Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 71–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:23:43

УДК 517.5

А. С. Романюк

Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных

Получены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов $B_{1,\theta}^r$ и $B_{\infty,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, а также тригонометрических поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между p и q .

Библиография: 18 названий.

Введение

В работах [1]–[3] изучались колмогоровские поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q , $1 < p, q < \infty$, и в большинстве возможных случаев (за исключением классов функций малой гладкости) были получены их точные порядки. В указанных работах можно ознакомиться и с соответствующей библиографией. К настоящему времени неизученными оставались случаи, когда параметры p и q принимают предельные значения 1 либо ∞ .

В первой части работы (§ 1) получены порядки колмогоровских поперечников классов $B_{1,\theta}^r$ и $B_{\infty,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, и, таким образом, дополнены результаты работ [1]–[3]. Отметим, что при установлении оценок снизу используются и развиваются методы, которые применялись при исследовании классов $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r . Более конкретно об этом будет идти речь в комментариях к полученным результатам.

Вторая часть работы (§ 2) посвящена исследованию тригонометрических поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q . Здесь для некоторых соотношений между параметрами p и q получены точные по порядку оценки тригонометрических поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ и, параллельно, соответствующие оценки для классов $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r . Важно отметить установленный при этом новый качественный эффект о несовпадении порядков тригонометрических поперечников и наилучших M -членных тригонометрических приближений для классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < 2$.

Приведем необходимые обозначения и определения, а также сформулируем некоторые известные утверждения, которые будут использоваться в процессе доказательства полученных результатов.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, обозначает множество

функций $f(x)$, 2π -периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

В последующих рассуждениях будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\pi_d)$, для которых выполнено дополнительное условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций будем обозначать $L_p^0(\pi_d)$.

Для функции $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j -й переменной с шагом h :

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x),$$

и определим разность l -го порядка

$$\Delta_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \cdots \Delta_{h,j}}^l f(x)$$

в точке x_j с шагом h .

Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \cdots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \|\Delta_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\sup_h \|\Delta_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \leq 1 \quad \text{при} \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$.

Классы $B_{p,\theta}^r$ были введены О. В. Бесовым [4], и при $\theta = \infty$ $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ [5; гл. 2, § 1], где H_p^r – аналоги известных классов С. М. Никольского (см. [6; гл. 4, § 4.3]). Ниже нам будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$ в несколько другом виде.

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d}\},$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы $B_{p, \theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [7]):

$$B_{p, \theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p, \theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p, \infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p, \infty}^r} = \sup_s 2^{(s, r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Обратим внимание, что при соответствующем видоизменении “блоков” $\delta_s(f, x)$ приведенное определение классов $B_{p, \theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валье Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j}-1}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Тогда при $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$,

$$B_{p, \theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p, \theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p, \infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p, \infty}^r} = \sup_s 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Поскольку в комментариях к полученным в работе результатам мы будем проводить их сравнение с соответствующими результатами для классов $W_{p, \alpha}^r$, то для удобства напомним и определение классов $W_{p, \alpha}^r$ (см., например, [5; гл. 2, § 1]).

Пусть $F_r(x, \alpha)$ – многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим через $W_{p, \alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

$\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

Отметим, что при этом $\varphi(x)$ называют (r, α) -производной функции $f(x)$ и обозначают $f^{(r)}(x, \alpha)$. В случае $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, d}$, класс $W_{p, \alpha}^r$ будем обозначать W_p^r и, соответственно, $\varphi(x) = f^{(r)}(x)$.

Ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, которые присутствуют в определениях классов, упорядочены в виде: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом функции $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ называем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные $C_1 \leq C_2$ такие, что $C_1 \mu_2(n) \leq \mu_1(n) \leq C_2 \mu_2(n)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые присутствуют в определении классов, метрик, и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если A – конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

Теперь сформулируем несколько известных утверждений, которые будут нами систематически использоваться.

ТЕОРЕМА А [8]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j – целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p < \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q.$$

Это неравенство установлено С. М. Никольским и названо “неравенством разных метрик”. В одномерном случае и при $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [9].

ТЕОРЕМА Б [5; гл. 2, § 1]. Для того чтобы $\|\Delta_h^k f\|_p \ll \prod_{j=1}^d |h_j|^{r_j}$, $k_j > r_d$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s,r)}, & 1 < p < \infty, \\ \|A_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s,r)}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА В (Литтлвуда–Пэли [6; гл. 1, § 5.2]). Пусть задано $p \in (1, \infty)$. Существуют положительные константы $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что для каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p.$$

§ 1. Колмогоровские поперечники классов $B_{1,\theta}^r$ и $B_{\infty,\theta}^r$ в пространстве L_q

В настоящем параграфе изучаются колмогоровские поперечники классов $B_{1,\theta}^r$ и $B_{\infty,\theta}^r$ в пространстве L_q , $1 < q < \infty$. Напомним, что M -мерным колмогоровским поперечником центрально симметричного множества Φ банахова пространства X называется величина

$$d_M(\Phi, X) = \inf_{L_M} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_X,$$

где L_M – подпространство размерности M пространства X .

Полученные здесь точные по порядку оценки величин $d_M(B_{1,\theta}^r, L_q)$ и $d_M(B_{\infty,\theta}^r, L_q)$, $1 < q < \infty$, дополняют оценки поперечников $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 < p, q < \infty$, которые установлены в работах [1]–[3].

Итак, исследуем сначала поведение поперечников $d_M(B_{1,\theta}^r, L_q)$. При этом мы рассмотрим отдельно случаи $1 < q \leq 2$ и $2 < q < \infty$, поскольку при установлении оценок снизу в этих случаях используются разные методы, и, кроме того, порядок поперечника $d_M(B_{1,\theta}^r, L_q)$, $1 < q \leq 2$, нам удалось получить только при $\theta \in [1, q]$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $1 < q \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$ и $\theta \in [1, q]$. Тогда

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим в (1) оценку сверху. Поскольку при $\theta \in [1, q]$ имеет место включение $B_{1,\theta}^r \subset B_{1,q}^r$, то искомую оценку сверху достаточно установить для классов $B_{1,q}^r$.

