Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 47–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:29:02

УДК 517.984

И. М. Гусейнов, И. М. Набиев

Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов

Исследуется обратная задача спектрального анализа для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на отрезке. Доказана теорема единственности, приведен алгоритм решения и получены достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Библиография: 31 название.

Введение

Важное место в современном развитии спектральной теории линейных операторов занимает теория обратных задач для дифференциальных операторов. Обратные задачи спектрального анализа состоят в восстановлении операторов по их спектральным данным. В качестве основных спектральных данных, в частности, используются один, два и большее число спектров, спектральная функция, спектр и нормировочные числа, функция Вейля. В зависимости от выбора спектральных данных возможны различные постановки обратных задач. В настоящее время по теории обратных задач спектрального анализа имеется обширная литература. Наиболее полно современное состояние этой теории и ее приложений отражено в монографиях В. А. Марченко [1], Б. М. Левитана [2], Р. Биилса, П. Дейфта и С. Томей [3] и В. А. Юрко [4].

Рассмотрим краевую задачу, порожденную дифференциальным уравнением

$$l_\lambda y = y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

и двумя общими граничными условиями

$$a_{j1}y(0) + a_{j2}y'(0) + a_{j3}y(\pi) + a_{j4}y'(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ – вещественные функции, a_{jk} – произвольные комплексные числа, j (здесь и в дальнейшем) принимает значения 1 и 2. Через $W_2^n[0, \pi]$ мы обозначаем пространство функций $f(x)$, $x \in [0, \pi]$, таких, что функции $f^{(m)}(x)$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, абсолютно непрерывны и $f^{(n)}(x) \in L_2[0, \pi]$.

Имеется значительное количество работ, в которых достаточно полно изучены прямые и обратные задачи спектрального анализа для уравнения Штурма–Лиувилля

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad (3)$$

являющегося частным случаем ($p(x) \equiv 0$) уравнения (1). В работе [5] (см. также [1]–[4]) решены обратные задачи для регулярного оператора Штурма–Лиувилля с граничными условиями (2) в случае $a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$ (т.е. в случае разделенных граничных условий). Статьи [6]–[15] посвящены

изучению задач о восстановлении краевых задач, порожденных на отрезке $[0, \pi]$ уравнением (3) и общими самосопряженными неразделенными граничными условиями (2), которые приводятся к одному из следующих двух типов:

$$\begin{aligned} y(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ \bar{\omega} y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} \beta y(0) + y'(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ -\bar{\omega} y(0) + \gamma y(\pi) + y'(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где α, β, γ – произвольные вещественные числа, а $\omega \neq 0$ – произвольное комплексное число. При $\omega = \mp 1, \alpha = 0$ задача (3), (4) превращается в периодическую и антипериодическую краевые задачи, характеристика спектров которых дана в работах [6]–[8] (см. также [1], [2], [4]). Теоретико-функциональной основой работы [8] явилась параметризация класса вещественных целых функций с помощью специальных конформных отображений верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами. Характеристикам спектральных данных подобных краевых задач (т.е. задач, у которых характеристические функции отличаются на константу) посвящены статьи [9], [10], в которых обобщаются и развиваются методы и результаты работы [8] на случай неразделенных граничных условий вида (4) и (5). Показано, что спектральными данными для пары подобных краевых задач могут служить их спектры, последовательность собственных значений задачи, порожденной операцией l и некоторыми разделенными граничными условиями, некоторая последовательность знаков и некоторое вещественное число. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять спектральные данные двух подобных краевых задач. Эти условия описаны с помощью представления спектральных данных через независимые параметры. Другим методом в [11] полностью исследована задача восстановления подобных краевых задач вида (3), (5) по спектральным данным.

В работах [12]–[15] рассмотрены классы неподобных (самосопряженных) краевых задач. Изучены свойства спектральных данных, доказаны теоремы единственности и необходимые и достаточные условия разрешимости обратных задач. Отметим, что в общем случае граничных условий (2) в [16]–[18] разными подходами исследован вопрос о единственности восстановления дифференциального уравнения (3) и граничных условий.

Некоторые варианты обратных задач для уравнения (1), которое является естественным обобщением уравнения Штурма–Лиувилля, полностью исследованы в работах [19]–[27]. Так, обратные задачи для пучка l_λ на полуоси и на всей оси рассмотрены в статьях [19]–[21], в которых в качестве спектральных данных берутся соответственно данные рассеяния, спектральная функция и функция Вейля. Задача о восстановлении уравнения (1) по спектрам двух краевых задач с некоторыми разделенными граничными условиями решена в [22]. Исследованию обратных спектральных задач для уравнения (1) с другими видами разделенных граничных условий, а также с периодическими и антипериодическими граничными условиями посвящена статья [23] (см. также [24]), где обобщаются на случай $p(x) \not\equiv 0$ соответствующие результаты монографии [1]. Обратная периодическая задача для пучка l_λ с помощью

другого подхода решена в [25]. Задачи восстановления неподобных краевых задач вида (1), (4) в случае $|\omega| = 1$ полностью исследованы в статье [26]. Отметим еще работу [27], в которой изучен вопрос о единственности восстановления пучка l_λ по трем спектрам. Обратная задача спектрального анализа для пучка (1), (5) ранее не исследовалась. В дальнейшем краевую задачу (1), (5) будем обозначать через $L(\omega, \beta, \gamma)$.

Основная цель настоящей работы состоит в решении обратной задачи восстановления краевых задач вида $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ ($\beta_1 \neq \beta_2$) по спектральным данным, которыми являются спектры двух краевых задач, некоторая последовательность знаков и некоторое комплексное число. Доказана теорема единственности, приведен алгоритм решения и получены достаточные условия разрешимости обратной задачи. При этом важным и наиболее сложным вопросом является нахождение достаточных условий, которым должна удовлетворять совокупность некоторых величин для того, чтобы быть спектральными данными краевых задач вида $L(\omega, \beta_j, \gamma)$. Эти условия описаны в теореме 3.1.

Настоящая работа построена следующим образом: § 1 носит вспомогательный характер – в нем приводятся утверждения о представлении некоторых целых функций, которые используются при доказательствах основных результатов работы; в § 2 исследуется единственность и приводится алгоритм восстановления краевых задач по спектральным данным; § 3 посвящен доказательствам достаточных условий разрешимости обратной задачи.

Отметим, что основные результаты настоящей работы без доказательств были ранее анонсированы в [28].

§ 1. Представления некоторых целых функций

Обозначим через $c(\lambda, x)$ и $s(\lambda, x)$ решения уравнения (1) при начальных условиях

$$c(\lambda, 0) - 1 = c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) - 1 = 0. \quad (1.1)$$

При каждом фиксированном x эти решения являются целыми функциями от параметра λ .

