Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. О. Горчинский, Бирасширение Пуанкаре и иделы на алгебраической кривой, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:30:39

УДК 512.7

С. О. Горчинский

Бирасширение Пуанкаре и идеи на алгебраической кривой

Спаривание Вейля двух элементов из кручения якобиана алгебраической кривой может быть выражено через произведение локальных символов Гильберта двух специальных идеев, соответствующих выбранным элементам из кручения якобиана. С другой стороны, Арбарелло, де Кончини и Кац построили некоторое центральное расширение группы идеев на алгебраической кривой, коммутатор в котором также равен с точностью до знака произведению всех локальных символов Гильберта двух идеев.

Цель статьи заключается в объяснении схожести этих двух формул. Оказывается, что бирасширение Пуанкаре над квадратом якобиана, задающее спаривание Вейля, и центральное расширение, построенное Арбарелло, де Кончини и Кацом, тесно связаны. Последнее является фактором некоторого бирасширения, ассоциированного с центральным расширением.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение: две похожие формулы

Существует общая идеология, согласно которой очень многие *геометрические* понятия и конструкции могут быть выражены в терминах различных *адельных* групп, связанных с произвольной схемой над полем и различными дополнительными данными, например, когерентным пучком на ней (см. [1]). Настоящая работа дает еще один пример такого подхода, показывая связь между бирасширением Пуанкаре над квадратом якобиана алгебраической кривой и некоторым центральным расширением ее группы идеев.

Пусть C – гладкая проективная кривая над произвольным совершенным полем k , $\text{char } k \neq m$. Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \text{Pic}(C)_m$ – два элемента из m -кручения якобиана кривой. Пусть α и β – два таких идеива на C , соответствующих $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, что α^m и β^m являются главными идеивами, т.е. принадлежат $k(C)^* = K^*$ (о возможности выбора таких идеивов см. п. 2.2). Для спаривания Вейля $(\mathcal{L}, \mathcal{M})_m$ пучков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ верна следующая адельная формула:

$$(\mathcal{L}, \mathcal{M})_m = \left(\prod_{x \in C} \text{Nm}_{k(x)/k} [(-1)^{\text{ord}_x(\alpha_x) \text{ord}_x(\beta_x)} \overline{\alpha_x^{\text{ord}_x(\beta_x)} \beta_x^{-\text{ord}_x(\alpha_x)}}] \right)^m.$$

Для кривой произвольного рода впервые эта формула была доказана в [2], более элементарное доказательство приводится М. Мазо в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00455).

В статье [4] Арбарелло, Кац и де Кончини рассмотрели некоторое центральное расширение группы идеалей $\mathbb{A}_C^*$ кривой C :

$$0 \rightarrow k^* \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}_C^* \rightarrow \mathbb{A}_C^* \rightarrow 0,$$

и доказали, что коммутатор в этом расширении задается по формуле

$$(\alpha, \beta) = (-1)^{\deg(\alpha) \deg(\beta)} \prod_{x \in C} \text{Nm}_{k(x)/k} \left[(-1)^{\text{ord}_x(\alpha_x) \text{ord}_x(\beta_x)} \overline{\alpha_x^{\text{ord}_x(\beta_x)} \beta_x^{-\text{ord}_x(\alpha_x)}} \right],$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_C^*$ (см. п. 2.2). Целью этой статьи является объяснение внутренней причины внешней схожести этих двух формул. Оказывается, что между центральным расширением, построенным в [4], и бирасширением Пуанкаре над $\text{Jas}(C) \times \text{Jas}(C)$, задающим спаривание Вейля, существует непосредственная связь. Бирасширение Пуанкаре является фактором тривиального бирасширения над квадратом группы идеалей нулевой степени $(\mathbb{A}_C^*)^0 \times (\mathbb{A}_C^*)^0$, ассоциированного с $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ (см. § 3).

В § 2 приводится некоторая абстрактная конструкция спаривания, связанная с центральными расширениями и соответствующая формуле из работы [4]. Потом в § 3 приводится другая абстрактная конструкция, связанная с бирасширениями и соответствующая спариванию Вейля точек кручения на якобиане кривой. В заключительном § 4 устанавливается некоторая связь между двумя абстрактными конструкциями, из которой следует адельная формула для спаривания Вейля.

Автор глубоко благодарен А. Н. Паршину за помощь и внимание к работе, а также Д. Осипову и М. Мазо за ряд ценных советов и замечаний.

§ 2. Центральные расширения и спаривание на точках кручения якобиана кривой

2.1. Первая абстрактная конструкция: спаривание, связанное с центральным расширением абелевых групп. Во всех рассматриваемых ниже группах групповой закон будет записываться мультипликативно.

Рассмотрим центральное расширение абелевой группы A группой N (которая, по необходимости, тоже абелева):

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 1.$$

Пусть 1 обозначает единичный элемент в группе N , а e – единичный элемент в группе A . Для каждого элемента $a \in A$ будем обозначать через G_a “слой” $\pi^{-1}(a)$. Тогда для любых двух элементов $g_a \in G_a$ и $g_b \in G_b$ их коммутатор $[g_a, g_b] = g_a g_b g_a^{-1} g_b^{-1} \in N$ будет зависеть лишь от a и b , поскольку N – центральная подгруппа в G . Обозначим $[g_a, g_b]$ через (a, b) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть расширение соответствует коциклу $\alpha \in H^2(A, N)$; поднимем его (произвольным образом) до отображения $\bar{\alpha}: A \times A \rightarrow N$. Тогда выполняется соотношение

$$(a, b) = \frac{\bar{\alpha}(a, b)}{\bar{\alpha}(b, a)}. \quad (*)$$

Очевидно, что скобка $(\cdot, \cdot)$ *кососимметрична*. Покажем теперь, что $(\cdot, \cdot)$ *билинейна*. Для любой группы выполняется следующее равенство:

$$[fg, h] = [f, h][g, h] \operatorname{Ad}(g^{-1}h)(f^{-1}) \operatorname{Ad}(hg^{-1})(f),$$

где $\operatorname{Ad}(g)(\cdot)$ обозначает внутренний автоморфизм сопряжения элементом g . В нашем случае коммутатор любых двух элементов централен, поэтому $\operatorname{Ad}(g^{-1}h) = \operatorname{Ad}(hg^{-1})$ и

$$[fg, h] = [f, h][g, h],$$

а значит,

$$(ab, c) = (a, c)(b, c)$$

для любых $a, b, c \in A$.

