Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тихонов, Вложения действий решетки в потоки с многомерным временем, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 97–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 04:37:31

УДК 517.987.5+938.5

С. В. Тихонов

Вложения действий решетки в потоки с многомерным временем

В работе исследуется типичность вложения действий решетки в потоки с многомерным временем. В частности, получены ответы на вопросы де ла Рю и де Сэм Лазаро о типичности вложения действия двумерной решетки в поток и вложения преобразования в инъективные действия потоков с многомерным временем. Кроме того, показано, что типичное преобразование имеет континуум корней в любом заранее фиксированном массивном множестве.

Библиография: 15 названий.

Введение

Эта работа посвящена многомерным аналогам вопросов о вложении преобразования в поток и о существовании у него корней.

Сохраняющее меру преобразование T вкладывается в (непрерывный) поток $g = \{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, если $g^1 = T$.

Такое преобразование T можно отождествить с порожденным им $\mathbb{Z}$ -действием $\{T^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, а непрерывный поток также называется *действием группы* $\mathbb{R}$.

Мы будем использовать и это отождествление, и это название.

Если преобразование T вкладывается в поток g , то $g^{1/n}$ есть корень порядка n из T .

Имеет ли преобразование корни? Можно ли его вложить в поток?

Есть много результатов на эту тему для конкретных преобразований; нас же будет интересовать “категорная” постановка вопроса, т.е. каков ответ в типичном случае. Последнее требует некоторых пояснений. Во множестве всех преобразований можно ввести метрику, относительно которой оно – польское (полное сепарабельное и метрическое) пространство. Если каким-либо свойством обладают элементы лишь тощего множества (счетного объединения нигде не плотных множеств), то говорят, что свойство нетипично. Если же им обладают элементы существенного (дополнения к тощему) множества, то говорят, что свойство типично и выполняется “для типичного элемента”¹.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.1).

¹Конечно, эта классификация не полна: свойство может не быть типичным, но при этом не быть нетипичным.

По существу, автором поставленных вопросов можно считать Халмоша [1]. Некоторая неопределенность авторства связана с тем, что у Халмоша отсутствует четкая категорная формулировка. С другой стороны, вопрос о корнях именно в такой формулировке ставился в устной форме Рохлиным и Колмогоровым, а вопрос о вложении типичного преобразования в поток встречался, например, в статье Кинга [2].

Долгое время эти вопросы оставались без ответа. По-видимому, первый результат в этом направлении был получен только в 1998 году Глазнером и Кингом [3] и носит название “динамическая альтернатива”. Следствием из него является то, что в категорном смысле ответ на эти (и многие другие) вопросы существует.

ДИНАМИЧЕСКАЯ АЛЬТЕРНАТИВА. *Если множество преобразований (или действий счетной абелевой группы) инвариантно относительно сопряжений и является непрерывным образом борелевского множества, то оно либо существенное, либо тощее.*

Непрерывные образы борелевских множеств называются *аналитическими множествами*.

Множество преобразований, имеющих квадратный корень, аналитично, так как является непрерывным образом множества всех преобразований при отображении $T \mapsto T^2$. Несложно показать, что динамическая альтернатива применима и к отображениям, вкладываемым в поток.

Кинг [2] доказал, что преобразования, имеющие корни всех порядков, типичны. В свете динамической альтернативы достаточно было показать, что множество преобразований, имеющих корни фиксированного порядка, не может быть тощим. Для непрерывного отображения φ между польскими пространствами рассматривалось множество $\text{Loc Dep } \varphi$ точек локальной плотности, т.е. тех элементов, образ при отображении φ (для краткости, φ -образ) любой окрестности которых всюду плотен в некоторой окрестности φ -образа самого элемента. Далее применялось следующее топологическое соображение.

ЛЕММА ДОГЕРТИ. *Пусть φ – непрерывное отображение из польского пространства B в польское пространство D . Если $\text{Loc Dep } \varphi$ всюду плотно в B , то $\varphi(B)$ не может быть тощим в D .*

Кингу удалось показать, что множество $\text{Loc Dep } \varphi$, где $\varphi: T \mapsto T^n$, $n \in \mathbb{N}$, всюду плотно в множестве всех преобразований, что и завершило доказательство.

В своей статье Кинг сформулировал несколько вопросов, из которых стоит выделить вопрос о вложении типичного преобразования в поток и вопрос о типичности единственности корня. Степин [4], считая маловероятным, чтобы множество корней из типичного преобразования было конечным, поставил вопрос о мощности этого множества.

Ответ на него получил Агеев: типичное преобразование имеет континуум корней [5], [6]. Для доказательства он несколько модернизировал лемму Догерти, показав, что в ее условиях φ -образ любого не тощего множества также

не будет тощим множеством. Подход Агеева характеризуется тем, что результаты о преобразованиях получаются из результатов для действий некоторых неклассических групп.

Де ла Рю и де Сэм Лазаро [7] доказали, что типичное преобразование вкладывается в поток. Они заметили, что каждый поток, включающий апериодический поворот окружности, есть точка локальной плотности отображения $\{g^\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{R}} \mapsto g^1$. Это дало возможность применить лемму Догерти.

Степин и Еременко [8], [9] предложили подход, который позволил доказать, что типичное преобразование одновременно имеет континуум корней всех порядков и вкладывается в континуум потоков.

Описать этот подход в нескольких словах достаточно сложно. В отличие от подхода Агеева авторы не ограничились рассмотрением действий неклассических групп, а рассмотрели некоторое замкнутое множество преобразований, не совпадающее со всем пространством (множество $\mathbb{Z}_2$ -расширений; см. подробнее об этом пространстве в §1 настоящей работы). С одной стороны, доказывать теоремы о типичности в пространстве $\mathbb{Z}_2$ -расширений несколько сложнее (это пространство не является “пространством всех действий”, в нем надо устанавливать дополнительные факты, чтобы можно было применить динамическую альтернативу). С другой стороны, это пространство представимо в виде декартова произведения двух польских пространств (одно из которых – множество “баз” – совпадает с множеством всех преобразований). Это весьма полезно, так как структура существенных множеств в декартовых произведениях довольно хорошо изучена.

ТЕОРЕМА 0.1 (Куратовский–Улам). *Если B, D – польские пространства и множество $E \subset B \times D$ существенно, то для типичного $b \in B$ найдется существенное в D множество D_b такое, что $\{b\} \times D_b \subset E$.*

Применяя лемму Догерти и динамическую альтернативу, Степин и Еременко показали, что множество $\mathbb{Z}_2$ -расширений, имеющих корни, существенно. Однако структуру, задаваемую теоремой Куратовского–Улама, оно может иметь только в случае, если базы корней из $\mathbb{Z}_2$ -расширений с фиксированной типичной базой образуют континуальное множество. Результат Степина и Еременко для корней получается проекцией на множество баз из пространства $\mathbb{Z}_2$ -расширений.

Некоторые аналоги приведенных результатов справедливы для действий с многомерным временем.

Чтобы их сформулировать, нам понадобится дать общие определения инъективности действия и вложения одного действия в другое.

Действие g группы Γ называется *инъективным*, если отображение $\gamma \mapsto g^\gamma$ из Γ в множество всех сохраняющих меру преобразований инъективно. Это эквивалентно тому, что для $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ имеем $g^\gamma \neq I$.

Действие g группы Λ *вкладывается* в действие h группы Γ , если существует такое вложение v группы Λ в Γ (сохраняющее групповые свойства и непрерывное), что $g^\lambda = h^{v\lambda}$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

В этом определении не требуется, чтобы v было одинаковым для разных Λ -действий, вкладываемых в Γ -действия. В некоторых случаях, однако, можно обойтись одним отображением v .

Например, если преобразование вкладывается в какое-либо $\mathbb{R}$ -действие, то его можно вложить в $\mathbb{R}$ -действие (возможно, в другое) с помощью естественного вложения группы $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{R}$. В этом смысле приведенное определение вложимости эквивалентно данному ранее.

Автор [10] показал, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вкладывается в континуум $\mathbb{R}^d$ -действий, если в качестве v взять естественное вложение $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{R}^d$.

Основным инструментом здесь была следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.2 (редукция многомерных утверждений о типичности к одномерным). *Если $G_i, i = 1, \dots, d$, – существенные множества преобразований, то множество всех $\mathbb{Z}^d$ -действий g таких, что $g^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)} \in G_i$ при $i = 1, \dots, d$, существенно (здесь единица в $g^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ стоит на i -м месте).*

Мы будем часто пользоваться этой теоремой (иногда даже не упоминая).

Известно, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие свободно. Однако это не гарантирует, что $\mathbb{R}^d$ -действие, в которое оно вкладывается, инъективно.

В связи с этим на семинарах в МГУ по динамическим системам возник следующий

ВОПРОС ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ. Можно ли вложить типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие в инъективное $\mathbb{R}^d$ -действие?

Этот вопрос перекликается с вопросами, поставленными де ла Рю и де Сэм Лазаро [7]:

Вкладывается ли типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие в $\mathbb{R}$ -действие?

Вкладывается ли типичное преобразование в инъективное $\mathbb{R}^d$ -действие?

В настоящей работе установлено, что ответ на вопрос об инъективности положителен, на первый вопрос де ла Рю и де Сэм Лазаро – отрицателен, а на второй – положителен.

В работе [7] есть более общая постановка второго вопроса: какова максимальная абелева группа Γ , в инъективное действие которой вкладывается типичное преобразование? В таком виде вопрос остается открытым и, по-видимому, требует некоторого уточнения (какой порядок вводится на множестве групп, рассматриваются ли не локально компактные группы?).

Наш основной результат можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА. *Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается в $\mathbb{R}^m$ -действие, если $d > m$, и вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^m$ -действие, если $d \leq m$.*

Как и в одномерном случае, это утверждение тесно связано с вопросом о корнях из $\mathbb{Z}^d$ -действия (собственно, *корнем из $\mathbb{Z}^d$ -действия $g = \{g^\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{R}^d}$* называется любое $\mathbb{Z}^d$ -действие $h = \{h^\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{R}^d}$ такое, что $h^{2\gamma} = g^\gamma$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}^d$).

Мы используем подход Степина и Еременко к вопросу о мощности множества корней из типичного преобразования.

В этом направлении доказан следующий факт.

ТЕОРЕМА. *Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет континуум корней в любом заранее фиксированном существенном множестве.*

В одномерном случае этот результат также представляется новым.

Инъективность удастся доказать за счет того, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вкладывается в несчетное множество $\mathbb{R}^m$ -действий. Среди таких $\mathbb{R}^m$ -действий удастся выбрать несчетный набор, в котором лишь счетное количество действий может не быть инъективным.

Приведем план работы.

Во введении делается обзор полученных результатов и формулируется ряд “именных” теорем.

