Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, О. Д. Фролкина, К абелевости связных групп, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:35:23

УДК 515.122.4

С. А. Богатый, О. Д. Фролкина

К абелевости связных групп

В работе изучается вопрос возможности обращения известной теоремы Шеффера о гомотопическом представлении заданного отображения компактной связной группы в локально компактную абелеву группу гомоморфизмом (единственным). Именно найден ряд условий, при которых из существования представляющего гомоморфизма (его единственности) вытекает абелевость группы.

Библиография: 43 названия.

§ 1. Введение

Как показал Шеффер [1; следствие 2], *всякое сохраняющее единицу отображение компактной связной группы X в абелеву локально компактную группу G гомотопно, причем единственному, гомоморфизму*. Мы рассматриваем вопрос о необходимости абелевости группы-образа G и показываем, что на самом деле *как существование гомотопного гомоморфизма, так и его единственность характеризуют абелевы группы*. Особо можно выделить случаи $X = G$ (теоремы 6–9, следствия 3, 5), $X = G \times G$ (теоремы 10, 11), $X = S^1$ (предложения 3, 6, теорема 2) и $X = H$ – полупростая группа Ли (см. теорему 13). Рассмотрены отображения G на абелеву группу T (предложение 8, теорема 15). Даны и другие критерии абелевости компактной связной (конечномерной) группы Ли (предложение 7, теорема 13). Основные критерии абелевости получены в терминах свойств отображения ϕ_m – возведения в степень m .

Все рассматриваемые нами группы предполагаются метризуемыми, поэтому специально мы это не подчеркиваем. Но в теореме 12 рассмотрение неметризуемых групп в доказательстве является неизбежным, поэтому и в формулировке мы не предполагаем метризуемость. Рассматриваемые отображения, в частности гомоморфизмы, предполагаются непрерывными.

Мы обозначаем символом $\sim$ шейповую эквивалентность отображений или эквивалентность последовательностей (см. ниже), символом $\simeq$ – гомотопность отображений, символом $\cong$ – гомеоморфизм топологических пространств и изоморфизм топологических групп; G_d – группа G в дискретной топологии. Говоря о группах когомологий, мы имеем в виду когомологии Александрова–Чеха с группой коэффициентов $\mathbb{Z}$. Символом A обозначается группа характеров $\text{Hom}(A, S^1)$ абелевой группы A . Под тривиальным гомоморфизмом понимается постоянный гомоморфизм – переводящий все элементы в единичный (нулевой).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00705).

Статья организована следующим образом. В § 2 даются условия, когда единственность представляющего гомоморфизма влечет абелевость.

В §§ 3–7 даются условия, когда существование представляющего гомоморфизма (при соответствующей отображаемой группе или группе-образе) влечет абелевость.

§ 2. Единственность

Наша работа существенно опирается на следующие известные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Нетривиальная компактная связная группа Ли содержит подгруппу, изоморфную S^1 .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Коммутант $D(G)$ компактной связной метризуемой неабелевой группы G содержит подгруппу, изоморфную S^3 или $SO(3)$.*

ТЕОРЕМА 1 (Понтрягин [2; теорема 68, § 46, п. С]). *Бикompактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, является пределом обратной последовательности из групп Ли и гомоморфизмов.*

Напомним, что компактное метризуемое связное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Элементы фундаментальной группы $\pi_1(G, e)$ (далее кратко обозначаемой также $\pi_1(G)$) понимаются как классы гомотопных отображений $(S^1, 1) \rightarrow (G, e)$. Рассмотрим отображение $J: \text{Hom}(S^1, G) \rightarrow \pi_1(G, e)$, переводящее элемент множества $\text{Hom}(S^1, G)$ в содержащий его гомотопический класс. Если группа G абелева, то множество $\text{Hom}(S^1, G)$ обладает естественной структурой группы, при этом J является гомоморфизмом: $(\text{Hom}(S^1, G))_d \rightarrow \pi_1(G, e)$. Из теоремы Шеффера вытекает, что в случае абелевой локально компактной группы G отображение J биективно. Теорема 2 является обращением этого результата.

Условие абелевости G можно сформулировать в терминах группы $\text{Aut } G$ автоморфизмов группы G (в компактно открытой топологии). Согласно [3; следствие 2.3] группа автоморфизмов конечномерной компактной связной абелевой группы дискретна. Справедливо обратное утверждение (следствие 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для компактной связной неабелевой группы G существует бесконечное множество гомоморфизмов $S^1 \rightarrow G$, гомотопных тривиальному и попарно не сопряженных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 в группе G содержится подгруппа H , изоморфная S^3 или $SO(3)$. В группе H имеется подгруппа $U \cong S^1$. Рассмотрим гомоморфизмы $\phi_k: S^1 \rightarrow S^1 \cong U$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, представляющие все элементы $\pi_1(U)$. Пусть $\psi_k = i_G^U \circ \phi_k$ – композиция ϕ_k и вложения $i_G^U: U \hookrightarrow G$. Так как сопряжение на группе G является гомеоморфизмом, то отображения ψ_k при $k \in \mathbb{N}$ попарно не сопряжены как отображения разных кратностей. Поскольку группа $\pi_1(H)$ конечна, то ядро гомоморфизма $(i_H^U)_\#: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(H)$ бесконечно и, значит, ядро гомоморфизма $(i_G^U)_\#: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(G)$ бесконечно. Следовательно, среди ψ_k существует бесконечное множество отображений, гомотопных в G тривиальному.

ТЕОРЕМА 2. *Для компактной связной группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G абелева;
- 2) всякий гомоморфизм $S^1 \rightarrow G$, гомотопный тривиальному, тривиален (т.е. $J^{-1}(0) = \{0\}$);
- 3) всякий гомоморфизм $S^3 \rightarrow G$ тривиален;
- 4) всякий автоморфизм, изотопный тождественному, тождествен;
- 5) компонента тождественного автоморфизма группы G как элемента группы $\text{Aut } G$ не содержит ни $\text{SO}(3)$, ни S^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость импликаций $1) \Rightarrow 2)$ и $1) \Rightarrow 4)$ вытекает из теоремы Шеффера, импликация $4) \Rightarrow 5)$ очевидна. Импликация $2) \Rightarrow 1)$ вытекает из предложения 3, импликация $3) \Rightarrow 1)$ – из предложения 2.

Докажем, что $1) \Rightarrow 3)$. Согласно предложению 2 коммутант $D(S^3)$ группы S^3 равен S^3 , поэтому для всякого гомоморфизма $\varphi: S^3 \rightarrow G$ в абелеву группу G мы имеем $S^3 = D(S^3) \subset \text{Ker } \varphi$, т.е. гомоморфизм φ тривиален.

Докажем, что $5) \Rightarrow 1)$. Если G неабелева, то в ней есть подгруппа $H \subset G$, изоморфная S^3 или $\text{SO}(3)$. Автоморфизмы группы G , переводящие элемент $g \in G$ в ghg^{-1} при $h \in H$, образуют связную подгруппу в $\text{Aut } G$, изоморфную факторгруппе группы H , т.е. группе S^3 или $\text{SO}(3)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для компактной связной конечномерной группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G абелева;
- 2) группа $\text{Aut } G$ автоморфизмов группы G дискретна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ доказана в работе [3; следствие 2.3], обратная импликация вытекает из теоремы 2.

§ 3. Отображения $G \rightarrow G$

Для целого m обозначим через $\phi_m: G \rightarrow G$ отображение возведения в степень m , т.е. $\phi_m(g) = g^m$. В случае рассмотрения возведения в степень в разных группах мы будем писать ϕ_m^G . Это отображение рассматривалось еще Хопфом [4], который доказал его сюръективность (для компактных связных групп Ли) и вычислил его топологическую степень. (Случай несвязной компактной группы Ли рассмотрен в работе [5].)

ТЕОРЕМА 3 (Хопф [4]). *Для компактной связной группы Ли G отображение $\phi_m^G: G \rightarrow G$ имеет степень m^λ , где λ – ранг группы G .*

Ясно, что для абелевой группы отображение возведения в степень является гомоморфизмом.

Имеются работы, в которых при некоторых условиях получено обращение этого утверждения для дискретных групп. Для компактных связных групп обращение получается даже в случае, когда от гомоморфизма берутся только некоторые его свойства – гомотопность гомоморфизму (следствия 3 и 5), конечнократность (теоремы 6–8), открытость (теорема 9), что дает обращение теоремы существования Шеффера (уже на уровне рассмотрения только

отображения ϕ_m). Замечание 2 показывает, что гомотопности открытому конечнократному отображению для абелевости недостаточно.

Для группы G и набора $\mathcal{M} = \{m_k\}_{k=1}^\infty$ целых чисел рассмотрим обратную последовательность

$$G \xleftarrow{\phi_{m_1}} G \xleftarrow{\phi_{m_2}} G \xleftarrow{\phi_{m_3}} \dots \longleftarrow G_{\mathcal{M}}. \quad (*).\mathcal{M}$$

Так как $\phi_{m_1 m_2} = \phi_{m_1} \circ \phi_{m_2}$, то все числа m_k можно считать простыми положительными. При этом важна только совокупность чисел $\{m_k\}$, а порядок, в котором они занумерованы, неважен. Подчеркнем, что простое число p может входить в совокупность $\{m_k\}$ многократно. Предел обратной последовательности $(*)_{\mathcal{M}}$ мы обозначаем через $G_{\mathcal{M}}$. Если последовательность $\mathcal{M}$ тривиальна, т.е. все ее элементы равны 1, то $G_{\mathcal{M}}$ гомеоморфно G .

