Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Левин, Задачи наилучшего приближения, связанные с двойственностью Монжа–Канторовича, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 06:36:32

УДК 517.972.8

В. Л. Левин

Задачи наилучшего приближения, связанные с двойственностью Монжа–Канторовича

Исследуются задачи наилучшего приближения ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве $X \times X$ функциями вида $u(x) - u(y)$. Получены формулы для значений наилучшего приближения и установлена эквивалентность существования точных решений и непустоты множества ограничений вспомогательной двойственной задачи Монжа–Канторовича со специальной функцией стоимости. Описан вид точных решений в терминах, связанных с двойственностью Монжа–Канторовича, и для нескольких классов приближаемых функций доказано существование точных решений, обладающих дополнительными свойствами типа гладкости и периодичности.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задач и формулировка результатов. Пусть X – топологическое пространство,¹ $C^b(X)$ – банахово пространство всех непрерывных ограниченных вещественных функций на X с равномерной нормой

$$\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|, \quad u \in C^b(X).$$

Далее рассматривается следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА 1. Найти значение наилучшего приближения

$$m(f; \mathcal{H}_0) := \inf_{h_u \in \mathcal{H}_0} \|f - h_u\| = \inf_{u \in C^b(X)} \sup_{x, y \in X} |f(x, y) - u(x) + u(y)| \quad (1)$$

данной функции $f \in C^b(X \times X)$ функциями h_u из подпространства

$$\mathcal{H}_0 = \{h_u : h_u(x, y) = u(x) - u(y), \quad u \in C^b(X)\} \subset C^b(X \times X).$$

Сформулируем абстрактный вариант этой задачи.

ЗАДАЧА 2. Пусть X – произвольное множество, $l^\infty(X)$ – банахово пространство всех ограниченных вещественных функций на X с равномерной нормой, H_0 – подпространство в $l^\infty(X \times X)$, состоящее из функций вида $u(x) - u(y)$,

$$H_0 = \{h_u : h_u(x, y) = u(x) - u(y), \quad u \in l^\infty(X)\}.$$

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6417.2006.6).

¹Все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми и вполне регулярными.

Найти значение наилучшего приближения

$$m(f; H_0) := \inf_{h_u \in H_0} \|f - h_u\| = \inf_{u \in l^\infty(X)} \sup_{x, y \in X} |f(x, y) - u(x) + u(y)| \quad (2)$$

данной функции $f \in l^\infty(X \times X)$ функциями $h_u \in H_0$.

С каждой функцией f на $X \times X$ мы связываем функцию стоимости c на $X \times X$,

$$c(x, y) = \min(f(x, y), -f(y, x)). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1 (ср. [1; теорема 5.1]). 1) Для любой $f \in l^\infty(X \times X)$

$$m(f; H_0) = - \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i) : x_i \in X, x_n = x_0, n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (4)$$

2) Если X – компактное пространство, то для любой $f \in C(X \times X)$

$$m(f; \mathcal{H}_0) = - \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i) : x_i \in X, x_n = x_0, n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (5)$$

Другими словами, в обоих случаях значение наилучшего приближения равно взятой со знаком минус точной нижней грани средних арифметических значений соответствующей функции стоимости по всевозможным циклам $(x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_0)$ в X .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если X – компактное пространство и $f \in C(X \times X)$, то $m(f; H_0) = m(f; \mathcal{H}_0)$.

Пусть теперь X – некомпактное топологическое пространство. Обозначим через $C^b(X) \otimes C^b(X)$ замыкание в $C^b(X \times X)$ векторного подпространства, состоящего из конечных сумм вида $\sum_1^n a_j(x)b_j(y)$, где $a_j, b_j \in C^b(X)$, $j = 1, \dots, n$. Из теоремы Вейерштрасса–Стоуна легко следует, что $C^b(X) \otimes C^b(X)$ есть в точности подпространство тех функций на $X \times X$, которые могут быть продолжены с сохранением непрерывности на $\beta X \times \beta X$, где βX – компактификация Чеха–Стоуна пространства X , см. [2]. (Если X компактно, то $C(X \times X) = C^b(X \times X) = C^b(X) \otimes C^b(X) = C(X) \otimes C(X)$.)

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – произвольное (вполне регулярное хаусдорфово) топологическое пространство и $f \in C^b(X) \otimes C^b(X)$, то утверждение 2) теоремы 1 и следствие 1 сохраняют силу.

Если инфимум в правой части формулы (1) или (2) достигается на некоторой функции $u \in C^b(X)$ или $u \in l^\infty(X)$, то эта функция называется *точным решением* соответствующей задачи наилучшего приближения.

Заметим, что в задаче 2 всегда существует точное решение, так как $l^\infty(X)$ – сопряженное банахово пространство [3] (стало быть, замкнутые шары в нем $*$ -слабо компактны) и функционал $u \mapsto \sup_{x, y \in X} |f(x, y) - u(x) + u(y)|$ на $l^\infty(X)$ $*$ -слабо полунепрерывен снизу. В то же время, вопрос о существовании точных решений задачи 1 нетривиален.