В §1 мы доказываем, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет несчетное число корней в любом заранее фиксированном существенном множестве (теорема 1.2), отвечаем на вопрос де ла Рю и де Сэм Лазаро о том, что типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не вкладывается в поток (теорема 1.1), и даем ответ на их второй вопрос в двумерном случае (теорема 1.4). Доказательства нескольких технических утверждений вынесены в §2, в котором изучаются отображения, сохраняющие типичность. Отображение *сохраняет типичность*, если образ (и полный прообраз) любого существенного множества при этом отображении есть снова существенное множество. Введение подобных отображений дает, по-видимому, новый способ доказательства типичности. А именно можно доказать, что множество существенно, если оно есть образ (или полный прообраз) существенного множества при сохраняющем типичность отображении. Даются условия, достаточные для сохранения типичности (в частности, теорема 2.1). Доказывается типичность некоторых отображений (различного рода “проекций” и “возведений в степень”). Далее, с помощью сохраняющих типичность отображений доказываются утверждения, не доказанные в §1. Лемма 2.4 является обобщением теоремы о редукции многомерных утверждений о типичности к одномерным. Ее результат, как и остальные утверждения о типичности, активно используется в дальнейшем. В §3 мы доказываем основной результат (теорему 3.1). Доказательство (и само утверждение) естественным образом разбивается на части. С помощью теорем о типичности его удастся свести к доказательству двух результатов: теорем 3.2 и 3.3. Вторая из этих теорем дает ответ на вопрос об инъективности. С помощью теорем о сохраняющих типичность отображениях из этого результата следует ответ на вопрос де ла Рю и де Сэм Лазаро о вложении типичного преобразования в инъективное $\mathbb{R}^d$ -действие. Теоремы 3.2 и 3.3 можно рассматривать как многомерные аналоги теорем 1.1 и 1.4 соответственно. Мы приводим их доказательства по модулю нескольких лемм, доказанных в §4. Здесь же делаются наброски к доказательству этих лемм и обсуждаются сложности, возникающие при переходе от теорем 1.1 и 1.4 к их многомерным аналогам. Наконец, §4 – чисто технический, в нем доказываются все не доказанные до тех пор утверждения.

§ 1. Вложение действия двумерной решетки в поток

Введем необходимые для дальнейшего понятия.

Пусть (M, σ, μ) – лебеговское (т.е. метрически изоморфное единичному отрезку) пространство. Множество сохраняющих меру преобразований пространства (M, σ, μ) обозначим буквой $\mathcal{H}$. Относительно метрики

$$d(f, h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} (\mu(f(A_i) \triangle h(A_i)) + \mu(f^{-1}(A_i) \triangle h^{-1}(A_i))),$$

где $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – счетная система измеримых множеств, порождающая всю σ -алгебру, $\mathcal{H}$ есть польское (полное сепарабельное метрическое) пространство. Топология, согласованная с этой метрикой, называется *слабой топологией* пространства $\mathcal{H}$.

Действием группы Γ (или Γ -действием) называется любое непрерывное отображение $g: \Gamma \rightarrow \mathcal{H}$, сохраняющее групповую структуру. При этом элементы Γ называются *моментами времени* действия g . Действие можно записывать с помощью набора его элементов $\{g^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$.

В первую очередь нас будут интересовать $\mathbb{Z}^d$ -действия, которые иначе называются *действиями d -мерной решетки*. Пространство всех $\mathbb{Z}^d$ -действий обозначим через $\mathcal{H}^{(d)}$. Заметим, что $\mathcal{H}^{(1)}$ – это, по существу, другое обозначение для $\mathcal{H}$. Между упорядоченными наборами из d коммутирующих сохраняющих меру преобразований и $\mathbb{Z}^d$ -действиями есть взаимно однозначное соответствие:

$$g \leftrightarrow (g^{(1,0,\dots,0)}, \dots, g^{(0,\dots,0,1)}) = (g_1, \dots, g_d).$$

При этом преобразования $\{g_i\}$ называются *образующими* действия g .

Корнем из $\mathbb{Z}^d$ -действия $(T_1, \dots, T_d)$ назовем $\mathbb{Z}^d$ -действие $(P_1, \dots, P_d)$ такое, что $P_i^2 = T_i$ для $i = 1, \dots, d$.

В $\mathcal{H}^{(d)}$ можно ввести метрику

$$d_{\mathcal{H}^{(d)}}(g, h) = \sum_{i=1, \dots, d} d(g_i, h_i).$$

Эта метрика порождает слабую топологию, и относительно нее $\mathcal{H}^{(d)}$ является польским пространством.

Действие группы $\mathbb{R}$ также называется (непрерывным) *поток*ом. Поток g инъективен, если для любого $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеем $g^\gamma \neq I$. Пространство $\mathcal{F}$ всех потоков есть польское пространство относительно метрики

$$d_{\mathcal{F}}(f, g) = \max_{\gamma \in [0,1]} d(f^\gamma, g^\gamma).$$

Пространство всех $\mathbb{R}^d$ -действий (обозначим его $\mathcal{F}^{(d)}$) также является польским относительно любой из метрик

$$d_{n, \mathcal{F}^{(d)}}(f, g) = \max_{\gamma \in [-n, n]^d} d(f^\gamma, g^\gamma).$$

Все эти метрики порождают слабую топологию в $\mathcal{F}^{(d)}$.

Между $\mathbb{R}^d$ -действиями и упорядоченными наборами из d коммутирующих потоков есть взаимно однозначное соответствие

$$g \leftrightarrow (\{g^{(\alpha, 0, \dots, 0)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \dots, \{g^{(0, \dots, 0, \alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}) = (g_1, \dots, g_d).$$

При этом потоки $\{g_i\}$ называются *образующими* действия g .

$\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) вкладывается в поток g , если существуют такие моменты времени t_1, t_2 , что $g^{t_1} = T$ и $g^{t_2} = S$.

Выражение “типичное Γ -действие T обладает свойством $S \dots$ ” означает, что для существенного множества Γ -действий выполняется свойство S .

Типичны, например, преобразования ранга 1, слабо перемешивающие преобразования (определения см. в [11], [12]).

Кроме того, в пространствах $\mathcal{H}^{(d)}$, $d \in \mathbb{N}$, типичны свободные действия, т.е. такие действия, множество периодических точек которых имеет меру нуль.

Слабо перемешивающие преобразования обладают следующим свойством, отмеченным в работе [7]: если такое преобразование вкладывается в поток g , то этот поток инъективен; более того, g^γ слабо перемешивает при $\gamma \neq 0$. Если преобразования $T_1, \dots, T_d$ имеют ранг 1 и коммутируют, то любые корни P_i из T_i при $i = 1, \dots, d$ задают $\mathbb{Z}^d$ -действие $(P_1, \dots, P_d)$. Если, кроме того, T_i вкладываются в потоки g_i при $i = 1, \dots, d$, то $(g_1, \dots, g_d)$ есть $\mathbb{R}^d$ -действие².

Преобразования, удовлетворяющие счетному числу типичных свойств, сами типичны.

Как следствие (по теореме о редукции многомерных утверждений о типичности к одномерным), типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие свободно, все его образующие слабо перемешивают и имеют ранг 1.

Нашей ближайшей целью будет вывод нижеследующего результата.

ТЕОРЕМА 1.1. *Типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не вкладывается в $\mathbb{R}$ -действие.*

Доказательство будет приведено позднее. Толчком к нему послужило соображение, сделанное в работе [13]:

ЛЕММА 1.1. *Типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не может быть вложено в два разных (с точностью до линейной замены времени) потока.*

Мы приведем доказательство этой леммы ниже, а сейчас посмотрим, что из нее следует в нашей ситуации. В каждый поток, в который вкладывается $\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) , вкладывается и некоторый корень из него. Если два различных корня из (T, S) вкладываются в потоки, то это разные потоки в типичном случае (вследствие того, что поток, содержащий слабо перемешивающее преобразование, инъективен, а два корня предполагают два разных вложения в поток либо для T , либо для S). Таким образом, не более одного корня из типичного $\mathbb{Z}^2$ -действия может быть вложено в поток. Если предположить, что множество V тех $\mathbb{Z}^2$ -действий, которые вкладываются в поток, существенно,

²Это простое следствие из теоремы Кинга о централизаторе преобразований ранга 1: когда такие преобразования коммутируют, их централизаторы совпадают (формально это показано, например, в [10]).

то типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие имеет в V не более одного корня. Вообще говоря, типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие имеет несчетное множество корней (что показано в работах [10] и [13]). Однако могло бы оказаться, что в множестве V этих корней мало. Следующая теорема проясняет ситуацию.

ТЕОРЕМА 1.2. *Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет континуум корней в любом заранее фиксированном существенном множестве.*

Доказательство будет дано позже.

Пока же выведем теорему 1.1 из леммы 1.1 и теоремы 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Предположим, что множество V тех $\mathbb{Z}^2$ -действий, которые вкладываются в поток, существенно. Тогда типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие имеет несчетное число корней в V (по теореме 1.2). По лемме же 1.1 это невозможно.

Таким образом, множество $\mathbb{Z}^2$ -действий, вкладываемых в поток, не может быть существенным. Докажем, что тогда существенно его дополнение. Для этого достаточно показать, что применима динамическая альтернатива. Множество V инвариантно относительно сопряжений, но является ли оно аналитическим?

Пусть $w: h \mapsto (h^{(1,0)}, h^{(0,1)})$ – отображение из $\mathcal{F}^{(2)}$ в $\mathcal{K}^{(2)}$. Это отображение непрерывно. Если $\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) вкладывается в поток g , то (T, S) представляется как w -образ $\mathbb{R}^2$ -действия (g, h) (здесь h – это поток g , растянутый так, что $h^1 = S$). Заметим, что (g, h) в этом случае имеет тождественное отображение среди элементов $\{gh^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Обратно, если $\mathbb{R}^2$ -действие f таково, что среди отображений $\{f^{(1,\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ есть тождественное, то $f^{(1,0)}$ и $f^{(0,1)}$ вкладываются в один поток $\{f^{(0,\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Таким образом, множество V есть образ множества

$$\{f \in \mathcal{F}^{(2)} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}: f^{(1,\alpha)} = I\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f \in \mathcal{F}^{(2)} \mid \exists \alpha \in [-n, n]: f^{(1,\alpha)} = I\}$$

при непрерывном отображении w . Справа стоит счетное объединение замкнутых множеств (это несложно проверить: если f не лежит в таком множестве для некоторого n , то и все $\mathbb{R}^2$ -действия g такие, что $d_{n, \mathcal{F}^{(d)}}(f, g) < \min_{\alpha \in [-n, n]} d(g^{(1,\alpha)}, I)$, в нем не лежат). Иными словами, множество V есть w -образ счетного объединения замкнутых множеств при непрерывном отображении и, значит, аналитично.

Таким образом, применима динамическая альтернатива и дополнение к V существенно.

Доказательство леммы 1.1 основано на том, что если слабо перемешивающее преобразование вкладывается в поток, то все элементы этого потока слабо перемешивают (кроме, конечно, соответствующего нулевому моменту времени). Как следствие, такой поток инъективен. Также если в потоке в ненулевой момент времени встречается не перемешивающий слабо элемент, то и все остальные элементы этого потока не перемешивают слабо.

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Предположим, что $\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) вкладывается в два различных потока g и h . Мы потребуем, чтобы действие (T, S) было свободным, имело слабо перемешивающие образующие ранга 1. Эти требования задают существенное множество $\mathbb{Z}^2$ -действий. Поскольку T и S имеют ранг 1 и коммутируют, то пара (g, h) задает $\mathbb{R}^2$ -действие (см. рис. 1).

Это действие имеет как минимум два тождественных элемента в ненулевые моменты времени (соответствующие векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ на рис. 1). Если векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ не коллинеарны, то существует преобразование Q , которое вкладывается в ненулевой момент времени в поток h и в поток $\{(g, h)^{\mathbf{v}\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Первый поток содержит слабо перемешивающее преобразование T , значит, Q должно слабо перемешивать. Второй поток содержит тождественное преобразование в момент времени $\alpha = 1$, следовательно, ни один его элемент (в частности, Q) слабо перемешивать не может. Одновременно это невозможно, и мы должны заключить, что векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ коллинеарны. При этом они могут быть либо рационально зависимыми, либо рационально независимыми. В первом случае рационально зависимы и их первые координаты. Как следствие (рис. 2), некоторые ненулевые степени T и S представляют собой одно и то же преобразование.