Пусть $f \in B_{1,q}^r$. Тогда, воспользовавшись сначала теоремой Марцинкевича (см., например, [6; гл. 1, § 1.5.3]), в силу определения $(r - 1 + 1/q)$ -производной

функции $f(x)$ можем записать

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{1,q}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)q} \|A_s(f, x)\|_1^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\gg \left(\sum_s 2^{(s,r)q} \|A_s(f, x)\|_q^q 2^{-(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_s 2^{\left(s, r-1+\frac{1}{q}\right)q} \|\delta_s(f, x)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\sum_s \|\delta_s(f^{(r-1+\frac{1}{q})}, x)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2) \end{aligned}$$

где $r - 1 + 1/q$ обозначает вектор с координатами $r_j - 1 + 1/q$, $j = \overline{1, d}$.

Далее, воспользуемся неравенством

$$\left\| \sum_s \delta_s(f, x) \right\|_q \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}}, \quad 1 < q < \infty, \quad (3)$$

$q^* = \min\{q, 2\}$, которое легко выводится из теоремы Б и неравенства Минковского.

Следовательно, согласно (2) и (3) приходим к соотношению

$$\|f\|_{B_{1,q}^r} \gg \left\| \sum_s \delta_s(f^{(r-1+\frac{1}{q})}, x) \right\|_q.$$

Отсюда заключаем, что имеет место включение

$$B_{1,q}^r \subset W_q^{r-1+\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

Таким образом, воспользовавшись известной оценкой

$$d_M(W_q^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}, \quad 1 < q < \infty, \quad r_1 > 0$$

(см. [5; гл. 3, § 1]), согласно (4) приходим к искомой оценке сверху

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_q) \ll d_M(W_q^{r-1+\frac{1}{q}}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{1}{q}}.$$

Соответствующую оценку снизу можно получить, используя рассуждения, которые применялись В. Н. Темляковым [5; гл. 3, § 1] при доказательстве оценки снизу поперечника $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_q)$, $1 < p \leq q \leq 2$. Мы не будем подробно воспроизводить эти рассуждения, а только укажем приближаемую функцию из класса $B_{1,\theta}^r$, которую следует использовать вместо функции $g(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ из [5; гл. 3, § 1].

Итак, рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sum_{k \in \rho(s^*)} \prod_{j=1}^d |k_j|^{-r_1} e^{i(k,x)},$$

где $s^* = (s_1^*, \dots, s_d^*)$ – вектор, подобранный согласно проводимым в [5; гл. 3, § 1] рассуждениям и который удовлетворяет условию $(s^*, 1) \leq n$. Числа $n \in \mathbb{N}$

и M связаны посредством соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Легко убедиться, что функция $C_1 g_1(x)$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$.

Действительно, поскольку функция

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу H_1^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$ (см., например, [5; гл. 2, § 3]), то согласно теореме Б можем записать

$$\|A_s(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 2^{-r_1 \|s\|_1}, \quad s \in \mathbb{N}^d.$$

Следовательно,

$$\|g_1\|_{B_{1,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(g_1, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{(s^*, 1)} \|A_{s^*}(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 1,$$

т.е. $C_1 g_1(x) \in B_{1,\theta}^r$.

Затем, продолжив рассуждения из [5; гл. 3, § 1], приходим к искомой оценке снизу в теореме 1.1.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Порядок поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 < p \leq q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, установлен в [1]. Что касается поперечников $d_M(W_{1,\alpha}^r, L_q)$ и $d_M(H_1^r, L_q)$, $1 < q \leq 2$, а также $d_M(B_{1,\theta}^r, L_q)$, $1 < q \leq 2$, $\theta \in (q, \infty)$, то вопрос об их порядках, по-видимому, остается открытым.

Теперь перейдем к получению оценки поперечника $d_M(B_{1,\theta}^r, L_q)$ в случае $2 \leq q < \infty$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $2 \leq q < \infty$, $r_1 > 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \quad (5)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала оценку сверху. Согласно неравенству разных метрик по отношению к полиному $A_s(f, x)$, $f \in B_{1,\theta}^r$, можем записать

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\gg \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)\left(\frac{1}{2}-1\right)\theta} \|A_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\sum_s 2^{\left(s, r - \frac{1}{2}\right)\theta} \|A_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $r - 1/2$ обозначает вектор с координатами $r_j - 1/2$, $j = \overline{1, d}$. Из (6) заключаем, что $B_{1,\theta}^r \subset B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{2}}$. Следовательно, воспользовавшись оценкой из [2] (см. также [3])

$$d_M(B_{2,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

$r_1 > 1/2$, $2 \leq q < \infty$, получим

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_q) \ll d_M(B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{2}}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Оценка сверху в (5) доказана.

Докажем теперь соответствующую оценку снизу. Пусть сначала $\theta \in [1; 2]$. В таком случае искомая оценка следует непосредственно из теоремы 1.1 при $q = 2$. При рассмотрении случая $2 < \theta \leq \infty$ воспользуемся следующими соображениями.

Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, обозначает множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x, y)\|_{q_1, q_2} = \left\| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \right\|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x \in \pi_d$, а затем по переменной $y \in \pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ определим величину

$$\tau_M(f)_{q_1, q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1, q_2},$$

где $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$, которая называется наилучшим билинейным приближением функции $f(x)$. Для функционального класса F полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1, q_2}.$$

Пусть F – некоторый класс функций и $f(x)$ – фиксированная функция из F . Обозначим через F_f множество, состоящее из функций вида $f(x - y)$, которые получаются из $f(x)$ сдвигами аргумента $x \in \pi_d$ на произвольный вектор $y \in \pi_d$. Тогда имеет место равенство (см., например, [5; гл. 4, введение])

$$\tau_M(f(x - y))_{q_1, \infty} = d_M(F_f, L_{q_1}). \quad (7)$$

Следовательно, если функциональный класс F инвариантен относительно сдвига аргумента функций $f \in F$, то согласно (7) значения величин $\tau_M(f(x - y))_{q_1, \infty}$ могут служить оценками снизу для поперечников $d_M(F, L_{q_1})$. Этим обстоятельством мы и воспользуемся в последующих рассуждениях.

Не ограничивая общности, достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. По заданному M подберем $n \in \mathbb{N}$ таким, чтобы для количества элементов множества

$Q_n^1 = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ выполнялись соотношения $|Q_n^1| \asymp M$ и $|Q_n^1| > M$. Заметим, что $|Q_n^1| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Рассмотрим функцию

$$g_2(x) = C_2 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j, \quad C_2 > 0,$$

где $\rho^+(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$.

Понятно, что в случае $\theta = \infty$ множитель $n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ в определении функции $g_2(x)$ заменяется единицей.