Пусть теперь B – подгруппа в A такая, что расширение

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi^{-1}(B) \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 1$$

расщепляется, т.е. существует изоморфизм $\varphi: \pi^{-1}(B) \cong N \times B$, при котором π переходит в проекцию на второй сомножитель. В частности, отсюда следует, что $(b_1, b_2) = 1$ для любых двух $b_1, b_2 \in B$.

Зафиксируем изоморфизм φ . Тогда B становится изоморфна подгруппе группы G , элементы которой обозначим через $(b, 1)$, $b \in B$. Заметим, что умножение справа на $(b, 1)$ *отождествляет слои* G_a и $G_{a'}$ для $a' = a \cdot b$. Это позволяет рассмотреть отображение

$$G/B \rightarrow A/B,$$

где G/B , помимо структуры множества с отмеченной точкой, обладает структурой главного однородного пространства для относительной группы $N \times A/B$ над A/B .

Во введенных выше обозначениях выполняется равенство

$$\operatorname{Ad}(g)((b, 1)) = [g, (b, 1)](b, 1) = (\pi(g), b)(b, 1) = (b, (\pi(g), b)).$$

Поэтому B нормальна в G , т.е. G/B – группа, тогда и только тогда, когда $(a, b) = 1$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. С другой стороны, если G/B – группа, то скобка $(\cdot, \cdot)$ должна пропускаться через факторгруппу A/B . Это возможно сделать лишь тогда, когда B лежит в ядре билинейного спаривания $(\cdot, \cdot)$.

Заставим теперь это условие выполняться “насильственным” образом. Выберем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и заменим расширение G на $G^{\otimes m}$, которое будет соответствовать коциклу $\alpha^m \in H^2(A, N)$. Из формулы (*) следует, что новая скобка будет m -й степенью старой, т.е. будет равна $(\cdot, \cdot)^m$. Более того, расширение $G^{\otimes m}$ может быть получено, если заменить слои G на их m -ю тензорную степень (в категории главных однородных пространств над N), а также возвести в m -ю степень морфизмы слоев, соответствующие умножению (именно этой конструкцией обосновано обозначение $G^{\otimes m}$).

Заменяем также саму группу A на подгруппу $\sqrt[m]{B}$, состоящую из тех элементов $a \in A$, для которых $a^m \in B$; ограничение нового расширения на нее будем обозначать через $G^{\otimes m}|_{\sqrt[m]{B}}$.

Тогда для нового расширения

$$1 \rightarrow N \rightarrow G^{\otimes m}|_{\sqrt[m]{B}} \rightarrow \sqrt[m]{B} \rightarrow 1$$

подгруппа B будет нормальна в $G^{\otimes m}|_{\sqrt[m]{B}}$:

$$(a, b)^m = (a, b^m) = 1 \quad \text{для любых} \quad a \in \sqrt[m]{B}, \quad b \in B.$$

Более того, возможно расширить B до подгруппы $B \cdot A_m$ “корнями m -й степени из 1” группы A . Действительно, у расширения $G^{\otimes m}$ над A_m имеется каноническая тривиализация: $G_a^{\otimes m} \cong G_{a^m} = G_e = N \ni 1$, которая задает гомоморфизм групп $A_m \rightarrow G^{\otimes m}$ вследствие коммутативности A_m .

Важно то, что тривиализации на $B \cap A_m$, приходящие с B и с A_m , совпадают:

$$\begin{aligned} G_e &\cong G_e^{\otimes m} \cong G_a^{\otimes m}, \\ 1 &\mapsto 1^{\otimes m} \mapsto (a, 1)^{\otimes m}, \end{aligned}$$

в то время как

$$\begin{aligned} G_a^{\otimes m} &\cong G_{a^m} = G_e, \\ (a, 1)^{\otimes m} &\mapsto (a^m, 1) = 1. \end{aligned}$$

Более того, элементы вида $(a, 1)$ и $(b, 1)$, где $a \in A_m$, $b \in B$, коммутируют между собой, так как $(a, b)^m = (a^m, b) = (1, b) = 1$. Это позволяет определить расщепление над подгруппой $B \cdot A_m$ в $\sqrt[m]{B}$.

Поэтому возникает центральное расширение

$$1 \rightarrow N \rightarrow (G^{\otimes m}|_{\sqrt[m]{B}})/(B \cdot A_m) \rightarrow \sqrt[m]{B}/(B \cdot A_m) \rightarrow 1.$$

Его коммутатор будет принимать значения в N_m – подгруппе m -кручения в N :

$$(a_1, a_2)^{m^2} = (a_1^m, a_2^m) = 1 \quad \text{для любых} \quad a_1, a_2 \in A.$$

Итак, для подгруппы B , над которой исходное расширение расщепляется, имеется кососимметричное билинейное спаривание

$$\psi_m: \sqrt[m]{B}/(B \cdot A_m) \times \sqrt[m]{B}/(B \cdot A_m) \rightarrow N_m,$$

которое возникает как коммутатор в факторрасширении над $\sqrt[m]{B}/B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Можно было бы и не говорить ничего о расширениях, а получить спаривание ψ_m , проводя рассуждения лишь для самой скобки $(\cdot, \cdot)$, используя при этом ее билинейность и тривиальность на B .

2.2. Пример с идеями. Рассмотрим гладкую проективную кривую C рода g над произвольным совершенным полем k (возможно, не алгебраически замкнутым). Пусть $K = k(C)$ – поле рациональных функций на C , $\mathbb{A}_C$ обозначает кольцо аделей кривой C , $\mathcal{O} = \prod_{x \in C} \widehat{\mathcal{O}}_x \subset \mathbb{A}_C$, $\mathbb{A}_C^*$ обозначает группу идеалей, $\mathcal{O}^* = \prod_{x \in C} \widehat{\mathcal{O}}_x^* \subset \mathbb{A}_C^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из группы $\mathbb{A}_C^*$ имеется канонический сюръективный гомоморфизм в группу $\text{Pic}(C)$. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа $K^* \cdot \mathcal{O}^*$.