ЛЕММА 1.1. *Справедливы следующие представления:*

$$\begin{aligned} c(\lambda, \pi) &= \cos \pi(\lambda - a) - c_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi a_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt, \\ c'(\lambda, \pi) &= -\lambda \sin \pi(\lambda - a) + c_0 \sin \pi(\lambda - a) + \pi a_1 \cos \pi(\lambda - a) + \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt, \\ s(\lambda, \pi) &= \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + c_0 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda^2} - \pi a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_3(t) e^{i\lambda t} dt, \\ s'(\lambda, \pi) &= \cos \pi(\lambda - a) + c_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi a_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_4(t) e^{i\lambda t} dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(t) dt, & a_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [q(t) + p^2(t)] dt, \\ c_0 &= \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)], & c_1 &= \frac{1}{2} [p(0) - p(\pi)]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.2. Для того чтобы функции $F(z)$ и $G(z)$ допускали представления

$$F(z) = \sin \pi(z - a) + A_0 \pi \frac{4(z - a)}{4(z - a)^2 - 1} \cos \pi(z - a) + \frac{f_0(z - a)}{z - a}, \quad (1.2)$$

$$G(z) = \cos \pi(z - a) + B_0 \pi \frac{\sin \pi(z - a)}{z - a} + \frac{g_0(z - a)}{z - a}, \quad (1.3)$$

где

$$f_0(z) = a_0 \sin \pi z + \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}_0(t) e^{itz} dt, \quad \tilde{f}_0(t) \in L_2[-\pi, \pi], \quad f_0(0) = f'_0(0) = 0,$$

$$g_0(z) = a_1 \cos \pi z + \int_{-\pi}^\pi \tilde{g}_0(t) e^{itz} dt, \quad \tilde{g}_0(t) \in L_2[-\pi, \pi], \quad g_0(0) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} F(z) &= \pi(z - a) \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u_k - z}{k}, & u_k &= k + a - \frac{A_0}{k} + \frac{\delta_k}{k}, \\ G(z) &= \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{v_k - z}{k^*}, & v_k &= k^* + a + \frac{B_0}{k} + \frac{\tilde{\delta}_k}{k}, \end{aligned}$$

где a, a_0, a_1, A_0, B_0 – некоторые числа, $k^* = k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k$,

$$\sum'_{k=-\infty}^{\infty} \{|\delta_k|^2 + |\tilde{\delta}_k|^2\} < \infty$$

(штрих у знака произведения или суммы здесь и далее означает отсутствие члена, отвечающего значению $k = 0$).

Леммы 1.1 и 1.2 являются обобщениями фактов в [1; с. 38 и 225] и приведены в [24].

ЛЕММА 1.3. Для того чтобы целая функция $n(z)$ допускала представление

$$n(z) = A + (z - a) \sin \pi(z - a) + B \cos \pi(z - a) + g(z - a), \quad (1.4)$$

где

$$g(z) = C \sin \pi z + f(z), \quad f(z) = \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(t) e^{itz} dt, \quad \tilde{f}(t) \in L_2[-\pi, \pi],$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} n(z) &= \pi(\gamma_{-0} - z)(\gamma_{+0} - z) \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_k - z}{k}, & (1.5) \\ \gamma_k &= k + a + \frac{A(-1)^{k+1} - B}{k\pi} + \frac{\alpha_k}{k}, \end{aligned}$$

где A, B, C и a – некоторые числа, $\{\alpha_k\}$ – произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Используя теорему Руше, известным приемом (см., например, [1]) легко установить, что нули функции $n(z)$, представимой в виде (1.4), образуют последовательность $\{\gamma_k\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в которой $\gamma_k = k + a + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = O(k^{-1})$ при $k \rightarrow \pm\infty$. Подставив выражение для γ_k в равенство $n(\gamma_k) = 0$, получим следующее уравнение для ε_k :

$$A(-1)^k + (k + \varepsilon_k) \sin \pi \varepsilon_k + B \cos \pi \varepsilon_k + C \sin \pi \varepsilon_k + (-1)^k f(k + \varepsilon_k) = 0. \quad (1.6)$$

В силу леммы 3.2 работы [8] при $k \rightarrow \pm\infty$

$$f(k + \varepsilon_k) = f(k) + \varepsilon_k f'(k) + O(k^{-2}),$$

где

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f'(k)|^2 < \infty.$$

Поэтому уравнение (1.6) можно преобразовать к виду

$$\left[\pi + \frac{C\pi + (-1)^k f'(k)}{k} \right] \varepsilon_k = \frac{A(-1)^{k+1} - B + (-1)^{k+1} f(k)}{k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_k = \frac{A(-1)^{k+1} - B}{k\pi} + \frac{\alpha_k}{k},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k = & \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \left\{ f(k) - \frac{C[A + (-1)^k B]}{k} - C \frac{f(k)}{k} - \frac{B + A(-1)^k}{k\pi} f'(k) \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{k+1} f(k) f'(k)}{k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Легко видеть, что $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$.

Поскольку $n(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, то она представляется в форме

$$n(z) = \tilde{C}_1 (\gamma_{-0} - z)(\gamma_{+0} - z) \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_k - z}{k}.$$

Для определения константы $\tilde{C}_1$ воспользуемся равенством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(a + it)}{\sin \pi it} = 1,$$

из которого следует, что $\tilde{C}_1 = \pi$.

Достаточность. Пусть функция $n(z)$ представима в виде (1.5). Очевидно, что

$$n(z) = \pi (\gamma_{-0} - z)(\gamma_{+0} - z) \prod'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{2m^*} - z}{2m^*} \prod'_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{2m} - z}{2m},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{2m^*} &= 2m^* + a - \frac{B - A}{2m\pi} + \frac{\alpha_{2m^*}}{2m}, & m^* &= m - \frac{1}{2} \operatorname{sign} m, \\ \gamma_{2m} &= 2m + a - \frac{A + B}{2m\pi} + \frac{\alpha_{2m}}{2m}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу представлений (1.2), (1.3) и теоремы Пели–Винера (см. [29; с. 47]) получаем

$$\begin{aligned}
 n(z) &= \frac{2(\gamma_{-0} - z)(\gamma_{+0} - z)}{z - a} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\gamma_{2m}^*}{2} - \frac{z}{2}}{m^*} \frac{\pi(z - a)}{2} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\gamma_{2m}}{2} - \frac{z}{2}}{m} \\
 &= \frac{2(\gamma_{-0} - z)(\gamma_{+0} - z)}{z - a} \left[\cos \frac{\pi(z - a)}{2} - \frac{B - A}{2} \frac{\sin \frac{\pi(z - a)}{2}}{z - a} + \frac{2g_2(\frac{z - a}{2})}{z - a} \right] \\
 &\quad \times \left[\sin \frac{\pi(z - a)}{2} + \frac{A + B}{2} \frac{z - a}{(z - a)^2 - 1} \cos \frac{\pi(z - a)}{2} + \frac{2g_1(\frac{z - a}{2})}{z - a} \right] \\
 &= \left[z - a - \gamma_{-0} - \gamma_{+0} + 2a + \frac{(\gamma_{-0} - a)(\gamma_{+0} - a)}{z - a} \right] \\
 &\quad \times \left\{ \sin \pi(z - a) - \frac{B - A}{2(z - a)} + \frac{A + B}{2} \frac{z - a}{(z - a)^2 - 1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(z - a) \cos \pi(z - a)}{2} \left[\frac{B - A}{(z - a)^2} + \frac{A + B}{(z - a)^2 - 1} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A^2 - B^2}{4} \frac{\sin \pi(z - a)}{(z - a)^2 - 1} + \frac{4g_1(\frac{z - a}{2}) \cos \frac{\pi(z - a)}{2}}{z - a} \right. \\
 &\quad \left. + 2(A + B) \frac{g_2(\frac{z - a}{2}) \cos \frac{\pi(z - a)}{2}}{(z - a)^2 - 1} + 2(A - B) \frac{g_1(\frac{z - a}{2}) \sin \frac{\pi(z - a)}{2}}{(z - a)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8g_1(\frac{z - a}{2})g_2(\frac{z - a}{2})}{(z - a)^2} \right\} \\
 &= A + (z - a) \sin \pi(z - a) + B \cos \pi(z - a) + g(z - a).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 2. Теорема единственности и алгоритм решения обратной задачи

Известно (см. [23]), что спектры двух краевых задач, порожденных одним и тем же уравнением (1) и разделенными граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2.1)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \quad (2.2)$$

однозначно определяют коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1). Но по спектрам краевых задач типа $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ нельзя однозначно восстановить эти задачи. Поэтому необходимо иметь те дополнительные спектральные характеристики, которые вместе с этими спектрами уже однозначно их определяют.

