меньшей стороны не превосходит трех.
- Р2. Каждая точка плоскости попадает во внутренность не более чем четырех прямоугольников P_k .
- Р3. Диаметры прямоугольников P_k не превосходят 3 и $0 \notin \bigcup P_k$.

Предположим также, что существует целая функция $F(\lambda), F(0) = 1$, делящаяся на функцию $f(\lambda)$ и удовлетворяющая оценке

$$\ln |F(\lambda)| \leq H(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

с некоторой липшицевой функцией H :

$$|H(\lambda) - H(z)| \leq \sigma |\lambda - z|, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Тогда функция f представляется в виде произведения целых функций f_1, f_2 так, что для любого λ и $p, p > 1$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| &\leq \frac{C_0}{p} [H(\lambda) - \ln |F(\lambda)|] \\ &+ C_1 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_2 \ln(|\lambda| + 1) + C_3 e^p, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

где $\rho(\lambda)$ – расстояние от точки λ до множества нулей функции f , C_i – постоянные, не зависящие от p .

Очевидно, целая функция f с множеством нулей типа Λ_0'' удовлетворяет условиям теоремы 1.

1.2. В этом пункте докажем вспомогательные теоремы для факторизации целых функций с множеством нулей типа Λ_0' .

ТЕОРЕМА 2. Пусть в квадрате

$$P = \{1 \leq y \leq 1 + 2^n b, R \leq x < R + 2^n b\},$$

где $b \in [1/4, 1/2]$, находится четное число точек λ_n , которые разбиты на пары λ'_k, λ''_k таким образом, что каждая пара λ'_k, λ''_k содержится в некотором прямоугольнике $P_k \subset P$, а система прямоугольников $\{P_k\}$ удовлетворяет условиям P1, P2 в формулировке теоремы А и, дополнительно, следующим условиям.

P3'. Диаметры прямоугольников P_k больше, чем 3 и $0 \notin \bigcup P_k$.

P4. Для любого индекса k верна оценка

$$\text{diam } P_k \leq \frac{1}{2} \text{dist}(P_k, 0) = \inf\{|z|, z \in P_k\}.$$

В верхней половине каждого прямоугольника P_k выберем по одной произвольной точке z_k . Тогда существуют постоянные C_0, B_0 , не зависящие от выбора точек z_k , такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_k \left| \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| - \text{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} \right| \\ & \leq C_0 \int_P \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) + \delta(P, x) B_0 \left[\ln \left(1 + \frac{\text{diam } P}{\text{dist}(P, x)} \right) + \int_P \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \end{aligned}$$

где $\delta(P, x)$ обозначает число равное 1, если $\text{diam } P > \text{dist}(P, x)/2$, и равное 0 в противном случае.

Доказательство этой теоремы будет следовать из следующих двух лемм. При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ через $I_1(x)$ обозначим множество индексов k , для которых

$$\text{diam } P_k \leq \frac{1}{2} \text{dist}(P_k, x),$$

а через $I_2(x)$ все остальные индексы, т.е. такие, для которых

$$\text{diam } P_k > \frac{1}{2} \text{dist}(P_k, x).$$

ЛЕММА 1. Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\sum_{k \in I_1(x)} \left| \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} \right| \leq C_0 \int_P \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о среднем значении имеем

$$\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{z_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - z_k)}{(z_k - x)z_k} = - \operatorname{Re} \frac{x(2z'_k - x)(\lambda'_k - z_k)^2}{2(z'_k(z'_k - x))^2},$$

где z'_k — некоторая точка, лежащая на отрезке, соединяющем λ'_k с z_k . Аналогичная формула выполняется для точки λ''_k . Вычитая одно равенство из другого, получим оценку

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} \right| \leq \max_{w \in P_k} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| (\operatorname{diam} P_k)^2. \quad (4)$$

Для $k \in I_1$ с учетом условия Р4 имеем оценку

$$\max_{w \in P_k} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| \leq C_1 \left| \frac{(2\zeta_k - x)x}{\zeta_k^2(\zeta_k - x)^2} \right|,$$

где C_1 — абсолютная постоянная, ζ_k — геометрический центр прямоугольника P_k . В правой части этого неравенства стоит функция, субгармоническая по переменной ζ_k . По свойству Р4 прямоугольник P_k содержит круг с центром в точке ζ_k и радиуса $\operatorname{diam} P_k / 4 := d_k / 4$. Пользуясь свойством субгармонических функций получим оценку

$$\max_{w \in P_k} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| \leq \frac{16C_1}{\pi d_k^2} \int_{|z - \zeta| \leq d_k / 4} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w).$$

Подставим эту оценку в неравенство (4) и просуммируем по всем $k \in I_1(x)$. Учитывая свойство Р2 системы прямоугольников $\{P_k\}$, получим утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_k \left| \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} \right| \\ & \leq C_0 \int_P \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) \\ & \quad + \delta(P, x) B_0 \left[\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} P}{\operatorname{dist}(P, x)} \right) + \int_P \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где B_0 — абсолютная постоянная и $\delta(P, x) = 1$, если

$$\operatorname{diam} P > \frac{1}{2} \operatorname{dist}(P, x),$$

и $\delta(P, x) = 0$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия P4 имеет место вложение $I_1(0) \subset I_2(x)$. Неравенство

$$\sum_{k \in I_2(x)} \left| \ln |\lambda'_k| - \ln |\lambda''_k| - \operatorname{Re} \frac{(\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k} \right| \leq C_1 \int_P \frac{1}{|w|^2} dv(w) \quad (5)$$

доказывается так же, как лемма 1. Через $n_1(x, t)$ и $n_2(x, t)$ обозначим число точек λ'_k и, соответственно, λ''_k , $k \in I_2(x)$, лежащих в круге радиуса t с центром в точке x . По условиям теоремы

$$n_1(x, \operatorname{dist}(P, x)) = n_2(x, \operatorname{dist}(P, x)) = 0.$$

С другой стороны, для $t \geq T := \operatorname{diam} P + \operatorname{dist}(P, x)$ имеем равенство $n_1(x, t) = n_2(x, t)$. Интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_2(x)} (\ln |\lambda'_k| - \ln |\lambda''_k|) &= \int_{d(x)}^T \ln t d(n_1(x, t) - n_2(x, t)) \\ &= \int_{d(x)}^T \frac{n_1(x, t) - n_2(x, t)}{t} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где $d(x) = \operatorname{dist}(P, x)$. Ясно, что $|n_1(x, t) - n_2(x, t)|$ не превосходит количества прямоугольников P_k , $k \in I_2$, пересекающихся с окружностью $\{z : |z - x| = t\}$. В работе [8] доказано следующее утверждение (см. утверждение 1 в [8])

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть (P_n) – совокупность прямоугольников со сторонами, параллельными осям некоторой системы координат.