Для любого идеала $\alpha \in \mathbb{A}_C^*$ подпространство $\alpha\mathcal{O} \subset \mathbb{A}_C$ соизмеримо с $\mathcal{O}$, т.е. существует такое k -векторное подпространство $L \subset \mathbb{A}_C$, что $L \subset \mathcal{O}$, $L \subset \alpha\mathcal{O}$, а факторы $\mathcal{O}/L$ и $\alpha\mathcal{O}/L$ конечномерны. Поэтому можно рассмотреть $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$ – канонически определенное одномерное векторное пространство над k , равное $\det_k(\alpha\mathcal{O}/L) \otimes \det_k(\mathcal{O}/L)$ (нетрудно показать, что оно не зависит от выбора L). Например, если $\alpha\mathcal{O} \supset \mathcal{O}$, то $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) = \det_k(\alpha\mathcal{O}/\mathcal{O})$.

Для каждого $L \subset \mathbb{A}_C$, соизмеримого с $\mathcal{O}$, построим *адельный комплекс*

$$\mathcal{A}(L): 0 \rightarrow K \oplus L \rightarrow \mathbb{A}_C \rightarrow 0,$$

где дифференциал d задается по формуле $d(f, (a_x)) = (f - a_x)$ для $f \in K$, $(a_x) \in L \subset \mathbb{A}_C$. Обозначим также через $\mathcal{H}(L) = \det_k H^0(\mathcal{A}(L)) \otimes \det_k^{-1} H^1(\mathcal{A}(L))$ определитель когомологий.

Существует канонический изоморфизм

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) \otimes (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) \cong \mathcal{H}(\alpha\mathcal{O}),$$

который возникает из рассмотрения морфизмов аделльных комплексов $\mathcal{A}(L) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O})$ и $\mathcal{A}(L) \rightarrow \mathcal{A}(\alpha\mathcal{O})$, где $L \subset \mathcal{O}$, $L \subset \alpha\mathcal{O}$ – описанный выше “соизмеритель”. Иными словами, $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) \cong \text{Hom}(\mathcal{H}(\mathcal{O}), \mathcal{H}(\alpha\mathcal{O}))$.

Можно построить расширение, для которого $A = \mathbb{A}_C^*$, $N = k^*$, а $G = \widetilde{\mathbb{A}}_C^*$ состоит из пар (α, r) , где $\alpha \in \mathbb{A}_C^*$, $r \in (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$, $r \neq 0$. Умножение в $\widetilde{\mathbb{A}}_C^*$ задается при помощи естественных изоморфизмов

$$(\mathcal{O} | \alpha_2\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha_1} (\alpha_1\mathcal{O} | \alpha_1\alpha_2\mathcal{O})$$

и

$$(\mathcal{O} | \alpha_1\mathcal{O}) \otimes (\alpha_1\mathcal{O} | \alpha_1\alpha_2\mathcal{O}) \cong (\mathcal{O} | \alpha_1\alpha_2\mathcal{O}).$$

Это расширение было построено в [4]. Там же был доказан следующий результат:

ТЕОРЕМА 2.1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_C^*$ коммутатор их поднятий в расширении $\widetilde{\mathbb{A}}_C^*$ равен с точностью до знака произведению символов норменного вычета:

$$(\alpha, \beta) = (-1)^{\deg(\alpha) \deg(\beta)} \prod_{x \in C} \text{Nm}_{k(x)/k} [(-1)^{\text{ord}_x(\alpha_x) \text{ord}_x(\beta_x)} \overline{\alpha_x^{\text{ord}_x(\beta_x)} \beta_x^{-\text{ord}_x(\alpha_x)}}],$$

где $\text{ord}_x(\gamma_x)$ обозначает порядок идеала $\gamma \in \mathbb{A}_C^*$ в точке $x \in C$, $\deg(\gamma) = \sum_{x \in C} \text{ord}_x(\gamma_x) [k(x) : k]$ – степень идеала γ , $\overline{\gamma_x}$ обозначает взятие значения идеала в точке $x \in C$, если $\text{ord}_x(\gamma_x) \geq 0$, а $\text{Nm}_{k(x)/k}$ является обычной нормой Галуа из поля определения $k(x)$ точки x в основное поле k .

Роль подгруппы B будет играть подгруппа главных идеалей $K^* \subset \mathbb{A}_C^*$. Над ними расширение канонически расщепляется, вследствие существования изоморфизма между комплексами $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ и $\mathcal{A}(f\mathcal{O})$, задаваемого почленным умножением на f (можно показать, что это задает тривиализацию $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ над K^* как расширения групп, более подробно см. в п. 3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Подгруппа K^* не лежит в ядре скобки $(\cdot, \cdot)$, поэтому расширение $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ не может быть пропущено через группу классов идеалей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Расширение $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ не расщепляется над подгруппой $K^* \cdot \mathcal{O}^*$, поскольку скобка $(\cdot, \cdot)$ не тривиальна на ней. С другой стороны, расширение $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ расщепляется над подгруппой $\mathcal{O}^*$, так как все пространства $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$ по определению совпадают с k для $\alpha \in \mathcal{O}^*$ (поскольку $\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$), и умножение, задаваемое в $\tilde{\mathbb{A}}_C^*$ над $\mathcal{O}^*$, совпадает с умножением в прямом произведении $\mathcal{O}^* \times k^*$. Тем не менее, над пересечением $\mathcal{O}^* \cap K^* = k^*$ тривиализации, приходящие с $\mathcal{O}^*$ и K^* , различаются: одна соответствует единичному гомоморфизму $k^* \rightarrow \{1\} \subset k^*$, а другая – гомоморфизму $k^* \rightarrow k^*$ возведения в степень $1 - g$ соответственно (см. п. 3.3). Поэтому над пересечением $\mathcal{O}^*$ и K^* тривиализации “не склеиваются”, и частично из-за этого расширение не удастся расщепить над $\mathcal{O}^* \cdot K^*$.

Из описанного выше в п. 2.1 следует, что существует кососимметрическое билинейное спаривание

$$\psi_m: \sqrt[m]{K^*}/(K^* \cdot (\mathbb{A}_C^*)_m) \times \sqrt[m]{K^*}/(K^* \cdot (\mathbb{A}_C^*)_m) \rightarrow \mu_m(k),$$

где $\mu_m(k)$ обозначает группу корней m -й степени из 1 в поле k (в том случае, когда она тривиальна, спаривание тоже будет тривиально, но, тем не менее, будет корректно определено).