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in C^b(X) \overline{\otimes} C^b(X)$, то в задаче 1 существует точное решение.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $X = \mathbb{R}^n$, $f(x, y) = g(x - y)$, где $g \in C^b(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдется ограниченная бесконечно дифференцируемая функция u на $\mathbb{R}^n$, являющаяся точным решением задачи 1:

$$m(f; \mathcal{H}_0) = \|f - h_u\| = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n} |f(x, y) - u(x) + u(y)|. \quad (6)$$

Если при этом функция $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$ периодическая по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \leq n$, с периодами $\tau_1, \dots, \tau_m$, то найдется ограниченная бесконечно дифференцируемая функция u на $\mathbb{R}^n$, обладающая теми же свойствами периодичности и являющаяся точным решением задачи 1.

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что $X = \mathbb{R}^n$ или $X = \mathbb{R}_+^n$, $f(x, y) = g(x, y, x - y)$, где $g \in C^b(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет одному из двух условий:

- (а) $g(x, y, z) = g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$ неотрицательна на $X \times X \times \mathbb{R}^n$ и не убывает по всем $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$;
- (б) $g(x, y, z)$ неположительна на $X \times X \times \mathbb{R}^n$ и не возрастает по всем $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$.

Тогда для каждого натурального r найдется ограниченная C^r -гладкая функция на X , являющаяся точным решением задачи 1.

1.2. Обсуждение. Сформулированные выше задачи укладываются в следующую общую схему задач наилучшего приближения (см., например, [4]–[7]): даны банахово пространство E , элемент $f \in E$ и замкнутое линейное подпространство $H \subset E$; найти значение $m(f; H) = \inf_{h \in H} \|f - h\|$.

Хорошо известна теорема двойственности:

$$m(f; H) = \sup\{\langle \mu, f \rangle : \mu \in H^\perp, \|\mu\| \leq 1\},$$

где $H^\perp = \{\mu \in E^* : \langle \mu, h \rangle = 0 \ \forall h \in H\}$ – аннулятор H в E^* . Применительно к задаче 1 на компакте получаем формулу

$$m(f; \mathcal{H}_0) = \sup\left\{\int_{X \times X} f(x, y) \mu(d(x, y)) : \pi_1 \mu = \pi_2 \mu, \|\mu\| \leq 1\right\}, \quad (7)$$

где μ – мера Радона на $X \times X$, $\pi_1 \mu$ и $\pi_2 \mu$ – проекции меры на первую и вторую координаты, т.е. маргинальные меры на X , задаваемые равенствами $\pi_1 \mu(B) = \mu(B \times X)$, $\pi_2 \mu(B) = \mu(X \times B)$ для каждого борелевского $B \subset X$. Пусть для простоты $f(x, y) \leq 0$ при всех $(x, y) \in X \times X$. В таком случае f совпадает с функцией c , задаваемой формулой (3), и мы можем сравнить (7) и (5). Возьмем цикл $\zeta = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$ в X и свяжем с ним меру μ_ζ на $X \times X$,

$$\mu_\zeta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(x_{i-1}, x_i)},$$

где $\delta_{(x,y)}$ – мера Дирака (дельта-функция) в (x, y) , $\delta_{(x,y)}(M) = 1$ при $(x, y) \in M$, $\delta_{(x,y)}(M) = 0$ при $(x, y) \notin M$, $M \subset X \times X$. Очевидно, $\|\mu_\zeta\| = 1$ и

$$\pi_1 \mu_\zeta = \pi_2 \mu_\zeta = -\frac{1}{n} \sum_1^n \delta_{x_i}.$$

Принимая во внимание равенство $f = c$, из (7) получаем

$$\begin{aligned} m(f; \mathcal{H}_0) &= \sup \left\{ \int_{X \times X} c(x, y) \mu(d(x, y)) : \pi_1 \mu = \pi_2 \mu, \|\mu\| \leq 1 \right\} \\ &\geq \sup_\zeta \int_{X \times X} c(x, y) \mu_\zeta(d(x, y)) = -\inf_\zeta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

Сравнивая это неравенство с равенством (5), видим, что для $f \leq 0$ теорема двойственности является следствием теоремы 1.

Начиная с классических исследований Чебышёва, точные решения задач наилучшего приближения изучаются в литературе в основном в случае конечномерного подпространства H . Для бесконечномерных H известно немного. Задачи 1 и 2 впервые рассматривались в работе [1], где была сформулирована (без доказательства) теорема 1. Ранее Хавинсон [8] изучал близкую задачу о наилучшем приближении непрерывной функции двух переменных $f(x, y)$ суммами $\phi(x) + \psi(y)$.