Если группа G абелева, то связующие отображения являются гомоморфизмами и, следовательно, обратный предел $G_{\mathcal{M}}$ указанной последовательности является группой. Оказывается, что существование групповой структуры на $G_{\mathcal{M}}$ тоже является характеристическим свойством абелевости группы G (следствие 2). Для получения этого результата мы указываем на особое шейповое свойство подвижности групп относительно класса односвязных континуумов Пеано (теорема 4), а также даем специальное представление групп (предложение 4). При неабелевой группе G пространство $G_{\mathcal{M}}$ не обладает указанным свойством подвижности (теорема 5) и, значит, даже не может иметь шейпа группы (следствие 2).

Напомним определение подвижности относительно класса пространств [6], [7], которое мы, однако, дадим не в окрестностной, а более удобной для нас спектральной форме. Пусть компакт X представлен в виде обратного предела обратной последовательности ANR -компактов X_i со связующими отображениями $f_i^j: X_j \rightarrow X_i$, и пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ – некоторый класс компактов. Скажем, что X подвижен относительно класса $\mathcal{P}$, если для всякого индекса i существует такой индекс j , что для всякого индекса $l \geq j$ и всякого отображения $g: P \rightarrow X_j$, где $P \in \mathcal{P}$, существует такое отображение $h: P \rightarrow X_l$, что композиции $f_i^j \circ g$ и $f_i^l \circ h$ гомотопны. Стандартными рассуждениями теории шейпов показывается, что введенное понятие не зависит от выбора ANR -спектра, представляющего X , и эквивалентно окрестностному определению из работы [7]. Напомним, что из гомотопности двух отображений следует их шейповая эквивалентность, а из гомотопической эквивалентности двух пространств следует их шейповая эквивалентность.

ТЕОРЕМА 4. *Всякая компактная связная конечномерная группа G подвижна относительно класса односвязных континуумов Пеано.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \cong \varprojlim \{G_i, f_i^j\}$ – предел обратного спектра групп Ли и гомоморфизмов. При этом можно считать, что все связующие отображения f_i^j сюръективны и имеют нульмерные ядра, т.е. являются накрытиями. Покажем, что индекс $j = i$ удовлетворяет условиям определения подвижности. Пусть $g: P \rightarrow G_i$ – отображение односвязного континуума Пеано P . Так как для любого $l \geq i$ отображение $f_i^l: G_l \rightarrow G_i$ является накрытием и $g_{\#}(\pi_1(P)) = 0$, то существует [8] такое поднятие $h: P \rightarrow G_l$, что $f_i^l \circ h = g$.

Следующее предложение позволяет редуцировать многие утверждения о компактных связных конечномерных группах к случаям односвязной (полупростой) группы Ли или абелевой группы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – компактная связная конечномерная группа. Тогда

а) существуют такие компактная связная абелева группа T , компактная односвязная (полупростая) группа Ли H , подгруппа K центра группы H , гомоморфизм $\varphi: K \rightarrow T$, что

$$G \cong (H \times T)/(K, \varphi),$$

где $(K, \varphi) = \{(k, \varphi(k)) \mid k \in K\}$; причем если G – группа Ли, то T – тор;

б) пусть

$$\begin{aligned} i_{\times}: H &\rightarrow H \times T, & h &\mapsto (h, e), \\ i_{+}: T &\rightarrow H \times T, & t &\mapsto (e, t), \end{aligned}$$

$\eta: H \times T \rightarrow (H \times T)/(K, \varphi)$ – естественная проекция.

Корректно определены гомоморфизмы

$$\begin{aligned} p_{\times}: (H \times T)/(K, \varphi) &\rightarrow H/K, & (h, t)(K, \varphi) &\mapsto hK, \\ p_{+}: (H \times T)/(K, \varphi) &\rightarrow T/\varphi(K), & (h, t)(K, \varphi) &\mapsto t\varphi(K), \end{aligned}$$

причем для любого целого m следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_m}} & H \times \cdots \times H \\ \eta \circ i_{\times} \downarrow & & \downarrow \Pi \eta \circ i_{\times} \\ (H \times T)/(K, \varphi) & \xleftarrow{g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_m}} & (H \times T)/(K, \varphi) \times \cdots \times (H \times T)/(K, \varphi) \\ p_{\times} \downarrow & & \downarrow \Pi p_{\times} \\ H/K & \xleftarrow{(hK)_{j_1} (hK)_{j_2} \cdots (hK)_{j_m}} & H/K \times \cdots \times H/K, \end{array}$$

где $(j_1, \dots, j_m)$ – произвольная перестановка набора $(1, \dots, m)$, и

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{\phi_m^H} & H \\ \eta \circ i_{\times} \downarrow & & \downarrow \eta \circ i_{\times} \\ (H \times T)/(K, \varphi) & \xleftarrow{\phi_m^G} & (H \times T)/(K, \varphi) \\ p_{\times} \downarrow & & \downarrow p_{\times} \\ H/K & \xleftarrow{\phi_m^{H/K}} & H/K; \end{array}$$

в) для любого $n \geq 2$ группы $\pi_n(G)$ и $\pi_n(H)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Группа G представима как предел обратной последовательности групп Ли со связующими отображениями – сюръективными гомоморфизмами с нульмерными ядрами (следовательно, накрытиями). Из конечномерности G согласно работе Баума [9] получается, что G является обратным пределом последовательности, содержащей только одну группу G_0 , т.е. G – это G_0 -группа в терминологии работы Скордева [10]. Применение [10; лемма 1] завершает доказательство.

Пункт б) доказывается непосредственной проверкой.

в) Так как естественная проекция $H \times T \rightarrow G \cong (H \times T)/(K, \varphi)$ является оверлеем [11]–[13], то для всех $n \geq 2$ имеем

$$\pi_n(G) \cong \pi_n(H \times T) \cong \pi_n(H) \oplus \pi_n(T) \cong \pi_n(H).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – компактная связная конечномерная неабелева группа. Тогда существует такая односвязная группа Ли H , что $\dim H \leq \dim G$ и для всякой нетривиальной последовательности $\mathcal{M}$ пространство $G_{\mathcal{M}}$ не является подвижным относительно H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим группу G в виде $G \cong (H \times T)/(K, \varphi)$ (предложение 4). Вместо пространства $G_{\mathcal{M}}$ мы будем рассматривать пространство $((H \times T)/(K, \varphi))_{\mathcal{M}}$, гомеоморфное ему, так как возведение в степень коммутирует с гомоморфизмами. Рассмотрим пространства

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}} &= \varprojlim \{H_n = H, \phi_{m_n}^H\}, \\ G_{\mathcal{M}} &= \varprojlim \{G_n = (H \times T)/(K, \varphi), \phi_{m_n}^{(H \times T)/(K, \varphi)}\}, \\ (H/K)_{\mathcal{M}} &= \varprojlim \{(H/K)_n = H/K, \phi_{m_n}^{H/K}\} \end{aligned}$$

вместе с задающими их спектрами. Рассмотрим какой-нибудь ANR -спектр $\{X_n, f_n^s\}$, представляющий компакт $G_{\mathcal{M}}$. Так как пространства H и H/K являются ANR -компактами, то для компактов $H_{\mathcal{M}}$ и $(H/K)_{\mathcal{M}}$ будем рассматривать ANR -спектры, указанные выше. Согласно предложению 4 отображения спектров

$$\begin{aligned} i_n &= \eta \circ i_{\times}: H_n = H \rightarrow G_n = (H \times T)/(K, \varphi), \\ p_n &= p_{\times}: G_n = (H \times T)/(K, \varphi) \rightarrow (H/K)_n = H/K \end{aligned}$$

порождают отображения обратных пределов $i_{\mathcal{M}}: H_{\mathcal{M}} \rightarrow G_{\mathcal{M}}$ и $p_{\mathcal{M}}: G_{\mathcal{M}} \rightarrow (H/K)_{\mathcal{M}}$. Далее, отображения $i_{\mathcal{M}}$ и $p_{\mathcal{M}}$ порождают шейповые морфизмы $\underline{i}: \{H_n, \phi_{m_n}\} \rightarrow \{X_n, f_n\}$ и $\underline{p}: \{X_n, f_n\} \rightarrow \{(H/K)_n, \phi_{m_n}\}$, причем композиция $\underline{p} \circ \underline{i}$ эквивалентна шейповому морфизму $\underline{p \circ i}: \{H_n, \phi_{m_n}\} \rightarrow \{(H/K)_n, \phi_{m_n}\}$, представляющему отображение $p_{\mathcal{M}} \circ i_{\mathcal{M}}$. То есть существуют такие монотонные отображения $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и отображения $r_n: X_{\alpha(n)} \rightarrow (H/K)_n$ и $q_n: H_{\beta(n)} \rightarrow X_n$, что имеют место гомотопии:

$$\begin{aligned} r_n \circ f_{\alpha(n)}^{\alpha(n+1)} &\simeq \phi_{m_n}^{H/K} \circ r_{n+1}, \\ q_n \circ \phi_{m_{\beta(n)}}^H \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(n+1)-1}}^H &\simeq f_n^{n+1} \circ q_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_n \circ q_{\alpha(n)} &\simeq p_n \circ i_n \circ \phi_{m_n}^H \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n))-1}}^H \\ &= \phi_{m_n}^{H/K} \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n))-1}}^{H/K} \circ p_{\beta(\alpha(n))} \circ i_{\beta(\alpha(n))}. \end{aligned}$$

Предположим, что спектр $\{X_n, f_n^s\}$ подвижен относительно пространства H . Без ограничения общности можно считать, что индекс $\alpha(n+1)$ не менее индекса j , соответствующего индексу n в определении подвижности. Следовательно, для любого $l > \beta(\alpha(n+1))$ существует такое отображение $h: H \rightarrow X_{\alpha(l)}$, что отображение $f_{\alpha(n)}^{\alpha(n+1)} \circ q_{\alpha(n+1)}$ гомотопно отображению $f_{\alpha(n)}^{\alpha(l)} \circ h$.