Предположим, что

1. в прямоугольнике P_n содержится некоторый круг радиуса αd_n , где d_n – диаметр P_n ;
2. каждая точка плоскости попадает во внутренность не более, чем p прямоугольников P_n .

Тогда число прямоугольников, пересекающихся с кругом $\{z : |z - x| \leq t\}$ и имеющих диаметр больше, чем bt , $b > 0$, не превосходит числа $B(\alpha, p, b) = p(\alpha + 1)^2 / \alpha^4 b^2 + 4p$.

Если прямоугольник P_k , $k \in I_2(x)$, пересекается с окружностью $\{z : |z - x| = t\}$ и $\operatorname{diam} P_k < t/3$, то

$$\operatorname{dist}(P_k, x) \leq 2 \operatorname{diam} P_k < \frac{2t}{3}.$$

Это значит, что $\operatorname{diam} P_k > t/3$. Полученное противоречие показывает, что диаметры этих прямоугольников больше, чем $t/3$. Поэтому к прямоугольникам P_k , $k \in I_2(x)$, можно применить утверждение, полагая в нем $\alpha = 1/3$, $p = 4$, $b = 1/3$. Таким образом, их количество не превосходит $145 \cdot 16$. Этой же константой оценивается и $|n_1(x, t) - n_2(x, t)|$. Из неравенства (6) получим

$$\sum_{k \in I_2(x)} (\ln |\lambda'_k - x| - \ln |\lambda''_k - x|) \leq B' \ln \frac{T}{d(x)}.$$

Так как в приведенных рассуждениях точки λ'_k, λ''_k выступают равноправно, то имеет место оценка

$$\sum_{k \in I_2(x)} |\ln |\lambda'_k - x| - \ln |\lambda''_k - x|| \leq B' \ln \left(1 + \frac{\text{diam } P}{\text{dist}(P, x)} \right). \quad (7)$$

Для $k \in I_2(x)$, учитывая выбор расположения точек z_k (в верхней половине прямоугольника P_k), имеем $|\lambda'_k - \lambda''_k| \leq \text{diam } P_k \leq 8|z_k - x|$. Поэтому

$$\text{Re} \frac{\lambda'_k - \lambda''_k}{z_k - x} \leq 8. \quad (8)$$

Прямоугольники P_k , как и весь квадрат P , лежат в кольце

$$\{z : \text{dist}(P, x) \leq |z - x| \leq \text{dist}(P, x) + \text{diam } P\}.$$

Возьмем произвольное $t > 0$ и рассмотрим прямоугольники $P_k, k \in I_2(x)$, пересекающиеся с кольцом $\{z : t \leq |z - x| \leq 2t\}$. Количество тех из этих прямоугольников, которые пересекаются с окружностью $\{z : |z - x| = t\}$, не превосходит B' . Если же прямоугольник не пересекается с этой окружностью, то $\text{diam } P_k > \text{dist}(P, x)/2 \geq t/2$, и этот прямоугольник пересекается с окружностью $\{z : |z - x| = 3t/2\}$. Снова по утверждению 1 можем оценить количество таких прямоугольников. В результате мы получим, что число прямоугольников $P_k, k \in I_2(x)$, пересекающихся с кольцом $\{z : t \leq |x - z| \leq 2t\}$, не превосходит некоторой абсолютной постоянной B_1 . Тогда общее число прямоугольников $P_k, k \in I_2(x)$, не превосходит величины

$$\frac{B_1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{\text{diam } P}{\text{dist}(P, x)} \right).$$

Поэтому, учитывая оценку (8), имеем

$$\sum_{k \in I_2(x)} \left| \text{Re} \frac{\lambda'_k - \lambda''_k}{z_k - x} \right| \leq C \ln \left(1 + \frac{\text{diam } P}{\text{dist}(P, x)} \right).$$

Отсюда и из соотношений (5), (7) вытекает утверждение леммы 2. Остается заметить, что если $\text{diam } P \leq \text{dist}(P, x)/2$, то $I_2(x) = \emptyset$, вследствие чего и появляется множитель $\delta(P, x)$. Лемма 2 доказана.

Из утверждений лемм 1 и 2 следует утверждение теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 2 существует набор чисел $\varepsilon_k = \pm 1$ и число $h \in \mathbb{C}$, $|h| \leq 200 \text{ diam } P$, такие, что выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| \right) - \text{Re} \frac{xh}{(z_0 - x)z_0} \right| \\ & \leq nC \int_P \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) + \delta(P, x)B_0 \left[\ln \left(1 + \frac{\text{diam } P}{\text{dist}(P, x)} \right) + \int_P \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \end{aligned}$$

где z_0 — геометрический центр квадрата P , постоянные C и B не зависят от R, b, n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим квадраты

$$Q_{s,l}^{(m)} = \{1 + sb2^m \leq y < (s+1)b2^m, R + lb2^m \leq x < R + (l+1)b2^m\},$$

$$s = 0, 1, \dots, 2^{n-m}, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n-m}.$$