Это невозможно, поскольку $\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) свободно. Во втором случае целочисленные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ всюду плотны в $\{\alpha \mathbf{v}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Каждая такая комбинация соответствует тождественному преобразованию. Из непрерывности следует, что весь поток $\{(g, h)^{\mathbf{v}\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ состоит из тождественных преобразований. Иными словами,

$$g^{\mathbf{v}_1 \alpha} = h^{-\mathbf{v}_2 \alpha}$$

для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (здесь $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – первая и вторая координата вектора $\mathbf{v}$ соответственно). Последнее равенство означает, что поток g является растяжением потока h .

Доказательство теоремы 1.2 основано на подходе Степина и Еременко к вопросу о мощности множества корней из типичного преобразования.

Рис. 2

С каждым сохраняющим меру преобразованием h пространства (M, σ, μ) и измеримой функцией $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Z}_2$ можно связать преобразование $h^\varphi: M \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow M \times \mathbb{Z}_2$, действующее по формуле $h^\varphi(x, y) = (hx, \varphi(hx) + y)$. При этом преобразование h называется *базой $\mathbb{Z}_2$ -расширения* h^φ , а φ – его *коциклом*. Пространство всех $\mathbb{Z}_2$ -расширений обозначим через Ψ . Оно является польским и изометрично прямому произведению $\mathcal{K}$ на пространство коциклов Φ . Более подробно, в Φ можно ввести метрику

$$d_\Phi(\varphi, \psi) = \mu\{x \mid \varphi(x) \neq \psi(x)\},$$

а в $\mathcal{K} \times \Phi$ – метрику

$$d_{\mathcal{K} \times \Phi}(f^\varphi, g^\psi) = d_\Phi(\varphi, \psi) + d_{\mathcal{K}}(f, g).$$

Корень из $\mathbb{Z}_2$ -расширения T^φ определяется как любой прообраз T^φ при отображении $v_\Psi: S^\psi \mapsto (S^\psi)^2$.

Необходимые нам результаты Степина и Еременко сформулируем в двух утверждениях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Если множество $v_\Psi(W)$ существенно в Ψ для некоторого $W \subset \Psi$, то типичное преобразование имеет несчетное число корней среди баз $\mathbb{Z}_2$ -расширений из множества W .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Образ всего пространства $\mathbb{Z}_2$ -расширений при преобразовании v_Ψ существенен.*

Назовем непрерывное отображение v между польскими пространствами *сохраняющим типичность*, если образ (и полный прообраз) любого существенного множества есть также существенное множество.

Новое, по сравнению с работой Степина и Еременко, соображение сформулировано ниже.

ЛЕММА 1.2. *Отображение v_Ψ сохраняет типичность.*

Доказательство проведено в § 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 в случае $d = 1$. Если множество $V \subset \mathcal{K}$ существенно, то множество W тех $\mathbb{Z}_2$ -расширений, базы которых лежат в V , также существенно. В этом случае по лемме 1.2 существенно и множество $v_\Psi(W)$. Это означает, что применимо утверждение 1.1 и типичное преобразование имеет несчетное число корней среди баз элементов множества W , т.е. в V .

Заметим, что любое существенное множество содержит массивное подмножество (всюду плотное типа G_δ). Массивное множество также является существенным, значит, к нему применимы все проведенные рассуждения и типичное преобразование имеет в нем несчетное число корней.

Осталось заметить, что множество корней из типичного преобразования, лежащих в массивном множестве, является аналитическим. Для таких множеств реализуется гипотеза континуума (см. [14]), т.е. несчетные множества такого вида имеют мощность континуума.

В случае $d \geq 2$ доказательство аналогично, однако требует введения некоторого многомерного аналога пространства Ψ .

Обозначим через $\Psi^{(d)}$ пространство, элементы которого состоят из d упорядоченных $\mathbb{Z}_2$ -расширений с коммутирующими базами. Это польское пространство относительно метрики

$$d_{\Psi^{(d)}}((f_1^{\varphi_1}, \dots, f_d^{\varphi_d}), (g_1^{\psi_1}, \dots, g_d^{\psi_d})) = \sum_{i=1, \dots, d} d_\Psi(f_i^{\varphi_i}, g_i^{\psi_i}).$$

Корнем из элемента $(g_1^{\psi_1}, \dots, g_d^{\psi_d})$ называется любой прообраз этого элемента при отображении $v_{\Psi^{(d)}}: (f_1^{\varphi_1}, \dots, f_d^{\varphi_d}) \mapsto ((f_1^{\varphi_1})^2, \dots, (f_d^{\varphi_d})^2)$. Базой элемента $(f_1^{\varphi_1}, \dots, f_d^{\varphi_d})$ назовем $\mathbb{Z}^d$ -действие $(f_1, \dots, f_d)$, а $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ – $(d$ -мерным) ко-циклом, порождающим этот элемент.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если множество $v_{\Psi^{(d)}}(W)$ для некоторого $W \subset \Psi^{(d)}$ существенно, то типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет несчетное число корней среди баз элементов множества W .*

Кроме того, отображение $v_{\Psi^{(d)}}$ сохраняет типичность.

Доказательство проведено в § 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 в случае $d \geq 2$. Если множество $V \subset \mathcal{K}^{(d)}$ существенно, то множество $W \subset \Psi^{(d)}$ всех элементов с базами в V также существенно. Так как $v_{\Psi^{(d)}}$ сохраняет типичность, то существенным является и множество $v_{\Psi^{(d)}}(W)$. По теореме 1.3 типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет несчетное число корней среди баз элементов множества W , т.е. в V .

Доказательство того, что из несчетности множества корней следует его континуальность, такое же, как и в случае $d = 1$.

Докажем, что типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^2$ -действие. Мы воспользуемся результатом работы [10] о том, что в типичном случае пара (T, S) вкладывается в несчетное число $\mathbb{R}^2$ -действий вида $\{(g, h_\alpha)\}_\alpha$, причем $g^1 = T$, $h_\alpha^1 = S$ для всех α .

Также нам понадобится следующая

ЛЕММА 1.3. *Отображение $v_{(1,m)}(T, S) \mapsto (T, S^m)$ из $\mathcal{H}^{(2)}$ в $\mathcal{H}^{(2)}$ сохраняет типичность при $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство проведено в § 2.

Пусть h – произвольное $\mathbb{R}^d$ -действие. Ненулевой вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ назовем *тождественным* (относительно h), если $h^{\mathbf{r}}$ есть тождественное отображение, и *слабо перемешивающим*, если $h^{\mathbf{r}}$ слабо перемешивает. Если $h^{\mathbf{r}\alpha}$ тождественно для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\mathbf{r}$ задает *тождественное направление*.

ТЕОРЕМА 1.4. *Типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^2$ -действие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие (T, S) вкладывается в несчетное число $\mathbb{R}^2$ -действий $\{(g, h_\alpha)\}_\alpha$. Предположим, что все они не инъективны. По теореме 1.1 в типичном случае S не является элементом g . Кроме того, в типичном случае T и S слабо перемешивают и имеют ранг 1. Зафиксируем некоторое действие (g, h) из $\{(g, h_\alpha)\}_\alpha$ и рассмотрим произвольное действие (g, h_1) . Поскольку T и S имеют ранг 1, то потоки g , h и h_1 коммутируют. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ -действие (g, h, h_1^{-1}) (рис. 3).

Рис. 3

Векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$ соответствуют тем моментам времени, когда тождественны элементы действий (g, h) , (g, h_1^{-1}) и (h, h_1^{-1}) соответственно. Предположим, что эти векторы линейно независимы. Выберем произвольное направление в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (рис. 4).

Как видно, это направление можно задать вектором, соответствующим некоторому преобразованию $Q \in \{(g, h, h_1^{-1})^{\alpha\mathbf{v}}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. При этом Q не может слабо перемешивать, поскольку лежит в одном потоке с $(g, h, h_1^{-1})^{\mathbf{v}} = I$. Значит, ни один вектор в выбранном направлении не перемешивает слабо. Направление мы выбирали произвольным образом, поэтому ни один вектор во всей линейной оболочке векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ не перемешивает слабо. Повторяя эти рассуждения для вектора $\mathbf{w}$ и линейной оболочки векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, мы заключаем, что не перемешивает ни один вектор и из линейной оболочки $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Поскольку слабо перемешивающие векторы в пространстве все-таки есть $((1, 0, 0)$, например), то

Рис. 4

векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ линейно зависимы:

$$a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} + a_3 \mathbf{w} = 0$$

для некоторых действительных чисел a_1 , a_2 , a_3 .

Предположим, что числа a_1 , a_2 и a_3 можно выбрать целыми. Тогда в координатах последнее равенство выглядит так:

$$\begin{cases} a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{v}_1 = 0, \\ a_1 \mathbf{u}_2 + a_3 = 0, \\ a_2 \mathbf{v}_3 + a_3 = 0 \end{cases}$$

(здесь и далее коэффициент i снизу обозначает i -ю координату соответствующего вектора). Как следствие имеем

$$(g, h)^{a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} = g^{a_1 \mathbf{u}_1} h^{a_1 \mathbf{u}_2} = g^{a_1 \mathbf{u}_1} S^{-a_3}.$$

Другими словами, S^{a_3} вкладывается в некоторый момент времени в поток g . Согласно лемме 1.3 полный прообраз множества $\mathbb{Z}^2$ -действий, не вкладываемых в поток при отображении $v_{(1, a_3)}$, существует. Значит, в типичном случае T и S^{a_3} в один поток не вкладываются. Поэтому мы заключаем, что коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 нельзя взять все рациональными. В этом случае множество тождественных векторов в $\mathbb{R}^3$ (а это замкнутая подгруппа) содержит какую-либо прямую, проходящую через начало координат. То есть

$$(g, h, h_1^{-1})^{\alpha \mathbf{r}} = I$$

для некоторого вектора $\mathbf{r}$ и всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Последний коэффициент вектора $\mathbf{r}$ не может быть равен нулю, поскольку поток g не является растяжением потока h . Тогда имеем, что

$$h_1^{\alpha \mathbf{r}_3} = g^{\alpha \mathbf{r}_1} h^{\alpha \mathbf{r}_2}.$$

Итак, поток h_1 соответствует некоторому вектору

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

в пространстве времени $\mathbb{R}^2$ -действия (g, h) такому, что

$$(g, h)^{\mathbf{q}} = S.$$

Вследствие произвольности в выборе h_1 заключаем, что все потоки $\{h_\alpha\}_\alpha$ представляются в таком виде. Поэтому их не может быть больше, чем подобных векторов в $\mathbb{R}^2$.

Каждый вектор, соответствующий преобразованию S , представляется в виде суммы $(0, 1) + \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ – какой-нибудь тождественный вектор. Если таких $\mathbf{p}$ несчетное число, то $\mathbb{R}^2$ содержит тождественную прямую и поток g является растяжением потока h . Это невозможно, поскольку g не содержит S .

Таким образом, лишь счетное число потоков из множества $\{h_\alpha\}_\alpha$ может быть вложено в (g, h) . Мы получили противоречие с несчетностью множества $\{h_\alpha\}_\alpha$.

Значит, среди $\mathbb{R}^2$ -действий $\{(g, h_\alpha)\}_\alpha$ есть инъективные.