Тогда имеет место цепочка равенств и гомотопий:

$$\begin{aligned} &\phi_{m_n}^{H/K} \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n+1))-1}}^{H/K} \circ p_{\beta(\alpha(n+1))} \circ i_{\beta(\alpha(n+1))} \\ &= p_n \circ i_n \circ \phi_{m_n}^H \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n+1))-1}}^H \\ &\simeq r_n \circ q_{\alpha(n)} \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n))}}^H \circ \dots \circ \phi_{m_{\beta(\alpha(n+1))-1}}^H \simeq r_n \circ f_{\alpha(n)}^{\alpha(n+1)} \circ q_{\alpha(n+1)} \\ &\simeq r_n \circ f_{\alpha(n)}^{\alpha(l)} \circ h \simeq \phi_{m_n}^{H/K} \circ \dots \circ \phi_{m_{l-1}}^{H/K} \circ r_l \circ h. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\deg \phi_{m_n}^{H/K} \dots \deg \phi_{m_{\beta(\alpha(n+1))-1}}^{H/K} \cdot \deg(p_{\beta(\alpha(n+1))} \circ i_{\beta(\alpha(n+1))}) \\ &= \deg \phi_{m_n}^{H/K} \dots \deg \phi_{m_{l-1}}^{H/K} \cdot \deg(r_l \circ h). \end{aligned}$$

Согласно теореме Хопфа общие сомножители отличны от нуля, и после сокращения получается равенство

$$|K| = \deg(p_{\beta(\alpha(n+1))} \circ i_{\beta(\alpha(n+1))}) = \deg \phi_{m_{\beta(\alpha(n+1))}}^{H/K} \dots \deg \phi_{m_{l-1}}^{H/K} \cdot \deg(r_l \circ h).$$

Так как группа H односвязна, то отображение $r_l \circ h: H \rightarrow H/K$ пропускается через проекцию $p: H \rightarrow H/K$, поэтому $|K| = \deg p$ делит $\deg(r_l \circ h)$. Противоречие показывает, что ни для какого $l > \beta(\alpha(n+1))$ поднятия h отображения $q_{\alpha(n+1)}$ не существует.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для компактной связной конечномерной группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) для всякой последовательности $\mathcal{M}$ пространство $G_{\mathcal{M}}$ является компактной связной конечномерной группой;
- 3) для некоторой нетривиальной последовательности $\mathcal{M}$ пространство $G_{\mathcal{M}}$ имеет шейп компактной группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ очевидны.

Докажем, что $3) \Rightarrow 1)$. Пусть пространство $G_{\mathcal{M}}$ имеет шейп компактной группы K . По теореме Борсука группа K связна. Согласно [14; теорема 4.1] фундаментальная размерность компактной связной группы K совпадает с ее лебеговой размерностью. Получаем, что

$$\dim K = \text{Fd } K = \text{Fd } G_{\mathcal{M}} \leq \dim G_{\mathcal{M}} \leq \dim G,$$

т.е. $G_{\mathcal{M}}$ имеет шейп конечномерной компактной связной группы. Так как подвижность по классу пространств является шейповым свойством, то абелевость группы G получается с помощью теорем 4 и 5.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если на компактной связной конечномерной группе G для некоторого $m \neq 0, \pm 1$ отображение ϕ_m^G шейпово эквивалентно гомоморфизму, то группа G абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение ϕ_m^G шейпово эквивалентно гомоморфизму $\phi: G \rightarrow G$. Согласно теореме непрерывности в теории шейпов (в четком виде нужное нам утверждение есть предложение 4 из работы [15]) пространство $G_{\mathcal{M}}$ имеет шейп предела обратной последовательности $G \xleftarrow{\phi} G \xleftarrow{\phi} \dots$. Так как этот предел является компактной связной конечномерной группой, то согласно следствию 2 группа G абелева.

ВОПРОС 1. Может ли $G_{\mathcal{M}}$ иметь шейп однородного пространства?

Перейдем к характеристизации абелевости группы G в терминах конечнократности отображений ϕ_m .

Пусть $A_m^h(G) = \{x \in G \mid x^m = h\}$. Если ясно, о какой группе идет речь, будем писать просто A_m^h . Согласно работе Хопфа [4] для любой компактной связной группы Ли G и любого ненулевого m отображение ϕ_m^G сюръективно и точка e является изолированной в множестве $A_m^e(G)$. Применение теоремы Понтрягина о представимости группы как предела обратной последовательности групп и гомоморфизмов позволяет доказать, что отображения ϕ_m^G при $m \neq 0$ сюръективны и для произвольной компактной связной группы. (Отметим, что в работах [16], [17] рассматриваются аналогичные множества “корней” в компактных связных замкнутых топологических многообразиях со структурой H -пространства; в [17] получена нижняя оценка мощности этих множеств, обобщающая оценку Хопфа для групп Ли.)

В случае произвольной абелевой группы G при данном m некоторые множества A_m^h могут быть пусты, но мощность непустых одна и та же, равная $|A_m^e| = |\text{Ker } \phi_m|$.

Выясним структуру специальных множеств корней для простейших неабелевых групп S^3 и $\text{SO}(3)$. Группу S^3 интерпретируем как группу кватернионов с единичным модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Имеют место следующие гомеоморфизмы и равенства:

- 0) $A_m^h(G) = A_{-m}^{(h^{-1})}(G) \cong (A_{-m}^h(G))^{-1}$ для любой группы G , любого элемента $h \in G$ и целого m ;
- 1) $A_2^1(S^3) = \{\pm 1\}$ и $A_2^{-1}(S^3) = \{q \mid \text{Re}(q) = 0\} \cong S^2$;
- 2) $A_m^1(S^3) \cong \{1\} \oplus \{-1\} \oplus \bigoplus_1^n S^2$ и $A_m^{-1}(S^3) \cong \bigoplus_1^n S^2$ при $m = 2n + 2 \geq 3$;
- 3) $A_m^1(S^3) \cong \{1\} \oplus \bigoplus_1^n S^2$ и $A_m^{-1}(S^3) \cong \{-1\} \oplus \bigoplus_1^n S^2$ при $m = 2n + 1 \geq 3$;
- 1') $A_2^e(\text{SO}(3)) \cong \mathbb{R}P^2 \oplus \{e\}$;
- 2') $A_m^e(\text{SO}(3)) \cong \{e\} \oplus \bigoplus_1^n S^2 \oplus \mathbb{R}P^2$ при $m = 2n + 2 \geq 2$;
- 3') $A_m^e(\text{SO}(3)) \cong \{e\} \oplus \bigoplus_1^n S^2$ при $m = 2n + 1 \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 0) Указанный гомеоморфизм задается отображением ϕ_{-1}^G .

1)–3). Ясно, что $x \in A_m^1 \iff xqx^{-1} \in A_m^1$ и $x \in A_m^{-1} \iff xqx^{-1} \in A_m^{-1}$. Согласно [18] классом сопряженности кватерниона $x \in S^3$ являются все (унимодулярные) кватернионы с такой же вещественной частью. В частности, классы

элементов ± 1 одноточечны, а все остальные классы гомеоморфны S^2 ; каждый кватернион сопряжен комплексному числу. Поэтому описание множества $A_m^{\pm 1}(S^3)$ сводится к нахождению $A_m^{\pm 1}(S^1)$. Отсюда легко вытекают нужные гомеоморфизмы.

1')–3'). Группу $SO(3)$ мыслим как факторгруппу группы S^3 , где факторизация – это отождествление диаметрально противоположных точек S^3 . Множество $A_m^e(SO(3))$ получается при таком отождествлении из множества $A_m^1(S^3) \cup A_m^{-1}(S^3)$, откуда вытекает справедливость гомеоморфизмов 1')–3').

СЛЕДСТВИЕ 4. Если для компактной связной группы G и целого $m \neq 0, \pm 1$ ни для какого $h \in G$ множество A_m^h не содержит ни S^2 , ни $\mathbb{R}P^2$, то группа G абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что группа G неабелева. Согласно предложению 2 группа G содержит подгруппу H , изоморфную S^3 или $SO(3)$. Завершает доказательство применение предложения 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $m \neq \pm 2$, то (как показывает предложение 5) для проверки абелевости группы G достаточно рассмотреть A_m^e . Если $m = \pm 2$, то достаточно рассмотреть A_m^h не более чем для двух элементов h (для $h = e$, если G содержит подгруппу $SO(3)$, и для $h = -1$, если G содержит подгруппу S^3).