Наш подход к задачам наилучшего приближения типа задачи 1 основан на связи, существующей между этими задачами и двойственностью Монжа–Канторовича. Мы покажем, что функция u является точным решением задачи наилучшего приближения тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству ограничений некоторой вспомогательной бесконечномерной задачи линейного программирования, двойственной по отношению к задаче Монжа–Канторовича со специальной функцией стоимости, определяемой приближаемой функцией f и значением наилучшего приближения $m(f; \mathcal{H}_0)$. Указанная связь позволяет доказать сформулированные выше теоремы и, используя понятие редуцированной функции стоимости [9], получить некоторые точные решения в явном виде.

§ 2. Вспомогательные сведения, относящиеся к двойственности Монжа–Канторовича

Пусть X – топологическое пространство, $\varphi \in C^b(X \times X)$, σ_1, σ_2 – положительные меры Радона на X , $\sigma_1(X) = \sigma_2(X)$. Задача Монжа–Канторовича (ЗМК) заключается в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{A}(\varphi; \sigma_1 - \sigma_2) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \varphi(x, y) \mu(d(x, y)) : \mu \geq 0, \pi_1 \mu - \pi_2 \mu = \sigma_1 - \sigma_2 \right\}.$$

Это ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер. Более известен другой вариант ЗМК, с фиксированными маргинальными мерами, в котором ищется оптимальное значение

$$\mathcal{C}(\varphi; \sigma_1, \sigma_2) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \varphi(x, y) \mu(d(x, y)) : \mu \geq 0, \pi_1 \mu = \sigma_1, \pi_2 \mu = \sigma_2 \right\}.$$

Постановка обеих задач принадлежит Л. В. Канторовичу [10]–[12], который исследовал случай, когда X – метрический компакт с метрикой в качестве функции стоимости φ . В указанном случае оба варианта ЗМК эквивалентны, однако для произвольной функции стоимости это уже не так.² Обе задачи относятся к бесконечномерному линейному программированию: задача с фиксированными маргинальными мерами является континуальным аналогом классической транспортной задачи, а задача с фиксированной разностью маргинальных мер может рассматриваться как обобщение транспортной задачи в сетевой постановке с разрешенными транзитными перевозками. Оптимальное значение двойственной ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер задается формулой

$$\mathcal{B}(\varphi; \sigma_1 - \sigma_2) = \sup \left\{ \int_X u(x) (\sigma_1 - \sigma_2)(dx) : u \in Q(\varphi) \right\},$$

где

$$Q(\varphi) = \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \leq \varphi(x, y) \forall x, y \in X\}.$$

По аналогии с $Q(\varphi)$ мы будем рассматривать множества $Q_0(\varphi)$ и $Q(\varphi; l^\infty(X))$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} Q_0(\varphi) &= \{u \in \mathbb{R}^X : u(x) - u(y) \leq \varphi(x, y) \forall x, y \in X\}, \\ Q(\varphi; l^\infty(X)) &= \{u \in l^\infty(X) : u(x) - u(y) \leq \varphi(x, y) \forall x, y \in X\} \end{aligned}$$

и являющиеся множествами ограничений двойственных задач для некоторых нетопологических обобщений ЗМК (с фиксированной разностью проекций), см. [1], [3]. В [13], [2] для широкого класса пространств X , включающего компакты и польские пространства, была развита теория двойственности в массовой постановке, дающая полное описание всех функций стоимости φ , для которых справедливо соотношение двойственности $\mathcal{A}(\varphi; \sigma_1 - \sigma_2) = \mathcal{B}(\varphi; \sigma_1 - \sigma_2)$ при любых $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$, $\sigma_1(X) = \sigma_2(X)$. Аналогичная теория построена и для ЗМК с фиксированными маргинальными мерами [2], а также для нетопологических вариантов обеих задач [1], [3]. Нам понадобятся критерии непустоты $Q(\varphi)$ (а также $Q_0(\varphi)$ и $Q(\varphi; l^\infty(X))$) и связанное с ними понятие редуцированной функции стоимости.

Пусть X – произвольное множество. С каждой функцией стоимости $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ можно связать *редуцированную функцию стоимости* $\varphi_* : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$\varphi_*(x, y) = \inf \{\varphi^n(x, y) : n \in \{0, 1, 2, \dots\}\},$$

где $\varphi^0(x, y) = \varphi(x, y)$, а при $n \neq 0$

$$\varphi^n(x, y) = \inf \{\varphi(x, z_1) + \varphi(z_1, z_2) + \dots + \varphi(z_n, y) : z_1, \dots, z_n \in X\}.$$

Очевидно, φ_* удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\varphi_*(x, y) + \varphi_*(y, z) \geq \varphi_*(x, z)$$

для любых $x, y, z \in X$. Отсюда следует, что если функция φ_* принимает значение $-\infty$ в какой-нибудь одной точке $(x, y) \in X \times X$, то она тождественно равна $-\infty$. Таким образом, имеет место одно из двух: либо $\varphi_*(x, y) > -\infty$ при

²Подробнее о связи между двумя типами ЗМК в общем случае см. [13], [2], [14].