Рассмотрим две краевые задачи $L(\omega, \beta_j, \gamma)$. Согласно равенствам (1.1) и тождеству

$$c(\lambda, \pi)s'(\lambda, \pi) - c'(\lambda, \pi)s(\lambda, \pi) = 1$$

характеристические функции рассматриваемых краевых задач имеют вид

$$\delta_j(\lambda) = v_+(\lambda) + \beta_j[s'(\lambda, \pi) + \gamma s(\lambda, \pi)] + 2 \operatorname{Re} \omega, \quad (2.3)$$

где

$$v_+(\lambda) = -c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi) + |\omega|^2 s(\lambda, \pi). \quad (2.4)$$

Эти функции являются целыми функциями экспоненциального типа π . По спектрам $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$, $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ можно восстановить функции $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ в виде бесконечного произведения. Известно (см. [28]), что $\gamma_{j,k}$ подчиняются следующей асимптотике:

$$\gamma_{j,k} = k + a + \frac{2(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \omega - \beta_j + \gamma + a_1 \pi}{\pi k} + \frac{r_{j,k}}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{j,k}^2 < \infty. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что

$$\beta_2 - \beta_1 = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} k(\gamma_{1,k} - \gamma_{2,k}). \quad (2.6)$$

Теперь можно восстановить функцию $\sigma(\lambda) = s'(\lambda, \pi) + \gamma s(\lambda, \pi)$ следующим образом:

$$\sigma(\lambda) = \frac{\delta_2(\lambda) - \delta_1(\lambda)}{\beta_2 - \beta_1}. \quad (2.7)$$

Отсюда находим нули $\varkappa_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $\sigma(\lambda)$, для которых при $|k| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\varkappa_k = k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k + a + \frac{a_1 \pi + \gamma}{k \pi} + \frac{\xi_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k^2 < \infty. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$v_-(\lambda) = -c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi) - |\omega|^2 s(\lambda, \pi). \quad (2.9)$$

Учитывая тождество

$$c(\lambda, x) [s'(\lambda, x) + \gamma s(\lambda, x)] - s(\lambda, x) [c'(\lambda, x) + \gamma c(\lambda, x)] = 1, \quad (2.10)$$

легко получить, что

$$v_-^2(\varkappa_k) - v_+^2(\varkappa_k) = -4|\omega|^2,$$

и потому

$$v_-(\varkappa_k) = \operatorname{sign} v_-(\varkappa_k) \sqrt{v_+^2(\varkappa_k) - 4|\omega|^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = v_+(\lambda) - v_-(\lambda) - 2|\omega|^2 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda}. \quad (2.11)$$

Принимая во внимание (2.4), (2.8) и (2.9), в силу леммы 3.2 из [8] и леммы 1.1 находим, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(\varkappa_k)|^2$ сходится. Тогда согласно теореме 28 работы [29] для функции $g(\lambda)$ справедлива следующая интерполяционная формула:

$$g(\lambda) = \sigma(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g(\varkappa_k)}{(\lambda - \varkappa_k) \sigma'(\varkappa_k)}, \quad (2.12)$$

где

$$g(\varkappa_k) = v_+(\varkappa_k) - \tilde{\sigma}_k \sqrt{v_+^2(\varkappa_k) - 4|\omega|^2} - 2|\omega|^2 \frac{\sin \pi(\varkappa_k - a)}{\varkappa_k}, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\sigma}_k = \operatorname{sign} v_-(\varkappa_k).$$

В силу (2.9) и асимптотических формул для $c(\lambda, \pi)$, $c'(\lambda, \pi)$ и $s(\lambda, \pi)$ (см. лемму 1.1) при $\lambda \rightarrow \pm\infty$

$$v_-(\lambda) = \lambda \sin \pi(\lambda - a) + O(1),$$

а поскольку $\varkappa_k$ подчиняется асимптотике вида (2.8), то для достаточно больших значений $|k|$ имеет место $\tilde{\sigma}_k = (-1)^{k+1}$. Поэтому

$$\sigma_k = \tilde{\sigma}'_k (-1)^{k+1}, \quad (2.14)$$

где числа $\tilde{\sigma}'_k$ принимают значения 0 или ± 1 , причем $\tilde{\sigma}'_k = 1$ при всех достаточно больших значениях $|k|$.

Легко убедиться, что, зная $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $\{\varkappa_k\}$ и число ω , можно восстановить параметры β_1 , β_2 по формуле

$$\beta_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[2(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \omega - k\pi \left(\gamma_{j,k} - \varkappa_k - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.15)$$

Согласно формулам (2.3) и (2.4) имеем

$$v_+(\lambda) = \frac{\beta_2 \delta_1(\lambda) - \beta_1 \delta_2(\lambda)}{\beta_2 - \beta_1} - 2 \operatorname{Re} \omega. \quad (2.16)$$

Следовательно, чтобы определить функцию $v_-(\lambda)$ из (2.11), как видно из равенств (2.12)–(2.14), кроме спектров $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$ и числа ω (по которым, как было показано выше, однозначно восстанавливаются $\sigma(\lambda)$, $v_+(\lambda)$, β_1 , β_2) достаточно задать еще последовательность $\{\tilde{\sigma}'_k\}$.

Теперь функцию $s(\lambda, \pi)$ можно восстановить по формуле

$$s(\lambda, \pi) = \frac{1}{2|\omega|^2} [v_+(\lambda) - v_-(\lambda)]. \quad (2.17)$$

Нули λ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, этой функции являются собственными значениями краевой задачи (1), (2.1). Они удовлетворяют асимптотической формуле

$$\lambda_k = k + a + \frac{a_1}{k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \sum'_{k=-\infty}^{\infty} \tau_k^2 < \infty.$$

Из этой формулы и (2.8) следует, что

$$\gamma = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\varkappa_k - \lambda_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Наконец, с помощью $\sigma(\lambda)$, $s(\lambda, \pi)$ и γ восстанавливается характеристическая функция задачи (1), (2.2):

$$s'(\lambda, \pi) = \sigma(\lambda) - \gamma s(\lambda, \pi). \quad (2.19)$$

По нулям этой функции и последовательности $\{\lambda_k\}$ однозначно определяются коэффициенты уравнения (1).

Значит, по спектрам $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$ краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$, $L(\omega, \beta_2, \gamma)$, числу ω и последовательности $\{\tilde{\sigma}'_k\}$ полностью восстанавливаются рассматриваемые краевые задачи.

В дальнейшем последовательности $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $\{\tilde{\sigma}'_k\}$ и число ω будем называть *спектральными данными* пары краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$, $L(\omega, \beta_2, \gamma)$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. *Краевые задачи $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ однозначно определяются своими спектральными данными.*

Опираясь на доказательство теоремы 2.1, приходим к следующему алгоритму решения обратной задачи восстановления краевых задач $L(\omega, \beta_j, \gamma)$.

АЛГОРИТМ 2.1. Даны $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $\{\tilde{\sigma}'_k\}$, ω – спектральные данные краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$, $L(\omega, \beta_2, \gamma)$.