ТЕОРЕМА 6. Для компактной связной n -мерной группы Ли G и целого числа $m \neq 0, \pm 1$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) отображение $\phi_m: G \rightarrow G$ является гомоморфизмом и $\text{Ker } \phi_m \cong (\mathbb{Z}_{|m|})^n$ (в частности, ϕ_m является $|m|^n$ -кратным накрытием и поэтому для любого $h \in G$ имеем $|A_m^h| = |m|^n$);
- 3) ни для какого $h \in G$ множество A_m^h не содержит ни S^2 , ни $\mathbb{R}P^2$;
- 4) для всех h справедливо неравенство $|A_m^h| > |m|^{n-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связная компактная n -мерная абелева группа Ли изоморфна тору T^n , поэтому легко видеть, что из условия 1) вытекает условие 2).

Импликации 2) $\Rightarrow$ 3) и 2) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана в следствии 4.

4) $\Rightarrow$ 1). Для элемента $h \in T(h) \subset G$, порождающего максимальный тор $T(h)$ (см. [4; п. 19 (а)], [19; предложение 1.4.1], [20; предложение 4.3]), множество A_m^h является подмножеством $T(h)$ [4; п. 19 (b)] и $|A_m^h| = |m|^\lambda$, где $\lambda = \dim T(h)$ – ранг группы G . Известно, что $\lambda \equiv n \pmod 2$ [20; следствие 4.15]. Поэтому если G неабелева, то $|A_m^h| = |m|^\lambda \leq |m|^{n-2}$, что противоречит предположению.

ТЕОРЕМА 7. Для компактной связной n -мерной группы G и целого числа $m \neq 0, \pm 1$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) отображение $\phi_m: G \rightarrow G$ является гомоморфизмом, и $\text{Ker } \phi_m$ является факторгруппой группы $(\mathbb{Z}_{|m|})^n$ (в частности, ϕ_m является l -листным накрытием для некоторого l , делящего $|m|^n$, и поэтому существует такой делитель l числа $|m|^n$, что $|A_m^h| = l$ для всех элементов $h \in G$);
- 3) ни для какого $h \in G$ множество A_m^h не содержит ни S^2 , ни $\mathbb{R}P^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Гомоморфность отображения ϕ_m очевидна. Рассмотрим $\text{Ker } \phi_m$. Связная компактная n -мерная абелева группа является пределом обратной последовательности n -мерных торов со связующими отображениями – гомоморфизмами $G \cong \varprojlim \{T^n, f_i\}$. При этом отображение ϕ_m^G порождено отображением спектров:

$$\begin{array}{ccccccc} T^n & \xleftarrow{f_1} & T^n & \xleftarrow{f_2} & \dots & \xleftarrow{\quad} & G \\ \phi_m^{T^n} \downarrow & & \phi_m^{T^n} \downarrow & & & & \phi_m^G \downarrow \\ T^n & \xleftarrow{f_1} & T^n & \xleftarrow{f_2} & \dots & \xleftarrow{\quad} & G. \end{array}$$

Имеет место равенство

$$\text{Ker } \phi_m^G = \varprojlim \{ \text{Ker } \phi_m^{T^n}, f_i \} = \varprojlim \{ (\mathbb{Z}_{|m|})^n, f_i \}.$$

Пусть $f_i^j = f_{i+1} \circ \dots \circ f_j$. Так как $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$, то при $k \geq j$ имеет место включение $\text{Im } f_i^k \subset \text{Im } f_i^j$. Таким образом, конечные группы $(\text{Im } f_i^k)_k$ (при фиксированном i) образуют убывающую последовательность групп. Следовательно, существует такое n_i , что для всех $n \geq n_i$ образ $\text{Im } f_i^n = H_i$ один и тот же. Поэтому $\text{Ker } \phi_m^G = \varprojlim \{ H_{n_i}, f_{n_i}^{n_i+1} \}$ есть обратный предел последовательности групп со связующими отображениями – эпиморфизмами. Так как при этом $H_{n_i} \subset (\mathbb{Z}_{|m|})^n$, то, начиная с некоторого n_{i_0} , эпиморфизмы $f_{n_i}^{n_i+1}$ имеют тривиальное ядро, т.е. являются изоморфизмами. Поэтому $\text{Ker } \phi_m^G \cong H_{n_{i_0}} = f_{n_{i_0}}^{n_{i_0}+1}((\mathbb{Z}_{|m|})^n) = (\mathbb{Z}_{|m|})^n / \text{Ker } f_{n_{i_0}}^{n_{i_0}+1}$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана в следствии 4.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 8. Для компактной связной группы G и целого числа $m \neq 0, \pm 1$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) отображение $\phi_m: G \rightarrow G$ является гомоморфизмом, и $\text{Ker } \phi_m$ является обратным пределом групп $\{(\mathbb{Z}_{|m|})^i, f_i\}$, в частности, для всех $h \in G$ множество A_m^h нульмерно;
- 3) ни для какого $h \in G$ множество A_m^h не содержит ни S^2 , ни $\mathbb{R}P^2$.

ТЕОРЕМА 9. Для компактной связной группы G и целого $m \neq 0, \pm 1$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) отображение ϕ_m открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из [2; теорема 12], так как для абелевой группы сюръективное отображение ϕ_m является гомоморфизмом.

Импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) докажем в два этапа.

(1) Пусть G является группой Ли. Предположим, что группа G неабелева. Тогда в группе G есть подгруппа H , изоморфная S^3 или $\text{SO}(3)$. Если $m = \pm 2$, то рассматриваем отображение $\phi_4 = \phi_m \circ \phi_m$, которое открыто как композиция двух открытых отображений. Поэтому далее без ограничения общности

можно считать, что $|m| \geq 3$. Согласно предложению 5 найдется такой элемент $g \in H$, что $g^m = e$ и g не лежит в центре G , и значит, для некоторого максимального тора T группы G имеем $g \notin T$. Так как тор T замкнут в G , то можно найти окрестность U элемента g в G , не пересекающуюся с T . Через каждую точку h множества U проходит некоторый максимальный тор $T(h)$, отличный от T . Заметим, что $h^m \in T(h)$. Однако $\phi_m(U)$ открыто, и поэтому $\phi_m(U) \cap T$ есть окрестность точки $e = \phi_m(g) \in T$. Следовательно, открытое в T множество $\phi_m(U) \cap T$ состоит только из сингулярных элементов, так как каждый его элемент h^m лежит в двух максимальных торах: T_h и T . Так как все элементы тора могут быть получены при помощи возведения в некоторые степени элементов из окрестности единицы, то получаем, что все элементы тора T сингулярны. Так как все максимальные торы в группе G сопряжены [21; теорема 2.2.26], то все торы состоят из сингулярных элементов. Объединение всех торов дает всю группу. Однако в группе плотны регулярные элементы [4; п. 26]. Полученное противоречие означает, что G абелева.

(2) Группа G представима в виде предела обратной последовательности компактных связных групп Ли: $G \cong \varprojlim \{G_i, f_i^j\}$. Если $\phi_m^G: G \rightarrow G$ открыто, то открыто и каждое $\phi_m^{G_i}: G_i \rightarrow G_i$. По доказанному все G_i абелевы, поэтому и G абелева.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Гомотопические варианты теорем 8 и 9 неверны. На неабелевой группе S^3 всякое отображение степени m (в частности, $\phi_m^{S^3}$) гомотопно открытому конечнократному отображению – двукратной надстройке над отображением $\phi_m^{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$.

§ 4. Отображения $G \times G \rightarrow G$

Пусть i_1 – это вложение $(G, e) \rightarrow (G \times G, e \times e) \hookrightarrow (G \times G, e \times e)$, а i_2 – вложение $(G, e) \rightarrow (e \times G, e \times e) \hookrightarrow (G \times G, e \times e)$.

ТЕОРЕМА 10. *Для компактной связной конечномерной группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G абелева;
- 2) всякое отображение $F: (G \times G, e \times e) \rightarrow (G, e)$, для которого отображения $F \circ i_1: (G, e) \rightarrow (G, e)$ и $F \circ i_2: (G, e) \rightarrow (G, e)$ гомотопны тождественному отображению (“гомотопическое умножение”), гомотопно первоначальному умножению;
- 3) всякое шейповое отображение $\underline{F}: G \times G \rightarrow G$, для которого элемент e является двусторонней шейповой единицей (“шейповое умножение”), шейпово эквивалентно первоначальному умножению;
- 4) “умножение” $\mu_2: G \times G \rightarrow G$, заданное формулой $\mu_2(g_1, g_2) = g_2 g_1$, шейпово эквивалентно первоначальному умножению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана в работе [1; следствие 4].