всех $(x, y) \in X \times X$, либо $\varphi_* \equiv -\infty$. В первом случае из неравенства треугольника следует, что для любого фиксированного $x_0 \in X$ каждая из двух функций $u(x) = \varphi_*(x, x_0)$ и $v(x) = -\varphi_*(x_0, x)$ принадлежит $Q_0(\varphi_*)$; во втором случае $Q_0(\varphi_*) = \emptyset$. Более того, из неравенства треугольника следует, что $\varphi_* > -\infty$ тогда и только тогда, когда $\varphi_*(x, x) \geq 0$ при всех $x \in X$ или, что равносильно, когда $\sum_1^n \varphi(x_{i-1}, x_i) \geq 0$ для каждого цикла $(x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$ в X .

Далее, если $u \in Q_0(\varphi)$, то, фиксируя точку $(x, y) \in X \times X$, натуральное число n и транзитную перевозку $(x = z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow z_{n+1} = y)$ и суммируя неравенства $u(z_{i-1}) - u(z_i) \leq \varphi(z_{i-1}, z_i)$, $i = 1, \dots, n+1$, получаем $u(x) - u(y) \leq \varphi(x, z_1) + \varphi(z_1, z_2) + \dots + \varphi(z_n, y)$. Так как это верно при любых $x, y \in X$, любом n и любой транзитной перевозке длины $n+1$, ведущей из x в y , то $u \in Q_0(\varphi_*)$. Следовательно, $Q_0(\varphi) \subseteq Q_0(\varphi_*)$ и так как $\varphi_* \leq \varphi$, то справедливо равенство $Q_0(\varphi) = Q_0(\varphi_*)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $Q(\varphi; l^\infty(X)) = Q(\varphi_*; l^\infty(X))$ и (для топологического пространства X) $Q(\varphi) = Q(\varphi_*)$.

Далее, если φ_* ограничена сверху, то $Q_0(\varphi_*) = Q(\varphi_*; l^\infty(X))$, следовательно, $Q_0(\varphi) = Q(\varphi; l^\infty(X))$. Наконец, заметим, что если X – топологическое пространство и $\varphi \in C^b(X) \overline{\otimes} C^b(X)$, то $\varphi_* \equiv -\infty$ либо $\varphi_* \in C^b(X) \overline{\otimes} C^b(X)$,³ причем в последнем случае для каждого $x_0 \in X$ функции $u(x) = \varphi_*(x, x_0)$ и $v(x) = -\varphi_*(x_0, x)$ принадлежат $Q(\varphi_*) = Q(\varphi)$.

Приведенные рассуждения суммируются следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (ср. [15; лемма 2], [16; теорема 2.1], [1; теорема 4.1]). Пусть X – произвольное множество, $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $Q_0(\varphi) = Q_0(\varphi_*)$, $Q(\varphi; l^\infty(X)) = Q(\varphi_*; l^\infty(X))$ и (для топологического пространства X) $Q(\varphi) = Q(\varphi_*)$. Более того, следующие утверждения равносильны:

- (а) $Q_0(\varphi) \neq \emptyset$;
- (б) $\varphi_*(x, y) > -\infty$ при всех $x, y \in X$;
- (в) $\varphi_*(x, x) \geq 0$ при всех $x \in X$;
- (г) для каждого цикла $(x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$ в X справедливо неравенство $\sum_1^n \varphi(x_{i-1}, x_i) \geq 0$.

Если функция φ_* ограничена сверху, то указанные утверждения равносильны любому из следующих двух:

- (д) $Q(\varphi; l^\infty(X)) \neq \emptyset$;
- (е) $\varphi_* \in l^\infty(X \times X)$.

Наконец, если X – топологическое пространство и $\varphi \in C^b(X) \overline{\otimes} C^b(X)$, то список равносильных утверждений может быть дополнен еще двумя:

- (ж) $Q(\varphi) \neq \emptyset$;
- (з) $\varphi_* \in C^b(X) \overline{\otimes} C^b(X)$.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Свяжем с задачами 1 и 2 функции стоимости

$$\varphi_1(x, y) = c(x, y) + m(f; \mathcal{H}_0), \quad (8)$$

$$\varphi_2(x, y) = c(x, y) + m(f; H_0), \quad (9)$$

где $c(x, y) = \min(f(x, y), -f(y, x))$.

³Для компактного X это следует из [13; лемма 2.4]; общий случай легко сводится к компактному переходом от X к βX .

ЛЕММА 1. 1) Для значения наилучшего приближения задачи 1 справедлива формула

$$m(f; \mathcal{H}_0) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : Q(c + \alpha) \neq \emptyset\}. \quad (10)$$

Более того, функция $u \in C^b(X)$ является точным решением задачи 1 тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $Q(\varphi_1)$.