- 1) По последовательностям $\{\gamma_{j,k}\}$ построим функции $\delta_j(\lambda)$ в виде бесконечного произведения.
- 2) Определим разность $\beta_2 - \beta_1$ по формуле (2.6).
- 3) Восстановим функцию $\sigma(\lambda)$ по (2.7) и найдем нули $\varkappa_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, этой функции.
- 4) С помощью величин $\{\varkappa_k\}$ и ω определим параметры β_1 и β_2 по соотношению (2.15).
- 5) Построим функцию $v_+(\lambda)$ вида (2.16).
- 6) Используя соотношения (2.7), (2.13), (2.14) и (2.16), определим функцию $g(\lambda)$ по (2.12).
- 7) Найдем функцию $v_-(\lambda)$ из (2.11).
- 8) Определим характеристическую функцию $s(\lambda, \pi)$ краевой задачи (1), (2.1) по (2.17), используя выражения для функций $v_+(\lambda)$ и $v_-(\lambda)$.
- 9) Вычислим параметр γ по формуле (2.18), в которой λ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, – нули функции $s(\lambda, \pi)$.
- 10) По формуле (2.19) восстановим характеристическую функцию $s'(\lambda, \pi)$ краевой задачи (1), (2.2).
- 11) По последовательностям нулей функций $s(\lambda, \pi)$ и $s'(\lambda, \pi)$ построим коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) по известному алгоритму (см. [24]).

§ 3. Достаточные условия разрешимости задачи восстановления краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ по спектральным данным

В этом параграфе дана характеристика спектральных данных двух краевых задач вида $L(\omega, \beta_j, \gamma)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы комплексное число ω и последовательности вещественных чисел $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k = -1, 0, 1$;*

$k = \pm 1, \pm 2, \dots$, были спектральными данными краевых задач вида $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ ($\beta_1 < \beta_2$), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) имеют место асимптотические формулы

$$\gamma_{1,k} = k + a + \frac{A_k}{\pi k} + \frac{\xi_{1,k}}{k}, \quad (3.1)$$

$$\gamma_{1,k} - \gamma_{2,k} = \frac{C_1}{\pi k} + \frac{C_2}{\pi k^2} + \frac{r_k}{k^2}, \quad (3.2)$$

где $A_k = (-1)^{k+1} \operatorname{Re} \omega + B_1$, a , $C_1 > 0$, C_2 , B_1 – вещественные числа, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi_{1,k}^2 + r_k^2) < \infty$;

2) $\gamma_{1,k}$ и $\gamma_{2,k}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ перемежаются в следующем смысле:

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} < \gamma_{1,+0} < \gamma_{2,1} < \gamma_{1,1} < \gamma_{2,2} < \gamma_{1,2} < \gamma_{2,3} < \gamma_{1,3} < \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} > \gamma_{1,-0} > \gamma_{2,-1} > \gamma_{1,-1} > \gamma_{2,-2} > \gamma_{1,-2} > \gamma_{2,-3} > \gamma_{1,-3} > \dots, \end{aligned}$$

при вещественном $\omega < 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} \leq \gamma_{1,+0} \leq \gamma_{2,1} \leq \gamma_{1,1} < \gamma_{2,2} \leq \gamma_{1,2} \leq \gamma_{2,3} \leq \gamma_{1,3} < \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} \geq \gamma_{1,-0} \geq \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{1,-1} > \gamma_{2,-2} \geq \gamma_{1,-2} \geq \gamma_{2,-3} \geq \gamma_{1,-3} > \dots, \end{aligned}$$

а при $\omega > 0$ – неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} < \gamma_{1,+0} < \gamma_{2,1} \leq \gamma_{1,1} \leq \gamma_{2,2} \leq \gamma_{1,2} < \gamma_{2,3} \leq \gamma_{1,3} \leq \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} > \gamma_{1,-0} > \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{1,-1} \geq \gamma_{2,-2} \geq \gamma_{1,-2} > \gamma_{2,-3} \geq \gamma_{1,-3} \geq \dots, \end{aligned}$$

причем если $\gamma_{j,k} = \gamma_{j,k+1}$, то $\gamma_{3-j,k-1} < \gamma_{3-j,k} < \gamma_{3-j,k+1}$;

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} [\delta_1(2k + \frac{1}{2} + a) - \delta_2(2k + \frac{1}{2} + a)] = 0$, где

$$\delta_j(z) = \pi(\gamma_{j,-0} - z)(\gamma_{j,+0} - z) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{j,k} - z}{k}; \quad (3.3)$$

4) справедливо неравенство

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} |\delta_j(\varkappa_k) - 2 \operatorname{Re} \omega| - 2|\omega| \geq 0, \quad (3.4)$$

где $\varkappa_k$ – нули функции $\delta_1(z) - \delta_2(z)$;

5) σ_k принимает значение 0, если $b_k = 0$, и значение 1 или -1 , если $b_k > 0$, причем есть такое $N > 0$, что $\sigma_k = 1$ для всех $|k| \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу асимптотических формул (3.1) и (3.2) находим

$$\gamma_{2,k} = k + a + \frac{\tilde{A}_k}{\pi k} + \frac{\xi_{2,k}}{k}, \quad (3.5)$$

где $\tilde{A}_k = A_k - B_1 + B_2$, $B_2 = B_1 - C_1$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{2,k}^2 < \infty$. Так как числа $\gamma_{j,k}$ подчиняются асимптотикам (3.1), (3.5), то в силу леммы 1.3 для функции (3.3) справедливо представление

$$\delta_j(z) = 2 \operatorname{Re} \omega + (z - a) \sin \pi(z - a) - B_j \cos \pi(z - a) + f_j(z - a), \quad (3.6)$$

где

$$f_j(z) = M_j \sin \pi z + g_j(z), \quad g_j(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_j(t) e^{itz} dt, \quad \tilde{g}(t) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Легко видеть, что

$$\delta_1 \left(2k + \frac{1}{2} + a \right) - \delta_2 \left(2k + \frac{1}{2} + a \right) = M_1 - M_2 + \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)] e^{i(2k+1/2)t} dt.$$

Отсюда в силу условия 3) и леммы Римана–Лебега получаем $M_1 - M_2 = 0$. Обозначим $M = M_1 = M_2$.

Согласно формуле (1.7) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \xi_{j,k} = & \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \left\{ g_j(k) - \frac{M[2 \operatorname{Re} \omega - (-1)^k B_j]}{k} - \frac{M g_j(k)}{k} \right. \\ & \left. + \frac{B_j + 2(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \omega}{\pi k} g'_j(k) + \frac{(-1)^{k+1} g_j(k) g'_j(k)}{\pi k} \right\} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Найдем асимптотику разности $g_1(k) - g_2(k)$. Воспользовавшись формулой (3.7), из асимптотических равенств (3.1), (3.2) и (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{r_k}{k^2} = & \gamma_{1,k} - \gamma_{2,k} - \frac{C_1}{\pi k} - \frac{C_2}{\pi k^2} = \frac{A_k - \tilde{A}_k}{\pi k} + \frac{\xi_{1,k} - \xi_{2,k}}{k} - \frac{C_1}{\pi k} - \frac{C_2}{\pi k^2} \\ = & \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k} [g_1(k) - g_2(k)] + \frac{M(\tilde{A}_k - A_k) - C_2}{\pi k^2} + \frac{(-1)^{k+1} M}{\pi k^2} [g_2(k) - g_1(k)] \\ & + \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2} [A_k g'_1(k) - \tilde{A}_k g'_2(k)] + \frac{1}{\pi^2 k^2} [g_1(k) g'(k) - g_2(k) g'(k)] + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \end{aligned}$$