1) $\Rightarrow$ 3). Согласно условию для шейпового умножения $\underline{F}: G \times G \rightarrow G$ шейповые отображения $\underline{f}_1 = \underline{F} \circ i_1$ и $\underline{f}_2 = \underline{F} \circ i_2$ шейпово эквивалентны тождественному отображению. Согласно теореме Кислинга [22; теорема 2.5] существует

гомоморфизм $\phi: G \times G \rightarrow G$, шейпово эквивалентный шейповому отображению $\underline{F}$. Покажем, что ϕ является обычным умножением. Отображения $\phi \circ i_1$ и $\phi \circ i_2$ являются гомоморфизмами, шейпово эквивалентными тождественному. Из единственности эквивалентного гомоморфизма [22; теорема 2.5] следует, что $\phi \circ i_1 = \text{Id}_G = \phi \circ i_2$, т.е. $\phi(g, e) = g$ и $\phi(e, g) = g$. Тогда

$$\phi(g_1, g_2) = \phi((g_1, e) \cdot (e, g_2)) = \phi(g_1, e)\phi(e, g_2) = g_1 g_2.$$

Импlications 2) $\Rightarrow$ 4) и 3) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

Покажем справедливость импликации 4) $\Rightarrow$ 1). Согласно предложению 4 имеется представление $G \cong (H \times T)/(K, \varphi)$ и при $s = 1, 2$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{\mu_s} & H \times H \\ i = \eta \circ i_\times \downarrow & & \Pi(i = \eta \circ i_\times) \downarrow \\ (H \times T)/(K, \varphi) & \xleftarrow{\mu_s} & (H \times T)/(K, \varphi) \times (H \times T)/(K, \varphi) \\ p = p_\times \downarrow & & \Pi(p = p_\times) \downarrow \\ H/K & \xleftarrow{\mu_s} & H/K \times H/K, \end{array}$$

где $\mu_1(g_1, g_2) = g_1 g_2$ и $\mu_2(g_1, g_2) = g_2 g_1$, коммутативны.

Из шейповой эквивалентности умножений $g_1 g_2$ и $g_2 g_1$ в группе G следует, что $i(h_1 h_2) = i(h_1)i(h_2) \sim i(h_2)i(h_1) = i(h_2 h_1)$. Поэтому $p \circ i(h_1 h_2) \sim p \circ i(h_2 h_1)$. Так как группа Ли H/K является ANR -компактом, то отображения $p \circ i(h_1 h_2)$ и $p \circ i(h_2 h_1)$ гомотопны. Отображение $p \circ i$ является накрытием, поэтому существует такое отображение $F: H \times H \rightarrow H$, что $p \circ i \circ F(h_1, h_2) = p \circ i(h_2 h_1)$ и отображение F гомотопно отображению обычного умножения $h_1 h_2$. Покажем, что отображение F гомотопно отображению “обратного умножения” $h_2 h_1$. Рассмотрим в группе H путь $\omega: [0, 1] \rightarrow H$ из точки $\omega(0) = e$ в точку $\omega(1) = F(e, e)$. Этот путь задает гомотопию отображения “обратного умножения” $h_2 h_1$ в отображение $F'(h_1, h_2) = F(e, e)h_2 h_1$. Так как отображение $p \circ i$ является накрытием, то из равенств и гомотопий $p \circ i \circ F(h_1, h_2) = p \circ i(h_2 h_1) \simeq p \circ i(F(e, e)h_2 h_1) = p \circ i \circ F'(h_1, h_2)$ и $F(e, e) = F'(e, e)$ вытекает равенство $F = F'$. Гомотопность умножения $(h_1, h_2) \mapsto h_2 h_1$ исходному умножению $(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2$ означает, что группа H гомотопически абелева, следовательно, абелева [23] и, значит, тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [24; теорема (5)] перечислены все компактные связные простые группы Ли, имеющие конечное число негомотопных умножений. На группе $\text{SO}(3)$ имеется ровно 768 негомотопных умножений [25], на группе $S^3 - 12$ [26; теорема (1.3)].

СЛЕДСТВИЕ 5. Если на компактной связной конечномерной группе G отображение $\phi_{-1}: G \rightarrow G$ шейпово эквивалентно гомоморфизму, то G абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение ϕ_{-1}^G шейпово эквивалентно гомоморфизму $\phi: G \rightarrow G$. Тогда имеет место цепочка равенств и шейповых эквивалентностей

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &= (g_1^{-1} g_2^{-1})^{-1} = \phi_{-1}^G(g_1^{-1} g_2^{-1}) \sim \phi(g_1^{-1} g_2^{-1}) \\ &= \phi(g_1^{-1}) \phi(g_2^{-1}) \sim \phi_{-1}^G(g_1^{-1}) \phi_{-1}^G(g_2^{-1}) = g_1 g_2. \end{aligned}$$

Согласно теореме 10 группа G абелева.

Впредь под словом $W(a_1, \dots, a_k)$ от k переменных мы понимаем произвольный элемент свободной группы F_k с k образующими, т.е. это конечная последовательность символов $a_1, \dots, a_k$, в которой каждому элементу приписан знак $\varepsilon = \pm 1$. При этом под a_i^ε при $\varepsilon = 1$ понимается образующая a_i , а при $\varepsilon = -1$ понимается элемент, обратный к образующей a_i . Таким образом, слово можно записывать в виде $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_r}^{\varepsilon_r}$. Под порядком $\text{ord}_W a_i$ образующей a_i в слове W понимается сумма чисел ε_j по всем местам, на которых находится a_i , т.е. $\text{ord}_W a_i = \sum_{a_{i_j}=a_i} \varepsilon_j$. Слово $W(a_1, \dots, a_k) = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_r}^{\varepsilon_r}$ определяет отображение $f_W: G^k \rightarrow G$ по формуле $f_W(g_1, \dots, g_k) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_r}^{\varepsilon_r}$.

Теорема 10 гарантирует абелевость группы G при выполнении одного из условий: отображение $f_W(g_1, g_2) = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ шейпово эквивалентно тривиальному; отображение $f_W(g_1, g_2) = g_1 g_2 g_1^{-1}$ шейпово эквивалентно проекции на второй сомножитель, т.е. отображению $f(g_1, g_2) = g_2$. Однако, как показывает следующая теорема, в каждом из этих простейших случаев уже шейповая эквивалентность гомоморфизму влечет абелевость группы G .

ТЕОРЕМА 11. Для компактной связной конечномерной группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G абелева;
- 2) для всякого слова $W(a_1, \dots, a_k)$ отображение $f_W: G^k \rightarrow G$ является гомоморфизмом;
- 3) существует такое слово $W(a_1, \dots, a_k)$, в котором для некоторого набора переменных $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_q}\}$ сумма порядков отлична от 0 и 1 (т.е. $\text{ord}_W a_{i_1} + \dots + \text{ord}_W a_{i_q} \neq 0, 1$), что отображение $f_W(g_1, \dots, g_k)$ шейпово эквивалентно гомоморфизму ϕ ;
- 4) для любых двух таких слов $V(a_1, \dots, a_k)$ и $W(a_1, \dots, a_k)$, что для каждого $j = 1, \dots, k$ выполнено $\text{ord}_V a_j = \text{ord}_W a_j$, отображения f_V и $f_W: G^k \rightarrow G$ шейпово эквивалентны;
- 5) отображение $f_W: G \times G \rightarrow G$ при $W(a_1, a_2) = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ шейпово эквивалентно гомоморфизму;
- 6) отображение $f_W: G \times G \rightarrow G$ при $W(a_1, a_2) = a_1 a_2 a_1^{-1}$ шейпово эквивалентно гомоморфизму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3), 1) \Rightarrow 4), 5), 6)$ очевидны.

$3) \Rightarrow 1)$. Согласно предположению выполнено хотя бы одно из условий: имеется такое j , что $\text{ord}_W a_j \neq 0, 1$; найдутся такие a_j и a_l , что $\text{ord}_W a_j = \text{ord}_W a_l = 1$. В первом случае композиция вложения G на j -й сомножитель $G_{(j)} \hookrightarrow G^k$ и шейповой эквивалентности f_W и гомоморфизма ϕ задает шейповую эквивалентность отображения ϕ_m^G , где $m = \text{ord}_W a_j \neq 0, 1$, и гомоморфизма, откуда абелевость G вытекает согласно следствиям 3, 5. Во втором случае

рассмотрим композицию вложения диагонали $\{(g, g)\} \subset G_{(j)} \times G_{(l)} \hookrightarrow G^k$ и шейповой эквивалентности f_W с гомоморфизмом ϕ и получим, что ϕ_2^G гомотопно гомоморфизму. Согласно следствию 3 группа G абелева.

4) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим слова $V(a_1, a_2) = a_1 a_2$ и $W(a_1, a_2) = a_2 a_1$. Тогда $f_V \sim f_W$ по предположению. Согласно теореме 10 группа G абелева.

5) $\Rightarrow$ 1). Пусть $f_W(g_1, g_2) \sim h(g_1, g_2)$, где $h: G \times G \rightarrow G$ – гомоморфизм. Тогда

$$e = f_W(g_1, e) \sim h(g_1, e), \quad e = f_W(e, g_2) \sim h(e, g_2),$$

откуда $e = e \cdot e = f_W(g_1, e) \cdot f_W(e, g_2) \sim h(g_1, e) \cdot h(e, g_2) = h(g_1, g_2) \sim f_W(g_1, g_2)$. Доказательство завершается применением импликации 4) $\Rightarrow$ 1) теоремы 10.