§ 2. Отображения, сохраняющие типичность

Основным предметом изучения в этом параграфе являются преобразования, сохраняющие типичность. После того как будут даны соответствующие определения, мы покажем, что проекция в декартовом произведении на один из сомножителей сохраняет типичность. Потом введем понятие СПО-пространств и дадим достаточные условия для того, чтобы отображение между такими пространствами сохраняло типичность (теорема 2.1). Далее, покажем, что $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{(d)}$, Ψ , $\Psi^{(d)}$ являются СПО-пространствами. Пользуясь достаточным условием, мы докажем, что некоторые отображения сохраняют типичность. Как следствие, докажем леммы 1.2 и 1.3.

Далее, мы усилим теорему о редукции многомерных утверждений к одномерным (лемма 2.4). Для соответствующих формулировок нам потребуется введение матричной формы записи вложения одного действия в другое.

В конце параграфа мы докажем теорему 1.3.

Массивным подмножеством польского пространства B называется счетное пересечение всюду плотных открытых множеств. Множество, содержащее массивное подмножество, будем называть *существенным*. Дополнение к существенному множеству есть *множество первой категории*. Такие множества мы будем называть *тощими*.

Непрерывное отображение $v: B \rightarrow C$ из одного польского пространства в другое *сохраняет типичность*, если v -образ любого существенного множества *существенен* и *полный v -прообраз* любого существенного множества – также *существенное* множество.

Композиция двух отображений, сохраняющих типичность, также сохраняет типичность. Если сохраняющее типичность отображение – гомеоморфизм, то и обратное к нему сохраняет типичность.

В некоторых случаях установить, что отображение сохраняет типичность, можно непосредственно. Так, можно доказать, что отображение проекции на одну из координат в декартовом произведении двух польских пространств сохраняет типичность. Остановимся на этом чуть подробнее.

Пусть B и D – два польских пространства. Декартово произведение $B \times D$ также есть польское пространство относительно метрики

$$d_{B \times D}((b_1, d_1), (b_2, d_2)) = d_B(b_1, b_2) + d_D(d_1, d_2).$$

Декартово произведение n экземпляров пространства B обозначается через B^n .

Покажем, что отображение проекции $p_{1, B \times D}: (b, d) \mapsto b$ сохраняет типичность.

Это непрерывное отображение. Далее, $p_{1, B \times D}$ -образ любого существенного множества содержит существенное множество по теореме Куратовского–Улама и, значит, является существенным. Наконец, полный $p_{1, B \times D}$ -прообраз любого массивного множества массивен, так как является множеством типа G_δ и всюду плотен. Поэтому полный $p_{1, B \times D}$ -прообраз любого существенного множества существенен и $p_{1, B \times D}$ сохраняет типичность.

Будем говорить, что польское пространство B обладает свойством плотности образов (СПО), если существует счетный набор $\{\beta_i\}$ гомеоморфизмов B в себя таких, что для типичного $b \in B$ множество $\{\beta_i b\}$ всюду плотно в B . В этом случае B будем называть *СПО-пространством*, а набор гомеоморфизмов $\{\beta_i\}$ – *выделенным*. Для СПО-пространств можно сформулировать аналог динамической альтернативы.

ДИНАМИЧЕСКАЯ АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ СПО-ПРОСТРАНСТВ. *Аналитическое подмножество СПО-пространства B , инвариантное относительно всех гомеоморфизмов из выделенного семейства, есть либо точное, либо существенное множество.*

Доказательство ничем не отличается от доказательства Кинга и Глазнера.

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы отображение сохраняло типичность.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть B и D – два СПО-пространства с выделенными множествами гомеоморфизмов $\{\beta_i\}$ и $\{\delta_i\}$ соответственно. Предположим, что непрерывное отображение $v: B \rightarrow D$ обладает следующими свойствами:*

- (1) $\{v\beta_i b\} = \{\delta_i vb\}$ для всех $b \in B$;
- (2) для типичного $d \in D$ множество $\{\beta_i v^{-1}(d)\}$ всюду плотно в B .

Тогда v сохраняет типичность.

В доказательстве будет полезно следующее наблюдение: в любом существенном множестве есть массивное подмножество, инвариантное относительно выделенного множества гомеоморфизмов $\{\beta_i\}$. Действительно, пусть G – любое массивное подмножество существенного множества; рассмотрим пересечение

$$G^* = \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} \beta(G),$$

где $\mathcal{B}$ – дискретная группа гомеоморфизмов, порожденная множеством $\{\beta_i\}$. Заметим, что $\mathcal{B}$ счетно, значит, G^* массивно. Кроме того, применение любого из гомеоморфизмов $\{\beta_i\}$ к пересечению $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} \beta(G)$ лишь меняет порядок

множеств в этом пересечении. Значит, G^* инвариантно относительно гомеоморфизмов семейства $\{\beta_i\}$. Осталось заметить, что G^* содержится в G , так как в группе $\mathcal{B}$ есть тождественный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Вначале покажем, что полный прообраз массивного множества G при отображении $v: B \rightarrow D$ массивен.

Полный прообраз массивного множества при непрерывном отображении есть множество типа G_δ . Поэтому нам достаточно доказать, что множество $v^{-1}(G)$ всюду плотно. Переходя в случае необходимости к G^* , можно предполагать, что G инвариантно относительно выделенного семейства гомеоморфизмов $\{\delta_i\}$. Типичный элемент $S \in D$ не только лежит в G , но и удовлетворяет требованию (2) теоремы. Иными словами, в G есть элемент b такой, что $\{\beta_i v^{-1}(b)\}$ всюду плотно в B . Поскольку

$$\{v\beta_i v^{-1}(b)\} = \{\delta_i v v^{-1}(b)\} = \{\delta_i b\} \subset G,$$

то полный прообраз G содержит всюду плотное множество $\{\beta_i v^{-1}(b)\}$ и, значит, массивен.

Из этого следует, что полный прообраз существенного множества содержит массивное множество, значит, сам является существенным.

Теперь докажем, что образ массивного множества G есть существенное множество. В случае необходимости переходя к G^* , можно считать, что G инвариантно относительно выделенного семейства $\{\beta_i\}$. Тогда множество $Q = D \setminus v(G)$ инвариантно относительно выделенного семейства $\{\delta_i\}$. Из динамической альтернативы следует, что Q либо тощее, либо существенное множество. Во втором случае полный прообраз Q содержал бы массивное множество, а он полностью лежит в тощем множестве $B \setminus G$. Таким образом, Q – тощее множество. Соответственно, множество $v(G) = D \setminus Q$ существенно.

Следовательно, образ любого существенного множества содержит существенное подмножество, а значит, сам является существенным.

Напомним определения свободных действий и операции сопряжения, после чего установим, что $\mathcal{H}^{(d)}$ и $\Psi^{(d)}$ являются СПО-пространствами.

Действие группы называется *свободным*, если множество периодических точек этого действия имеет меру нуль. В случае группы $\mathcal{H}$ оно также называется *апериодическим*.

Пусть U – какое-нибудь сохраняющее меру преобразование. Отображение

$$\delta_U: (T_1, \dots, T_d) \mapsto (U^{-1}T_1U, \dots, U^{-1}T_dU)$$

из пространства $\mathcal{H}^{(d)}$ в себя называется *сопряжением элементом U* . Отображение δ_U есть гомеоморфизм пространства $\mathcal{H}^{(d)}$.

ЛЕММА 2.1 (см. [15]). *Для свободного $T \in \mathcal{H}^{(d)}$ множество*

$$\{\delta_U T\}_{U \in \mathcal{H}}$$

всюду плотно в $\mathcal{H}^{(d)}$.

Пусть $\{U_i\}$ – счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{K}$. Покажем, что пространство $\mathcal{K}^{(d)}$ обладает свойством плотности образов. В качестве выделенного множества гомеоморфизмов возьмем семейство $\{\delta_{U_i}\}$. Согласно предыдущей лемме нам достаточно показать, что при фиксированном свободном $T = (T_1, \dots, T_d)$ и $U_j \rightarrow U$ имеем $\{\delta_{U_j}T\} \rightarrow \{\delta_U T\}$.

Напомним (см., например, [1]), что $\mathcal{K}$ есть топологическая группа. В частности, если последовательности преобразований $\{P_i\}$ и $\{S_i\}$ сходятся к P и S соответственно, то последовательность $\{P_i S_i\}$ сходится к PS , а последовательность $\{P_i^{-1}\}$ сходится к P^{-1} (обозначение $\{P_i^{-1}\} \rightarrow P^{-1}$).

Так как $U_j \rightarrow U$, то $T_i U_j \rightarrow T_i U$ при $i = 1, \dots, d$. Далее, поскольку $T_i U_j \rightarrow T_i U$ и $U_j^{-1} \rightarrow U^{-1}$, имеем $U_j^{-1} T_i U_j \rightarrow U^{-1} T_i U$ при $i = 1, \dots, d$. Поскольку есть сходимость на каждой образующей, то имеет место сходимость и всего $\mathbb{Z}^d$ -действия:

$$\delta_{U_j} T \rightarrow \delta_U T.$$

Таким образом, замыкание множества $\{\delta_{U_i} T\}$ содержит всюду плотное в $\mathcal{K}^{(d)}$ множество, а значит, все $\mathcal{K}^{(d)}$.

Пространство Ψ также обладает свойством плотности образов. Вообще, Ψ можно рассматривать как полное подпространство $\mathcal{K}$, и согласно предыдущим результатам сопряженные с типичным элементом Ψ будут плотны в $\mathcal{K}$. Но воспользоваться леммой 2.1 нельзя: сопряжение не есть операция, переводящая из Ψ в Ψ ; она переводит из Ψ в $\mathcal{K}$. Поэтому сопряжение в общем случае не является гомеоморфизмом. Однако можно сузить множество преобразований, сопряжения которыми мы рассматриваем. Подойдут сопряжения элементами Ψ : они являются гомеоморфизмами Ψ . Степин и Еременко [9] показали, что $\{\delta_U S\}_{U \in \Psi}$ всюду плотно в Ψ для типичного $S \in \Psi$. Далее, пусть $\{U_i\}$ – всюду плотное подмножество Ψ . В качестве выделенного множества гомеоморфизмов рассмотрим сопряжения семейством $\{U_i\}$. Чтобы доказать, что Ψ является СПО-пространством, нам достаточно показать, что при типичном S и $U_j \rightarrow U$, имеем $\{\delta_{U_j} S\} \rightarrow \{\delta_U S\}$. Рассуждения аналогичны рассуждениям для пространства $\mathcal{K}^{(d)}$: так как $U_j \rightarrow U$, то $S U_j \rightarrow S U$. Далее, поскольку $S U_j \rightarrow S U$ и $U_j^{-1} \rightarrow U^{-1}$, имеем

$$\delta_{U_j} S = U_j^{-1} S U_j \rightarrow U^{-1} S U = \delta_U S.$$

Таким образом, замыкание множества $\{\delta_{U_i} S\}_i$ содержит всюду плотное в Ψ множество, а значит, все Ψ .

В качестве выделенного множества гомеоморфизмов можно брать сопряжения любым счетным всюду плотным подмножеством Ψ .

Несколько сложнее доказать, что $\Psi^{(d)}$ является СПО-пространством.

Ситуация усугубляется тем, что автору неизвестно аналогов леммы 2.1 для сопряжений в этом пространстве. Поэтому мы несколько расширим понятие “сопряжения”. А именно будем сопрягать элементы $\Psi^{(d)}$ элементами этого же пространства. При этом надо, чтобы после сопряжений снова получился элемент $\Psi^{(d)}$, т.е. чтобы базы полученных преобразований коммутировали. Поэтому мы ограничимся сопряжениями элементами $\Psi^{(d)}$ с совпадающими базами.