Заметим, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{K^*}/(\sqrt[m]{K^*} \cap K^* \cdot \mathcal{O}^*) &= \sqrt[m]{K^*}/(K^* \cdot (\sqrt[m]{\mathcal{O}^* \cap K^*})_{\mathcal{O}^*}) \\ &= \sqrt[m]{K^*}/(K^* \cdot \mathcal{O}_m^*) = \sqrt[m]{K^*}/(K^* \cdot (\mathbb{A}_C^*)_m), \end{aligned}$$

где $(\sqrt[m]{\mathcal{O}^* \cap K^*})_{\mathcal{O}^*}$ обозначает корень m -й степени из $\mathcal{O}^* \cap K^* = k^*$ в $\mathcal{O}^*$.

Образ $\sqrt[m]{K^*}$ в $\text{Pic}(C)$ лежит в $\text{Jac}(C)_m'$. Обозначим его через $\text{Jac}(C)_m'$.

Мы получили следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2.2. Над $\text{Jac}(C)_m'$ существует каноническое k^* -расширение, коммутатор которого будет задавать кососимметрическое билинейное спаривание

$$\psi_m: \text{Jac}(C)_m' \times \text{Jac}(C)_m' \rightarrow \mu_m(k)$$

по формуле

$$\psi_m(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \left(\prod_{x \in C} \text{Nm}_{k(x)/k} [(-1)^{\text{ord}_x(\alpha_x) \text{ord}_x(\beta_x)} \alpha_x^{\text{ord}_x(\beta_x)} \beta_x^{-\text{ord}_x(\alpha_x)}] \right)^m,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_C^*$ – два таких идеала, соответствующих $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ из $\text{Jac}(C)_m'$, что $\alpha^m, \beta^m \in K^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. В случае, когда k алгебраически замкнуто и $(\text{char } k, m) = 1$, имеется равенство $\text{Jas}(C)'_m = \text{Jas}(C)_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Если $\text{char } k \mid m$, то спаривание ψ_m может оказаться тривиальным. Например, так будет, если k – конечное поле и $m = [k : \mathbb{F}_p]$, где $p = \text{char } k$.

§ 3. Бираспирение, построенное по центральному расширению, и спаривание Вейля

3.1. Построение факторбираспирения. Вернемся на некоторое время к случаю произвольного центрального расширения абелевой группы (оставляя прежние обозначения).

С каждым главным однородным пространством G над относительной группой $N \times A$ можно связать главное однородное пространство $\text{Sym}^2 G$ над относительной группой $N \times (A \times A)$ по формуле $\text{Sym}^2 G = \text{Hom}(p_1^* G \otimes p_2^* G, m^* G) \rightarrow A \times A$, где p_1, p_2 и m обозначают проекции на первый сомножитель, второй сомножитель и умножение в группе A соответственно, а Hom и $\otimes$ берутся по-свойному в категории главных однородных пространств над N .

Предположим, что $G \rightarrow A$ является расширением групп. Тогда $\text{Sym}^2 G$ имеет каноническую тривиализацию, соответствующую морфизму умножения

$$G_a \otimes G_b \rightarrow G_{ab}, \quad \text{где } a, b \in A.$$

В частности, эта тривиализация наделяет $\text{Sym}^2 G$ структурой тривиального бираспирения над $A \times A$. Будем обозначать через $1_{(a,b)}$ значение в (a, b) единичного сечения $A \times A \rightarrow \text{Sym}^2 G$, получаемого из описанной тривиализации. Бираспирение $\text{Sym}^2 G$ является *симметричным*, т.е. имеется канонический изоморфизм бираспирений $t: i^*(\text{Sym}^2 G) \rightarrow \text{Sym}^2 G$, где $i: A \times A \rightarrow A \times A$ – перестановка сомножителей. Из определений следует, что $t(1_{(b,a)}) = (a, b)1_{(a,b)}$.

Пусть $B, C \subset A$ – две подгруппы, над которыми расширение G расщепляется. Будем обозначать элементы соответствующих сечений над B и C через $(b, 1_B)$ и $(c, 1_C)$ для $b \in B, c \in C$, имея в виду то обстоятельство, что сечения *могут не совпадать* над $B \cap C$.

Если для любого элемента $g \in G$ и для любого элемента $b \in B \cap C$ выполняется равенство

$$(b, 1_B)g = g(b, 1_C), \quad (**)$$

то можно корректно определить фактор $\tilde{G} = B \setminus G/C$, который будет являться главным однородным пространством над относительной группой $N \times (B \setminus A/C)$.

Можно проверить, что $\text{Sym}^2 \tilde{G}$ тоже имеет структуру бираспирения и, на самом деле, является фактором $\text{Sym}^2 G$ тривиального бираспирения $\text{Sym}^2 G \rightarrow A \times A$ по индуцированному действию $(B \cdot C) \times (B \cdot C)$.

Более того, факторбираспирение над $B \setminus A/C$ удастся построить, даже если B и C не удовлетворяют условию (**), но для каждого $b \in B \cap C$ существует $\varphi(b) \in N$ такое, что

$$(b, 1_B)g = \varphi(b)g(b, 1_C). \quad (***)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Нетрудно увидеть, что в этом случае отображение $\varphi: B \cap C \rightarrow N$ обязано быть гомоморфизмом групп.

Если выполняется (***) , то, взяв в качестве g единичный элемент из G , получим, что $(b, 1_B) = \varphi(b)(b, 1_C)$ для $b \in B \cap C$. После подстановки этого равенства в (***) оказывается, что $B \cap C$ лежит в ядре скобки $(\cdot, \cdot)$.