Отсюда (с учетом принадлежности последовательностей $\{g_j(k)\}$, $\{g'_j(k)\}$ пространству l_2) легко выводится следующая оценка:

$$g_1(k) - g_2(k) = \frac{(B_2 M - B_1 M - C_2)(-1)^k}{k} + \frac{m_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k^2 < \infty.$$

Заметим теперь, что числа $g_1(k)$ и $g_2(k)$ являются коэффициентами Фурье соответственно функций $\tilde{g}_1(t)$ и $\tilde{g}_2(t)$ по ортогональной системе $\{e^{ikt}\}$. Поэтому функция $\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)$ разлагается в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [g_1(k) - g_2(k)] e^{-ikt} \\ = & C_3 + C_4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-ikt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{m_k}{k} e^{-ikt}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где C_3 – некоторая постоянная, $C_4 = \frac{(B_2 - B_1)M - C_2}{2\pi}$, из которого, принимая во внимание известную формулу (см., например, [30])

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kt}{k}, \quad -\pi < t < \pi,$$

получаем

$$\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t) = C_3 + iC_4t + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{m_k}{k} e^{-ikt}.$$

Так как $\sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k^2 < \infty$, то из этого разложения вытекает, что функция $\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)$ имеет суммируемую с квадратом производную на $(-\pi, \pi)$.

В силу формулы (3.6) для функции

$$\tilde{s}(z) = \frac{\delta_1(z) - \delta_2(z)}{B_2 - B_1} \quad (3.9)$$

имеет место следующее представление:

$$\tilde{s}(z) = \cos \pi(z - a) + \frac{1}{B_2 - B_1} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)] e^{it(z-a)} dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и теорему Пели–Винера, после элементарных упрощений найдем

$$\tilde{s}(z) = \cos \pi(z - a) - B_3 \pi \frac{\sin \pi(z - a)}{z - a} + \frac{r(z - a)}{z - a}, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{\tilde{g}_1(\pi) - \tilde{g}_2(\pi) + \tilde{g}_1(-\pi) - \tilde{g}_2(-\pi)}{\pi(B_1 - B_2)}, \\ r(z) &= M_3 \cos \pi z + \frac{1}{iz(B_1 - B_2)} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{g}_1(t) - \tilde{g}_2(t)]' e^{itz} dt, \\ M_3 &= \frac{\tilde{g}_1(\pi) - \tilde{g}_2(\pi) - \tilde{g}_1(-\pi) + \tilde{g}_2(-\pi)}{i(B_2 - B_1)}. \end{aligned}$$

Соотношение (3.9) показывает, что функция $\tilde{s}(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, поэтому должно быть $r(0) = 0$. Согласно лемме 1.2 для нулей $\varkappa_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $\tilde{s}(z)$, представимой в виде (3.10), имеет место асимптотическая формула

$$\varkappa_k = k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k + a - \frac{B_3}{k} + \frac{\eta_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k^2 < \infty. \quad (3.11)$$

Полагая в формуле (3.3) $z = 0$, получаем

$$\delta_j(0) = \pi \gamma_{j,-0} \gamma_{j,+0} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{j,k}}{k}. \quad (3.12)$$

Поскольку $\gamma_{j,k} < 0$ при $k = -0, -1, -2, \dots$ и $\gamma_{j,k} > 0$ при $k = +0, 1, 2, \dots$ (в силу условия 2)), то из равенства (3.12) следует, что

$$\delta_j(0) < 0. \quad (3.13)$$

Полагая в равенстве (3.9) $z = \gamma_{j,k}$ и учитывая формулу (3.3), условие 2) и соотношение $C_1 = B_1 - B_2 > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \dots, \tilde{s}(\gamma_{j,-1}) &= \frac{(-1)^j \delta_{3-j}(\gamma_{j,-1})}{B_2 - B_1} \\ &= \frac{(-1)^j \pi (\gamma_{3-j,-0} - \gamma_{j,-1})(\gamma_{3-j,+0} - \gamma_{j,-1})}{B_2 - B_1} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{3-j,k} - \gamma_{j,-1}}{k} \leq 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{s}(\gamma_{j,-0}) \geq 0, \quad \tilde{s}(\gamma_{j,+0}) \geq 0, \quad \tilde{s}(\gamma_{j,1}) \leq 0, \quad \dots$$

Отсюда в силу асимптотической формулы (3.11) и неравенства (3.13) следует, что при $\text{Im } \omega \neq 0$ расположение членов последовательностей $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $\{\varkappa_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, определяется неравенствами

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} < \gamma_{1,+0} < \varkappa_1 < \gamma_{2,1} < \gamma_{1,1} < \varkappa_2 < \gamma_{2,2} < \gamma_{1,2} < \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} > \gamma_{1,-0} > \varkappa_{-1} > \gamma_{2,-1} > \gamma_{1,-1} > \varkappa_{-2} > \gamma_{2,-2} > \gamma_{1,-2} > \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

при вещественном $\omega < 0$ – неравенствами

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} \leq \gamma_{1,+0} \leq \varkappa_1 \leq \gamma_{2,1} \leq \gamma_{1,1} < \varkappa_2 < \gamma_{2,2} \leq \gamma_{1,2} \leq \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} \geq \gamma_{1,-0} \geq \varkappa_{-1} \geq \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{1,-1} > \varkappa_{-2} > \gamma_{2,-2} \geq \gamma_{1,-2} \geq \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

а при $\omega > 0$ – неравенствами

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_{2,+0} < \gamma_{1,+0} < \varkappa_1 < \gamma_{2,1} \leq \gamma_{1,1} \leq \varkappa_2 \leq \gamma_{2,2} \leq \gamma_{1,2} < \dots, \\ 0 > \gamma_{2,-0} > \gamma_{1,-0} > \varkappa_{-1} > \gamma_{2,-1} \geq \gamma_{1,-1} \geq \varkappa_{-2} \geq \gamma_{2,-2} \geq \gamma_{1,-2} > \dots. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следовательно, функция $\tilde{s}(z)$ имеет только простые нули и

$$\dots < \varkappa_{-3} < \varkappa_{-2} < \varkappa_{-1} < 0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \dots. \quad (3.17)$$

Положим

$$\beta_j = -B_j - B_3\pi. \quad (3.18)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$v_1(z) = \frac{\beta_1\delta_2(z) - \beta_2\delta_1(z)}{\beta_1 - \beta_2} - 2\text{Re } \omega. \quad (3.19)$$

Используя (3.6) и (3.18), для этой функции получаем представление вида

$$v_1(z) = (z - a) \sin \pi(z - a) + B_3\pi \cos \pi(z - a) + \varphi(z - a), \quad (3.20)$$

где

$$\varphi(z) = M \sin \pi z + \frac{\beta_1 g_2(z) - \beta_2 g_1(z)}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Рассмотрим функцию $v_2(z)$ такую, что

$$v_2(\varkappa_k) = (-1)^{k+1} \sigma_k \sqrt{v_1^2(\varkappa_k) - 4|\omega|^2}. \quad (3.21)$$