6) $\Rightarrow$ 5). Аналогично предыдущему из шейповой эквивалентности гомоморфизму $f_W \sim h$ получаем, что

$$e = f_W(g_1, e) \sim h(g_1, e), \quad g_2 = f_W(e, g_2) \sim h(e, g_2),$$

откуда

$$g_2 \sim h(g_1, g_2) \sim f_W(g_1, g_2),$$

значит, отображение $G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ шейпово эквивалентно тривиальному.

§ 5. Отображения $S^1 \rightarrow G$

Пусть G – компактная связная конечномерная группа. Представим ее в виде обратного предела $G \cong \varprojlim \{G_i, p_i^j\}$ обратной последовательности групп Ли, в которой связующие отображения p_i^j являются сюръективными гомоморфизмами и имеют нульмерные ядра и, в частности, являются накрытиями. Проекцию группы G в группу G_i обозначаем через p_i . Пусть $g \in G$ и $g_i = p_i(g) \in G_i$ – образ элемента g в группе G_i . Пусть $T(g_i)$ – некоторый максимальный тор группы G_i , содержащий элемент g_i . Его прообраз при отображении p_i^{i+1} является максимальным тором $T(g_{i+1})$ в группе G_{i+1} , содержащим элемент g_{i+1} (см., например, [21; § 2, п. 3, предложение 1a]). Обратный предел $T(g) = T_G(g)$ последовательности торов $\{T(g_i), p_i^j|_{T(g_j)}\}$ является связной абелевой подгруппой группы G , содержащей элемент g . Будем группу, полученную таким образом, называть *максимальной тороподобной подгруппой*. Полученные подгруппы – это в точности максимальные компактные связные абелевы подгруппы группы G , поэтому хотя формально построение подгрупп $T(g)$ зависит от спектра, представляющего группу G , но на самом деле совокупность подгрупп $T(g)$ определяется группой G однозначно. Максимальные тороподобные подгруппы имеют одну и ту же размерность. Отметим, что если G – группа Ли, то максимальные тороподобные подгруппы являются ее максимальными торами.

Каждый элемент g группы G содержится в некоторой максимальной тороподобной подгруппе $T(g)$. Эти подгруппы попарно сопряжены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для компактной связной конечномерной группы G и ее максимальной тороподобной подгруппы T справедливы следующие утверждения:

- 1) любое отображение $f: (S^1, 1) \rightarrow (G, e)$ гомотопно некоторому гомоморфизму $f_a: S^1 \rightarrow T$ (в частности, отображение J из §2 сюръективно);
- 2) любое отображение $f: S^1 \rightarrow G$ гомотопно некоторому отображению $f_a: S^1 \rightarrow T$;
- 3) любой шейповый морфизм $\underline{f}: S^1 \rightarrow G$ шейпово эквивалентен некоторому гомоморфизму $f_a: S^1 \rightarrow T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим группу G в виде предела $G \cong \varprojlim \{G_i, p_i^j\}$, как говорилось выше. Пусть $T_i = p_i(T) \subset G_i$ – проекция подгруппы $T \subset G$. Из предыдущего ясно, что T_i является максимальным тором группы G_i .

1) Для отображения $p_1 \circ f: (S^1, 1) \rightarrow (G_1, e)$ существуют такие отображение $f_1: (S^1, 1) \rightarrow (T_1, e)$ и гомотопия $H_1: (S^1, 1) \times [0, 1] \rightarrow (G_1, e)$, что $H_1(s, 0) = p_1 \circ f(s)$ и $H_1(s, 1) = f_1(s)$ (см., например, [21; §4, п. 6, предложение 11]). Так как отображение p_1^2 является накрытием, то по свойству поднятия гомотопии существует такая гомотопия $H_2: (S^1, 1) \times [0, 1] \rightarrow (G_2, e)$, что $H_2(s, 0) = p_2 \circ f$ и $p_1^2 \circ H_2 = H_1$. Из второго равенства вытекает, что $H_2(s, 1) \in T_2 = (p_1^2)^{-1}(T_1)$. Таким образом, по индукции строятся гомотопии $H_i: (S^1, 1) \times [0, 1] \rightarrow (G_i, e)$, задающие гомотопию отображения f с некоторым отображением $f_\infty: (S^1, 1) \rightarrow (T, e)$. Нужное утверждение теперь вытекает из абелевости группы T и теоремы Шеффера.

2) Из [21; §4, п. 6, предложение 11] несложно выводится, что для отображения $p_1 \circ f: S^1 \rightarrow G_1$ существуют такие отображение $f_1: S^1 \rightarrow T_1$ и гомотопия $H_1: S^1 \times [0, 1] \rightarrow G_1$, что $H_1(s, 0) = p_1 \circ f(s)$ и $H_1(s, 1) = f_1(s)$. Так как отображение p_1^2 является накрытием, то по свойству поднятия гомотопии существует такая гомотопия $H_2: S^1 \times [0, 1] \rightarrow G_2$, что $H_2(s, 0) = p_2 \circ f(s)$ и $p_1^2 \circ H_2 = H_1$. Из второго равенства вытекает, что $H_2(s, 1) \in T_2$. Таким образом, по индукции строятся гомотопии $H_i: S^1 \times [0, 1] \rightarrow G_i$, задающие гомотопию отображения f с некоторым отображением $f_a: S^1 \rightarrow T$.

3) Пусть дана такая последовательность отображений $f_i: S^1 \rightarrow G_i$, что отображения f_i и $p_i^{i+1} \circ f_{i+1}$ гомотопны. Согласно [21; §4, п. 6, предложение 11] для отображения $f_1: S^1 \rightarrow G_1$ существует гомотопное ему отображение $q_1: S^1 \rightarrow T_1$. Следовательно, и отображения $q_1: S^1 \rightarrow T_1$ и $p_1^2 \circ f_2$ также гомотопны. По свойству поднятия гомотопии существует такое гомотопное f_2 отображение $q_2: S^1 \rightarrow T_2$, что $q_1 = p_1^2 \circ q_2$. Таким образом, по индукции строятся отображения $q_i: S^1 \rightarrow G_i$, задающие некоторое отображение $q: S^1 \rightarrow T$. При этом $\text{Sh}(f) = \text{Sh}(q)$. Так как группа T абелева, то по теореме Кислинга [22; теорема 2.5] отображение $q: S^1 \rightarrow T$ шейпово эквивалентно некоторому гомоморфизму $f_a: S^1 \rightarrow T$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для компактной связной группы G с $\dim G \leq 3$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) любое отображение $f: T^3 \rightarrow G$ гомотопно гомоморфизму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) справедлива согласно теореме Шеффера.

2) $\Rightarrow$ 1). Из предложения 2 вытекает, что компактная связная группа размерности не выше двух абелева. Пусть теперь $\dim G = 3$. Допустим, что группа G неабелева, т.е. G изоморфна S^3 либо $SO(3)$. Стянув в точку в торе T^3 дополнение к некоторому открытому шару, получим отображение степени 1 тора T^3 на сферу S^3 . Взяв композицию с факторизацией $S^3 \rightarrow SO(3)$, получим отображение $T^3 \rightarrow SO(3)$ степени 2. Каждое из этих отображений не гомотопно гомоморфизму, поскольку такой гомоморфизм имел бы ненулевую степень, следовательно, был бы сюръективен, что невозможно.

§ 6. Отображения $H \rightarrow G$, где H – полупростая группа Ли

Мы дадим критерий абелевости группы G в терминах гомотопических свойств отображений в нее односвязных групп Ли и ее высших гомотопических групп (теорема 13).

Пусть G – компактная абелева группа, P – пространство. Рассмотрим группу $C_*(P, G) = C((P, *), (G, e))$ (операции выполняются поточечно). Построим гомоморфизм

$$C_*(P, G) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, C_*(P, S^1)),$$

где $\widehat{G} = \text{Hom}(G, S^1)$ – группа характеров G . Именно образом непрерывного отображения $f: (P, *) \rightarrow (G, e)$ является отображение $f^\#: \widehat{G} \rightarrow C_*(P, S^1)$, $\phi \mapsto \phi \circ f$. При этом

$$\phi + \psi \mapsto (\phi + \psi) \circ f = \phi \circ f + \psi \circ f,$$

т.е. $f^\#$ – гомоморфизм. Построенное отображение $f \mapsto f^\#$ является гомоморфизмом, так как для каждого $\phi \in \widehat{G}$ имеем

$$(f + g)^\#(\phi) = \phi \circ (f + g) = \phi \circ f + \phi \circ g = f^\#(\phi) + g^\#(\phi),$$

т.е. $(f + g)^\# = f^\# + g^\#$.

В $C_*(P, G)$ рассмотрим образ $C_*(KP, G)$ (здесь KP – приведенный конус над P), факторгруппу обозначим через $[P, G]_*$ (обозначение выбрано не случайно: эта группа изоморфна группе $[(P, *), (G, e)]$ гомотопических классов отображений $(P, *) \rightarrow (G, e)$).