В силу свойства Р1 стороны каждого прямоугольника P_k не меньше, чем $\text{diam } P_k / 4$. Поэтому в верхней половине каждого прямоугольника P_k содержится по меньшей мере один квадрат $Q_{s,l}^{(m)}$ с длиной стороны не меньше, чем $\text{diam } P_k / 16$. Для каждого прямоугольника P_k выберем по одному такому квадрату. Каждый из квадратов $Q_{s,l}^{(m)}$ в силу условия Р2 может быть выбран не более чем четыре раза. Если квадрат $Q_{s,l}^{(m)}$ выбран для прямоугольников P_{k_i} , $0 < i \leq 4$, то через $h_{s,l}^{(m)}$ обозначим сумму разностей $(\lambda'_k - \lambda''_k)$. Если же этот квадрат не выбран ни для одного прямоугольника, то $h_{s,l}^{(m)}$ положим равным нулю. Заметим, что всегда выполняется оценка

$$|h_{s,l}^{(m)}| \leq \frac{1}{4} \text{diam } Q_{s,l}^{(m)}. \quad (9)$$

В наших обозначениях имеет место равенство

$$Q_{s,l}^{(m)} = Q_{2s,2l}^{(m-1)} \cup Q_{2s,2l+1}^{(m-1)} \cup Q_{2s+1,2l}^{(m-1)} \cup Q_{2s+1,2l+1}^{(m-1)}.$$

ЛЕММА 3. Для любого набора чисел $z_1, \dots, z_n$ существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1$ такие, что

$$|\varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_n z_n| \leq \sqrt{2} \max_{i=1, \dots, n} |z_i|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции. Пусть $n = 2$. Тогда если $|z_1 \pm z_2| > \max(|z_1|, |z_2|)$, то

$$4(\max(|z_1|, |z_2|))^2 < |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leq (\max(|z_1|, |z_2|))^2.$$

Следовательно, одно из чисел $|z_1 + z_2|$ и $|z_1 - z_2|$ не превосходит $\sqrt{2} \max(|z_1|, |z_2|)$. Векторы $\pm z_i$, $i = 1, \dots, n$, разбивают плоскость на $2n$ углов (считаем, что $z_i \neq 0$). Если $n > 2$, то один из этих углов меньше $\pi/3$. Пусть, например, это угол между z_1 и z_2 . Тогда $|z_1 - z_2| \leq \max(|z_1|, |z_2|)$. Для чисел $z_1 - z_2, z_3, \dots, z_n$ по допущению индукции существуют числа ε'_k , $k = 1, \dots, n-1$, такие, что

$$|\varepsilon'_1(z_1 - z_2) + \varepsilon'_2 z_3 + \dots + \varepsilon'_{n-1} z_n| \leq \sqrt{2} \max(|z_1 - z_2|, |z_i|).$$

Тогда система $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \varepsilon_2 = -\varepsilon'_1, \varepsilon_i = \varepsilon'_{i-1}, i = 3, \dots, n$, удовлетворяет условиям леммы 3.

Теперь мы можем описать выбор чисел ε_k из утверждения теоремы 3. Сначала рассуждения проведем при одном дополнительном условии:

- (*) если $h_{s,l}^{(m)} \neq 0$, то для всех $Q_{i,j}^{(k)}$, лежащих в квадрате $Q_{s,l}^{(m)}$, соответствующие числа $h_{i,j}^{(k)}$ равны нулю.

Множество всех $h_{s,l}^{(m)}$ обозначим через H . Пусть $h_{s,l}^{(1)} = 0$. Для четырех комплексных чисел $h_{i,j}^{(0)}$, $i = 2s, 2s+1$, $j = 2l, 2l+1$, по лемме 3 выберем числа $\sigma_{i,j}^{(0)} = \pm 1$ так, чтобы выполнялась оценка

$$\left| \sum \sigma_{i,j}^{(0)} h_{i,j}^{(0)} \right| \leq \sqrt{2} \max |h_{i,j}^{(0)}|,$$

и переопределим $h_{s,l}^{(1)}$, положив его равным

$$\sum \sigma_{i,j}^{(0)} h_{i,j}^{(0)}.$$

Произведя эту процедуру со всеми ненулевыми $h_{s,l} h^{(1)}$, мы получим новое множество чисел $h_{s,l}^{(m)}$, $m \geq 1$, удовлетворяющих оценке (9). Обозначим это множество через $H^{(1)}$. Очевидно, $H^{(1)}$ удовлетворяет условию (*). Далее проделаем эту процедуру с нулевыми векторами $h_{s,l}^{(2)} \in H^{(1)}$ и получим новое множество $H^{(2)}$, состоящее из чисел $h_{s,l}^{(m)}$, $m \geq 2$, удовлетворяющих оценке (9) и условию (*). Продолжая этот процесс, через n шагов мы получим множество $H^{(n)}$, состоящее из одного числа $h_{0,0}^{(n)}$. По построению

$$h_{0,0}^{(n)} = \sum_H \varepsilon_{s,l}^{(m)} h_{s,l}^{(m)},$$

где $\sum_H$ означает суммирование по всем $h_{s,l}^{(m)} \in H$, а числа $\varepsilon_{s,l}^{(m)}$ получаются как произведение некоторых $\sigma_{i,j}^{(k)}$. Например, если $h_{0,0}^{(0)} \neq 0$, то по условию все числа $h_{0,0}^{(m)} \in H$, $m = 1, \dots, n$, равны нулю и $\varepsilon_{0,0}^{(0)} = \sigma_{0,0}^{(0)} \sigma_{0,0}^{(1)} \dots \sigma_{0,0}^{(n)}$. С другой стороны, каждое ненулевое число $h_{s,l}^{(m)} \in H$, является суммой некоторых (не более четырех) разностей $(\lambda'_k - \lambda''_k)$, и каждая разность $(\lambda'_k - \lambda''_k)$ входит как слагаемое в одно и только в одно число $h_{s,l}^{(m)}$. Следовательно, для некоторых $\varepsilon_k = \pm 1$ имеет место равенство

$$h_{0,0}^{(m)} = \sum \varepsilon_k (\lambda'_k - \lambda''_k). \quad (10)$$

Докажем, что числа ε_k в соотношении (10) и $h = h_{0,0}^{(n)}$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Для этого в силу утверждения теоремы 2 достаточно доказать, что выполняется соотношение

$$\left| \sum_k \varepsilon_k \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} - \operatorname{Re} \frac{xh}{(z_0 - x)z_0} \right| \leq nC \int_P \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w). \quad (11)$$