В этом случае определено действие $(B \cdot C) \times (B \cdot C)$ на $\text{Sym}^2 G$ так, как если бы было определено действие $B \cdot C$ на G . А именно для любых двух элементов $g, h \in G$ выполняется равенство

$$(b, 1_B)g(c, 1_C) \cdot (b', 1_B)h(c', 1_C) = (bb', 1_B)gh(cc', 1_C) \cdot (c, b')(\pi(g), b')(c, \pi(h)).$$

Это задает действие $(B \cdot C) \times (B \cdot C)$ на $\text{Sym}^2 G$ по формуле

$$(bc, b'c') \circ (1_{(\pi(g), \pi(h))}) = (c, b')(\pi(g), b')(c, \pi(h))(1_{(\pi(g)bc, \pi(h)b'c')}).$$

При этом, несмотря на то что действие $B \cdot C$ на G не определено корректно, действие на $\text{Sym}^2 G$ не зависит от выбора разложений bc и $b'c'$ в произведение элементов из B и из C – это следует из того, что $B \cap C$ лежит в ядре скобки $(\cdot, \cdot)$.

Отметим, что данное действие является действием на $\text{Sym}^2 G$ не только как на главное однородное пространство, но как и на *бирасширение*, т.е. действие коммутирует с отображениями

$$\begin{aligned} (\text{Sym}^2 G)_{(a_1, b)} \otimes (\text{Sym}^2 G)_{(a_2, b)} &\rightarrow (\text{Sym}^2 G)_{(a_1 a_2, b)}, \\ (\text{Sym}^2 G)_{(a, b_1)} \otimes (\text{Sym}^2 G)_{(a, b_2)} &\rightarrow (\text{Sym}^2 G)_{(a, b_1 b_2)} \end{aligned}$$

для любых $a_1, a_2, a, b_1, b_2, b \in A$. Более того, данное действие оставляет $\text{Sym}^2 G$ симметричным, т.е. коммутирует с изоморфизмами

$$t: (\text{Sym}^2 G)_{(b, a)} \rightarrow (\text{Sym}^2 G)_{(a, b)}$$

для любых $a, b \in A$. Все эти свойства следуют из явной формулы для действия $(B \cdot C) \times (B \cdot C)$ на $\text{Sym}^2 G$ и из формул для указанных выше отображений в терминах сечения $1_{(a, b)}$.

Итак, показан следующий результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если центральное расширение $G \rightarrow A$ расщепляется над подгруппами $B, C \subset A$ и при этом B и C удовлетворяют условию (***) , то над $B \setminus A/C \times B \setminus A/C$ существует симметричное бирасширение $\text{Sym}^2 G$, являющееся фактором тривиального симметричного бирасширения $\text{Sym}^2 G \rightarrow A \times A$.

3.2. Вторая абстрактная конструкция: спаривание Вейля в терминах бирасширений. Пусть теперь над произвольной абелевой группой A задано бирасширение $P \rightarrow A \times A$, для которого слой P над (e, e) изоморфен коммутативной группе N . Пусть P симметрично, т.е. имеется изоморфизм бирасширений $t: i^*P \rightarrow P$. Над $A_m \times A$ существует тривиализация бирасширения $P^{\otimes m}$, которая получается за счет канонических изоморфизмов

$P_{(a,b)}^{\otimes m} \cong P_{(a^m,b)} = P_{(e,b)} \cong P_{(e,e)}$. Рассмотрим ограничение на $A_m \times A_m$ сечения s , получаемого с помощью этой тривиализации из единичного сечения тривиального бираспирения. Функция $\phi_m(a,b) = t(s(b,a))/s(a,b)$, определенная на $A_m \times A_m$ со значениями в N , задает кососимметрическое билинейное спаривание на A_m со значениями в N_m – *спаривание Вейля*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в этой конструкции выбрать другое “постоянное” (но не единичное) сечение, получаемое с помощью описанной выше тривиализации $P^{\otimes m}$ над $A_m \times A$, то функция ϕ_m от этого не изменится.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если заменить тривиализацию $P^{\otimes m}$ над $A_m \times A_m$ на другую, получаемую из возведения в m -ю степень второго сомножителя, то спаривание Вейля не изменится.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если $s_1(a,b)$ и $s_2(a,b)$ – два сечения $P^{\otimes m}$, получаемые из единичного сечения тривиального бираспирения при помощи соответственно двух тривиализаций, рассмотренных в замечании 3.3, то $s_1(a,b)/s_2(a,b) = \phi_m(a,b)$ (иногда спаривание Вейля определяется именно так).

Два последних замечания следуют из эквивалентности двух (некоммутативных!) диаграмм, возникающей из изоморфизма симметрии $t: i^*P \rightarrow P$: диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} P_{(a,b)}^{\otimes m} & \longrightarrow & P_{(a^m,b)} & \longrightarrow & P_{(e,e)} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P_{(a,b)}^{\otimes m} & \longrightarrow & P_{(a,b^m)} & \longrightarrow & P_{(e,e)} \end{array}$$

изоморфна диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} P_{(b,a)}^{\otimes m} & \longrightarrow & P_{(b,a^m)} & \longrightarrow & P_{(e,e)} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P_{(b,a)}^{\otimes m} & \longrightarrow & P_{(b^m,a)} & \longrightarrow & P_{(e,e)}. \end{array}$$

3.3. Связь с расслоением Пуанкаре и спариванием Вейля. Вернемся теперь к примеру с идеями на кривой C над полем k .

Заметим, что поскольку одномерное пространство $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$ канонически изоморфно $\text{Hom}(\mathcal{K}(\mathcal{O}), \mathcal{K}(\alpha\mathcal{O}))$, то для идеев $\alpha \in \mathbb{A}_C^*$ степени $g-1$ (где g – род кривой C) имеется канонический изоморфизм $\varepsilon_{(f,u)}: (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) \rightarrow (\mathcal{O} | f\alpha u\mathcal{O})$, где $f \in K^*$, $u \in \mathcal{O}^*$, который возникает из умножения на f , определяющего изоморфизм комплексов $\mathcal{A}(\alpha\mathcal{O})$ и $\mathcal{A}(f\alpha u\mathcal{O})$ и индуцирующего канонический изоморфизм их когомологий (при этом независимость от выбора разложения fu на элемент из K^* и из $\mathcal{O}^*$ следует из того, что $\deg(\alpha) = g-1$, поскольку умножение комплекса $\mathcal{A}(\alpha\mathcal{O})$ на константу $c \in K^* \cap \mathcal{O}^* = k^*$ приводит к умножению $\mathcal{K}(\alpha\mathcal{O})$ на $c^{\chi(\mathcal{A}(\alpha\mathcal{O}))} = c^{\deg(\alpha)+1-g}$ по теореме Римана–Роха).