Пусть

$$D_d = \bigcup_{f \in \mathcal{K}} D_{df}, \quad \text{где } D_{df} = \{(f^{\varphi_1}, \dots, f^{\varphi_d}) \in \Psi^{(d)}\}_{(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \Phi^d};$$

D_d – замкнутое сепарабельное подмножество $\Psi^{(d)}$.

Семейство отображений

$$\{\beta_h : g \mapsto h^{-1}gh\}_{h \in D_d}$$

из $\Psi^{(d)}$ в $\Psi^{(d)}$ есть непрерывное семейство гомеоморфизмов. Если мы докажем, что для типичного $g \in \Psi^{(d)}$ множество $\{\beta_h g\}$ всюду плотно, то $\Psi^{(d)}$ будет СПО-пространством, а в качестве выделенного множества гомеоморфизмов можно взять любое счетное плотное в D_d подмножество.

Мы нуждаемся в некотором аналоге леммы 2.1. Одномерный результат следующего утверждения получен Степиным и Еременко [9; доказательство леммы 2.1].

ЛЕММА 2.2. Пусть $g_1, \dots, g_d$ – свободное действие $\mathcal{K}^{(d)}$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \Phi^d$ произвольно и $(v_1^{\tau_1}, \dots, v_d^{\tau_d}) \in \Psi^{(d)}$. Тогда

$$\inf_{h\psi \in D_{df}} d_{\Psi^{(d)}}(\beta_{h\psi} g^\varphi, v^\tau) = d_{\mathcal{K}^{(d)}}(f^{-1}gf, v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{h\psi \in D_{df}} d_{\Psi^{(d)}}(\beta_{h\psi}(g_1^{\varphi_1}, \dots, g_d^{\varphi_d}), (v_1^{\tau_1}, \dots, v_d^{\tau_d})) \\ &= \inf_{\psi_1, \dots, \psi_d \in \Phi} \sum_{i=1, \dots, d} d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i}). \end{aligned}$$

Расстояния $d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i})$ для всех $i = 1, \dots, d$ зависят только от ψ_i и не зависят от ψ_j при $j \neq i$. Поэтому все слагаемые в правой части равенства принимают свои наименьшие значения независимо друг от друга. Следовательно,

$$\inf_{\psi_1, \dots, \psi_d \in \Phi} \sum_{i=1, \dots, d} d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i}) = \sum_{i=1, \dots, d} \inf_{\psi_i \in \Phi} d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i}).$$

Из того, что лемма верна в случае $d = 1$ (напомним, это результат Степина и Еременко), имеем

$$\inf_{\psi_i \in \Phi} d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i}) = d(f^{-1}gf, v)$$

для всех $i = 1, \dots, d$. Подставляя эти соотношения в наше равенство, получаем

$$\begin{aligned} & \inf_{h\psi \in D_{df}} d_{\Psi^{(d)}}(\beta_{h\psi}(g_1^{\varphi_1}, \dots, g_d^{\varphi_d}), (v_1^{\tau_1}, \dots, v_d^{\tau_d})) \\ &= \sum_{i=1, \dots, d} \inf_{\psi_i \in \Phi} d_{\Psi}(\beta_{f\psi_i}(g_i^{\varphi_i}), v_i^{\tau_i}) \\ &= \sum_{i=1, \dots, d} d(f^{-1}gf, v) = d_{\mathcal{K}^{(d)}}(f^{-1}gf, v). \end{aligned}$$

По лемме 2.1 для всех $\varepsilon > 0$ существует такое f , что расстояние

$$d_{\mathcal{K}^{(d)}}(f^{-1}gf, v)$$

меньше ε . Таким образом, сопряжения элементами D_d всюду плотны в $\Psi^{(d)}$. Рассматривая сопряжения любым счетным всюду плотным подмножеством D_d , заключаем, что $\Psi^{(d)}$ является СПО-пространством.

Резюмируя, получаем, что $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{(d)}$, Ψ , $\Psi^{(d)}$ суть СПО-пространства.

ЛЕММА 2.3. *Следующие отображения сохраняют типичность:*

- (1) $p_{\Psi^{(d)}, \mathcal{K}^{(d)}}: (f_1^{\varphi^1}, \dots, f_d^{\varphi^d}) \mapsto (f_1, \dots, f_d)$ из $\Psi^{(d)}$ в $\mathcal{K}^{(d)}$;
- (2) $p_{i, \mathcal{K}^{(d)}}: (T_1, \dots, T_d) \mapsto T_i$ из $\mathcal{K}^{(d)}$ в $\mathcal{K}$;
- (3) $p_{i, \Psi^{(d)}}: (f_1^{\varphi^1}, \dots, f_d^{\varphi^d}) \mapsto f_i^{\varphi^i}$ из $\Psi^{(d)}$ в Ψ , $i = 1, \dots, d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Отображение $p_{\Psi^{(d)}, \mathcal{K}^{(d)}}$ можно рассматривать как проекцию на первую координату в декартовом произведении $\mathcal{K}^{(d)} \times \Phi^d$. То, что такие отображения типичны, показано выше.

(2) Докажем, что отображение $p_{i, \mathcal{K}^{(d)}}$ тоже сохраняет типичность. Достаточно рассмотреть случай $i = 1$. В качестве выделенного множества гомеоморфизмов и в $\mathcal{K}^{(d)}$, и в $\mathcal{K}$ рассмотрим сопряжения одним и тем же счетным всюду плотным множеством $\{U_i\} \subset \mathcal{K}$. Очевидно, что сопряжения перестановочны с $p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}$. Доказательство того, что сопряженные $p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}$ -прообразу типичного преобразования T всюду плотны, потребует дополнительных соображений. Пусть преобразование T слабо перемешивает и вкладывается в поток. Мы покажем, что в $p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}$ -прообразе T есть свободное действие. Поскольку преобразование T слабо перемешивает, то оно эргодично (т.е. любое инвариантное относительно T множество имеет меру один или нуль). Предположим, что преобразование S коммутирует с T и множество $\{x \mid Sx = x\}$ неподвижных точек S имеет положительную меру.

Если $Sx = x$, имеем

$$Tx = TSx = STx,$$

т.е. точка Tx тоже неподвижна относительно S .

Значит, множество $\{x \mid Sx = x\}$ инвариантно относительно T . Так как T эргодическое, то мера этого множества либо нуль, либо один. Первый вариант противоречит нашим предположениям, а во втором $S = I$.

Пусть теперь $(1, r_2, r_3, \dots, r_d)$ – набор рационально независимых чисел и h – какой-нибудь поток, в который вкладывается T . Рассмотрим $\mathbb{Z}^d$ -действие $(h^1, h^{r_2}, \dots, h^{r_d})$. Предположим, что оно не свободно. Тогда должны существовать такие целые (не все равные нулю) числа $q_1, \dots, q_d$, что

$$\mu(\{x \mid (h^1, h^{r_2}, \dots, h^{r_d})^{q_1, \dots, q_d} x = h^{q_1 + \sum_{i=2, \dots, d} r_i q_i} x = x\}) > 0.$$

Преобразование $h^{q_1 + \sum_{i=2, \dots, d} r_i q_i}$ коммутирует с T , поскольку они лежат в одном потоке. Значит, мера множества неподвижных точек этого преобразования равна 1. Это значит, что

$$h^{q_1 + \sum_{i=2, \dots, d} r_i q_i} = I.$$

Поскольку T слабо перемешивает, то тождественное преобразование в потоке h встречается только в нулевой момент времени. Тогда

$$q_1 + \sum_{i=2, \dots, d} r_i q_i = 0.$$

Это противоречит выбору чисел $r_2, \dots, r_d$.

Значит, $\mathbb{Z}^d$ -действие $(h^1, h^{r_2}, \dots, h^{r_d})$ свободно. Кроме того,

$$p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}(h^1, h^{r_2}, \dots, h^{r_d}) = h^1 = T.$$

Иными словами, $p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}$ -прообраз типичного (а именно слабо перемешивающего и вкладываемого в поток) преобразования содержит свободное $\mathbb{Z}^d$ -действие. Сопряженные с ним всюду плотны в $\mathcal{K}^{(d)}$ по лемме 2.1. Следовательно, по теореме 2.1 отображение $p_{1, \mathcal{K}^{(d)}}$ сохраняет типичность.

(3) Докажем, что отображение $p_{i, \Psi^{(d)}}$ сохраняет типичность. Достаточно рассмотреть случай $i = 1$. Пусть $\{\varphi_i\}$ – счетное всюду плотное подмножество Φ , а $\{f_i\}$ – счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{K}$. В качестве выделенного множества гомеоморфизмов в Ψ возьмем сопряжения множеством $\{f_i^{\varphi_j}\}_{i,j} \subset \Psi$, а в $\Psi^{(d)}$ – сопряжения множеством $\{(f_i^{\varphi_{j_1}}, \dots, f_i^{\varphi_{j_d}})\}_{i,j_1, \dots, j_d}$. Ясно, что

$$\{f_i^{\varphi_j} p_{1, \Psi^{(d)}} g^\psi\}_{i,j} = \{(f_i^{\varphi_{j_1}}, \dots, f_i^{\varphi_{j_d}}) p_{1, \Psi^{(d)}} g^\psi\}_{i,j_1, \dots, j_d}$$

для всех $g^\psi \in \Psi$. Осталось показать, что сопряженные типичному элементу Ψ всюду плотны. База типичного элемента $g^\psi \in \Psi$ есть аperiodическое слабо перемешивающее преобразование, вкладываемое в поток (поскольку $p_{\Psi, \mathcal{K}}$ сохраняет типичность). Как показано выше, такое преобразование вкладывается в свободное $\mathbb{Z}^d$ -действие $(g, g_2, \dots, g_d)$. По лемме 2.2 сопряженные действию $(g^\psi, g_2^\psi, \dots, g_d^\psi)$ семейством

$$\{(f_i^{\varphi_{j_1}}, \dots, f_i^{\varphi_{j_d}})\}_{i,j_1, \dots, j_d}$$

всюду плотны. Осталось заметить, что

$$(g^\psi, g_2^\psi, \dots, g_d^\psi) \in p_{1, \Psi^{(d)}}^{-1}(g^\psi).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В ходе доказательства получено, что типичное $\mathbb{Z}^m$ -действие $(T_1, \dots, T_m)$ можно вложить в свободное $\mathbb{Z}^d$ -действие $(T_1, \dots, T_d)$ при $d \geq m$ и то, что мера множества неподвижных точек любого преобразования, коммутирующего с типичным, либо нуль, либо один.