Принимая во внимание соотношение (3.20) и оценки

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} |v_2(\varkappa_k)| &= |v_1(\varkappa_k)| \sqrt{1 - \left(\frac{2|\omega|}{v_1(\varkappa_k)} \right)^2} = \left| v_1(\varkappa_k) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2|\omega|}{v_1(\varkappa_k)} \right)^2 + O\left(\frac{1}{k^4} \right) \right) \right| \\ &= \left| v_1(\varkappa_k) - \frac{2|\omega|^2}{(\varkappa_k - a) \sin \pi(\varkappa_k - a) + B_3\pi \cos \pi(\varkappa_k - a) + \varphi(\varkappa_k - a)} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{1}{k^3} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| v_1(\varkappa_k) - \frac{2|\omega|^2}{(\varkappa_k - a) \sin \pi(\varkappa_k - a)} \left[1 - \frac{B_3 \pi \cos \pi(\varkappa_k - a) + \varphi(\varkappa_k - a)}{(\varkappa_k - a) \sin \pi(\varkappa_k - a)} \right] \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right| \\
&= \left| v_1(\varkappa_k) - 2|\omega|^2 \left[\frac{\sin \pi(\varkappa_k - a)}{(\varkappa_k - a)(1 - \cos^2 \pi(\varkappa_k - a))} \right. \right. \\
&\quad \left. - \frac{B_3 \pi \cos \pi(\varkappa_k - a)}{(\varkappa_k - a)^2(1 - \cos^2 \pi(\varkappa_k - a))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{M \sin \pi(\varkappa_k - a)}{(\varkappa_k - a)^2(1 - \cos^2 \pi(\varkappa_k - a))} + \frac{m_k}{k^2} \right] \left. \right| \\
&= \left| v_1(\varkappa_k) - 2|\omega|^2 \left[\frac{\sin \pi(\varkappa_k - a)}{\varkappa_k - a} + B_4 \pi \frac{4 \cos \pi(\varkappa_k - a)}{4(\varkappa_k - a)^2 - 1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{M \sin \pi(\varkappa_k - a)}{(\varkappa_k - a)^2} + \frac{n_k}{k^2} \right] \right|,
\end{aligned}$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (m_k^2 + n_k^2) < \infty$, B_4 – произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $B_4 \leq B_3$. Определим теперь функцию $v_2(z)$ равенством

$$\begin{aligned}
v_2(z) = v_1(z) - 2|\omega|^2 &\left[\frac{\sin \pi(z - a)}{z - a} + B_4 \pi \frac{4 \cos \pi(z - a)}{4(z - a)^2 - 1} \right. \\
&\left. - \frac{M \sin \pi(z - a)}{(z - a)^2} + \frac{\tilde{n}(z - a)}{(z - a)^2} \right], \tag{3.22}
\end{aligned}$$

где $\tilde{n}(z) = \tilde{s}(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{n_k}{\tilde{s}'(\varkappa_k)(z - \varkappa_k)}$ – целая функция экспоненциального типа не выше π , принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим

$$s(z) = \frac{1}{2|\omega|^2} [v_1(z) - v_2(z)]. \tag{3.23}$$

В силу (3.22) имеем

$$(z - a)s(z) = \sin \pi(z - a) + B_4 \pi \frac{4(z - a) \cos \pi(z - a)}{4(z - a)^2 - 1} + \frac{m(z - a)}{z - a}, \tag{3.24}$$

где $m(z) = -M \sin \pi z + \tilde{n}(z)$, $m(0) = m'(0) = 0$. Поэтому согласно лемме 1.2, если через λ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, обозначить нули функции $(z - a)s(z)$, то для них будет иметь место асимптотическая формула

$$\lambda_k = k + a - \frac{B_4}{k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_k^2 < \infty. \tag{3.25}$$

Из формулы (3.9) видно, что $\delta_1(\varkappa_k) = \delta_2(\varkappa_k)$. Поэтому в силу (3.19)

$$v_1(\varkappa_k) = \delta_j(\varkappa_k) - 2 \operatorname{Re} \omega. \tag{3.26}$$

Соотношения (3.4), (3.14)–(3.16) и (3.26) показывают, что

$$\dots, \quad v_1(\varkappa_{-2}) \leq -2|\omega|, \quad v_1(\varkappa_{-1}) \geq 2|\omega|, \quad v_1(\varkappa_1) \geq 2|\omega|, \quad v_1(\varkappa_2) \leq -2|\omega|, \quad \dots$$

Значит, найдется θ_k такое, что

$$v_1(\varkappa_k) = 2|\omega|(-1)^{k+1} \operatorname{ch} \theta_k. \quad (3.27)$$

Из соотношения (3.21) с учетом (3.27) получаем

$$v_2(\varkappa_k) = 2|\omega|(-1)^{k+1} \sigma_k |\operatorname{sh} \theta_k|. \quad (3.28)$$

Согласно равенствам (3.23), (3.27) и (3.28) имеем

$$\begin{aligned} s(\varkappa_k) &= \frac{1}{2|\omega|^2} [v_1(\varkappa_k) - v_2(\varkappa_k)] = \frac{(-1)^{k+1}}{|\omega|} (\operatorname{ch} \theta_k - \sigma_k |\operatorname{sh} \theta_k|) \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \operatorname{ch} \theta_k}{|\omega|} (1 - \sigma_k |\operatorname{th} \theta_k|). \end{aligned}$$

Отсюда в силу очевидного неравенства $|\operatorname{th} \theta_k| < 1$ получаем

$$\operatorname{sign} s(\varkappa_k) = (-1)^{k+1}. \quad (3.29)$$

Тогда согласно (3.17) в каждом интервале $\dots, (\varkappa_{-3}, \varkappa_{-2}), (\varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}), (\varkappa_{-1}, \varkappa_1), (\varkappa_1, \varkappa_2), (\varkappa_2, \varkappa_3), \dots$ лежит один и (в силу асимптотического равенства (3.25)) только один нуль функции $s(z)$. Следовательно, нули $\dots, \varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ функции $\tilde{s}(z)$ и нули $\dots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ функции $s(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$\dots < \varkappa_{-3} < \lambda_{-2} < \varkappa_{-2} < \lambda_{-1} < \varkappa_{-1} < 0 < \varkappa_1 < \lambda_1 < \varkappa_2 < \lambda_2 < \varkappa_3 < \dots. \quad (3.30)$$

Пусть, наконец,

$$s_1(z) = \tilde{s}(z) - \gamma s(z), \quad (3.31)$$

где

$$\gamma = (B_4 - B_3)\pi. \quad (3.32)$$

Равенство (3.31) вместе с соотношениями (3.10), (3.24) и (3.32) влечет за собой представление

$$s_1(z) = \cos \pi(z - a) - B_4 \pi \frac{\sin \pi z}{z} + \frac{m_1(z - a)}{z - a}, \quad (3.33)$$

где

$$m_1(z) = M_4 \cos \pi z + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{m}_1(t) e^{itz} dt, \quad \tilde{m}_1(t) \in L_2[-\pi, \pi],$$

из которого согласно лемме 1.2 вытекает, что для нулей ν_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $s_1(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$\nu_k = k - \frac{1}{2} \operatorname{sign} k + a - \frac{B_4}{k} + \frac{l_k}{k}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k^2 < \infty. \quad (3.34)$$

В силу формулы (3.3) и условия 2) имеем

$$\frac{\delta_1(0)}{\delta_2(0)} = \frac{\gamma_{1,-0} \cdot \gamma_{1,+0}}{\gamma_{2,-0} \cdot \gamma_{2,+0}} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{1,k}}{\gamma_{2,k}} > 1.$$

Тогда согласно равенствам (3.9), (3.18) и неравенству (3.13)

$$\tilde{s}(0) = \frac{\delta_1(0) - \delta_2(0)}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\delta_2(0)}{\beta_1 - \beta_2} \left[\frac{\delta_1(0)}{\delta_2(0)} - 1 \right] > 0. \quad (3.35)$$

Далее, по лемме 1.2 функция $s(z)$ может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$s(z) = \pi \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - z}{k},$$