Таким образом, над $\text{Pic}^{(g-1)}(C)$ возникает главное однородное пространство над относительной группой $k^* \times \text{Pic}^{(g-1)}(C)$ со слоем $\mathcal{K}(\alpha\mathcal{O}) = \det R\Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\}$, где обратимый пучок $\mathcal{L}$ соответствует идею α следующим образом: $\mathcal{L} \subset K^*$ – подпучок в постоянном пучке K^* , состоящий из таких функций,

у которых нет полюсов после деления их на α . Это следует из того, что имеется канонический изоморфизм комплексов

$$\mathcal{A}(\alpha\mathcal{O}) \cong \mathbb{A}_C(\mathcal{L}),$$

где $\mathbb{A}_C(\mathcal{L})$ обозначает *адельный комплекс*, связанный с обратимым пучком $\mathcal{L}$:

$$\mathbb{A}_C(\mathcal{L}): 0 \rightarrow \mathcal{L}_\eta \oplus \prod_{x \in C} \widehat{\mathcal{L}}_x \rightarrow \prod'_{x \in C} \widehat{\mathcal{L}}_x \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} K_x \rightarrow 0,$$

где η обозначает общую точку C , x пробегает все замкнутые точки на C , $\prod'$ является адельным произведением, а $\widehat{}$ обозначает пополнение (более подробное и общее изложение содержится в [1]).

Как известно, расслоение $\det R\Gamma(X, \mathcal{L})$ соответствует тэта-дивизору (который корректно определен на $\text{Pic}^{(g-1)}(C)$), см. [5].

Для применения построенных выше абстрактных конструкций надо выразить описанное выше “когомологическое” отождествление слоев расширения $\widehat{\mathbb{A}}_C^*$ в групповых терминах. Для этого рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{O}) & \stackrel{f}{\cong} & \mathcal{K}(f\mathcal{O}) \\ \downarrow x & & \downarrow f_*x \\ \mathcal{K}(\alpha\mathcal{O}) & \stackrel{f}{\cong} & \mathcal{K}(f\alpha\mathcal{O}), \end{array}$$

где x – произвольный элемент из $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) \setminus \{0\}$, а $f \in K^*$. Сравнивая соответствующие адельные комплексы, легко увидеть, что f_*x равен образу x под действием изоморфизма $f: (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O}) \rightarrow (f\mathcal{O} | f\alpha\mathcal{O})$. Поэтому произведение $(f, 1_{K^*}) \cdot x$ равно диагонали данной коммутативной диаграммы. С другой стороны, “когомологическое” отождествление $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$ с $(\mathcal{O} | f\alpha\mathcal{O})$ тоже сопоставляет отображению x диагональ данной диаграммы. Таким образом, “когомологическое” отождествление совпадает с умножением на $(f, 1_{K^*})$ слева.

С другой стороны, для $u \in \mathcal{O}^*$ отождествление $(\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$ с $(\mathcal{O} | u\alpha\mathcal{O})$, возникающее из совпадения пространств $\alpha\mathcal{O}$ и $u\alpha\mathcal{O}$, соответствует умножению справа на $(u, 1_{\mathcal{O}^*})$.

Теперь мы готовы применить конструкции из п. 3.1, взяв в качестве A группу идеалов нулевой степени $(\mathbb{A}_C^*)^0$, в качестве B – подгруппу главных идеалов K^* , а в качестве C – подгруппу $\mathcal{O}^*$ (само расширение G остается прежним $\widehat{\mathbb{A}}_C^*$, только ограниченным на $(\mathbb{A}_C^*)^0$). Выполняется равенство

$$(c, 1_{K^*})\eta = \eta(c, 1_{\mathcal{O}^*}) \cdot c^{1-g}$$

для любых $\eta \in (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})$, $\alpha \in (\mathbb{A}_C^*)^0$, $c \in K^* \cap \mathcal{O}^* = k^*$. Иными словами, подгруппы K^* и $\mathcal{O}^*$ удовлетворяют условию (***) и можно применить предложение 3.1, получая некоторое симметричное бирасширение P над $\text{Jas}(C) \times \text{Jas}(C)$. Основная теорема настоящей работы заключается в следующем:

ТЕОРЕМА 3.1. *Построенное симметричное бирасширение P изоморфно симметричному бирасширению, возникающему из расслоения Пуанкаре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним, что действие $(K^* \cdot \mathcal{O}^*) \times (K^* \cdot \mathcal{O}^*)$ на тривиальном бираспирении над $(\mathbb{A}_C^*)^0 \times (\mathbb{A}_C^*)^0$ соответствует “когомологическому” отождествлению $(\mathcal{O} | \alpha \mathcal{O}) \cong \mathcal{K}(\alpha \mathcal{O}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{O})^{-1} \cong \det R\Gamma(\mathcal{L}) \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_C)^{-1}$, где обратимый пучок $\mathcal{L}$ соответствует идеалу α описанным выше образом. Поэтому P как главное однородное пространство над относительной группой $k^* \times (\text{Jас}(C) \times \text{Jас}(C))$ канонически изоморфно расслоению Пуанкаре $\mathcal{P} \rightarrow \text{Jас}(C) \times \text{Jас}(C)$ (с выкинутым нулевым сечением), для которого верна формула $\mathcal{P}|_{(\mathcal{L}, \mathcal{M})} = \det R\Gamma(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \otimes \det R\Gamma(\mathcal{L})^{-1} \otimes \det R\Gamma(\mathcal{M})^{-1} \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_C)$. Кроме того, структура “симметричности” у двух бираспирений P и $\mathcal{P}$ тоже одинаковая (это следует непосредственно из ее определения).