В качестве следствий приведем доказательства некоторых утверждений, сформулированных во введении и в § 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Множество

$$\{(T_1, \dots, T_d) \in \mathcal{K}^{(d)} \mid T_i \in G_i, i = 1, \dots, d\}$$

представимо в виде

$$\bigcap_{i=1, \dots, d} p_{i, \mathcal{K}^{(d)}}^{-1}(G_i).$$

Поскольку $p_{i, \mathcal{K}^{(d)}}$ сохраняет типичность, то пересекаются существенные множества. Осталось заметить, что конечное (и счетное) пересечение существенных множеств есть существенное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Мы докажем несколько больше, чем утверждается в этой лемме, а именно, что отображение

$$v_{\Psi^{(d)}} : (g_1^{\varphi_1}, \dots, g_d^{\varphi_d}) \mapsto ((g_1^{\varphi_1})^2, \dots, (g_d^{\varphi_d})^2)$$

сохраняет типичность. В качестве выделенного множества гомеоморфизмов рассматриваем сопряжения. Во-первых, заметим, что отображение $v_{\Psi^{(d)}}$ коммутирует с сопряжениями. Далее, $v_{\Psi^{(d)}}$ -прообраз типичного элемента $\Psi^{(d)}$ в случае $d = 1$ существует согласно утверждению 1.2. В случае $d > 1$ имеем

$$v_{\Psi^{(d)}}(\Psi^{(d)}) = \bigcap_{i=1, \dots, d} p_{i, \Psi^{(d)}}^{-1}(v_{\Psi}(\Psi)).$$

Это существенное множество, поскольку отображение $p_{i, \Psi^{(d)}}^{-1}$ сохраняет типичность. Значит, типичный элемент $\Psi^{(d)}$ имеет $v_{\Psi^{(d)}}$ -прообраз. Типичный элемент $\Psi^{(d)}$ имеет свободную базу. База любого корня из него также свободная. По лемме 2.2 сопряженные с таким элементом всюду плотны. Таким образом, применима теорема 2.1 и, значит, $v_{\Psi^{(d)}}$ сохраняет типичность.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Отображение $v_{d,n} : (T_1, \dots, T_d) \mapsto (T_1^n, \dots, T_d^n)$ из $\mathcal{K}^{(d)}$ в $\mathcal{K}^{(d)}$ сохраняет типичность для всех $d, n \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $v_{d,n}$ непрерывно и перестановочно с сопряжениями. Его образ состоит из тех $\mathbb{Z}^d$ -действий, все образующие которых имеют корень порядка n . По теореме 0.2 это существенное множество. Как следствие, типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие свободно и имеет $v_{d,n}$ -прообраз. Поскольку $v_{d,n}$ -прообраз свободного действия состоит также из свободных действий, то сопряженные с ним всюду плотны.

Напомним, что действие g группы Λ вкладывается в действие h группы Γ , если существует такое вложение v группы Λ в Γ (сохраняющее групповые свойства и непрерывное), что $g^\lambda = h^{v\lambda}$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Такие отображения v называются *непрерывными групповыми гомоморфизмами*. Если в качестве Λ и Γ рассматриваются группы $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, то все такие гомоморфизмы известны: они задаются матрицами размера $m \times d$. Математический аппарат матриц довольно глубоко разработан, и, видимо, было бы неправильно от него отказываться для описания вложений $\mathbb{R}^d$ -действий в $\mathbb{R}^m$ -действия. Также матрицами можно описать вложения действий группы $\mathbb{Z}^d$ в действия группы $\mathbb{R}^m$ и вложения действий группы $\mathbb{Z}^d$ в действия группы $\mathbb{Z}^m$.

Более точно, пусть A – матрица размера $m \times d$ и h – некоторое $\mathbb{R}^m$ -действие. Определим $\mathbb{Z}^d$ -действие h^A : $(h^A)^t = h^{At^*}$ ($\mathbb{R}^d$ -действие h_A : $(h_A)^t = h^{At^*}$), где t^* есть вектор-столбец, соответствующий $t \in \mathbb{Z}^d$ ($t \in \mathbb{R}^d$ соответственно).

Из определения любое $\mathbb{Z}^d$ - ($\mathbb{R}^d$ -)действие, вкладываемое в $\mathbb{R}^m$ -действие h , представляется в виде h^A (h_A соответственно).

Пусть A – целочисленная матрица размера $m \times d$ и f – некоторое $\mathbb{Z}^m$ -действие. Определим $\mathbb{Z}^d$ -действие f^A : $(f^A)^t = f^{At^*}$, где t^* есть вектор-столбец, соответствующий $t \in \mathbb{Z}^d$.

Множество всех матриц размера $m \times d$ обозначим через $M(m, d)$. Через E_{ij} обозначим матрицу размера $i \times j$, имеющую только единицы на главной диагонали и только нули вне ее.

В терминах матриц можно описать многие результаты, упомянутые в этой работе. Например, результат де ла Рю и де Сэм Лазаро можно сформулировать так: множество $\{f^{E_{11}}\}_{f \in \mathcal{F}}$ существенно в $\mathcal{K}$. Кинг доказал, что для всех $n \in \mathbb{N}$ существенно множество $\{f^{nE_{11}}\}_{f \in \mathcal{K}}$. Конечно, подобный метод записи выглядит несколько искусственным для одномерных результатов, однако вполне естественен в многомерном случае. Результат [10] говорит о том, что множество $\{f^{E_{dd}}\}_{f \in \mathcal{F}^{(d)}}$ существенно; вопрос об инъективности касается существенности множества

$$\{f^{E_{dd}}\}_{f \in \mathcal{F}^{(d)}, f \text{ инъективно}}, \quad d \in \mathbb{N},$$

а вопросы де ла Рю и де Сэм Лазаро – существенности множеств

$$\{f^A\}_{A \in M(d, 1), f \in \mathcal{F}^{(d)}, f \text{ инъективно}}$$

и

$$\{f^A\}_{A \in M(1, 2), f \in \mathcal{F}}.$$

Следующая лемма является наиболее сильным результатом о сохраняющих типичность отображениях между действиями решеток разных размерностей. По существу, она включает все подобные результаты, которые мы получили.

ЛЕММА 2.4. *Пусть $m \geq d$ и A – целочисленная матрица размера $m \times d$ ранга d . Тогда отображение $p_A: f \mapsto f^A$ из $\mathcal{K}^{(m)}$ в $\mathcal{K}^{(d)}$ сохраняет типичность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение p_A можно представить в качестве композиции двух отображений p_B и $p_{E_{md}}$, где $B \in M(m, m)$ – невырожденная целочисленная матрица. Если мы докажем, что p_B и $p_{E_{md}}$ сохраняют типичность, то и p_A сохраняет типичность как их композиция. Отображение p_B перестановочно с сопряжениями. Любой прообраз свободного $\mathbb{Z}^m$ -действия при отображении p_B (если таковой существует) также свободен, а значит, сопряженные с ним всюду плотны. Поэтому нам достаточно показать, что образ p_B существенен в $K^{(m)}$. В работе [10] установлено, что типичное $\mathbb{Z}^m$ -действие f представимо в виде $h^{E_{mm}}$ для некоторого $h \in \mathcal{F}^{(m)}$. Тогда p_B от $\mathbb{Z}^m$ -действия $h^{B^{-1}}$ есть f . Таким образом, типичное $\mathbb{Z}^m$ -действие f имеет прообраз при отображении p_B .

Значит, p_B сохраняет типичность.

Образ отображения $p_{E_{md}}$, очевидно, есть все пространство $\mathcal{K}^{(d)}$. Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие $(T_1, \dots, T_d)$ продолжаемо до свободного $\mathbb{Z}^m$ -действия $(T_1, \dots, T_m)$ по замечанию 2.1. Сопряженные с $(T_1, \dots, T_m)$ всюду плотны по лемме 2.1, значит, $p_{E_{md}}$ сохраняет типичность.

Тогда $p_A = p_{E_{md}} p_B$ также сохраняет типичность.

Следствием из полученного результата является лемма 1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Надо доказать, что отображение

$$v_{(1,m)}(T, S) \mapsto (T, S^m)$$

из $\mathcal{K}^{(2)}$ в $\mathcal{K}^{(2)}$ сохраняет типичность при $m \in \mathbb{N}$. Отображение $v_{(1,m)}$ можно рассматривать как отображение v_A , где A – диагональная матрица, на диагонали которой стоят числа 1 и m . Поскольку матрица A целочисленна и невырождена, применима предыдущая лемма.

В заключение докажем теорему 1.3. Для этого нам понадобится еще один результат Степина и Еременко.

ЛЕММА 2.5 (см. [9]). Для типичного преобразования f и любого корня g из него множество коциклов $\{\varphi \mid \exists \psi: (g^\psi)^2 = f^\varphi\}$ тощее в Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. То, что отображение $v_{\Psi^{(d)}}$ сохраняет типичность, получено несколько выше (при доказательстве леммы 1.2). Здесь же мы покажем, что если множество $v_{\Psi^{(d)}}(W)$ существенно для некоторого $W \subset \Psi^{(d)}$, то типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие имеет несчетное число корней среди баз элементов множества W . В этом доказательстве мы будем использовать такие сокращения: вместо $(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \Phi^d$ будем писать φ , вместо $(f_1, \dots, f_d) \in \mathcal{K}^{(d)}$ будем писать f и вместо $(f_1^{\varphi_1}, \dots, f_d^{\varphi_d})$ будем писать f^φ . Пусть $v_{\Psi^{(d)}}(W)$ – существенное множество. Согласно теореме Куратовского–Улама для типичного $\mathbb{Z}^d$ -действия f множество $\varphi \in \Phi^d$ таких, что $f^\varphi \in v_{\Psi^{(d)}}(W)$, существенно в Φ^d . Если g^ψ есть корень из f^φ , то g – корень из f . Поэтому множество

$$\{f^\varphi \in \Psi^{(d)}\} \cap v_{\Psi^{(d)}}(W)$$

представимо в виде

$$\bigcup_{g \in v_{\mathcal{K}^{(d)}}^{-1}(f) \cap p_{\Psi^{(d)}, \mathcal{K}^{(d)}}^{-1}(W)} \{\varphi \in \Phi^d \mid \exists \psi: v_{\Psi^{(d)}}(g^\psi) = f^\varphi\}.$$

Для фиксированного $\mathbb{Z}^d$ -действия g имеем

$$\begin{aligned} & \{\varphi \in \Phi^d \mid \exists \psi: v_{\Psi^{(d)}}(g^\psi) = f^\varphi\} \\ &= \{\varphi_1 \in \Phi \mid \exists \psi: (g_1^{\psi_1})^2 = f_1^{\varphi_1}\} \times \dots \times \{\varphi_d \in \Phi \mid \exists \psi: (g_d^{\psi_d})^2 = f_d^{\varphi_d}\}. \end{aligned}$$

Для типичных $f_1, \dots, f_d$ (а значит, и для типичного f) согласно предыдущей лемме множество справа есть декартово произведение тощих множеств. Значит, оно само тощее множество. Таким образом, существенное

$$\{f^\varphi \in \Psi^{(d)}\} \cap v_{\Psi^{(d)}}(W)$$

представимо как объединение тощих множеств по всем корням из f , лежащих в множестве баз элементов W . Так как счетное объединение тощих множеств не может быть существенным множеством, то этих корней должно быть несчетное число. Таким образом, типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие f имеет несчетное число корней среди баз элементов множества W .

§ 3. Вложения действий многомерной решетки в потоки с многомерным временем

В этом параграфе мы докажем многомерные аналоги результатов, полученных в § 1. Вначале мы напомним определения типичности и инъективности действия, вкладываемости действия в поток. После этого сформулируем основную теорему этого параграфа (теорема 3.1). Доказывать ее напрямую мы не будем. Она естественным образом разбивается на четыре утверждения (теоремы 3.2 и 3.3, утверждения 3.1 и 3.2). Доказательство этих фактов в совокупности и дает результат теоремы 3.1. Далее, делаем редукцию утверждения 3.1 к теореме 3.2 и утверждения 3.2 к теореме 3.3.

После этого обсуждаются теоремы 3.2 и 3.3. Обе они доказываются по модулю лемм 3.1 и 3.3 соответственно. Затем мы сделаем набросок доказательств этих лемм. Сами доказательства вынесены в § 4.

Множество в топологическом пространстве называется *тощим*, если оно представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Дополнение к тощему множеству называется *существенным* множеством. Ниже мы перечислим некоторые свойства существенных и тощих множеств. Для более подробной информации см. работу [14].