2) Для значения наилучшего приближения задачи 2 справедлива формула

$$m(f; H_0) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : Q(c + \alpha; l^\infty(X)) \neq \emptyset\} \quad (11)$$

и функция $u \in l^\infty(X)$ является точным решением задачи 2 тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $Q(\varphi_2; l^\infty(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой $u \in C^b(X)$ имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{x, y \in X} |f(x, y) - u(x) + u(y)| \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : f(x, y) - \alpha \leq u(x) - u(y) \leq f(x, y) + \alpha \text{ для всех } x, y \in X\} \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : u \in Q(c + \alpha)\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (10). Также отсюда видно, что $u \in C^b(X)$ является точным решением задачи 1 тогда и только тогда, когда $u \in Q(c + m(f; \mathcal{H}_0)) = Q(\varphi_1)$. Первое утверждение леммы установлено. Проверка второго утверждения аналогична.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 1) леммы 1 доказано для задачи 1 с любой $f \in C^b(X \times X)$.

Следующий результат вытекает из леммы 1 и предложения 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f \in C^b(X) \otimes C^b(X)$, то существование точного решения задачи 1 равносильно выполнению условия $\varphi_{1*} \neq -\infty$. (При выполнении указанного условия любая из функций $u(x) = \varphi_{1*}(x, x_0)$, $v(x) = -\varphi_{1*}(x_0, x)$, $x_0 \in X$, является точным решением задачи 1.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как следует из леммы 1 (см. (11)), для каждого $\alpha > m(f; H_0)$ найдется функция $u \in Q(c + \alpha; l^\infty)$. Тогда согласно предложению 1 ((д) $\Leftrightarrow$ (г)) для каждого цикла $\zeta = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$ в X справедливо неравенство $\sum_1^n \varphi(x_{i-1}, x_i) \geq 0$, где $\varphi(x, y) = c(x, y) + \alpha$. Получаем $\sum_1^n c(x_{i-1}, x_i) + n\alpha \geq 0$. Следовательно,

$$\alpha \geq -\inf_{\zeta} \frac{1}{n} \sum_1^n c(x_{i-1}, x_i),$$

и так как это верно для любого $\alpha > m(f; H_0)$, то

$$m(f; H_0) \geq -\inf_{\zeta} \frac{1}{n} \sum_1^n c(x_{i-1}, x_i). \quad (12)$$

Пусть теперь $\alpha < m(f; H_0)$. В этом случае $Q(c + \alpha; l^\infty) = \emptyset$. Следовательно, $(c + \alpha)_* \equiv -\infty$ и существует цикл $(x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$, для которого $\sum_1^n c(x_{i-1}, x_i) + n\alpha < 0$. Получаем

$$\alpha < -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i) \leq -\inf_{\zeta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i),$$

и так как это верно для всех $\alpha < m(f; H_0)$, то

$$m(f; H_0) \leq -\inf_{\zeta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i) \quad (13)$$

и (4) следует из (12), (13). Доказательство (5) (и следствия 2) аналогично с очевидной заменой $Q(c + \alpha; l^\infty)$ на $Q(c + \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно лемме 1 достаточно проверить, что $Q(\varphi_1)$ непусто. Допустим противное. Тогда согласно предложению 1 найдется цикл $\zeta = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_n = x_0)$ в X , для которого

$$\sum_1^n \varphi_1(x_{i-1}, x_i) = \sum_1^n (c(x_{i-1}, x_i) + m(f; \mathcal{H}_0)) < 0.$$

В таком случае $\sum_1^n (c(x_{i-1}, x_i) + m(f; \mathcal{H}_0) + \alpha) < 0$, если $\alpha > 0$ достаточно мало. Тогда из предложения 1 ((г) $\Leftrightarrow$ (ж)) вытекает $Q(c + m(f; \mathcal{H}_0) + \alpha) = \emptyset$, но это невозможно, так как противоречит лемме 1, см. (10).

§ 4. Доказательство теорем 3 и 4

Нам понадобятся некоторые понятия и факты, относящиеся к теории лифтинга [17].⁴ Пусть X – локально компактное метризуемое пространство, σ_0 – положительная σ -конечная борелевская мера на нем, носителем которой является все пространство, $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \sigma_0)$ – банахово пространство всех ограниченных σ_0 -измеримых вещественных функций на X (σ_0 -эквивалентные функции не отождествляются), наделенное равномерной нормой $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$, $u \in \mathcal{L}^\infty$. Пространство $\mathcal{L}^\infty$ является вещественной банаховой алгеброй относительно естественной (поточечной) операции умножения. (Оно также является банаховой решеткой относительно поточечных операций взятия верхней и нижней граней.) Гомоморфизм банаховых алгебр, т.е. мультипликативный линейный оператор $\rho: \mathcal{L}^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$, называется *сильным лифтингом* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \sigma_0)$, если выполняются следующие четыре условия:

- 1) ρ – проектор, т.е. $\rho^2 = \rho$;
- 2) для каждой $u \in \mathcal{L}^\infty$ множество $\{x \in X : \rho(u)(x) \neq u(x)\}$ σ_0 -пренебрежимо, т.е. $\rho(u) = u$ σ_0 -почти всюду (п.в.);
- 3) для каждой $u \in \mathcal{L}^\infty$ $u = 0$ п.в. $\Rightarrow \rho(u) \equiv 0$;
- 4) $\rho(u) = u$ для всех $u \in C^b(X)$.