Покажем, что функция $g_2(x)$ при соответствующем выборе постоянной $C_2 > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Пусть $1 \leq \theta < \infty$. Как отмечалось выше, для функции

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k > 0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

имеет место соотношение

$$\|A_s(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 2^{-\|s\|_1 r_1}, \quad s \in \mathbb{N}^d.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{B_{1,\theta}^r} &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r_1}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1, \end{aligned}$$

т.е. $g_2 \in B_{1,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$.

Легко видеть, что функция

$$g_2(x) = C_2 \sum_{n \leq (s,1) \leq n+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу $B_{1,\infty}^r$.

Далее, нам понадобится известный результат Шмидта [10], который формулируем в несколько более общей форме (см., например, [5; введение]).

ТЕОРЕМА Г. Пусть $\|K(x, y)\|_{2,2} < \infty$, K – интегральный оператор с ядром $K(x, y)$, K^* – оператор, сопряженный оператору K , и λ_j – невозрастающая последовательность собственных чисел оператора K^*K . Тогда

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| K(x, y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,2} = \left(\sum_{l=M+1}^{\infty} \lambda_l \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, пусть G – интегральный оператор

$$(Gf)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} g_2(x-y)f(y) dy,$$

G^* – оператор, сопряженный к G , и λ_l – собственные числа оператора G^*G , которые расположены в невозрастающем порядке. Поскольку λ_l совпадают с числами $bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \prod_{j=1}^d k_j^{-2r_1} = bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \tilde{\lambda}_l$, $b > 0$ (соответственно, $\lambda_l = b\tilde{\lambda}_l$ при $\theta = \infty$), расположенными в порядке невозрастания, то согласно теореме Г будем иметь

$$\begin{aligned} \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| g_2(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,2} &\asymp \left(\sum_{l \geq M+1} \tilde{\lambda}_l \right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\ &\geq n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+d} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+d} 2^{-\|s\|_1(2r_1-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \\ &\asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, вследствие (8) можем записать при $2 \leq q_1 < \infty$

$$\tau_M(g_2(x-y))_{q_1, \infty} \geq \tau_M(g_2(x-y))_{2,2} \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$$

и согласно (7)

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_{q_1}) \gg \tau_M(g_2(x-y))_{q_1, \infty} \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Оценка (5) дополняет результат о порядке поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 < p < 2 \leq q < \infty$, который получен в [2] (см. также [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Точные по порядку оценки поперечников $d_M(W_{1,\alpha}^r, L_q)$ и $d_M(H_1^r, L_q)$, $2 \leq q < \infty$, установлены В.Н. Темляковым (см., например, [5; гл. 3, §§ 1, 2]). Важно отметить, что при этом имеет место соотношение

$$d_M(W_{1,\alpha}^r, L_q) \asymp d_M(H_1^r, L_q) \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{2})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \quad (9)$$

Если же сопоставить (9) с (5), то видим, что

$$d_M(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp d_M(F_1^r, L_q) (\log^{\nu-1} M)^{-\min\{\frac{1}{\theta}; \frac{1}{2}\}},$$

где F_1^r обозначает класс $W_{1,\alpha}^r$ либо H_1^r .

Теперь перейдем к установлению точных по порядку оценок колмогоровских поперечников $d_M(B_{\infty,\theta}^r, L_q)$, $1 < q < \infty$. Здесь так же, как и для классов $B_{1,\theta}^r$, нам будет удобно рассмотреть отдельно случаи $1 < q < 2$ и $2 \leq q < \infty$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $r_1 > 0$, $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$d_M(B_{\infty, \theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (10) следует из известного результата о приближении классов $B_{q, \theta}^r$ в пространстве L_q , $2 \leq q < \infty$, ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{(s, \gamma') \leq n} \delta_s(f, x)$.

В [1] установлено, что при $r_1 > 0$, $2 \leq q < \infty$ и $1 \leq \theta < \infty$

$$\sup_{f \in B_{q, \theta}^r} \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \quad (11)$$

Поэтому, подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ из условия $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и воспользовавшись (11), будем иметь

$$d_M(B_{\infty, \theta}^r, L_q) \ll d_M(B_{q, \theta}^r, L_q) \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Соответствующую оценку снизу достаточно получить при $\nu = d$. Пусть сначала $\theta \in [1, 2]$. В этом случае необходимая оценка следует из оценки поперечника $d_M(B_{\infty, \theta}^r, L_2)$, который оценивается с помощью тех же рассуждений, что и поперечник $d_M(W_{p, \alpha}^r, L_q)$, $2 \leq p \leq q < \infty$ (см. [5; гл. 3, § 1]). При этом вместо приближаемой там функции

$$f(x) = \left(\prod_{j=1}^d k_j^0 \right)^{-r_1} e^{i(k^0, x)} \in W_{p, \alpha}^r, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

нужно рассмотреть функцию

$$g(x) = 2^{-(s^0, r)} e^{i(k^0, x)} \in B_{\infty, \theta}^r,$$

где $s^0 = (s_1^0, \dots, s_d^0)$ – вектор, для которого $2^{s_j^0-1} \leq |k_j^0| < 2^{s_j^0}$, $s_j^0 \in \mathbb{N}$, а $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0)$ – вектор, который построен в [5; гл. 3, § 1].

Пусть теперь $2 < \theta < \infty$. Подберем по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$ и обозначим

$$S_n = \{s : \|s\|_1 = n, s_j - \text{четные числа}\},$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s), \quad \rho^+(s) = \rho(s) \cap \mathbb{Z}_+^d.$$

Заметим, что $|\overline{Q}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Пусть $T_{\overline{Q}_n}$ обозначает множество тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из $\overline{Q}_n$. В [11] В. Н. Темляковым установлена оценка

$$d_M(H_{\infty}^r \cap T_{\overline{Q}_n}, L_q) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}, \quad q > 1, \quad r_1 > 0, \quad (12)$$

из которой легко получить искомую оценку снизу поперечника $d_M(B_{\infty, \theta}^r, L_q)$, $2 < \theta < \infty$.