Счетное объединение тощих множеств и любое подмножество тощего множества также являются тощими множествами.

Счетное пересечение существенных множеств и любое надмножество существенного множества также являются существенными множествами. Кроме того, множество существенно тогда и только тогда, когда оно содержит массивное (т.е. всюду плотное типа G_δ) подмножество.

Свойство называется *типичным*, если им обладают элементы существенного множества. Выражение “для типичного T выполняется свойство $C \dots$ ” означает, что C типично.

Γ -действие g называется *инъективным*, если $g^\gamma \neq I$ при $\gamma \neq 0$.

Основной результат этого параграфа есть теорема о вложении $\mathbb{Z}^d$ -действий в $\mathbb{R}^m$ -действия.

ТЕОРЕМА 3.1. *Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается в $\mathbb{R}^m$ -действие, если $d > m$, и вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^m$ -действие, если $d \leq m$.*

Доказательство удобно разбить на части. Следующие четыре утверждения вкупе составляют сформулированную теорему.

ТЕОРЕМА 3.2. Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие при $d > 1$. В матричной форме это означает, что множество $\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(d-1)}, A \in M(d-1, d)}$ тощее в $\mathcal{K}^{(d)}$ для $d > 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^m$ -действие при $d > m > 0$. В матричной форме это означает, что множество $\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(m)}, A \in M(m, d)}$ тощее в $\mathcal{K}^{(d)}$ для $d > m > 0$.

ТЕОРЕМА 3.3. Типичные $\mathbb{Z}^d$ -действия вкладываются в инъективные $\mathbb{R}^d$ -действия. В матричной форме это означает, что множество

$$\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(d)}, h \text{ инъективно}, A \in M(d, d)}$$

существенно в $\mathcal{K}^{(d)}$ для $d \in \mathbb{N}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^m$ -действие при $d < m$. В матричной форме это означает, что множество

$$\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(m)}, h \text{ инъективно}, A \in M(m, d)}$$

существенно в $\mathcal{K}^{(d)}$.

Доказательства будут приведены ниже. Несколько слов о сформулированных утверждениях. Теорема 3.2 является многомерным аналогом теоремы 1.1, а теорема 3.3 – многомерным аналогом теоремы 1.4. Теорема 3.3 дает ответ на вопрос об инъективности, а утверждение 3.2 – ответ на вопрос де ла Рю и де Сэм Лазаро о типичности преобразований, вкладываемых в инъективные $\mathbb{R}^d$ -действия.

Проведем редукцию утверждения 3.1 к теореме 3.2 и редукцию утверждения 3.2 к теореме 3.3.

РЕДУКЦИЯ УТВЕРЖДЕНИЯ 3.1 К ТЕОРЕМЕ 3.2. Предположим, что множество $\mathbb{Z}^d$ -действий вида $\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(d-1)}, A \in M(d-1, d)}$ тощее в $\mathcal{K}^{(d)}$ для всех $d > 1$. Зафиксируем $m > d$ и рассмотрим множество $\mathbb{Z}^m$ -действий $(T_1, \dots, T_m)$, вкладываемых в $\mathbb{R}^d$ -действия. Для каждого такого $\mathbb{Z}^m$ -действия $(T_1, \dots, T_d)$ вкладывается в то же $\mathbb{R}^d$ -действие. Поэтому множество всех $\mathbb{Z}^m$ -действий $(T_1, \dots, T_m)$, вкладываемых в $\mathbb{R}^d$ -действия, содержится в множестве

$$p_{E_{md}}^{-1}(\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(d-1)}, A \in M(d-1, d)}).$$

Согласно лемме 2.4 отображение $p_{E_{md}}$ сохраняет типичность. Тогда полный $p_{E_{md}}$ -прообраз тощего множества также тощее множество (поскольку $p_{E_{md}}$ -прообраз его дополнения существенен). Резюмируя, получаем, что множество всех $\mathbb{Z}^d$ -действий, вкладываемых в $\mathbb{R}^m$ -действия, содержится в тощем множестве и, значит, само является тощим.

РЕДУКЦИЯ УТВЕРЖДЕНИЯ 3.2 К ТЕОРЕМЕ 3.3. Пусть множество

$$\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(m)}, h \text{ инъективно}, A \in M(m, m)}$$

тех $\mathbb{Z}^m$ -действий, которые вкладываются в инъективные $\mathbb{R}^m$ -действия, существенно. Очевидно, что если $\mathbb{Z}^m$ -действие $(T_1, \dots, T_m)$ вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^m$ -действие, в то же действие вкладывается и $\mathbb{Z}^d$ -действие $(T_1, \dots, T_d)$. Таким образом, множество преобразований, вкладываемых в инъективные $\mathbb{R}^m$ -действия, содержит подмножество

$$p_{E_{md}}(\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(m)}, h \text{ инъективно}, A \in M(m, m)}).$$

По лемме 2.4 отображение $p_{E_{md}}$ сохраняет типичность.

Значит, множество $\mathbb{Z}^d$ -действий, которые вкладываются в инъективные $\mathbb{R}^d$ -действия, содержит существенное подмножество. Следовательно, оно и само существенно.

Структура доказательства теоремы 3.2 мало чем отличается от доказательства теоремы 1.1. Роль леммы 1.1 играет следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Если типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие, то множество корней из типичного $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действия, вкладывающихся в какие-нибудь $\mathbb{R}^d$ -действия, не более чем счетно.*

Доказательство этой леммы значительно сложнее доказательства леммы 1.1 и будет проведено позднее.

Теперь сформулируем и докажем еще одну лемму, а затем, считая лемму 3.1 доказанной, проведем доказательство теоремы 3.2.

ЛЕММА 3.2. *Множество V_{d+1} тех $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действий, которые можно вложить в какое-нибудь $\mathbb{R}^d$ -действие, либо существенное, либо точное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В свете динамической альтернативы достаточно показать, что V_{d+1} — аналитическое множество. Предположим, что $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действие $T = (T_1, \dots, T_{d+1})$ вкладывается в $\mathbb{R}^d$ -действие $h = (h_1, \dots, h_d)$. Это означает, что существуют такие векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$, что $h^{\alpha_i} = T_i$ для всех $i = 1, \dots, d+1$. Среди этих векторов, конечно, есть один линейно зависящий от других, например α_j . Рассмотрим $\mathbb{R}^{d+1}$ -действие $(\{h^{\alpha_1 \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \dots, \{h^{\alpha_{d+1} \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}})$. Его образ при отображении $p_{\mathcal{F}^{(d+1)}, \mathcal{K}^{(d+1)}} : f \mapsto f^{E_{d+1, d+1}}$ из $\mathcal{F}^{(d+1)}$ в $\mathcal{K}^{(d+1)}$ есть действие $(T_1, \dots, T_{d+1})$.

Кроме того, h обладает следующим свойством:

- 1) существует такое i , что T_i вкладывается в $\mathbb{R}^d$ -действие³

$$g = (\{h^{\alpha_1 \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \dots, \{h^{\alpha_{i-1} \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \{h^{\alpha_{i+1} \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \dots, \{h^{\alpha_{d+1} \alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}).$$

Это, в частности, означает, что T вкладывается в g .

Множество всех $\mathbb{R}^{d+1}$ -действий, удовлетворяющих этому условию, обозначим через W .

Рассмотрим произвольное действие $h \in W$. Пусть оно удовлетворяет условию 1) с некоторыми i и g . Тогда действие $h^{E_{d+1, d+1}}$ вкладывается в $\mathbb{R}^d$ -действие g .

³Подойдет j , выбранное выше.

Таким образом, множество V_{d+1} представляется как образ множества W при непрерывном отображении $p_{\mathcal{F}^{(d+1)}}, \mathcal{K}^{(d+1)}$. Покажем, что W – дополнение к множеству типа G_δ .

Свойство 1) можно переформулировать так: один из векторов

$$\bigcup_{i=1, \dots, d+1} \{(a_1, \dots, a_{d+1})\}_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}, a_i=1}$$

тождественен. Через W_n обозначим множество тех $\mathbb{R}^{d+1}$ -действий, для которых существует тождественный вектор такого вида в параллелепипеде $[-n, n]^{d+1}$. Пусть $\mathbb{R}^{d+1}$ -действие f не лежит в W_n . Это значит, что

$$\min_{i=1, \dots, d} d(f, I) > \varepsilon > 0.$$

$$\{(a_1, \dots, a_{d+1})\}_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}, a_i=1}$$

Тогда любое $\mathbb{R}^{d+1}$ -действие g такое, что

$$d_{n, \mathcal{F}^{(d+1)}}(f, g) < \varepsilon,$$

также не лежит в W_n . Значит, дополнение к W_n открытое, а W_n – замкнутое множество. Соответственно, W является объединением счетного числа замкнутых множеств, а значит, борелевским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Нам надо доказать, что для всех $d > 1$ множество V_d тех $\mathbb{Z}^d$ -действий, которые вкладываются в какие-нибудь $\mathbb{R}^{d-1}$ -действия, является тощим. Доказательство проводится индукцией по d . В случае $d = 2$ утверждение уже доказано (теорема 1.1).

Предположим, что для $d = n$ утверждение верно, т.е. V_d – тощее множество. По лемме 3.1 множество корней из типичного $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действия, лежащих в множестве V_{d+1} , не более чем счетно. Если бы множество V_{d+1} было существенным, то типичное $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действие имело бы в нем несчетное число корней по теореме 1.2. Следовательно, множество V_{d+1} существенным быть не может. Значит, по лемме 3.2 оно тощее.

Оба условия принципа математической индукции выполнены.

Идея построения инъективного $\mathbb{R}^d$ -действия, в которое вкладывается $\mathbb{Z}^d$ -действие f , состоит в том, чтобы выбрать некоторое несчетное подмножество $\mathbb{R}^d$ -действий, содержащих f . В этом подмножестве количество неинъективных действий не более чем счетно. Схема доказательства теоремы 3.3 близка к схеме доказательства теоремы 1.4. В качестве леммы из основного доказательства на этот раз вынесем следующий факт.

ЛЕММА 3.3. Пусть типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие $(f_1, \dots, f_d)$ представляется в виде

$$(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{R}}^{E_{dd}}$$

для несчетного числа различных неинъективных $\mathbb{R}^d$ -действий и действие $(h_1, \dots, h_{d-1})$ инъективно. Тогда некоторая степень преобразования f_d вкладывается в $(h_1, \dots, h_{d-1})$.

Доказательство будет проведено позднее, а сейчас выведем из этой леммы теорему 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Доказательство будет проведено индукцией по d . В случае $d = 1$ утверждение доказано в работе [7]. Пусть для $d = n$ оно верно, докажем его для $d = n + 1$. Согласно лемме 2.4 следующие множества $\mathbb{Z}^d$ -действий существенны:

- множество W' тех $\mathbb{Z}^d$ -действий, чьи первые $d - 1$ образующая вкладываются в инъективное $\mathbb{R}^d$ -действие (так как это множество представимо в виде

$$p_{E_{d,d-1}}^{-1}(\{h^A\}_{h \in \mathcal{F}^{(d-1)}, h \text{ инъективно}, A \in M(d-1, d-1)}),$$

при этом множество в скобках существенно по предположению индукции);

- множество W'' тех $\mathbb{Z}^d$ -действий $(f_1, \dots, f_d)$, для которых $(f_1, \dots, f_{d-1}, f_d^n)$ не вкладывается в $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие для всех $n \in \mathbb{N}$ (так как оно представимо в виде

$$\bigcap_n p_{A_n}^{-1}(\{f \in \mathcal{X}^{(d)} \mid f \text{ не вкладывается в } \mathbb{R}^{d-1}\text{-действие}\}),$$

где A_n – диагональная матрица и на ее диагонали стоят числа $1, \dots, 1, n$; заметим, что множество в скобках существенно по теореме 3.2).