Из этих условий в соединении с линейностью и мультипликативностью ρ следует, что ρ является также гомоморфизмом банаховых решеток, т.е. $\rho(u \vee v) = \rho(u) \vee \rho(v)$ и $\rho(u \wedge v) = \rho(u) \wedge \rho(v)$ для любых $u, v \in \mathcal{L}^\infty$. Более того, если $u \geq v$ σ_0 -п.в., то $\rho(u)(x) \geq \rho(v)(x)$ при всех $x \in X$. (В самом деле, так как $w = u - v \geq 0$ σ_0 -п.в., то найдется функция $w_1 \in \mathcal{L}^\infty$ такая, что $w = w_1^2$ σ_0 -п.в., и, используя мультипликативность ρ , получаем $\rho(u)(x) - \rho(v)(x) = \rho(w)(x) = (\rho(w_1)(x))^2 \geq 0$ при всех $x \in X$.)

Главным фактом, который нам понадобится, является существование сильного лифтинга $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \sigma_0)$ [17] (см. также [5; следствие 1 теоремы 3.8]).

⁴См. также [5; гл. 3].

Заметим, что стандартное лебегово пространство $L^\infty = L^\infty(X, \sigma_0)$ является банаховой алгеброй и банаховой решеткой, а линейный оператор $\pi: \mathcal{L}^\infty \rightarrow L^\infty$, отображающий каждую функцию $u \in \mathcal{L}^\infty$ в класс функций, σ_0 -эквивалентных ей, является гомоморфизмом банаховых алгебр и банаховых решеток. Таким образом, π есть каноническое отображение $\mathcal{L}^\infty$ на факторпространство $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \mathcal{N}_0$, где $\mathcal{N}_0$ – подпространство σ_0 -пренебрежимых функций в $\mathcal{L}^\infty$. При этом стандартная норма L^∞ есть в точности факторнорма относительно π . Так как $\rho(u) = \rho(v)$ при $u - v \in \mathcal{N}_0$, ρ порождает гомоморфизм банаховых алгебр (и банаховых решеток) $\rho': L^\infty \rightarrow \mathcal{L}^\infty$ (сильный лифтинг L^∞) такой, что $\rho' \circ \pi = \rho$ и $\pi \circ \rho' = \text{id}_{L^\infty}$.

ЛЕММА 2. Пусть X – локально компактное метризуемое пространство, σ_0 – положительная σ -конечная борелевская мера на нем, носителем которой является все пространство, $f \in C^b(X \times X)$. Тогда непусто множество $Q(\varphi_1; \mathcal{L}^\infty) = Q(\varphi_1; L^\infty(X, \sigma_0))$, где

$$Q(\varphi_1; L^\infty(X, \sigma_0)) := \{u \in L^\infty(X, \sigma_0) : u(x) - u(y) \leq \varphi_1(x, y) \ \forall x, y \in X\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 1, для каждого n найдется функция $u_n \in Q(\varphi_1 + 1/n)$. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и будем считать, не уменьшая общности, что $u_n(x_0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. При каждом $x \in X$ имеем $-\varphi_1(x_0, x) - 1 \leq u_n(x) \leq \varphi_1(x, x_0) + 1$, следовательно, $\{u_n\}$ есть ограниченное по норме подмножество $C^b(X)$. Поскольку носителем σ_0 является все пространство X , $C^b(X)$ естественным образом линейно изометрично замкнутому подпространству в $L^\infty = L^\infty(X, \sigma_0)$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ *-слабо ограничена, стало быть, *-слабо предкомпактна в $L^\infty = L^{1*}$ и из нее можно выбрать *-слабо сходящуюся подпоследовательность⁵ $\{u_{n_k}\}$. Чтобы не усложнять запись, будем считать, что сама последовательность $\{u_n\}$ *-слабо сходится к некоторому элементу пространства L^∞ . Тогда найдется функция $v \in \mathcal{L}^\infty$ такая, что $\{u_n\}$ *-слабо сходится к $\pi(v)$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{u_n(x) - u_n(y)\} \subset C^b(X \times X) \subset L^\infty(X \times X, \sigma_0 \times \sigma_0)$ *-слабо сходится к элементу $L^\infty(X \times X, \sigma_0 \times \sigma_0)$, являющемуся классом эквивалентности функции $v(x) - v(y)$. Далее, так как $u_n(x) - u_n(y) \leq \varphi_1(x, y) + 1/n$ и положительный конус $L_+^\infty(X \times X, \sigma_0 \times \sigma_0)$ *-слабо замкнут (стало быть, можно переходить к пределу в неравенствах), получаем

$$v(x) - v(y) \leq \varphi_1(x, y) \quad \text{при } (\sigma_0 \times \sigma_0)\text{-п.в. } (x, y) \in X \times X. \quad (14)$$