В выборе точек z_k у нас есть определенный произвол. Эти точки должны лежать в верхних половинках прямоугольников P_k . Возьмем в качестве z_k геометрический центр $z_{s,l}^{(m)}$ квадрата $Q_{s,l}^{(m)}$, выбранного для прямоугольника P_k . Тогда, очевидно,

$$\sum_k \varepsilon_k \operatorname{Re} \frac{x(\lambda'_k - \lambda''_k)}{(z_k - x)z_k} = \sum_H \varepsilon_{s,l}^{(m)} \operatorname{Re} \frac{xh_{s,l}^{(m)}}{(z_{s,l}^{(m)} - x)z_{s,l}^{(m)}},$$

где $\sum$ означает суммирование по всем $h_{s,l}^{(m)}$ из H . Оценка (11) будет следовать из соотношения

$$\left| \sum_H \varepsilon_{s,l}^{(m)} \operatorname{Re} \frac{x h_{s,l}^{(m)}}{(z_{s,l}^{(m)} - x) z_{s,l}^{(m)}} - \operatorname{Re} \frac{x h_{0,0}^{(n)}}{(z_{0,0}^{(n)} - x) z_{0,0}^{(n)}} \right| \leq nC \int_P \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| dv(w). \quad (12)$$

Вернемся к конструкции множеств $H^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $h_{s,l}^{(1)} \in H^{(1)} \setminus H$. По построению

$$h_{s,l}^{(1)} = \sum \sigma_{i,j}^{(0)} h_{i,j}^{(0)},$$

где суммирование ведется по $i = 2s, 2s+1$, $j = 2l, 2l+1$. По теореме о среднем имеем

$$\sigma_{i,j}^{(0)} \operatorname{Re} \frac{x h_{i,j}^{(0)}}{(z_{i,j}^{(0)} - x) z_{i,j}^{(0)}} = \operatorname{Re} \frac{x h_{i,j}^{(0)} \sigma_{i,j}^{(0)}}{(z_{i,j}^{(0)} - x) z_{i,j}^{(0)}} + \operatorname{Re} \frac{\sigma_{i,j}^{(0)} x h_{i,j}^{(0)} (z_{i,j}^{(0)} - z_{s,l}^{(1)})}{(w-x)^2 w^2},$$

где w — некоторая точка на отрезке, соединяющем точки $z_{i,j}^{(0)}$ и $z_{s,l}^{(1)}$. Суммируя эти равенства и учитывая, что $|z_{i,j}^{(0)} - z_{s,l}^{(1)}| \leq \operatorname{diam} Q_{s,l}^{(1)}/4$, получим оценку (см. (9))

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i,j} \sigma_{i,j}^{(0)} \operatorname{Re} \frac{x h_{i,j}^{(0)}}{(z_{i,j}^{(0)} - x) z_{i,j}^{(0)}} - \operatorname{Re} \frac{x h_{s,l}^{(1)}}{(z_{s,l}^{(1)} - x) z_{s,l}^{(1)}} \right| \\ & \leq \max_w \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| \operatorname{diam} Q_{s,l}^{(1)} \operatorname{diam} Q_{i,j}^{(0)} \cdot 48 \\ & = \max_w \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| \operatorname{diam} Q_{s,l}^{(1)} \cdot 24. \end{aligned}$$

При этом максимум можно брать по квадрату с вершинами в точках $z_{i,j}^{(0)}$. Учитывая условие Р4, получим, что существует постоянная B_0 такая, что

$$\max_w \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| \leq B_0 \left| \frac{(2z_{s,l}^{(1)} - x)}{(z_{s,l}^{(1)}(z_{s,l}^{(1)} - x))^2} \right|.$$

В правой части этого неравенства стоит функция, субгармоническая по переменной $z_{s,l}^{(1)}$ в P , и круг с центром в точке $z_{s,l}^{(1)}$ и радиуса $\operatorname{diam} Q_{s,l}^{(1)}/2$ лежит в квадрате $Q_{s,l}^{(1)}$. Поэтому

$$\max_w \left| \frac{(2e-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| \leq \frac{2B_0}{\pi} (\operatorname{diam} Q_{s,l}^{(1)})^2 \int_{Q_{s,l}^{(1)}} \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| dv(w).$$

Подставим эту оценку в неравенство (12) и просуммируем по всем $h_{s,l}^{(1)} \in H^{(1)} \setminus H$. В результате получим соотношение

$$\left| \sum_H \varepsilon_{s,l}^{(m)} \operatorname{Re} \frac{x h_{s,l}^{(m)}}{(z_{s,l}^{(m)} - x) z_{s,l}^{(m)}} - \sum_{H^{(1)}} \varepsilon_{s,l}^{(m)} \operatorname{Re} \frac{x h_{s,l}^{(m)}}{(z_{s,l}^{(m)} - x) z_{s,l}^{(m)}} \right| \leq \frac{2B_0}{\pi} \int_P \left| \frac{(2w-x)x}{w^2(w-x)^2} \right| dv(w).$$