откуда в силу (3.30)

$$s(0) = \pi \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} > 0. \quad (3.36)$$

Следовательно, из (3.31), принимая во внимание (3.32), (3.35), (3.36) и неравенство $B_4 \leq B_3$, находим

$$s_1(0) = \tilde{s}(0) - \gamma s(0) > 0.$$

С другой стороны, согласно (3.29), (3.35) имеет место

$$\text{sign } s_1(\lambda_k) = \text{sign } \tilde{s}(\lambda_k) = (-1)^k.$$

Поэтому в каждом интервале $\dots, (\lambda_{-2}, \lambda_{-1}), (\lambda_{-1}, 0), (0, \lambda_1), (\lambda_1, \lambda_2), \dots$ лежит один нуль функции $s_1(z)$. В силу асимптотической формулы (3.34) других нулей функция $s_1(z)$ не имеет. Таким образом, для нулей функций $s(z)$ и $s_1(z)$ имеют место неравенства

$$\dots < \nu_{-3} < \lambda_{-2} < \nu_{-2} < \lambda_{-1} < \nu_{-1} < 0 < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \nu_3 < \dots,$$

откуда, учитывая асимптотические формулы (3.25) и (3.34), согласно работе [23] заключаем, что существуют (единственные) вещественные функции $q(x) \in L_2[0, \pi]$, $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ такие, что рассматриваемые последовательности нулей являются спектрами краевых задач, порожденных на отрезке $[0, \pi]$ одним и тем же уравнением (1) с найденными коэффициентами ($q(x)$ и $p(x)$) и граничными условиями (2.1) и (2.2), и справедливы равенства

$$s(\lambda) = s(\lambda, \pi), \quad s_1(\lambda) = s'(\lambda, \pi). \quad (3.37)$$

Если мы теперь докажем, что для построенного уравнения (1) функции $v_1(z)$ и $v_2(z)$ совпадают с функциями $v_+(z)$ и $v_-(z)$ (см. (2.4) и (2.9)) соответственно, то легко можно установить, что ω , $\{\gamma_{1,k}\}$, $\{\gamma_{2,k}\}$, $\{\sigma_k\}$ действительно будут служить спектральными данными построенных краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$. Ясно, что если $v_1(z)$ совпадает с $v_+(z)$, то согласно доказанному равенству $s(z) = s(z, \pi)$ функция $v_2(z)$ будет совпадать с функцией $v_-(z)$.

Сначала покажем, что

$$-c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi) = \frac{1}{2}[v_1(\lambda) + v_2(\lambda)], \quad (3.38)$$

где $c(\lambda, x)$ – решение построенного уравнения, удовлетворяющее условиям $c(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = 0$. Из соотношений (3.23), (3.27), (3.28) и (3.37) имеем

$$\begin{aligned} s(\varkappa_k, \pi) &= \frac{1}{2|\omega|^2} [v_1(\varkappa_k) - v_2(\varkappa_k)] = \frac{1}{2|\omega|^2} \frac{v_1^2(\varkappa_k) - v_2^2(\varkappa_k)}{v_1(\varkappa_k) + v_2(\varkappa_k)} \\ &= 2 \frac{\operatorname{ch}^2 \theta_k - \operatorname{sh}^2 \theta_k}{v_1(\varkappa_k) + v_2(\varkappa_k)} = \frac{2}{v_1(\varkappa_k) + v_2(\varkappa_k)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{2} [v_1(\varkappa_k) + v_2(\varkappa_k)] = \frac{1}{s(\varkappa_k, \pi)}. \quad (3.39)$$

С другой стороны, в силу тождества

$$c(\lambda, \pi) \tilde{s}(\lambda) - s(\lambda, \pi) [c'(\lambda, \pi) + \gamma c(\lambda, \pi)] = 1$$

(где $\tilde{s}(\lambda) = s'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi)$) имеет место $-c'(\varkappa_k, \pi) - \gamma c(\varkappa_k, \pi) = \frac{1}{s(\varkappa_k, \pi)}$. Отсюда и из (3.39) вытекает равенство

$$-c'(\varkappa_k, \pi) - \gamma c(\varkappa_k, \pi) = \frac{1}{2} [v_1(\varkappa_k) + v_2(\varkappa_k)]. \quad (3.40)$$

Рассмотрим следующую целую функцию экспоненциального типа не выше π :

$$b(\lambda) = 2c'(\lambda, \pi) + 2\gamma c(\lambda, \pi) + v_1(\lambda) + v_2(\lambda),$$

которая согласно (3.40) обращается в нуль в точках $\lambda = \varkappa_k$. Убедимся в том, что $b(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$. Действительно, используя лемму 1.1 и принимая во внимание соотношения (3.20), (3.22) и (3.32), получаем

$$b(\lambda) = 2(c_0 - a + M) \sin \pi(\lambda - a) + 2(\gamma + \pi a_1 + B_3 \pi) \cos \pi(\lambda - a) + b_1(\lambda), \quad (3.41)$$

где $b_1(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$. С другой стороны, согласно равенствам (3.24), (3.33), (3.37) и лемме 1.1 имеем $c_0 - a + M = 0$, $\gamma + \pi a_1 + B_3 \pi = 0$. Тогда из (3.41) видно, что функция $b(\lambda)$ суммируема с квадратом на вещественной оси. Значит, справедливо соотношение (3.38).

Теперь можно доказать, что функция $v_+(\lambda)$ для восстановленных $q(x)$ и $p(x)$ совпадает с функцией $v_1(\lambda)$. Действительно, с помощью соотношений (2.4), (3.23), (3.37) и (3.38) получаем равенства

$$\begin{aligned} v_+(\lambda) &= -c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi) + 2|\omega|^2 s(\lambda, \pi) = \frac{1}{2} [v_1(\lambda) + v_2(\lambda)] + 2|\omega|^2 s(\lambda) \\ &= \frac{1}{2} [v_1(\lambda) + v_2(\lambda)] + \frac{1}{2} [v_1(\lambda) - v_2(\lambda)] = v_1(\lambda). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Остается показать, что характеристические функции $\tilde{\delta}_1(\lambda)$ и $\tilde{\delta}_2(\lambda)$ восстановленных краевых задач $L(\omega, \beta_1, \gamma)$ и $L(\omega, \beta_2, \gamma)$ совпадают с функциями $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ соответственно. Но это верно, так как в силу формул (2.3), (3.9), (3.19) и доказанных равенств (3.37), (3.42) имеет место

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1(\lambda) &= v_+(\lambda) + \beta_1 \tilde{s}(\lambda, \pi) + 2 \operatorname{Re} \omega = v_1(\lambda) + \beta_1 \tilde{s}(\lambda) + 2 \operatorname{Re} \omega \\ &= \frac{\beta_1 \delta_2(\lambda) - \beta_2 \delta_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} + \beta_1 \frac{\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\beta_1 \delta_1(\lambda) - \beta_2 \delta_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} = \delta_1(\lambda), \\ \tilde{\delta}_2(\lambda) &= v_+(\lambda) + \beta_2 \tilde{s}(\lambda, \pi) + 2 \operatorname{Re} \omega \\ &= \frac{\beta_1 \delta_2(\lambda) - \beta_2 \delta_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} + \beta_2 \frac{\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} = \delta_2(\lambda). \end{aligned}$$

Теорема 3.1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из результатов работ [28], [31], из леммы 1.1 и доказательства теоремы 2.1 следует, что условия теоремы 3.1 также являются необходимыми, если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (5), выполняется неравенство

$$\gamma|y(\pi)|^2 - 2\operatorname{Re}[\omega\overline{y(0)}y(\pi)] - \beta|y(0)|^2 + \int_0^\pi \{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\} dx > 0 \quad (3.43)$$

(заметим, что это неравенство заведомо выполняется, если $\beta \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $|\omega| \leq \sqrt{|\beta|\gamma}$, $q(x) > 0$). Однако построенные параметры граничных условий (5) и вещественная функция $q(x)$ (по алгоритму 2.1) не обязательно удовлетворяют неравенству (3.43).