Действительно, поскольку для $f \in H_\infty^r \cap T_{\overline{Q}_n}$ выполнено соотношение

$$\|A_s(f, x)\|_\infty \ll 2^{-(s,r)}, \quad s \in S_n,$$

то для величины $\|f\|_{B_{\infty,\theta}^r \cap T_{\overline{Q}_n}}$ можем записать

$$\|f\|_{B_{\infty,\theta}^r \cap T_{\overline{Q}_n}} = \left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Следовательно, если $f \in H_\infty^r \cap T_{\overline{Q}_n}$, то функция $C_3 n^{-\frac{d-1}{\theta}} f(x)$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ принадлежит классу $B_{\infty,\theta}^r \cap T_{\overline{Q}_n}$. Поэтому, воспользовавшись оценкой (12), будем иметь

$$\begin{aligned} d_M(B_{\infty,\theta}^r, L_q) &\gg d_M(B_{\infty,\theta}^r \cap T_{\overline{Q}_n}, L_q) \gg d_M(H_\infty^r \cap T_{\overline{Q}_n}, L_q) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\ &\gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Оценку (10) легко распространить и на случай $1 < q < 2$, но при некотором ограничении на параметр θ .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $r_1 > 0$, $1 < q < 2$ и $2 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$d_M(B_{\infty,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (13) следует из (10) согласно неравенству $\|\cdot\|_q < \|\cdot\|_2$, $1 < q < 2$. Соответствующая оценка снизу получена при доказательстве предыдущей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Точные по порядку оценки поперечников $d_M(H_\infty^r, L_q)$ и $d_M(W_{\infty,\alpha}^r, L_q)$, $1 < q < 2$, получены В. Н. Темляковым [11], Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым [12] соответственно.

§ 2. Тригонометрические поперечники классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q

Известно [2], [3], что порядки колмогоровских поперечников $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$ в случаях $1 < p \leq 2 < q < \infty$ и $2 < p < q < \infty$ не реализуются подпространствами тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. В связи с этим обстоятельством естественно возникает вопрос: можно ли выбрать M экспонент $\{e^{i(k^j, x)}\}_{j=1}^M$ так, чтобы натянутое на них подпространство реализовало порядки колмогоровских поперечников в отмеченных случаях? Частично ответ на этот вопрос будет получен в настоящем параграфе при исследовании тригонометрических поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q при $1 \leq p < 2 \leq q < p/(p-1)$.

Пусть $F \subset L_q$ – некоторый функциональный класс. Тригонометрический поперечник класса F в пространстве L_q (обозначается $d_M^T(F, L_q)$) определяется следующим образом [13]:

$$d_M^T(F, L_q) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; x)} \|f(x) - t(\Omega_M; x)\|_q,$$

где $t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)}$, $\Omega_M = \{k^1, \dots, k^M\}$ – набор векторов $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, c_j – произвольные числа.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $1 \leq p < 2 < q < p/(p-1)$, $r_1 > 1$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда

$$d_M^T(B_{p, \theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу в (14) получается как следствие известных результатов. Именно в случае $1 < p < 2$ она следует из соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(B_{p, \theta}^r, L_q)$ [2] (см. также [3]), а в случае $p = 1$ и $1 \leq \theta < \infty$ – из теоремы 1.2. Если же $p = 1$ и $\theta = \infty$, то требуемую оценку получаем, воспользовавшись оценкой поперечника $d_M(H_1^r, L_q)$, установленной В. Н. Темляковым (см., например, [5; гл. 3, § 2]).

Для доказательства в (14) оценки сверху нам понадобится вспомогательное утверждение [14].

ЛЕММА 2.1. Пусть $2 \leq q < \infty$. Тогда для любого тригонометрического полинома

$$P(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M e^{i(k^j, x)}$$

и для любого $N \leq M$ найдется тригонометрический полином $P(\Omega_N; x)$, содержащий не более N гармоник и такой, что

$$\|P(\Omega_M; x) - P(\Omega_N; x)\|_q \ll MN^{-\frac{1}{2}},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, все коэффициенты $P(\Omega_N; x)$ одинаковы и не превышают MN^{-1} .

Итак, по заданному M подберем $l \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялись соотношения $2^l l^{\nu-1} \asymp M$ и $2^l l^{\nu-1} \geq 2M$, и обозначим через B_l множество векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, для которых $(s, \gamma') < l$. Далее, через S_l обозначим множество векторов $s \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяющих неравенству $l \leq (s, \gamma') < \alpha l$, $\alpha = (r_1 - 1/p + 1/2)/(r_1 - 1/p + 1/q)$, и каждому вектору $s \in S_l$ поставим в соответствие число

$$N_s = [2^{lr_1} 2^{(s, \gamma)(1-r_1)}], \quad (15)$$

где $[a]$ – целая часть числа a .

Нетрудно убедиться, что для чисел N_s , $s \in S_l$, справедлива оценка

$$\sum_{s \in S_l} N_s \ll M.$$

Действительно, согласно соотношению [5; введение]

$$\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-\beta(s, \gamma)} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu-1}, \quad \beta > 0, \quad (16)$$

имеем

$$\sum_{s \in S_l} N_s \ll 2^{lr_1} \sum_{l \leq (s, \gamma') < \alpha l} 2^{-(s, \gamma)(r_1-1)} \ll 2^{lr_1} 2^{-l(r_1-1)} l^{\nu-1} = 2^l l^{\nu-1} \asymp M.$$

Также легко проверить, что если $s \in S_l$ и при этом $(s, 1) \geq l$, то $2^{(s, 1)} \geq 2^{lr_1} 2^{(s, \gamma)(1-r_1)}$. Если же $s \in S_l$ и $(s, 1) < l$, то подмножество тех векторов s , для которых $2^{(s, 1)} < 2^{lr_1} 2^{(s, \gamma)(1-r_1)}$, обозначим через $\mathcal{D}_l$.

Далее, пусть $t(\Omega_{N_s}; x)$ – тригонометрический полином, которым приближается “блок” $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)}$ согласно лемме 2.1, т.е.

$$\|t_s(x) - t(\Omega_{N_s}; x)\|_q \ll 2^{(s, 1)} N_s^{-\frac{1}{2}};$$

при этом $\Omega_{N_s} \subset \rho(s)$ и все коэффициенты полинома $t(\Omega_{N_s}; x)$ одинаковы. Покажем, что подпространство тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из объединения множеств $\overline{Q}_l^{\gamma'} = \bigcup_{s \in B_l \cup \mathcal{D}_l} \rho(s)$ и $P_l^{\gamma'} = \bigcup_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \Omega_{N_s}$ реализует порядок поперечника $d_M^T(B_{p, \theta}^r, L_q)$.