Тогда имеется сквозной гомоморфизм

$$C_*(P, G) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, C_*(P, S^1)) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*).$$

Пусть $F: (KP, *) \rightarrow (G, e)$; рассмотрим $f = F|_P: P \rightarrow G$. При построенном выше отображении $f \mapsto f^\#$ имеем $f^\#(\phi) = \phi \circ f = \phi \circ F|_P$, поэтому

$$f^\#(\phi) \in \text{Ker}(C_*(P, S^1) \rightarrow [P, S^1]_*).$$

Следовательно, гомоморфизм $C_*(P, G) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*)$ факторизуется через $[P, G]_*$. Итак, корректно определен гомоморфизм

$$[P, G]_* \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*).$$

ТЕОРЕМА 12. Для бикompактной связной абелевой группы G и связного бикompакта P построенный выше гомоморфизм $[P, G]_* \rightarrow \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*)$ является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность пространств с отмеченными точками и их отображений $(P, *) \rightarrow (KP, *) \rightarrow (SP, *)$, где KP – приведенный конус над P и SP – приведенная надстройка над P . Здесь первое отображение – композиция вложения P на основание $P \times \{0\}$ цилиндра $P \times [0, 1]$ и факторизации по $P \times \{1\} \cup \{*\} \times [0, 1]$, второе отображение – стягивание “основания” KP в точку, т.е. факторизация по $P \times \{0\}$. Из определения группы $[P, G]_*$ вытекает, что следующая последовательность групп точна:

$$0 \leftarrow [P, G]_* \leftarrow C_*(P, G) \leftarrow C_*(KP, G) \leftarrow C_*(SP, G) \leftarrow 0. \quad (1)$$

Но для всякого вполне регулярного пространства X существует такое вложение $i: X \rightarrow \text{Ac}(X)$ в некоторую абелеву бикompактную группу $\text{Ac}(X)$, что всякое отображение $f: X \rightarrow G$ в абелеву бикompактную группу G продолжается, причем единственным образом, до гомоморфизма $\text{Ac}(f): \text{Ac}(X) \rightarrow G$ [27; теорема CST22]. Следовательно, точную последовательность (1) можно переписать

$$0 \leftarrow [P, G]_* \leftarrow \text{Hom}(\text{Ac}(P), G) \leftarrow \text{Hom}(\text{Ac}(KP), G) \leftarrow \text{Hom}(\text{Ac}(SP), G) \leftarrow 0. \quad (2)$$

Согласно двойственности Понтрягина точную последовательность (2) можно переписать в виде

$$0 \leftarrow [P, G]_* \leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(P)}) \leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(KP)}) \leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(SP)}) \leftarrow 0. \quad (3)$$

Запишем теперь точную последовательность (1) для группы $G = S^1$:

$$0 \leftarrow [P, S^1]_* \leftarrow C_*(P, S^1) \leftarrow C_*(KP, S^1) \leftarrow C_*(SP, S^1) \leftarrow 0. \quad (1^{S^1})$$

Группа $C_*(KP, S^1)$ делима (лемма 1), поэтому делима и ее факторгруппа

$$C_*(KP, S^1)/C_*(SP, S^1)$$

и, значит, последовательность (1^{S^1}) в члене $C_*(P, S^1)$ расщепляется [28], [29; теорема 21.2]. Это означает, что и последовательность (2) при $G = S^1$ расщепляется в члене $\text{Hom}(\text{Ac}(P), S^1) = \widehat{\text{Ac}(P)}$, т.е. последовательность

$$0 \leftarrow [P, S^1]_* \leftarrow \widehat{\text{Ac}(P)} \leftarrow \widehat{\text{Ac}(KP)} \leftarrow \widehat{\text{Ac}(SP)} \leftarrow 0$$

точна и расщепляется в члене $\widehat{\text{Ac}(P)}$. Тогда и последовательность

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*) &\leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(P)}) \\ &\leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(KP)}) \leftarrow \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(SP)}) \leftarrow 0 \end{aligned}$$

точна в члене $\text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(P)})$. Это означает, что имеет место цепочка изоморфизмов

$$\begin{aligned} [P, G]_* &= C_*(P, G)/\text{Im}(C_*(KP, G)) \\ &\cong \text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(P)})/\text{Im}(\text{Hom}(\widehat{G}, \widehat{\text{Ac}(KP)})) \cong \text{Hom}(\widehat{G}, [P, S^1]_*). \end{aligned}$$

Докажем теперь лемму, которой мы пользовались при доказательстве.

ЛЕММА 1. *Для всякого пространства P группа $C_*(KP, S^1)$ делима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство KP стягиваемо, то любое отображение $f: KP \rightarrow S^1$ поднимается до отображения универсальных накрытий $\tilde{f}: KP \rightarrow \mathbb{R}$. Так как группа $\mathbb{R}$ делима, то делимо и отображение $\tilde{f}$, а значит, и f .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним здесь следующие хорошо известные факты. Согласно теореме Брушлинского (см. [30; теорема 8.1]) для бикомпакта P группы $H^1(P, \mathbb{Z})$ и $[P, S^1]_*$ изоморфны. Согласно теореме Стинрода [31] для бикомпактной связной абелевой топологической группы A группы $H^1(A, \mathbb{Z})$ и $\hat{A}$ естественно изоморфны. Укажем, что изоморфизм групп $[A, S^1]_*$ и $\hat{A}$ есть частный случай теоремы Шеффера (для отображений в окружность) и для бикомпактной связной абелевой топологической группы со второй аксиомой счетности был получен в работе [32].

СЛЕДСТВИЕ 7. *Для бикомпактной связной абелевой группы G и связного бикомпакта P гомоморфизм $[P, G]_* \rightarrow \text{Hom}(H^1(G), H^1(P))$, переводящий гомотопический класс $[f]$ отображения $f: (P, *) \rightarrow (G, e)$ в индуцированный гомоморфизм $f^*: H^1(G) \rightarrow H^1(P)$, является изоморфизмом.*

Для всякого связного бикомпакта P группа одномерных чеховских когомологий $H^1(P, \mathbb{Z})$ не содержит кручения (см. [33; теорема 56.III.1], [34; п. 2.4]). Если же P – односвязный локально связный бикомпакт, то $[P, S^1]_* = 0$. Это вместе с теоремой 12 дает

СЛЕДСТВИЕ 8. *Для бикомпактной связной абелевой группы G и односвязного континуума Пеано P группа $[P, G]_*$ является нулевой.*

СЛЕДСТВИЕ 9 (см. [35], [1; следствие 3]). *Для бикомпактной связной абелевой группы G при любом $n \geq 2$ имеем $\pi_n(G) = 0$.*

Отметим, что для любой группы Ли G имеем $\pi_2(G) = 0$ (см. [36], [37; теорема VI.4.17 (1)]). Отсюда и из предложения 4 вытекает, что и для произвольной конечномерной компактной связной группы G имеем $\pi_2(G) = 0$. В работе [38; замечание (2)] предложена формула для вычисления гомотопических групп предела обратной последовательности, связующие отображения которой обладают свойством поднятия гомотопии (в частности, являются накрытиями). В общем случае гомотопические группы обратного предела могут быть очень сложными даже в случае спектра из гомотопически тривиальных пространств.

ТЕОРЕМА 13. *Для компактной связной конечномерной группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G абелева;
- 2) $\pi_n(G) = 0$ при любом $n \geq 2$;
- 3) $\pi_3(G) = 0$;
- 4) любое отображение каждого односвязного континуума Пеано $(P, *) \rightarrow (G, e)$ гомотопно постоянному;
- 5) любой гомоморфизм каждой компактной односвязной группы Ли в G тривиален;

- 6) любой гомоморфизм каждой компактной односвязной группы Ли H , размерность которой не превышает размерности G , в группу G шейпово эквивалентен тривиальному.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ – это следствие 9, импликация $2) \Rightarrow 3)$ очевидна, $1) \Rightarrow 4)$ – это следствие 8, $1) \Rightarrow 5)$ вытекает из теоремы Шеффера, импликации $4) \Rightarrow 6)$ и $5) \Rightarrow 6)$ очевидны.

$3) \Rightarrow 1)$. Согласно предложению 4 имеем $G \cong (H \times T)/(K, \varphi)$ и $\pi_n(G) \cong \pi_n(H)$ для каждого $n \geq 2$. Если группа H нетривиальна, то $\pi_3(G) \neq 0$ [39], [37; теорема VI.4.17(2)]. Полученное противоречие показывает, что H тривиальна и, значит, G абелева.

$6) \Rightarrow 1)$. Пусть $G \cong (H \times T)/(K, \varphi)$. Если группа H нетривиальна, то гомоморфизм $\eta \circ i_\times: H \rightarrow H \times T \rightarrow (H \times T)/(K, \varphi)$ шейпово неэквивалентен тривиальному. Действительно, композиция $p_\times \circ \eta \circ i_\times$ (см. предложение 4) дает отображение $H \rightarrow H/K$, $h \mapsto hK$, степени $|K| \neq 0$. Следовательно, композиция гомоморфизма $\eta \circ i_\times$ и изоморфизма $(H \times T)/(K, \varphi) \cong G$ является гомоморфизмом $H \rightarrow G$, шейпово неэквивалентным тривиальному.

ВОПРОС 2. Верны ли результаты §§ 2–6 для бесконечномерной группы G ?