Итак, надо проверить, что у $\mathcal{P}$ и P одинаковая структура бираспирений. Для этого достаточно доказать, что после применения канонического изоморфизма главных однородных пространств $P \cong \mathcal{P}$ обратный образ индуцированной структуры бираспирения с $\mathcal{P}$ на P будет *совпадать* со структурой тривиального бираспирения на $\text{Sym}^2 \tilde{\mathbb{A}}_C^*$, описанного в п. 3.1. Будем использовать приведенный Делинем в [6] явный вид структуры бираспирения на $\mathcal{P}$. Более точно, надо рассмотреть обратный образ $\mathcal{P}$ на $\text{Jас}(C) \times \text{Div}(C)^0$, который для простоты обозначим такой же буквой $\mathcal{P}$. Тогда существует канонический изоморфизм $\varphi: \mathcal{P}|_{(\mathcal{L}, D)} \cong \bigotimes_{x \in C} \mathcal{L}|_x^{\otimes \text{ord}_x(D)}$, где $\mathcal{L}|_x$ обозначает слой расслоения, соответствующего обратимому пучку $\mathcal{L}$, над точкой x . При этом естественная структура бираспирения на $\bigotimes_{x \in C} \mathcal{L}|_x^{\otimes \text{ord}_x(D)}$ индуцирует структуру бираспирения на $\mathcal{P}$. Заметим, что прообраз $\mathbb{D}$ этого бираспирения на $(\mathbb{A}_C^*)^0 \times (\mathbb{A}_C^*)^0$ является тривиальным бираспирением с тривиализацией, задаваемой элементами

$$\prod_{x \in C} \overline{\alpha_x}^{\text{ord}_x(D)} \in \bigotimes_{x \in C} (\alpha_x \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x \alpha_x \mathcal{O}_x)^{\otimes \text{ord}_x(D)} = \pi^* \left[\bigotimes_{x \in C} \mathcal{L}|_x^{\otimes \text{ord}_x(D)} \right],$$

где $\pi: (\mathbb{A}_C^*)^0 \times (\mathbb{A}_C^*)^0 \rightarrow \text{Jас}(C) \times \text{Div}(C)^0$ обозначает отображение факторизации.

Оказывается, что обратный образ изоморфизма φ переводит тривиализацию на $\text{Sym}^2 \tilde{\mathbb{A}}_C^*$ в описанную выше тривиализацию на $\mathbb{D}$.

Чтобы увидеть это, напомним явный вид изоморфизма Делиня φ . Предположим сначала, что дивизор D эффе́ктивный. Тогда точные последовательности пучков

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D)|_D \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow \mathcal{O}_C(D)|_D \rightarrow 0 \end{aligned}$$

приводят к изоморфизму

$$\begin{aligned} \mu: \det R\Gamma(\mathcal{L}(D)) \otimes \det R\Gamma(\mathcal{L})^{-1} \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_C(D))^{-1} \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_C) \\ \cong \det(\mathcal{L}(D)|_D) \otimes \det(\mathcal{O}_C(D)|_D)^{-1}. \end{aligned}$$

Далее, индукцией по степени D устанавливается канонический изоморфизм

$$\nu: \det(\mathcal{L}(D)|_D) \otimes \det(\mathcal{O}_C(D)|_D)^{-1} \cong \bigotimes_{x \in C} \mathcal{L}|_x^{\otimes \text{ord}_x(D)}.$$

Более того, если $s_x \in \mathcal{L}_x$ – набор локальных сечений, задающих изоморфизм слоев пучков $s_x: \mathcal{O}_{C,x} \cong \mathcal{L}_x$, то определитель изоморфизмов $\prod_{x \in |D|} s_x: \mathcal{O}_C(D)|_D \rightarrow \mathcal{L}(D)|_D$ будет переходить под действием ν в произведение $\prod_{x \in C} \overline{s_x}^{\otimes \text{ord}_x(D)}$, где $\overline{s_x} \in \mathcal{L}|_x$ обозначает “значение” в точке x сечения $s_x \in \mathcal{L}_x$, а $|D|$ – носитель дивизора D .

Изоморфизм φ является просто композицией $\nu \circ \mu$.

Рассмотрим теперь обратный образ всей этой конструкции под действием π^* . Точным последовательностям пучков соответствуют точные последовательности комплексов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{A}(\alpha\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{A}(\alpha\beta\mathcal{O}) \rightarrow (\alpha\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O}) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{A}(\beta\mathcal{O}) \rightarrow (\mathcal{O} | \beta\mathcal{O}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где идеаль α соответствует пучку $\mathcal{L}$, а идеаль β такой, что $\text{div}(\beta) = -D$. При этом обратный образ изоморфизма μ соответствует такому изоморфизму:

$$\pi^*(\mu): (\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O}) \otimes (\mathcal{O} | \alpha\mathcal{O})^{-1} \otimes (\mathcal{O} | \beta\mathcal{O})^{-1} \cong (\alpha\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O}) \otimes (\mathcal{O} | \beta\mathcal{O})^{-1},$$

при котором естественные тривиализации правой и левой части переходят одна в другую. Здесь тривиализация правой части задается определителем изоморфизма $\alpha: (\mathcal{O} | \beta\mathcal{O}) \cong (\alpha\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O})$. Обратный образ изоморфизма ν

$$\pi^*(\nu): (\alpha\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O}) \otimes (\mathcal{O} | \beta\mathcal{O})^{-1} \cong \mathbb{D}$$

как раз переводит эту тривиализацию в описанную выше тривиализацию на $\mathbb{D}$, задающую на нем структуру бираширения. Так разбирается случай положительного дивизора D .

Случай отрицательного дивизора $-E$, $E \geq 0$, рассматривается аналогично, только с помощью двух последовательностей пучков:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{L}(-E) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}|_E \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-E) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C|_E \rightarrow 0, \end{aligned}$$

причем обратный образ этих конструкций будет, как и следовало ожидать, посимвольно таким же, как и в предыдущем случае (идеаль β берется таким, что $\text{div}(\beta) = E$).

Случай произвольного дивизора сводится к этим двум случаям за счет рассмотрения вложений пучков $\mathcal{L}(-E) \subset \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}(-E) \subset \mathcal{L}(D - E)$ (соответственно $\mathcal{O}_C(-E) \subset \mathcal{O}_C$ и $\mathcal{O}_C(-E) \subset \mathcal{O}_C(D - E)$), обратный образ которых под действием π^* будет соответствовать выбору общего подпространства в соизмеримых пространствах $\alpha\mathcal{O}$ и $\alpha\beta\mathcal{O}$ (соответственно $\mathcal{O}$ и $\beta\mathcal{O}$) при подсчете их скобки $(\alpha\mathcal{O} | \alpha\beta\mathcal{O})$ (соответственно $(\mathcal{O} | \beta\mathcal{O})$). И в этом случае обратный образ этих конструкций будет посимвольно такой же, как и в двух предыдущих случаях.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если применить конструкцию факторбierasширения из п. 3.1 к ограничению симметричного тривиального бierasширения $\text{Sym}^2(\tilde{\mathbb{A}}_C^*)$ на $A \times A = (\mathbb{A}_C^*)^0 \times (\mathbb{A}_C^*)^0$ и к подгруппам $B = K^*$, $C = \mathcal{O}^*$, а потом рассмотреть на $\text{Jas}(C)_m \times \text{Jas}(C)_m$ получаемое из факторбierasширения спаривание, описанное в п. 3.2, то получится “классическое” спаривание Вейля на точках кручения якобиана кривой.