Пусть $f(x)$ – некоторая функция из класса $B_{p, \theta}^r$. Рассмотрим полином

$$t(x) = \sum_{s \in B_l \cup \mathcal{D}_l} \delta_s(f, x) + \sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} (t(\Omega_{N_s}; x) * \delta_s(f, x)) \quad (17)$$

и убедимся, что он доставляет требуемую оценку приближения для $f(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x) - t(x)\|_q &\leq \left\| \sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} (\delta_s(f, x) - \delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}; x)) \right\|_q \\ &\quad + \left\| \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_q = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим сначала слагаемое $\mathcal{I}_2$. В силу (3) и неравенства разных метрик получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} \|\delta_s(f, x)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} \|A_s(f, x)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{2(s, 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для того чтобы продолжить оценку (19), рассмотрим несколько случаев.

Пусть $2 < \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме (19) неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2$ и затем воспользовавшись соотношением (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{2(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p^2 2^{-2(s, \gamma) \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{-2(s, \gamma) \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p, \theta}^r} 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} l^{(\nu-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)} \leq 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} l^{(\nu-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае $\theta = \infty$, воспользовавшись тем, что согласно теореме Б для $f \in B_{p, \infty}^r$ выполнено соотношение $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}$, из (19) находим

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{-2(s, \gamma) \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} l^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (21)$$

Если же $\theta \in [1; 2]$, то согласно неравенству (см. [15])

$$\left(\sum_k |a_k|^{\mu_2} \right)^{\frac{1}{\mu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\mu_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad 1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \infty, \quad (22)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{2(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p^2 2^{-2(s, \gamma) \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\leq 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \leq 2^{-\alpha l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая значение α , полученные оценки (20), (21) и (23) можно записать в виде

$$\mathcal{J}_2 \ll 2^{-l \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)} l^{(\nu-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \quad (24)$$

Теперь перейдем к установлению оценки слагаемого $\mathcal{J}_1$. Рассмотрим для каждого вектора $s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l$ линейный оператор T_s , действующий на функцию $f(x)$ по правилу

$$(T_s f)(x) = f(x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right).$$

Докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2.2. Пусть $1 < p < 2 < q < p/(p-1)$. Тогда норма оператора T_s , действующего из L_p в L_q ($\|T_s\|_{p \rightarrow q}$), удовлетворяет соотношению

$$\|T_s\|_{p \rightarrow q} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|T_s f\|_q \ll 2^{(s,1)} N_s^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}\right)},$$

где $p' = p/(p-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно интерполяционной теореме Рисса–Торина (см., например, [16])

$$\|T_s\|_{p \rightarrow q} \leq \|T_s\|_{2 \rightarrow 2}^{1-\lambda} \|T_s\|_{1 \rightarrow q^*}^{\lambda}, \quad (25)$$

где параметры λ и q^* определяются из равенств

$$\lambda = \frac{2}{p} - 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{q^*}.$$

Оценим величины $\|T_s\|_{2 \rightarrow 2}$ и $\|T_s\|_{1 \rightarrow q^*}$.

Принимая во внимание, что коэффициенты полинома $t(\Omega_{N_s}; x)$ одинаковы и не превышают $2^{(s,1)} N_s^{-1}$, в силу равенства Парсеваля будем иметь

$$\|T_s\|_{2 \rightarrow 2} \ll 2^{(s,1)} N_s^{-1}. \quad (26)$$

Далее, воспользовавшись обобщенным неравенством Минковского и леммой 2.1, можем записать

$$\|T_s f\|_{q^*} \leq \|f\|_1 \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right\|_{q^*} \ll \|f\|_1 2^{(s,1)} N_s^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда согласно определению $\|T_s\|_{1 \rightarrow q^*}$ находим

$$\|T_s\|_{1 \rightarrow q^*} \ll 2^{(s,1)} N_s^{-\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Подставив (27) и (26) в (25) и выполнив элементарные преобразования, приходим к требуемой оценке.

Лемма доказана.

Переходя непосредственно к оценке слагаемого $\mathcal{J}_1$, будем предполагать сначала, что $p > 1$. Воспользовавшись последовательно теоремой Литтлвуда–Пэли, неравенством Минковского и леммой 2.2, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll \left\| \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} |\delta_s(f, x) - (\delta_s(f, x) * t(\Omega_{N_s}; x))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\ &\leq \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \left\| \delta_s(f, x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Omega_{N_s}; x) \right) \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \|T_s \delta_s(f, x)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \|T_s\|_{p \rightarrow q}^2 \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{2(s,1)} N_s^{-\left(1 + \frac{2}{p'}\right)} \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив в (28) вместо N_s их значения из (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-\frac{lr_1(1+\frac{2}{p'})}{2}} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{2(s,1)} 2^{(s,\gamma)(r_1-1)(1+\frac{2}{p'})} \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{-\frac{lr_1(1+\frac{2}{p'})}{2}} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)((r_1-1)(1+\frac{2}{p'})+2-2r_1)} 2^{2(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, аналогично тому, как и при оценке слагаемого $\mathcal{J}_2$, нам понадобится рассмотреть три случая.

Пусть $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда, приняв во внимание, что согласно условию теоремы $2(r_1 - 1)/p' + 1 - r_1 < 0$, и воспользовавшись неравенством (22), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}(1+\frac{2}{p'})} 2^{\frac{l}{2}(\frac{2}{p'}(r_1-1)+1-r_1)} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll 2^{-l(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 2^{-l(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \\ &\leq 2^{-l(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} = 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (30)$$

Пусть $2 < \theta < \infty$. В этом случае, применив к последней сумме (29) неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}(1+\frac{2}{p'})} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)(\frac{2}{p'}(r_1-1)+1-r_1)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, воспользовавшись соотношением (16), продолжим оценку (31):

$$\begin{aligned} &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}(1+\frac{2}{p'})} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\quad \times 2^{\frac{l}{2}(r_1-1)(\frac{2}{p'}-1)} l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \leq 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \\ &\leq 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned} \quad (32)$$

Наконец, в случае $\theta = \infty$, воспользовавшись тем, что $\|\delta_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s,r)}$, $f \in B_{p,\infty}^r$, и проведя соответствующие преобразования в последней сумме (29), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}(1+\frac{2}{p'})} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)((r_1-1)(1+\frac{2}{p'})+2-2r_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}(1+\frac{2}{p'})} 2^{l(\frac{2}{p'}(r_1-1)+1-r_1)} l^{\frac{\nu-1}{2}} = 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{\frac{\nu-1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, подставив (33), (32), (30) и (24) в (18) и учитывая соотношение $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|f(x) - t(x)\|_q &\ll 2^{-l(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} + \\ &\asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} +. \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемая оценка сверху поперечника $d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$ в случае $1 < p < 2$.