Положим

$$N(y) := \{x \in X : v(x) - v(y) > \varphi_1(x, y)\}, \quad y \in X.$$

Из (14) следует, что множество

$$N := \{y \in X : N(y) \text{ не является } \sigma_0\text{-пренебрежимым}\}$$

σ_0 -пренебрежимо. Рассмотрим y как параметр и заметим, что для каждого $y \notin N$ неравенство

$$v(x) - v(y) \leq \varphi_1(x, y)$$

⁵Пространство $L^1(X, \sigma_0)$ сепарабельно (это следует, например, из [18; гл. VII, §1, теорема 3]). Тогда согласно [19; теорема V.5.1] на ограниченных подмножествах L^∞ *-слабая топология метризуема, поэтому мы можем выбрать обычную, а не обобщенную, *-слабо сходящуюся подпоследовательность.

справедливо при σ_0 -почти всех $x \in X$. Применяя сильный лифтинг ρ к обеим частям этого неравенства, получаем

$$\rho(v)(x) - v(y) \leq \varphi_1(x, y) \quad (15)$$

при всех $x \in X$ и всех $y \notin N$. Теперь, считая x параметром и применяя ρ к обеим частям (15), рассматриваемым как функции от y , получаем

$$\rho(v)(x) - \rho(v)(y) \leq \varphi_1(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad (16)$$

т.е. $\rho(v) \in Q(\varphi_1; \mathcal{L}^\infty)$.

Переходим непосредственно к доказательству теорем 3 и 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно лемме 2 существует функция $u_1 \in Q(\varphi_1; \mathcal{L}^\infty)$, где $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; \sigma_0)$, σ_0 – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Пусть η – какая-нибудь неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, для которой $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \sigma_0(dx) = 1$ и $\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} \eta(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L^1(\mathbb{R}^n, \sigma_0)$ при любых $i_1, \dots, i_n$. (Например, можно взять $\eta(x) = \pi^{-n/2} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, или любую неотрицательную бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем, интеграл от которой равен 1.) Пусть u – свертка u_1 с η :

$$u(x) = (u_1 * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(z) \eta(x - z) \sigma_0(dz) = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x - z) \eta(z) \sigma_0(dz).$$

Очевидно, u – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$.

Так как $f(x, y) = g(x - y)$, имеем $c(x, y) = \min(g(x - y), -g(y - x))$. Следовательно, $c(x - z, y - z) = c(x, y)$ и $\varphi_1(x - z, y - z) = \varphi_1(x, y)$. Тогда справедливо неравенство

$$u_1(x - z) - u_1(y - z) \leq \varphi_1(x, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

Умножая обе части этого неравенства на $\eta(z)$ и интегрируя по $\sigma_0(dz)$ с учетом равенства $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) \sigma_0(dz) = 1$, получаем $u(x) - u(y) \leq \varphi_1(x, y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $u \in Q(\varphi_1)$ и применение леммы 1 завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Для доказательства второго утверждения примем за X_1 топологическое произведение m окружностей с длинами $\tau_1, \dots, \tau_m$ и пространства $\mathbb{R}^{n-m}$. Указанные окружности удобно представлять в виде отрезков $[0, \tau_i]$ со склеенными концами. При этом положение точки на i -й окружности определяется числом x_i , $0 \leq x_i < \tau_i$. Пространство X_1 является гладким многообразием⁶ и, одновременно, локально компактной абелевой группой относительно операции сложения, определяемой соглашением $x + y := z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_i = x_i + y_i \pmod{\tau_i}$ при $i = 1, \dots, m$ и $z_i = x_i + y_i$ при $i = m + 1, \dots, n$. Очевидно, каждая (гладкая) функция на X_1 может рассматриваться как (гладкая) функция на $\mathbb{R}^n$, обладающая сформулированными свойствами периодичности по первым m переменным.

Согласно лемме 2 найдется функция $u_1 \in Q(\varphi_1; \mathcal{L}^\infty)$, где $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X_1; \sigma_0)$, σ_0 – мера Хаара⁷ на X_1 , т.е. в рассматриваемом случае – произведение m линейных мер Лебега на соответствующих окружностях и $(n - m)$ -мерной меры

⁶Для $n = 2$ X_1 есть тор (при $m = 2$) либо цилиндр (при $m = 1$).

⁷Подробнее о мере Хаара см., например, [20].