Доказательство явно следует из определения спаривания Вейля в терминах бирасширения Пуанкаре над $\text{Jas}(C) \times \text{Jas}(C)$, см. [5].

§ 4. Совпадение двух спариваний и адельная формула для спаривания Вейля

Пусть теперь задано расширение $G \rightarrow A$ и две подгруппы $B, C \subset A$, удовлетворяющие условиям предложения 3.1.

В § 2 было построено спаривание $\psi_m: \sqrt[m]{B} \times \sqrt[m]{B} \rightarrow N_m$, а в § 3 – спаривание $\phi_m: (B \setminus A/C)_m \times (B \setminus A/C)_m \rightarrow N_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Выполняется равенство $\psi_m = \phi_m \circ p$, где $p: \sqrt[m]{B} \rightarrow (B \setminus A/C)_m$ – естественное отображение факторизации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения из § 3. В частности, нами будет использоваться сечение s , задающее тривиализацию бирасширения над точками кручения (см. п. 3.2). Будем обозначать ограничения бирасширений на подгруппы теми же символами, что и исходные бирасширения. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (\text{Sym}^2 G)^{\otimes m} & \longrightarrow & \sqrt[m]{B} \times \sqrt[m]{B} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \widetilde{(\text{Sym}^2 G)^{\otimes m}} & \longrightarrow & (B \setminus A/C)_m \times (B \setminus A/C)_m. \end{array}$$

Очевидно, что $(\text{Sym}^2 G)^{\otimes m} = \text{Sym}^2(G^{\otimes m})$. Если доказать, что $p^*(s)$ совпадает с постоянным сечением тривиального бирасширения $\text{Sym}^2(G^{\otimes m})$, то получится требуемое утверждение. Действительно, в этом случае для $a, b \in \sqrt[m]{B}$ будет выполняться

$$\begin{aligned} \phi_m(p(a), p(b)) &= t(s(p(b), p(a)))/s(p(a), p(b)) \\ &= t(p^*(s)(b), p^*(s)(a))/(p^*(s)(a), p^*(s)(b)) = (a, b)^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь еще одну диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^2 G & \longrightarrow & B \times \sqrt[m]{B} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \widetilde{\text{Sym}^2 G} & \longrightarrow & \{1\} \times (B \setminus A/C)_m. \end{array}$$

Оба бирасширения тривиальны: “нижнее” из-за того, что один из сомножителей равен $\{1\}$, а “верхнее” из-за того, что оно возникает из группового расширения. Обозначим соответствующие этим тривиализациям постоянные единичные сечения через s_{down} и s_{up} . Заметим, что по определению спаривания Вейля из п. 3.2 выполняется равенство $(m, 1)^*(s_{\text{down}}) = s$. Кроме того, $(m, 1)^*(s_{\text{up}})$ совпадает с каноническим сечением тривиального бирасширения $\text{Sym}^2(G^{\otimes m}) \rightarrow \sqrt[m]{B} \times \sqrt[m]{B}$. Итак, нам достаточно доказать, что $p^*(s_{\text{down}}) = s_{\text{up}}$.

Из общих свойств бирасширений ясно, что $p^*(s_{\text{down}})$ совпадает с s_{up} над $\{1\} \times \sqrt[m]{B}$. Кроме того, из явной формулы для действия $(B \cdot C) \times (B \cdot C)$

на $\mathrm{Sym}^2 G$ (см. п. 3.1) следует, что $B \times (\sqrt[m]{B} \cap B \cdot C)$ действует тождественно на s_{up} . Отсюда сразу следует требуемое равенство $p^*(s_{\mathrm{down}}) = s_{\mathrm{up}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Последний аргумент приведенного доказательства не был бы верен, если бы группа $\sqrt[m]{B}$ была заменена на большую группу $\sqrt[m]{B} \cdot \sqrt[m]{C}$. Это соответствует тому, что в общем случае спаривание $(\cdot, \cdot)^m$ не определено корректно на всей этой группе.

Сопоставляя результаты § 2, § 3 и предложение 4.1, получаем адельную формулу для спаривания Вейля:

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если двум обратимым пучкам $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ из $\mathrm{Jac}(C)_m$ можно сопоставить два таких идеала $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_C^*$, что $\alpha^m, \beta^m \in K^*$, то спаривание Вейля $(\mathcal{L}, \mathcal{M})_m$ пучков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ может быть задано по формуле

$$(\mathcal{L}, \mathcal{M})_m = \left(\prod_{x \in C} \mathrm{Nm}_{k(x)/k} \left[(-1)^{\mathrm{ord}_x(\alpha_x) \mathrm{ord}_x(\beta_x)} \overline{\alpha_x^{\mathrm{ord}_x(\beta_x)} \beta_x^{-\mathrm{ord}_x(\alpha_x)}} \right] \right)^m.$$

Список литературы

- [1] A. N. Parshin, “Chern classes, adeles and L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 174–192.
- [2] E. W. Howe, “The Weil pairing and the Hilbert symbol”, *Math. Ann.*, **305**:2 (1996), 387–392.
- [3] М. В. Мазо, “Спаривание Вейля и ручные символы”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 797–800.
- [4] E. Arbarello, C. de Concini, V. G. Кас, “The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **49**:1 (1989), 171–190.
- [5] L. Moret-Bailly, “Métriques permises”, *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: La conjecture de Mordell (Paris, 1983/84)*, *Astérisque*, **127**, Soc. Math. France, Paris, 1985, 29–87.
- [6] P. Deligne, “Le déterminant de la cohomologie”, *Contemp. Math.*, **67** (1987), 93–177.

С. О. Горчинский (S. O. Gorchinskii)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gorchins@mi.ras.ru