Теперь рассмотрим оставшийся случай $p = 1$. Пусть q_0 – некоторое число, удовлетворяющее условию $1 < q_0 < 2$, которое ниже будет уточнено. В таком случае для $\mathcal{J}_1$ можем записать (см. (28))

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \|T_s \delta_s(f, x)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \|T_s\|_{q_0 \rightarrow q}^2 \|\delta_s(f, x)\|_{q_0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} \|T_s\|_{q_0 \rightarrow q}^2 \|A_s(f, x)\|_{q_0}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{2(s,1)} N_s^{-\left(1 + \frac{2}{q_0}\right)} \|A_s(f, x)\|_{q_0}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, применив к $A_s(f, x)$ как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j неравенство разных метрик и подставив в (34) вместо N_s их значения из (15), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{2(s,1)} N_s^{-\left(1 + \frac{2}{q_0}\right)} 2^{2(s,1)\left(1 - \frac{1}{q_0}\right)} \|A_s(f, x)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}\left(1 + \frac{2}{q_0}\right)} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{2(s,1)\left(1 + \frac{1}{q_0}\right)} 2^{(s,\gamma)(r_1-1)\left(1 + \frac{2}{q_0}\right)} \|A_s(f, x)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}\left(1 + \frac{2}{q_0}\right)} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)\left(1 - r_1 + \frac{2r_1}{q_0}\right)} 2^{2(s,r)} \|A_s(f, x)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Теперь подберем число q_0 так, чтобы выполнялось неравенство $1 - r_1 + 2r_1/q_0' < 0$. Понятно, что такое $q_0 \in (1, 2)$ существует, поскольку согласно условию теоремы $r_1 > 1$. Далее нам понадобится рассмотреть три случая.

Пусть $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда, воспользовавшись сначала неравенством (22) и затем выполнив элементарные преобразования, получим оценку

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-l(r_1 - \frac{1}{2})} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll 2^{-l(r_1 - \frac{1}{2})} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \leq 2^{-l(r_1 - \frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (36)$$

В случае $2 < \theta < \infty$, применив к последней сумме (35) неравенство Гёльдера с показателем $\theta/2$ и воспользовавшись затем оценкой (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll 2^{-\frac{lr_1}{2}\left(1+\frac{2}{q_0}\right)} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)\left(1-r_1+\frac{2r_1}{q_0}\right)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \\ &\ll 2^{-l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \leq 2^{-l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} l^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Если же $\theta = \infty$, то из (35) следует оценка

$$\mathcal{J}_1 \ll 2^{-\frac{lr_1}{2}\left(1+\frac{2}{q_0}\right)} \left(\sum_{s \in S_l \setminus \mathcal{D}_l} 2^{(s,\gamma)\left(1-r_1+\frac{2r_1}{q_0}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} l^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (38)$$

Подставляя оценки (24) и (36)–(38) в (18) и учитывая, что $M \asymp 2^l l^{\nu-1}$, получаем необходимую оценку сверху поперечника $d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q)$.

Теорема доказана.

Сформулируем несколько следствий и затем прокомментируем полученный результат. Предварительно отметим, что порядки тригонометрических поперечников классов $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r в пространстве L_q , $1 \leq p < 2 < q < p/(p-1)$, анонсированы в [17] и могут быть получены из теоремы 2.1.

Полагая в теореме 2.1 $\theta = \infty$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $1 \leq p < 2 < q < p/(p-1)$, $r_1 > 1$. Тогда

$$d_M^T(H_p^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $2 \leq q < \infty$, $r_1 > 1$. Тогда

$$d_M^T(W_{1,\alpha}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Оценка сверху в (40) следует из оценки (39) согласно вложению $W_{1,\alpha}^r \subset H_1^r$, а снизу она является следствием соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(W_{1,\alpha}^r, L_q)$ [5; гл. 3, § 1].

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $1 < p < 2 < q < p'$, $r_1 > 1$. Тогда

$$d_M^T(W_{p,\alpha}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Поскольку $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,2}^r$ при $1 < p < 2$, то оценка сверху в (41) следует из (14) при $\theta = 2$. Оценка снизу является следствием соответствующей оценки колмогоровского поперечника $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_q)$ (см. [5; гл. 3, § 1]).

Обратим внимание, что оценка (40) не может быть получена из (41) предельным переходом при $p \rightarrow 1$.

Теперь прокомментируем полученный результат в сопоставлении его с известными оценками других аппроксимационных характеристик классов $B_{p,\theta}^r$.

Так, сопоставляя оценку колмогоровского поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_q)$ [2] (см. также оценку (5)) с оценкой (14), обнаруживаем, что при $1 \leq p < 2 < q < p'$, $r_1 > 1$

$$d_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q). \quad (42)$$

Таким образом, соотношение (42) в этой ситуации дает положительный ответ на сформулированный в начале параграфа вопрос.

Представляется также интересным сравнить результат теоремы 2.1 с соответствующей оценкой наилучших M -членных тригонометрических приближений $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$, которые изучались в [18]. Напомним, что

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q = \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q,$$

где $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, – всевозможные наборы из M векторов из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, c_j – произвольные числа. Заметим, что согласно определениям величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ и $d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$ справедливо неравенство

$$d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q) \geq e_M(B_{p,\theta}^r)_q.$$

Таким образом, сопоставляя результат теоремы 2.1 [18] с оценкой (14), обнаруживаем, что если $1 \leq p < 2 < q < p'$ и $r_1 > 1$, то

$$d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp e_M(B_{p,\theta}^r)_q \quad \text{при} \quad \theta \geq 2$$

и

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_q) (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < 2. \quad (43)$$

В связи с соотношением (43) следует отметить, что для классов $F_p^r = W_{p,\alpha}^r$ или $F_p^r = H_p^r$

$$d_M^T(F_p^r, L_q) \asymp e_M(F_p^r)_q, \quad 1 \leq p < 2 \leq q < p', \quad r_1 > 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае $1 < p \leq 2$, $q = 2$, который не рассмотрен в теореме 2.1, оценка снизу поперечника $d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_2)$ следует из известной оценки колмогоровского поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_2)$ [1; теорема 4], а сверху реализуется приближением ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье с соответствующим количеством гармоник [1; теорема 2]. Иными словами, при $1 < p \leq 2$, $r_1 > 1/p - 1/2$ и $1 \leq \theta \leq \infty$

$$d_M^T(B_{p,\theta}^r, L_2) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

В завершение параграфа получим оценку тригонометрического поперечника $d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q)$, $1 < q \leq 2$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 < q \leq 2$, $r_1 > 1 - 1/q$ и $1 \leq \theta < \infty$. Тогда

$$d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим в (44) оценку сверху, рассмотрев два случая.