Совершенно также оценивается разность между $\sum_{H^{(k)}}$ и $\sum_{H^{(k+1)}}$. Поскольку $H^{(n)} = \{h_{0,0}^{(n)}\}$, то в итоге мы получим требуемую оценку (12), которая доказывает теорему 3 при дополнительном условии (*). Для того чтобы избавиться от этого условия, разобьем множество H на четыре непересекающиеся части H_i , каждая из которых удовлетворяет условию (*). Если это будет сделано, то доказав утверждение теоремы 3 для каждого из множеств H_i по отдельности, мы получим доказательство в общем случае. Через H_1 обозначим множество чисел $h_{s,l}^{(m)} \in H$, для которых $h_{i,j}^{(k)} = 0$ всякий раз, когда $Q_{i,j}^{(k)} \subset Q_{s,l}^{(m)}$. Через H_2 обозначим отличные от нуля числа $h_{s,l}^{(m)} \in H \setminus H_1$, для которых все $h_{i,j}^{(k)} \in H \setminus H_1$ равны нулю, если $Q_{i,j}^{(k)} \subset Q_{s,l}^{(m)}$. Аналогично определим $H_3 \subset H_1 \setminus H_2$. Очевидно, H_3, H_1, H_2 , дополненные нулями до полного набора, удовлетворяют условию (*). Докажем, что $H_4 = H \setminus (H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ также удовлетворяет условию (*). Действительно, если $h_{s,l}^{(m)} \neq 0$, $h_{s,l}^{(m)} \in H_4$ и найдется $h_{i,j}^{(k)} \in H_4$, $h_{i,j}^{(k)} \neq 0$, причем $Q_{i,j}^{(k)} \subset Q_{s,l}^{(m)}$, то $h_{i,j}^{(k)} \notin H_3$. По построению это значит, что найдется $h_{m,r}^{(t)} \neq 0$, $h_{m,r}^{(t)} \in H_3$ и $Q_{m,r}^{(t)} \subset Q_{i,j}^{(k)}$. Продолжая эти рассуждения, мы придем к существованию цепочки

$$Q_{x,y}^{(z)} \subset Q_{u,v}^{(p)} \subset Q_{m,r}^{(t)} \subset Q_{i,j}^{(k)} \subset Q_{s,l}^{(m)},$$

причем

$$h_{x,y}^{(z)} \neq 0, \quad h_{m,r}^{(t)} \neq 0, \quad h_{i,j}^{(k)} \neq 0, \quad h_{s,l}^{(m)} \neq 0,$$

т.е. все эти квадраты были выбраны для некоторых P_k . Отсюда следует, что квадрат $Q_{x,y}^{(z)}$ лежит не менее чем в пяти прямоугольниках, что противоречит свойству P2.

Теорема 3 доказана.

1.3. Перейдем непосредственно к вопросу о факторизации целых функций с множеством нулей типа Λ'_0 .

Напомним, что для функции

$$a(x) = \exp(a\sqrt{\ln(x+1)}), \quad x \geq 0,$$

определили последовательность x_n по формуле $x_0 = 0$ и

$$a(x_n) = x_n - x_{n-1} + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Целая функция f в каждом из квадратов

$$Q_n = \{z = x + iy, x_{n-1} \leq x < x_n, 1 < y \leq x_n - x_{n-1} + 1\}$$

и $-Q_n$, $\pm Q'_n$ имеет четное число нулей, разбитых на пары λ'_k, λ''_k . Каждая пара покрыта прямоугольником P_k и система прямоугольников удовлетворяет условиям P1, P2 теоремы А и P3' в условии теоремы 2. Не уменьшая общности можно считать выполненным также условие P4. Возьмем один из квадратов Q_n . Этот квадрат представим в виде, описанном в теореме 2. Достаточно положить

$$n = n_m = \frac{\ln(x_m - x_{m-1})}{\ln 2} + 2, \quad b = 2^{\alpha-2}, \quad R = x_{m-1},$$

где $[x]$ обозначает целую часть x и $\alpha < 1$. К нулям функции f , лежащим в квадрате Q_m , применим теоремы 2 и 3. Из них следует, что существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| \right) - \operatorname{Re} \frac{x h_m}{(z_m - x) z_m} \right| \\ & \leq C n_m \int_{Q_m} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) \\ & \quad + \delta(Q_m, x) B \left[\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} Q_m}{\operatorname{dist}(Q_m, x)} \right) + \int_{Q_m} \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \end{aligned}$$

где z_m — геометрический центр Q_m и

$$|h_m| \leq 200 \operatorname{diam} Q_m.$$

Если $\varepsilon_k = -1$, то поменяем местами точки λ'_k и λ''_k и будем считать выполненным соотношение

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k \left(\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| \right) - \operatorname{Re} \frac{x h_m}{(z_m - x) z_m} \right| \\ & \leq C n_m \int_{Q_m} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) \\ & \quad + \delta(Q_m, x) B \left[\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} Q_m}{\operatorname{dist}(Q_m, x)} \right) + \int_{Q_m} \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где C, B — постоянные, не зависящие от m . Такие же оценки выполняются для квадратов $-Q_m, \pm Q'_m$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть целая функция f удовлетворяет условиям основной теоремы. Нули функции f находятся в квадратах $\pm Q_m, \pm Q'_m$, причем в каждом квадрате находится четное число нулей и они разбиты на пары λ'_k, λ''_k . Каждая пара покрыта прямоугольником P_k и система прямоугольников P_k удовлетворяет условиям P1, P2, P3', P4 в формулировке теоремы 2. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\left| \sum_k \left(\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| \right) \right| \leq C \ln(|x| + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем на основе соотношения (13).

ЛЕММА 4. *Имеет место оценка*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{xh_m}{(z_m - x)z_m} \right| \leq C \ln(|x| + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По построению

$$|h_m| \leq 200 \operatorname{diam} Q_m \leq 300(x_m - x_{m-1})$$

(см. теорему 3). Через x'_m обозначим $(x_m + x_{m-1})/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{xh_m}{(z_m - x)z_m} \right| &\leq xC_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m - x_{m-1}}{(|x'_m - x| + a(x_m))(x'_m + a(x_m))} \\ &\leq C_2 x \sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{dt}{(|t - x| + a(t))(t + a(t))}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a(t) \geq 1$, отсюда получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{xh_m}{(z_m - x)z_m} \right| &\leq C_2 x \int_0^{\infty} \frac{dt}{(|t - x| + 1)(t + 1)} \\ &\leq C_2 \left(1 + \frac{|x|}{|x| + 2} \right) \ln(|x| + 1). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} n_m \int_{Q_m} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) \leq \operatorname{const} \cdot \ln(|x| + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению чисел n_m имеем оценку

$$n_m \leq \operatorname{const} \cdot \ln a(x_m) \leq \operatorname{const} \cdot \ln a(t), \quad x_{m-1} \leq x \leq x_m,$$

поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} n_m \int_{Q_m} \left| \frac{(2w - x)x}{w^2(w - x)^2} \right| dv(w) \leq \int_G \frac{|2w - x||x| \ln a(\operatorname{Re} w)}{|w - x|^2 |w|^2} dv(w),$$

где

$$G = \{1 \leq \operatorname{Re} w \leq \infty, 1 \leq \operatorname{Im} w \leq Aa(\operatorname{Re} w)\},$$

и число A определено во введении. Воспользуемся следующими элементарными оценками

$$\begin{aligned}\frac{|2w-x||x|\ln a(\operatorname{Re} w)}{|w-x|^2|w|^2} &\leq \frac{C \ln a(|x|)}{|w|^2}, & w \in G, \quad 1 \leq \operatorname{Re} w \leq x/2, \\ \frac{|2w-x||x|\ln a(\operatorname{Re} w)}{|w-x|^2|w|^2} &\leq \frac{C \ln a(|x|)}{|w-x|^2}, & w \in G, \quad x/2 \leq \operatorname{Re} w \leq 2x, \\ \frac{|2w-x||x|\ln a(\operatorname{Re} w)}{|w-x|^2|w|^2} &\leq \frac{C \ln a(\operatorname{Re} w)}{|w|^2}, & w \in G, \quad 2x \leq \operatorname{Re} w,\end{aligned}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. По первой из этих оценок, переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned}&\int_{G \cap \{1 \leq \operatorname{Re} w \leq x/2\}} \frac{|2w-x||x|\ln a(\operatorname{Re} w)}{|w-x|^2|w|^2} dv(w) \\ &\leq C_1 \ln a(x) \int_1^{x/2} \frac{a(r)}{r^2} dr \leq \operatorname{const} \cdot \ln a(x), \quad w \in G, \quad 1 \leq \operatorname{Re} w \leq x/2,\end{aligned}$$

так как $a(r) = O(r^t)$ для любого $t > 0$. Аналогично оценивается интеграл по множеству $G \cap \{2x \leq \operatorname{Re} w\}$. По второму из вышеприведенных неравенств получим

$$\begin{aligned}&\int_{G \cap \{x/2 \leq \operatorname{Re} w \leq 2x\}} \frac{|2w-x||x|\ln a(\operatorname{Re} w)}{|w-x|^2|w|^2} dv(w) \\ &\leq C_1 \ln a(x) \int_1^{Aa(2x)} \int_{x/2}^{2x} \frac{dt ds}{(t-x)^2 + s^2} \\ &= C_1 \ln a(x) \int_1^{Aa(2x)} \frac{1}{s} \int_{x/2s}^{x/s} \frac{d\tau}{\tau^2 + 1} ds \\ &\leq C_1 \pi \ln a(x) \ln a(2x) \leq C_2 (\ln a(x))^2 \leq C_3 \ln(|x| + 1).\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Совершенно так же доказываются утверждения лемм 4 и 5 для квадратов $-Q_m$ и $\pm Q'_m$. Из этих оценок и из неравенства (13) получим соотношение

$$\begin{aligned}&\left| \sum_k \left(\ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{x}{\lambda''_k} \right| \right) \right| \\ &\leq C \ln(|x| + 1) + \sum_m \delta(Q_m, x) B \left[\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} Q_m}{\operatorname{dist}(Q_m, x)} \right) + \int_{Q_m} \frac{1}{|w|^2} dv(w) \right], \quad (14)\end{aligned}$$

где слева суммирование ведется по всем индексам m . Напомним, что величина $\delta(Q_m, x)$ отлична от нуля лишь в том случае, когда $\operatorname{diam} Q_m$ больше, чем $\operatorname{dist}(Q_m, x)/2$. Этому условию могут удовлетворить не более 16 квадратов Q_m , ближайших к точке x . При этом для этих квадратов выполняется оценка

$$\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} Q_m}{\operatorname{dist}(Q_m, x)} \right) + \int_{Q_m} \frac{1}{|w|^2} dv(w) \leq \operatorname{const} \cdot \ln a(|x|) \leq \operatorname{const} \cdot \ln(|x| + 1).$$

Отсюда и из оценки (14) следует утверждение теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. В условиях теоремы 4 целая функция f может быть представлена как произведение целых функций f_1, f_2 так, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(x)| - \ln |f_2(x)|| &\leq \text{const} \cdot \ln(|x| + 1), & x \in \mathbb{R}, \\ |\ln |f_1(re^{i\varphi})| - \ln |f_2(re^{i\varphi})|| &\leq C(\varphi, \varepsilon)r^\varepsilon, & r > r(\varphi, \varepsilon). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Целая функция f удовлетворяет условиям основной теоремы. Если через $n_f(t)$ обозначим число нулей функции f в круге радиуса t с центром в начале координат, а через $n_F(t)$ — число нулей функции F в том же круге, то $n_f(t) \leq n_F(t)$ и по формуле Иенсена получим оценку

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{n_f(t)}{t} dt &\leq \int_0^r \frac{n_F(t)}{t} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \sigma r + H(0). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка

$$n_f(t) \leq \int_t^{et} \frac{n_f(\tau)}{\tau} d\tau \leq \sigma et + H(0) \leq \sigma_1 t, \quad t \geq 1, \quad (15)$$

где $\sigma_1 > \sigma$. По теореме о среднем имеем

$$\left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right| \leq \max_z \frac{1}{|z|^2} |\lambda'_k - \lambda''_k| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{|\lambda'_k|^2} a(\text{Re } \lambda'_k).$$

Следовательно, учитывая соотношение (15), получим, что выполняется условие

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right| &\leq \text{const} \cdot \int_1^\infty \frac{a(t)}{t^2} dn(t) \leq \text{const} \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^{2-\varepsilon}} dn(t) \\ &= \text{const} \cdot \int_1^\infty \frac{n(t)}{t^{3-\varepsilon}} dt \leq \text{const} \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^{2-\varepsilon}} dt < \infty. \end{aligned}$$