Лебега на $\mathbb{R}^{n-m}$. (В случае компактной группы X_1 из теоремы 2 следует существование функции $u_1 \in Q(\varphi_1)$.) Дальнейшее доказательство аналогично доказательству первого утверждения теоремы. Используя специальный вид функции f , получаем неравенство (17) для всех $x, y, z \in X_1$. Умножение этого неравенства на неотрицательную бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем

$$\eta: X_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \int_{X_1} \eta(z) \sigma_0(dz) = 1,$$

с последующим интегрированием по мере Хаара $\sigma_0(dz)$ показывает, что свертка u_1 с η бесконечно дифференцируема и принадлежит $Q(\varphi_1)$. Применение леммы 1 завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Согласно лемме 2 найдется функция $u_1 \in Q(\varphi_1; \mathcal{L}^\infty)$, где $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X; \sigma_0)$, σ_0 – мера Лебега на X . Используя специальный вид функции f , получаем $c(x, y) = -g(y, x, y - x)$, если выполнено условие (а), и $c(x, y) = g(x, y, x - y)$, если выполнено условие (б). В обоих случаях функция $\varphi_1(x, y) = c(x, y) + m(f; \mathcal{H}_0)$ имеет вид $\varphi_1(x, y) = h(x, y, x - y)$, где h удовлетворяет условию (б). Получаем для каждого $z \in \mathbb{R}_+^n$

$$u_1(x + z) - u_1(y + z) \leq h(x + z, y + z, x - y) \leq h(x, y, x - y), \quad x, y \in X.$$

Умножение обеих частей этого неравенства на $\eta(z) = e^{-(z_1 + \dots + z_n)}$ с последующим интегрированием по мере Лебега на $\mathbb{R}_+^n$ и с учетом равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(z) \sigma_0(dz) = 1$$

дает

$$u_2(x) - u_2(y) \leq h(x, y, x - y) = \varphi_1(x, y), \quad x, y \in X,$$

где

$$u_2(x) := \int_{\mathbb{R}_+^n} u_1(x + z) \eta(z) \sigma_0(dz), \quad x \in X.$$

Полагая $x + z = t$, получаем

$$u_2(x) = u_2(x_1, \dots, x_n) = e^{x_1 + \dots + x_n} \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_n}^{\infty} u_1(t_1, \dots, t_n) e^{-(t_1 + \dots + t_n)} dt_1 \dots dt_n,$$

откуда вытекает дифференцируемость u_2 . Кроме того, функция u_2 ограничена, что следует из ограниченности u_1 . Применяя приведенное рассуждение к функции u_2 вместо u_1 , получаем функцию

$$u_3(x) := \int_{\mathbb{R}_+^n} u_2(x + z) \eta(z) \sigma_0(dz), \quad x \in X,$$

которая принадлежит $Q(\varphi_1)$ и дважды дифференцируема. Повторяя описанную процедуру $r + 1$ раз, мы получим функцию $u_{r+2} \in Q(\varphi_1)$, которая имеет все частные производные до порядка $r + 1$ и, стало быть, является C^r -гладкой. Применение леммы 1 завершает доказательство.

Список литературы

- [1] V. L. Levin, “Topics in the duality theory for mass transfer problem”, *Distributions with given marginals and moment problems*, eds. V. Beneš, J. Štěpán, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 243–252.
- [2] V. L. Levin, “General Monge–Kantorovich problem and its applications in measure theory and mathematical economics”, *Functional analysis, optimization, and mathematical economics*, A collection of papers dedicated to memory of L. V. Kantorovich, ed. L. J. Leifman, Oxford Univ. Press, Oxford, NY, 1990, 141–176.
- [3] В. Л. Левин, “К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 95–126.
- [4] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971.
- [5] В. Л. Левин, *Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике*, Наука, М., 1985.
- [6] П.-Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, М., 1975.
- [7] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.
- [8] С. Я. Хавинсон, “Чебышевская теорема для приближения функций двух переменных суммами $\phi(x) + \psi(y)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:3 (1969), 650–665.
- [9] V. L. Levin, “Reduced cost functions and their applications”, *J. Math. Econom.*, **28**:2 (1997), 155–186.
- [10] Л. В. Канторович, “О перемещении масс”, *Докл. АН СССР*, **37**:7–8 (1942), 199–201.
- [11] Л. В. Канторович, “Об одной проблеме Монжа”, *УМН*, **3**:2 (1948), 225–226.
- [12] Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, “Об одном пространстве вполне аддитивных функций”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, **13**:7 (1958), 52–59.
- [13] В. Л. Левин, А. А. Милютин, “Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач”, *УМН*, **34**:3 (1979), 3–68.
- [14] V. L. Levin, “The Monge–Kantorovich problems and stochastic preference relations”, *Adv. Math. Econom.*, **3** (2001), 97–124.
- [15] В. Л. Левин, “Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеристика циклически монотонных отображений”, *Матем. сб.*, **181**:12 (1990), 1694–1709.
- [16] V. L. Levin, “A superlinear multifunction arising in connection with mass transfer problems”, *Set-Valued Anal.*, **4** (1996), 41–65.
- [17] A. Ionescu Tulcea, C. Ionescu Tulcea, *Topics in the theory of lifting*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.
- [19] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М, 1962.
- [20] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применения*, ИЛ, М., 1950.

В. Л. Левин (V. L. Levin)

Центральный экономико-математический
институт РАН, г. Москва
E-mail: vllevin@mail.ru

Поступила в редакцию
12.01.2006