Пусть $1 \leq \theta \leq q$. Тогда искомая оценка следует из приближения функций из классов $W_q^{r-1+\frac{1}{q}}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{k \in Q_n^r} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}, \quad (45)$$

где $Q_n^r = \bigcup_{(s, \gamma) \leq n} \rho(s)$, а число n подобрано по заданному M из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Действительно, воспользовавшись оценкой (см., например, [5; гл. 2, § 2])

$$\sup_{f \in W_q^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q \asymp 2^{-nr_1}, \quad 1 < q < \infty,$$

в силу определения тригонометрического поперечника и вложений (см. (4))

$$B_{1, \theta}^r \subset B_{1, q}^r \subset W_q^{r-1+\frac{1}{q}}$$

приходим к оценке

$$d_M^T(B_{1, \theta}^r, L_q) \ll d_M^T(W_q^{r-1+\frac{1}{q}}, L_q) \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{1}{q}}.$$

Покажем, что и в случае $q < \theta < \infty$ нужная оценка реализуется при приближении суммами Фурье вида (45). Пусть q_0 – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $1 < q_0 < q$. Тогда для $f \in B_{1, \theta}^r$ в силу неравенства [5; гл. 1, § 3]

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_p^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq p < q < \infty,$$

$\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q &= \left\| \sum_{(s, \gamma) > n} \delta_s(f, x) \right\|_q \ll \left(\sum_{(s, \gamma) > n} \|\delta_s(f, x)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left(\sum_{(s, \gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Далее, применив к $A_s(f, x)$ как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j неравенство разных метрик, продолжим оценку (46):

$$\begin{aligned} &\ll \left(\sum_{(s, \gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_1^q 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{q_0}\right)q} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{(s, \gamma) > n} \|A_s(f, x)\|_1^q 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \mathcal{J}_3. \end{aligned}$$

Применив теперь к полученному слагаемому $\mathcal{J}_3$ неравенство Гёльдера с показателем θ/q , будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-((s,r)-\|s\|_1)(1-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{1,\theta}^r} \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,r-1+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \leq \left(\sum_{(s,\gamma)>n} 2^{-(s,\bar{\gamma})(r_1-1+\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $r-1+1/q$ – вектор с координатами r_j-1+1/q , $j = \overline{1,d}$, а $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_d)$ – вектор с координатами $\bar{\gamma}_j = (r_j-1+1/q)/(r_1-1+1/q)$, $j = \overline{1,d}$. Поскольку $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = \overline{1,\nu}$ и $1 < \bar{\gamma}_j \leq \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1,d}$, то, воспользовавшись соотношением (16), из (47) приходим к оценке

$$\mathcal{J}_3 \ll 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+\frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

При доказательстве в (44) оценки снизу будем пользоваться рассуждениями, аналогичными тем, которые применялись В. Н. Темляковым при установлении оценки снизу тригонометрического поперечника $d_M^T(H_p^r, L_q)$, $1 < p \leq q \leq 2$ (см. [5; гл. 3, § 2]). Как уже отмечалось выше, при этом достаточно рассмотреть случай $\nu = d$. Обозначим через Θ_n множество

$$\Theta_n = \{s : s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}, \|s\|_1 = n\}$$

и, по-прежнему,

$$Q_n^1 = \bigcup_{s \in \Theta_n} \rho(s).$$

Напомним, что $|Q_n^1| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Подберем по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения $|Q_n^1| \asymp M$ и $|Q_n^1| \geq 4M$.

Искомую оценку снизу мы установим в несколько более общей ситуации. Именно вместо функций $e^{i(k^j, x)}$ будем рассматривать такие функции $v_j(x)$, у которых “номера” гармоник находятся во множестве $\rho(s^j)$, $s^j = (s_1^j, \dots, s_d^j)$, $j = \overline{1,M}$.

Пусть μ_n обозначает множество тех векторов $s \in \Theta_n$, для которых в $\rho(s)$ содержатся “номера” гармоник не более чем $\frac{1}{2}|\rho(s)|$ функций $v_j(x)$, $j = \overline{1,M}$. В таком случае согласно требованиям, налагаемым на функции $v_j(x)$, и условию $|Q_n^1| \geq 4M$ заключаем, что

$$|\mu_n| \geq \frac{1}{2}|\Theta_n|.$$

Рассмотрим каждое из множеств $\rho(s)$, $s \in \mu_n$. Обозначим те функции $v_j(x)$, гармоники которых попадают в $\rho(s)$, через $u_j(x)$, $j = \overline{1,L}$, и заметим, что поскольку $s \in \mu_n$, то $L \leq \frac{1}{2}|\rho(s)|$.

Пусть $K_1 = |\rho(s)|$ и $\{u_j(x)\}_{j=1}^{K_1}$ – система функций, которые, не ограничивая общности, можно считать ортонормированными. Здесь функции $u_j(x)$, $j = L+1, \dots, K_1$, дополняют систему $\{u_j(x)\}_{j=1}^L$ до базиса в $\mathcal{L}(\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \rho(s)})$. Тогда

$$e_k(x) = e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{K_1} a_j^k u_j(x), \quad k \in \rho(s),$$

$$\sum_{j=1}^{K_1} |a_j^k|^2 = \sum_{k \in \rho(s)} |a_j^k|^2 = 1. \quad (48)$$

Поэтому

$$\tilde{R}_k^2 = \left\| e_k(x) - \sum_{j=1}^L a_j^k u_j(x) \right\|_2^2 = \sum_{j=L+1}^{K_1} |a_j^k|^2 \quad (49)$$

и в силу (48)

$$\sum_{k \in \rho(s)} \tilde{R}_k^2 = K_1 - L \geq \frac{1}{2} K_1.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{l=1}^d |k_l|^{-r_1} e^{i(k,x)}$$