Далее, G_R – множество регулярных элементов группы Ли G . Если группа G абелева, то G – тор и $G = G_R$ [20], [21], [40]. В общем случае множество $G \setminus G_R$ сингулярных элементов группы G является образом некоторого компактного многообразия размерности не более чем $\dim G - 3$ при гладком отображении [20; следствие 4.42].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть G – компактная связная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G абелева;
- 2) $\dim G \setminus G_R \leq \dim G - 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что $2) \Rightarrow 1)$. Выберем базисную точку $g_R \in G_R$. Так как $\dim G \setminus G_R \leq \dim G - 4$, то любое отображение $(S^3, *) \rightarrow (G, g_R)$ гомотопно такому отображению h , что $h(S^3) \subset G_R$. Согласно [21; упражнение 5.2a] h гомотопно (в G) тривиальному отображению. Следовательно, $\pi_3(G) = 0$, откуда вытекает абелевость G .

§ 7. Отображения $G \rightarrow T$, где T – абелева группа

Для непрерывного отображения $f: T^n \rightarrow T^n$ тора в себя для всякой точки $h \in T^n$ справедливо неравенство $|\deg f| \leq |f^{-1}(h)|$ (см. [41]). Для гомоморфизма Φ тора T^n на себя для всякой точки $h \in T^n$ справедливы равенства $|\deg \Phi| = |\text{Ker } \Phi| = |\Phi^{-1}(h)|$. Согласно теореме Хопфа [4] для компактной связной группы Ли G равенство $|\deg \Phi_m| = |A_m^h|$ справедливо для регулярных элементов $h \in G$. В работе [42] определено число совпадения $\Lambda(f, g)$ пары отображений $f, g: X \rightarrow Y$ в случае, когда пространства X и Y являются многообразиями, а многообразноподобными. Число совпадения $\Lambda(f, g)$ зависит от спектров, представляющих пространства X и Y , и при взятии других спектров умножается на ненулевое рациональное число, определяемое этими

спектрами. Поэтому корректно говорить о нулевом и ненулевом числе совпадения пары отображений. При $X = Y$ взятие для пространств X и Y одного спектра, представляющего это пространство, позволяет корректно определить число совпадения всякой пары отображений $f, g: X \rightarrow X$, которое уже не зависит от выбора этого спектра. Это позволяет ввести степень $\deg f$ отображения компактных связных n -мерных групп. При этом корректно говорить о нулевой и ненулевой степени отображения. Как и для отображений многообразий, эта степень является гомотопическим инвариантом и ее отличие от нуля гарантирует сюръективность данного отображения. Теорема Хопфа в этом более общем случае звучит следующим образом:

ТЕОРЕМА 14. *Для компактной связной конечномерной группы G отображение $\phi_m^G: G \rightarrow G$ имеет степень m^λ , где λ – размерность максимальной тороподобной подгруппы группы G .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если для компактной связной группы G существует гомоморфизм $\phi: G \rightarrow T$, где T – абелева группа и $\dim \text{Ker } \phi \leq 2$, то G абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G неабелева, то в коммутанте $D(G)$ содержится подгруппа S^3 или $\text{SO}(3)$ и, значит, $\dim D(G) \geq 3$. Включение $D(G) \subset \text{Ker } \phi$ вместе с неравенством $\dim \text{Ker } \phi \leq 2$ приводит к противоречию.

ТЕОРЕМА 15. *Для компактной связной n -мерной группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа G абелева;
- 2) существует сюръективный гомоморфизм $G \rightarrow T^n$ на n -мерный тор;
- 3) существует гомоморфизм $\phi: G \rightarrow T$ на абелеву группу T размерности $\geq n - 2$;
- 4) существует такое отображение $f: G \rightarrow T$ на некоторую n -мерную абелеву группу T , что $\deg f \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из теоремы о спектральном представлении компактной связной абелевой группы.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). Справедливо равенство $\dim \text{Ker } \phi + \dim \phi(G) = \dim G$. Следовательно, в нашем случае $\dim \text{Ker } \phi \leq 2$ и применимо предложение 8.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 4) вытекает из того, что тождественное отображение группы на себя имеет степень 1.

4) $\Rightarrow$ 3). Заменим f на $f': G \rightarrow T$, $g \mapsto (f(e))^{-1} \cdot f(g)$. Тогда $f'(e) = e$ и по теореме Шеффера f' гомотопна некоторому гомоморфизму h . Так как $\deg h = \deg f' = \deg f \neq 0$, то гомоморфизм h сюръективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Как показывает пример группы $G = S^3 \times T^{n-3}$, в предложении 8 число 2 нельзя увеличить, а в теореме 15 нельзя уменьшить число $n - 2$.

После сдачи работы в редакцию авторам стала доступна книга [43], в которой доказана теорема 12 (см. [43; предложение 8.56]).

Авторы благодарят У. Абреша, Э. Б. Винберга, А. Л. Онищика за полезные беседы.

Список литературы

- [1] W. Scheffer, "Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33**:2 (1972), 562–567.
- [2] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1984.
- [3] J. Keesling, "The group of homeomorphisms of a solenoid", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **172** (1972), 119–131.
- [4] H. Hopf, "Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen", *Comment. Math. Helv.*, **13**:2 (1940/41), 119–143.
- [5] R. F. Brown, "On the power map in compact groups", *Quart. J. Math. Oxford* (II), **22** (1971), 395–400.
- [6] K. Borsuk, "On some hereditary shape properties", *Ann. Polon. Math.*, **29** (1974), 83–86.
- [7] С. А. Богатый, В. А. Калинин, "О подвижности относительно различных классов пространств", *Матем. заметки*, **21**:1 (1977), 125–132.
- [8] Г. С. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1982.
- [9] P. F. Baum, "Local isomorphism of compact connected Lie groups", *Pacific J. Math.*, **22**:2 (1967), 197–204.
- [10] Г. С. Скордев, "Шейп компактных групп", *Сердика*, **8** (1982), 123–142.
- [11] R. H. Fox, "On shape", *Fund. Math.*, **74** (1972), 47–71.
- [12] R. H. Fox, "Shape theory and covering spaces", *Lecture Notes in Math.*, **375** (1974), 71–90.
- [13] T. T. Moore, "On Fox's theory of overlays", *Fund. Math.*, **99** (1978), 205–211.
- [14] J. Keesling, "Shape theory and compact connected Abelian topological groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **194** (1974), 349–358.
- [15] C. Eberhart, G. R. Gordh, jun., J. Mack, "The shape classification of torus-like and (n -sphere)-like continua", *Gen. Topol. Appl.*, **4** (1974), 85–94.
- [16] R. F. Brown, "Primitive roots of unity in H -manifolds", *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 612–618.
- [17] R. F. Brown, "Divisible H -spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 185–189.
- [18] П. Скотт, *Геометрии на трехмерных многообразиях*, Мир, М., 1986.
- [19] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [20] Дж. Адамс, *Лекции по группам Ли*, Наука, Физматлит, М., 1979.
- [21] Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Глава IX. Компактные вещественные группы Ли*, Мир, М., 1986.
- [22] J. Keesling, "Continuous functions induced by shape morphisms", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**:1 (1973), 315–320.
- [23] S. Araki, I. M. James, E. Thomas, "Homotopy-abelian Lie groups", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **66**:4 (1960), 324–326.
- [24] M. Arkowitz, C. R. Curjel, "On the number of multiplications of an H -space", *Topology*, **2** (1963), 205–208.
- [25] C. M. Naylor, "Multiplications on $SO(3)$ ", *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 27–31.
- [26] I. J. James, "Multiplication on spheres (II)", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 545–558.
- [27] Н. Бурбаки, *Начала математики. Часть 1. Основные структуры анализа. Книга первая. Теория множеств*, Мир, М., 1965.
- [28] R. Baer, "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800–806.
- [29] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974–1977.

- [30] C. H. Dowker, “Mapping theorems for non-compact spaces”, *Amer. J. Math.*, **69**:2 (1947), 200–242.
- [31] N. E. Steenrod, “Universal homology groups”, *Amer. J. Math.*, **58**:4 (1936), 661–701.
- [32] R. L. Plunkett, “A theorem about mappings of a topological group into the circle”, *Michigan Math. J.*, **2** (1953/54), 123–125.
- [33] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, М., 1969.
- [34] J. Krasinkiewicz, “Mappings onto circle-like continua”, *Fund. Math.*, **91** (1976), 39–49.
- [35] E. Enochs, “Hopotopy groups of compact abelian groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 878–881.
- [36] É. Cartan, “La topologie des groupes de Lie”, *Enseign. Math.*, **35** (1936), 177–200.
- [37] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie groups*. I, II, Transl. Math. Monogr., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.
- [38] J. M. Cohen, “The homotopy groups of inverse limits”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **27**:1 (1973), 159–177.
- [39] R. Bott, “On torsion in Lie groups”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **40**:7 (1954), 586–588.
- [40] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, М., 1995.
- [41] H. Hopf, “Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II: Klasseninvarianten von Abbildungen”, *Math. Ann.*, **102** (1929), 562–623.
- [42] С. А. Богатый, Г. С. Скордев, “Теорема совпадения для M -подобных континуумов”, *УМН*, **57**:2 (2002), 189–190.
- [43] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The structure of compact groups. A primer for the student – a handbook for the expert*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.

С. А. Богатый (S. A. Bogatyı)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bogatyı@mech.math.msu.su

О. Д. Фролкина (O. D. Frolkina)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: frolkina@mech.math.msu.su