Список литературы

- [1] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville problems*, VSP, Zeist, 1987.
- [3] R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and inverse scattering on the line*, Math. Surveys Monogr., **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [4] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [5] Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, “Определение дифференциального уравнения по двум спектрам”, *УМН*, **19:2** (1964), 3–63; англ. пер.: B. M. Levitan, M. G. Gasymov, “Determination of a differential equation by two of its spectra”, *Russian Math. Surveys*, **19:2** (1964), 1–63.
- [6] И. В. Станкевич, “Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла”, *Докл. АН СССР*, **192:1** (1970), 34–37; англ. пер.: I. V. Stankevich, “On an inverse problem of spectral analysis for Hill’s equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 582–586.
- [7] В. А. Садовничий, “Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **9:2** (1973), 271–277; англ. пер.: V. A. Sadovnichii, “Uniqueness of a solution of the inverse problem of spectral analysis for a differential equation with periodic boundary values”, *Differential Equations*, **9** (1974), 207–211.
- [8] В. А. Марченко, И. В. Островский, “Характеристика спектра оператора Хилла”, *Матем. сб.*, **97(139):4(8)** (1975), 540–606; англ. пер.: V. A. Marčenko, I. V. Ostrovskii, “A characterization of the spectrum of the Hill operator”, *Math. USSR-Sb.*, **26:4** (1975), 493–554.
- [9] О. А. Плаксина, “Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями”, *Матем. сб.*, **131(173):1(9)** (1986), 3–26; англ. пер.: O. A. Plaksina, “Inverse problems of spectral analysis for the Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions”, *Math. USSR-Sb.*, **59:1** (1988), 1–23.
- [10] О. А. Плаксина, “Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II”, *Матем. сб.*, **136(178):1(5)** (1988), 140–159; англ. пер.: O. A. Plaksina, “Inverse problems of spectral analysis for Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions. II”, *Math. USSR-Sb.*, **64:1** (1989), 141–160.

- [11] V. A. Yurko, "The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions", *J. Math. Anal. Appl.*, **250**:1 (2000), 266–289.
- [12] И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными краевыми условиями", *Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех., матем. наук*, **8**:2 (1987), 22–29.
- [13] И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Об одном классе обратных краевых задач для операторов Штурма–Лиувилля", *Дифференц. уравнения*, **25**:7 (1989), 1114–1120; англ. пер.: I. M. Gusejnov, I. M. Nabiev, "A class of inverse boundary value problems for Sturm–Liouville operators", *Differential Equations*, **25**:7 (1990), 779–784.
- [14] М. Г. Гасымов, И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями", *Сиб. матем. журн.*, **31**:6 (1990), 46–54; англ. пер.: M. G. Gasymov, I. M. Guseinov, I. M. Nabiev, "An inverse problem for the Sturm–Liouville operator with nonseparable self-adjoint boundary conditions", *Siberian Math. J.*, **31**:6 (1990), 910–918.
- [15] И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля", *Матем. сб.*, **186**:5 (1995), 35–48; англ. пер.: I. M. Guseinov, I. M. Nabiev, "Solution of a class of inverse boundary-value Sturm–Liouville problems", *Sb. Math.*, **186**:5 (1995), 661–674.
- [16] В. А. Садовничий, "Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **29**:1 (1974), 143–151; англ. пер.: V. A. Sadovničii, "Uniqueness of the solution of the inverse problem for a second-order equation with nondecaying boundary conditions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **29**:1–2 (1974), 116–123.
- [17] В. А. Юрко, "Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями", *Матем. заметки*, **18**:4 (1975), 569–576; англ. пер.: V. A. Yurko, "The inverse problem for differential operators of second order with regular boundary conditions", *Math. Notes*, **18**:4 (1976), 928–932.
- [18] В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов, "Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий", *Докл. РАН*, **367**:6 (1999), 739–741; англ. пер.: V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, A. M. Akhtyamov, "Analogues of Borg's uniqueness theorem in the case of nonseparated boundary conditions", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **60**:1 (1999), 115–117.
- [19] M. Jaulent, C. Jean, "The inverse problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential. I, II", *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **25**:2 (1976), 105–137.
- [20] М. Г. Гасымов, "К спектральной теории дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от параметра", Совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и Московского математического общества, *УМН*, **37**:4 (1982), 99.
- [21] В. А. Юрко, "Обратная задача для пучков дифференциальных операторов", *Матем. сб.*, **191**:10 (2000), 137–160; англ. пер.: V. A. Yurko, "An inverse problem for differential operator pencils", *Sb. Math.*, **191**:10 (2000), 1561–1586.
- [22] М. Г. Гасымов, Г. Ш. Гусейнов, "Определение оператора диффузии по спектральным данным", *Докл. АН АзССР*, **37**:2 (1981), 19–23.
- [23] Г. Ш. Гусейнов, "К спектральному анализу квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля", *Докл. АН СССР*, **285**:6 (1985), 1292–1296; англ. пер.: G. Sh. Guseinov, "On spectral analysis of a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators", *Soviet Math. Dokl.*, **32**:3 (1985), 859–862.
- [24] Г. Ш. Гусейнов, "Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале", *Спектральная теория операторов и ее прил.*, 1986, № 7, 51–101.

- [25] I. M. Nabiev, "The inverse periodic problem for a diffusion operator", *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **23**:4 (2003), 125–130.
- [26] И. М. Набиев, "Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке", *Матем. физика, анализ, геометрия*, **11**:3 (2004), 302–313.
- [27] В. Н. Пивоварчик, "Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач", *Функц. анализ и его прил.*, **33**:3 (1999), 87–90; англ. пер.: V. N. Pivovarchik, "Reconstruction of the potential of the Sturm–Liouville equation from three spectra of boundary value problems", *Funct. Anal. Appl.*, **33**:3 (1999), 233–235.
- [28] И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Об одном классе обратных задач для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля", *Дифференц. уравнения*, **36**:3 (2000), 418–420; англ. пер.: I. M. Guseinov, I. M. Nabiev, "A class of inverse problems for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators", *Differ. Equ.*, **36**:3 (2000), 471–473.
- [29] Б. Я. Левин, *Целые функции: Курс лекций*, Изд-во МГУ, М., 1971; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [30] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. III, Наука, М., 1969; нем. пер.: G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*. III, Hochschulbücher für Math., **63**, Barth (Leipzig), Leipzig, 1992.
- [31] И. М. Набиев, "Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля", *Матем. заметки*, **67**:3 (2000), 369–381; англ. пер.: I. M. Nabiev, "Multiplicities and relative position of eigenvalues of a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators", *Math. Notes*, **67**:3 (2000), 309–319.

И. М. Гусейнов (I. M. Guseinov)

Бакинский государственный университет;

Институт математики и механики

НАН Азербайджана, г. Баку

E-mail: hmhuseynov@yahoo.com

Поступила в редакцию

11.01.2006 и 11.04.2007

И. М. Набиев (I. M. Nabiev)

Бакинский государственный университет;

Институт математики и механики

НАН Азербайджана, г. Баку

E-mail: nabievim@yahoo.com