и исследуем уклонение функции $\varphi_s(x+y)$, $y \in \pi_d$, от ее суммы Фурье

$$S_L(\varphi_s(x+y), U)$$

порядка L по системе функций $U = \{u_j(x)\}_{j=1}^{K_1}$. Имеем

$$R_L(x, y) = \varphi_s(x+y) - S_L(\varphi_s(x+y), U) = \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{l=1}^d |k_l|^{-r_1} e^{i(k,y)} \sum_{j=L+1}^{K_1} a_j^k u_j(x).$$

Следовательно,

$$\|R_L(\cdot, y)\|_2^2 = \sum_{j=L+1}^{K_1} \left| \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{l=1}^d |k_l|^{-r_1} a_j^k e^{i(k,y)} \right|^2$$

и поэтому

$$(2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \|R_L(\cdot, y)\|_2^2 dy = \sum_{j=L+1}^{K_1} \sum_{k \in \rho(s)} |a_j^k|^2 \prod_{l=1}^d |k_l|^{-2r_1}$$

$$\geq 2^{-2(s,1)r_1} \sum_{j=L+1}^{K_1} \sum_{k \in \rho(s)} |a_j^k|^2 = 2^{-2(s,1)r_1} (K_1 - L) \geq \frac{1}{2} 2^{-2(s,1)r_1} K_1.$$

Таким образом, существует вектор $y^* \in \pi_d$ такой, что

$$\|R_L(\cdot, y^*)\|_2^2 \geq \frac{1}{2} 2^{-2(s,1)r_1} K_1,$$

и для функции $f_s(x) = \varphi_s(x + y^*)$ и произвольных чисел β_j , $j = \overline{1, L}$, можем записать

$$\left\| f_s(x) - \sum_{j=1}^L \beta_j u_j(x) \right\|_2 \gg 2^{-2(s,1)r_1} K_1 \asymp 2^{-2(s,1)(r_1 - \frac{1}{2})}. \quad (50)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(x) = C_3 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{s \in \mu_n} f_s(x).$$

Нетрудно убедиться, что функция $f(x)$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$, $q < \theta < \infty$. Действительно, как отмечалось при доказательстве теоремы 1.1, функция

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу H_1^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}_+^d$ и поэтому $\|A_s(F_{r_1}, x)\|_1 \ll 2^{-(s,1)r_1}$, $s \in \mathbb{N}^d$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \left(\sum_{s \in \mu_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_{r_1}, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\ &\ll \left(\sum_{s \in \mu_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} = 1, \end{aligned}$$

т.е. $f \in B_{1,\theta}^r$.

Теперь получим оценку снизу для величины $\|f(x) - \sum_{j=1}^M b_j v_j(x)\|_q$, воспользовавшись установленной выше оценкой (50). Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение (см. [5; гл. 1, § 3]).

ЛЕММА 2.3. Пусть $1 < q < p \leq \infty$ и $f \in L_q^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_q^q \gg \sum_s \|\delta_s(f, x)\|_p^{q2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})q}}. \quad (51)$$

Воспользовавшись сначала оценкой (51), а затем (50), будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \left\| f(x) - \sum_{j=1}^M b_j v_j(x) \right\|_q \\
 & \gg \left(\sum_{s \in \mu_n} \left\| f_s(x) - \sum_{j=1}^{L_s} b_j^s u_j^s(x) \right\|_2^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) q} \right)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\
 & \gg \left(\sum_{s \in \mu_n} 2^{-(s,1) \left(r_1 - \frac{1}{2} \right) q} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) q} \right)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\
 & = \left(\sum_{s \in \mu_n} 2^{-(s,1) q \left(r_1 - 1 + \frac{1}{q} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} = 2^{-n \left(r_1 - 1 + \frac{1}{q} \right)} |\mu_n|^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\
 & \asymp 2^{-n \left(r_1 - 1 + \frac{1}{q} \right)} n^{(d-1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta} \right)}. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание, что $M \asymp 2^n n^{d-1}$, из (52) приходим к искомой оценке

$$d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q) \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{1}{q}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Порядки тригонометрических поперечников классов $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r известны и имеют вид

$$d_M^T(W_{1,\alpha}^r, L_q) \asymp d_M^T(H_1^r, L_q) \asymp M^{-(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{2}{q}}, \tag{53}$$

$1 < q \leq 2$.

Соотношение (53) является следствием оценок наилучших M -членных тригонометрических приближений ядер Бернулли $F_r(x, \alpha)$ [17], а также оценки приближения классов H_1^r ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье с соответствующим количеством гармоник (см. [5; гл. 2, § 2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Сопоставив результат теоремы 2.2 с оценкой величины $e_M(B_{1,\theta}^r)_q$, $1 < q \leq 2$ (см. [18; теорема 3.1]), видим, что при $q < \theta < \infty$

$$d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp e_M(B_{1,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Если же $1 \leq \theta \leq q$, то

$$d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q) \asymp M^{-(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1 + \frac{2}{q}},$$

а

$$e_M(B_{1,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 - 1 + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

т.е. величины $d_M^T(B_{1,\theta}^r, L_q)$ и $e_M(B_{1,\theta}^r)_q$ в этом случае имеют разные порядки.

Список литературы

- [1] А. С. Романюк, “Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q ”, *Укр. матем. журн.*, **43**:10 (1991), 1398–1408.
- [2] А. С. Романюк, “О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных”, *Укр. матем. журн.*, **45**:5 (1993), 663–675.
- [3] Э. М. Галеев, “Поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ ”, *Матем. заметки*, **69**:5 (2001), 656–665.
- [4] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
- [5] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Труды МИАН*, **178** (1986), 1–112.
- [6] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [7] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Труды МИАН*, **187** (1989), 143–161.
- [8] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, *Труды МИАН*, **38** (1951), 244–278.
- [9] D. Jakson, “Certain problem of closest approximation”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (2), **39**:12 (1933), 889–906.
- [10] E. Schmidt, “Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I”, *Math. Ann.*, **63** (1907), 433–476.
- [11] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Труды МИАН*, **189** (1988), 138–168.
- [12] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, “О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 ”, *Матем. заметки*, **56**:5 (1994), 57–86.
- [13] Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178.
- [14] Э. С. Белинский, Э. М. Галеев, “О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, № 2, 3–7.
- [15] Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [16] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.
- [17] Э. С. Белинский, “Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники”, *Докл. АН СССР*, **284**:6 (1985), 1294–1297.
- [18] А. С. Романюк, “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100.