Произведения

$$v_1(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right) \exp \frac{\lambda}{\lambda'_k}, \quad \tilde{v}_2(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right) \exp \frac{\lambda}{\lambda''_k}$$

являются целыми функциями [10]. В силу сходимости ряда

$$\sum_k \left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right|$$

произведение

$$v_2(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right) \exp \frac{\lambda}{\lambda''_k}$$

также является целой функцией. Тогда функция $f(\lambda)/v_1(\lambda)v_2(\lambda)$ – это целая функция без нулей, т.е. эта функция имеет вид $\exp g(\lambda)$, где $g(\lambda)$ – целая функция. Положим

$$f_i(\lambda) = v_i(\lambda) \exp \frac{g(\lambda)}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Функции $f_i(\lambda)$ удовлетворяют условиям теоремы 5. Действительно, по построению $f_1 f_2 = f$ и

$$\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)| = \sum_k \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right).$$

Поэтому первое неравенство в теореме 5 сводится к утверждению теоремы 4. Если $\lambda = r \exp(i\varphi)$ и r достаточно большое, то

$$\left| \frac{\lambda}{\zeta - \lambda} \right| \leq C(\varphi), \quad \zeta \in G_a.$$

По теореме о среднем и из последнего неравенства вытекает оценка

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| = \left| \frac{(\lambda'_k - \lambda''_k)\lambda}{(\lambda - \lambda_k^*)\lambda_k^*} \right| \leq C_1(\varphi) \frac{a(\lambda_k^*)}{|\lambda_k^*|},$$

где λ_k^* – точка, лежащая на отрезке между λ'_k и λ''_k . Если $n^*(t)$ – число точек λ_k^* , лежащих в круге радиуса t с центром в нуле, то из (15) следует, что для $n^*(t)$ верна аналогичная оценка:

$$n^*(t) \leq \sigma^* t, \quad t \geq 1.$$

Учитывая, кроме того, что для любого $\varepsilon > 0$ $a(t) \leq C(\varepsilon)t^\varepsilon$, $t \geq 1$, получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_k^*| \leq 2|\lambda|} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| &\leq C_2(\varphi, \varepsilon) \sum_{|\lambda_k^*| \leq 2|\lambda|} \frac{1}{|\lambda_k^*|^{1-\varepsilon}} \\ &= C(\varphi, \varepsilon) \int_1^{2|\lambda|} \frac{dn^*(t)}{t^{1-\varepsilon}} \leq C(\varphi, \varepsilon) |\lambda|^\varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Если же $|\lambda_k^*| > 2|\lambda|$, то $|\lambda_k^* - \lambda| \geq |\lambda_k^*|/2$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_k^*| > 2|\lambda|} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| &\leq 2|\lambda|C \sum_{|\lambda_k^*| > 2|\lambda|} \frac{a(|\lambda_k^*|)}{|\lambda_k^*|^{1-\varepsilon}} \\ &= 2C_\varepsilon |\lambda| \int_{2|\lambda|}^\infty \frac{dn^*(t)}{t^{2-\varepsilon}} \leq C(\varphi, \varepsilon) |\lambda|^\varepsilon. \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с соотношением (16) дает вторую оценку в утверждении теоремы 5.

2. Здесь рассмотрим вопрос о факторизации целых функций с множеством нулей типа Λ_1 и Λ_2 , тем самым закончим доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть f — целая функция, и нули функции f находятся в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, причем в каждом квадрате

$$K_n = \{z : 2n \leq \operatorname{Re} z \leq 2(n+1), |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$$

находится не более чем один нуль. Тогда функция f представляется в виде произведения целых функций f_1, f_2 так, что выполняется соотношение

$$|\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| \leq \operatorname{const} \cdot (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))),$$

где $\rho(\lambda)$ — расстояние от точки λ до множества нулей функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_k, k \in \mathbb{Z}$, — нули функции f , перенумерованные в порядке возрастания $\operatorname{Re} z_k$. Не уменьшая общности можем считать, что $|\operatorname{Re} z_k| \geq 1$ и $\operatorname{Re} z_0 = \min\{\operatorname{Re} z_k : \operatorname{Re} z_k \geq 0\}$. Если положим

$$\mu_{2k} = z_{4k}, \quad \mu_{2k+1} = z_{4k+1}, \quad \nu_{2k} = z_{4k+2}, \quad \nu_{2k+1} = z_{4k+3},$$

то в силу условия на расположение нулей для любого k имеем $|\operatorname{Re} \mu_k - \operatorname{Re} \nu_k| \geq 2$. Пусть $\min_k |\nu_k - \lambda| = |\nu_{k_0} - \lambda|$. Для $k = k_0, k_0 \pm 1$, воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| \right| &\leq \operatorname{const} \cdot (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))), \\ \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| \right| &\leq \operatorname{const} \cdot (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))), \end{aligned}$$

где $\rho(\lambda)$ — расстояние от точки λ до нулей функции f , из которой следует соотношение

$$\sum_{|k-k_0| \leq 1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| \right| \leq C (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))). \quad (17)$$

Для остальных k используем формулу

$$\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| = \operatorname{Re} \int_{\nu_k}^{\mu_k} \frac{\lambda}{z(z-\lambda)} dz.$$

Поскольку $|\operatorname{Re} \mu_k - \operatorname{Re} \nu_k| \geq 2$ и $|\operatorname{Im} \mu_k|, |\operatorname{Im} \nu_k| \leq 1$, то из последней формулы вытекает оценка

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| \right| \leq A \int_{\operatorname{Re} \nu_k}^{\operatorname{Re} \mu_k} \frac{|\lambda|}{|t(t-\lambda)|} dt,$$

где A — некоторая абсолютная постоянная. По построению $|\operatorname{Re} \mu_k|, |\operatorname{Re} \nu_k| \geq 1$ и интервалы $[\operatorname{Re} \mu_k, \operatorname{Re} \nu_k]$ каждую точку вещественной оси покрывают не более чем два раза. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{|k-k_0| > 1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| \right| \\ \leq 2A \int_{|t| > 1, |t-\lambda| > 1} \frac{|\lambda|}{|t(t-\lambda)|} dt \leq A_1 \ln(|\lambda| + 1), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Вместе с соотношением (17) эта оценка дает неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right| \right| \leq C (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))). \quad (18)$$

Рассмотрим целые функции

$$\tilde{v}_1(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k} \right) \exp \frac{\lambda}{\mu_k}, \quad \tilde{v}_2(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\nu_k} \right) \exp \frac{\lambda}{\nu_k}.$$

Сходимость произведения в определении функции $\tilde{v}_1$ очевидна. Сходимость произведения для $\tilde{v}_2$ следует из соотношения (18). По построению $\tilde{v}_1(\lambda)\tilde{v}_2(\lambda) = f(\lambda) \exp g(\lambda)$, где g — целая функция. Положим

$$f_j(\lambda) = \tilde{v}_j(\lambda) \exp \frac{g(\lambda)}{2}.$$

Ясно, что функции f_j удовлетворяют условиям теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть f — целая функция, все нули ее лежат в квадратах $\pm Q_n$, $\pm Q'_m$, и в каждом квадрате лежит не более одного нуля. Тогда функция f представляется в виде произведения целых функций f_1, f_2 , причем выполняется соотношение

$$|\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| \leq \text{const} (\ln(|\lambda| + 1) + \ln^+(1/\rho(\lambda))),$$

где $\rho(\lambda)$ — расстояние от точки λ до нулей функции f .

Эта теорема доказывается точно так же, как и теорема 6. Из утверждений теорем 1, 4, 6, 7 следует доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и нули функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ лежат в области

$$G = \{z = x + iy : |y| \leq \exp a(\sqrt{\ln(|x| + 1)})\}.$$

Если носитель функции φ лежит в интервале $[-2N, 2N]$, то φ может быть представлена как свертка функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причем носители функций φ_j лежат в интервале $[-N, N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\varphi}(\lambda) = \lambda^k f(\lambda)$, $f(0) \neq 0$. К функции $f(\lambda)$ применим основную теорему, полагая

$$F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{f(0)}$$

и

$$H(\lambda) = 2N |\operatorname{Im} \lambda| + M,$$

для подходящей постоянной M . Тогда функция $\widehat{\varphi}$ представляется в виде произведения целых функций f_1, f_2 так, что

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(x)| - \ln |f_2(x)|| &\leq \frac{C}{p} (M - \ln |f(x)| + \ln |f(0)|) \\ &+ C_1 \ln(|x| + 1) + C_2 \ln^+(1/\rho(\lambda)) + C_3 e^p. \end{aligned}$$

Тогда выполняется оценка

$$\begin{aligned} \ln |f_j(x)| &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{2p} \right) \ln |f(x)| + \frac{MC + \ln |f(0)|}{2p} \\ &+ C_1 \ln(|x| + 1) + C_2 \ln^+(1/\rho(x)) + C'_3 e^p. \end{aligned}$$

Выбирая величину $p \geq 2C$ получим, что для всех $x, \rho(x) \geq (|x| + 1)^{-3}$, выполняется оценка

$$\ln |f_j(x)| \leq \frac{1}{4} \ln |f(x)| + \text{const} \cdot \ln(|x| + 1) \leq \text{const} \cdot \ln(|x| + 1).$$

Исключительное множество $E = \{x : \rho(x) \leq (|x| + 1)^{-3}\}$ может быть покрыто системой кругов с конечной суммой радиусов. Этот факт доказывается стандартными методами теории субгармонических функций на основе леммы Хеймана (см. [11, с. 246]). В результате мы получим, что функции f_j лежат в $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$, т.е. являются преобразованием Фурье–Лапласа функций $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Что касается носителей функций φ_j , то нужно воспользоваться последней оценкой в утверждении основной теоремы.

ТЕОРЕМА 9. Пусть μ – распределение конечного порядка с компактным носителем в интервале $[-2N, 2N]$. Если нули функции

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \mu(\exp(i\lambda t))$$

лежат в области G (см. формулировку теоремы 8), то распределение μ представляется в виде свертки двух распределений μ_1, μ_2 с носителями в интервале $[-N, N]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье–Лапласа распределения конечного порядка с компактным носителем – это целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условию на вещественной оси

$$\ln |f(x)| \leq C \ln(|x| + 1) + M.$$

Поэтому теорема 9 может быть доказана так же, как и теорема 8, если в качестве функции $H(\lambda)$ взять функцию $2N|\text{Im } \lambda| + C \ln(|\lambda| + 1) + M$, с подходящими постоянными C и M .

Список литературы

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division. IV // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
2. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
3. *Demaily J. P.* Construction d'hipersurfaces irreductibles avec lien singulier donne dans $\mathbb{C}^n$ // Ann. Inst. Fourier. 1980. V. 30. №3. P. 219–236.
4. *Malliaven P., Dixmier J.* Factorisations de fonctions et de vecteurs indefeniment differentiables // Bull. Sci. Math. 1978. V. 102. №2. P. 305–330.
5. *Rubel L. A., Aquires W. A., Taylor B. A.* Irreducibility of certain entier functions and applications to harmonic analysis // Ann. of Math. 1978. V. 108. №2. P. 553–567.
6. *Dickson D. G.* Factoring rapidly decreasing entire function // Bull. Sci. Math. 1986. V. 110. №4. P. 335–345.
7. *Dickson D. G.* Factoring functions of exponential type with restriction on a line // Bull. Sci. Math. 1988. V. 112. №2. P. 77–100.
8. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. Т. 11. С. 257–282.
9. *Юлмухаметов Р. С.* Расщепление целых функций с нулями в полосе // Матем. сб. 1995. Т. 186. №7. С. 147–160.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
11. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Башкирский государственный университет

Поступила в редакцию
16.02.1995