Кроме того, все образующие типичного $\mathbb{Z}^d$ -действия $T = (T_1, \dots, T_d)$ имеют ранг 1 и вкладываются в несчетное число потоков по теореме 0.2. Поскольку типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие лежит в W' , первые $d - 1$ его образующая вкладываются в инъективное $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие. Пусть $(h_1, \dots, h_{d-1})$ – одно из таких $\mathbb{R}^{d-1}$ -действий и $\{h_{d,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ – несчетное число потоков, в которые вкладывается T_d . Поскольку все образующие типичного $\mathbb{Z}^d$ -действия имеют ранг 1, то для каждого α потоки $h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha}$ коммутируют и задают $\mathbb{R}^d$ -действие $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})$. Если для некоторого α это действие инъективно, то вопрос решен. Если же нет, то по предыдущей лемме некоторая степень T_d вкладывается в $(h_1, \dots, h_{d-1})$. Поскольку $T_1, \dots, T_{d-1}$ также вкладываются в $(h_1, \dots, h_{d-1})$, то мы должны заключить, что $\mathbb{Z}^d$ -действие $(T_1, \dots, T_d^n)$ вкладывается в $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Но типичное T лежит в множестве W'' , значит, такого n не существует. Таким образом, среди $\mathbb{R}^d$ -действий, в которые вкладывается T , есть инъективное. По индукции заключаем, что утверждение теоремы верно для всех d .

Доказательства лемм 3.1 и 3.3 похожи. Мы сделаем набросок доказательства второй из них, чтобы проиллюстрировать используемый метод. Далее, мы обсудим сложности, возникающие при доказательстве леммы 3.1.

Заметим, что лемма 3.3 доказывается в предположении, что верна теорема 3.2.

Пусть h – произвольное $\mathbb{R}^d$ -действие. Ненулевой вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ назовем *тождественным* (относительно h), если h^α есть тождественное отображение. Если $h^{b\alpha}$ тождественно для любого $b \in \mathbb{R}$, то α задает тождественное направление. Если действие $(h_1, \dots, h_d)$ и коммутирующий с ним поток g не имеют

тождественных направлений, то вкладываемость g в $(h_1, \dots, h_d)$ эквивалентна существованию тождественного направления у $\mathbb{R}^{d+1}$ -действия $(h_1, \dots, h_d, g)$.

Множество тождественных векторов образует замкнутую подгруппу, и либо у действия есть тождественные направления, либо эта подгруппа дискретна. Во втором случае действие принимает каждое значение не более счетного числа раз и, значит, существует не более счетного числа различных способов вложить одно и то же $\mathbb{Z}^d$ -действие в него.

Типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие $(T_1, \dots, T_d)$ представляется в виде

$$(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})^{E_{dd}}$$

для несчетного числа $\mathbb{R}^d$ -действий $\{(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Все эти $\mathbb{R}^d$ -действия не имеют тождественных направлений, так как типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие. Поскольку действий

$$\{(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

несчетное число, то они не вкладываются в n -мерное действие без тождественных направлений для любого $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что существует последовательность $\{\alpha_i\}$ такая, что действия $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_1}, \dots, h_{d,\alpha_i})$ не содержат $h_{\alpha_{i+1}}$ для всех натуральных i ⁴. Идея состоит в том, чтобы проследить, как быстро растет размерность множества тождественных векторов этих действий с ростом i . Оказывается, либо некоторая степень T_d вкладывается в $(h_1, \dots, h_{d-1})$, либо эта размерность растет быстрее, чем i . Во втором случае размерность множества тождественных векторов рано или поздно превысит размерность всего пространства (равную $d + i - 1$), что невозможно.

Размерность множества векторов удаётся проконтролировать за счет простого замечания: если множества тождественных векторов коммутирующих между собой действий h и g дискретны и не существует потока, который одновременно вкладывается в h и g , то множество тождественных векторов действия (h, g) также дискретно. В нашем случае это означает, что для всех i действие $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_1}, \dots, h_{d,\alpha_i})$ не имеет тождественных направлений. Увеличение i на 1 приводит к появлению двух новых тождественных векторов, соответствующих тому, что в $h_{d,\alpha_{i+1}}$ вкладывается T_d , и тому, что действие $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_{i+1}})$ не инъективно. Поэтому либо размерность пространства тождественных векторов увеличится на 2, либо между тождественными векторами появится линейная зависимость. Более того, даже рациональная, так как множество тождественных векторов дискретно. Последний случай и соответствует тому, что некоторая степень T_d вкладывается в $(h_1, \dots, h_{d-1})$.

Теперь рассмотрим лемму 3.1.

В случае $d = 1$ доказательство аналогичного утверждения (леммы 1.1) основано на том, что все корни из типичного $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действия T соответствуют разным $\mathbb{R}^d$ -действиям, в которые T вкладывается. Уже это утверждение представляет некоторую сложность в многомерном случае. Например, если T вкладывается в $\mathbb{R}^d$ -действие h , имеющее тождественное направление, то T вкладывается

⁴Чуть ниже мы скажем, почему эти действия не имеют тождественных направлений.

в h несчетным числом способов и каждому соответствует какой-то корень из T , лежащий в этом действии. В предыдущих рассуждениях нам удалось избежать проблем с этим, поскольку лемма 3.3 доказывается в предположении, что верна теорема 3.2. Обсуждаемая нами лемма опираться на эту теорему, конечно, не может. Однако в ее условие входит утверждение, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие. Как следствие, существенно множество $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действий, также не вкладывающихся в $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие (применяем то, что множество таких действий содержит полный прообраз множества тех $\mathbb{Z}^d$ -действий, которые не вкладываются ни в какое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие, и то, что отображение $p_{E_{d+1}, d}$ сохраняет типичность). Осталось заметить, что если $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действие вкладывается в какое-нибудь $\mathbb{R}^d$ -действие, содержащее тождественное направление, то оно вкладывается и в какое-то $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие. В типичном случае это невозможно, как мы показали выше.

Значит, в типичном случае если T имеет несчетное число корней, вкладываемых в $\mathbb{R}^d$ -действие, то T само вкладывается в несчетное число $\mathbb{R}^d$ -действий. Теперь можно применить рассуждения, аналогичные примененным выше к лемме 3.3.

Наша конечная цель состоит в том, чтобы, опираясь на предположение о том, что T вкладывается в несчетное число $\mathbb{R}^d$ -действий, построить бесконечную последовательность действий $\{g_i\}$ возрастающей размерности, у которых нет тождественных направлений, но размерность множества тождественных векторов растет быстрее, чем размерность действий. Это привело бы нас к противоречию.

Существенное отличие от доказательства леммы 3.3 заключается в том, что для упомянутой леммы мы сами выбирали несчетное множество действий, с которыми будем работать. Сейчас же нам придется рассматривать все действия, содержащие T .

Пусть f и g есть $\mathbb{R}^m$ - и $\mathbb{R}^d$ -действия, содержащие типичное T . Конечно, мы можем рассмотреть действие (f, g) , но нет гарантий, что у него нет тождественных направлений. Мы “поворачиваем” время действия g , чтобы некоторые его образующие оказались вложены в поток f , а остальные задавали действие h , которое не имеет с f общих потоков (более точно, вместо действия g рассматривается действие g_A для некоторой обратимой матрицы A). После этого мы рассматриваем действие (f, h) , которое уже не имеет тождественных направлений.

Сколько новых (независимых) тождественных векторов у нас появилось? Если бы мы добавили g , а не h , то знали бы точно: как минимум по одному тождественному вектору для каждого T_i . Всего $d+1$ вектор. Добавим их к базису тождественных векторов действия f . Если бы в результате этой операции между тождественными векторами появилась бы рациональная зависимость, то она была бы и у проекций добавленных векторов на d последних координат. Эти проекции задают векторы, соответствующие T_i (так они были выбраны). Они не могут быть рационально зависимы, если T – свободное действие. Заметим, что для леммы 3.3 как раз случай рациональной зависимости является

единственно возможным. Таким образом, размерность времени действия выросла меньше, чем размерность множества тождественных векторов.

Ситуация ухудшается, если действие (f, g) все-таки имеет тождественные направления. В этом случае, напомним, мы рассматриваем действие $(f, h) = (f, h_1, \dots, h_k)$ такое, что h вкладывается в g , а g вкладывается в (f, h) . Первая проблема заключается в том, что мы можем (теоретически) не получить ни одного нового тождественного вектора по сравнению с f . Действительно, все векторы, соответствующие T_i , $i = 1, \dots, d$ (а именно они позволяют нам получить тождественные векторы), могут оказаться в той части действия g , которая вложена в f . Однако мы можем потребовать, чтобы никакие $d - k$ образующих T не задавали $\mathbb{Z}^{d-k+1}$ -действие, вкладываемого в $\mathbb{R}^{d-k}$ -действие. Чтобы показать, что множество таких T типично, применяется лемма 2.4. Таким образом, все-таки найдется $k + 1$ вектор для (f, h) , каждый из которых соответствует какому-либо T_i и не все последние k его координат равны нулю. Добавляя эти векторы к базису из тождественных векторов действия f , получаем систему из $k+1+c$ векторов (здесь c – размерность множества тождественных векторов действия f). Есть два варианта: либо мы получили новый базис (к чему мы и стремимся), либо между векторами появилась рациональная зависимость. Здесь появляется вторая проблема: мы не можем повторить рассуждения, применявшиеся к лемме 3.3, поскольку проекции добавленных векторов на последние l координат не соответствуют преобразованиям T_i , а проекции на большее число координат могут оказаться зависимыми с проекциями векторов старого базиса. Следующая лемма позволяет преодолеть эту проблему в типичном случае. Заметим, что доказательство этой леммы – единственное место в настоящей работе, где полностью используется утверждение леммы 2.4.

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что типичное $\mathbb{Z}^{d-1}$ -действие не может быть вложено в $\mathbb{R}^{d-2}$ -действие. Пусть $\mathbb{Z}^d$ -действие f вкладывается в некоторое $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие h , т.е. существуют такие векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$, что $h^{\mathbf{r}_i} = f_i$ для $i = 1, \dots, d$. Предположим, что проекции векторов $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ на k -мерное, $k < d-1$, подпространство X в $\mathbb{R}^{d-1}$ таковы, что у любого их подмножества либо нет линейной зависимости, либо есть рациональная. Тогда для типичного f проекции векторов $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ содержат хотя бы $k + 1$ линейно независимый вектор.*

Докажем лемму позднее, а сейчас покажем, как она применяется. В качестве действия рассматривается g , в качестве подпространства – множество векторов, соответствующих h . В качестве $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ рассматриваются такие векторы, что $g^{\mathbf{r}_i} = T_i$, $i = 1, \dots, d$. Проекции $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ на выбранное подпространство должны иметь как минимум $k + 1$ независимый вектор. Осталось заметить, что эти проекции совпадают с проекциями векторов, добавленных к старому базису. Таким образом, исходя из действий f и g , мы получили действие, в которое оба они вкладываются, причем размерность действия увеличилась (на k) меньше, чем размерность множества тождественных векторов. Добавляя каждый раз по новому действию g , мы рано или поздно придем к тому, что больше

добавить ничего не сможем. И, значит, все возможные $\mathbb{R}^d$ -действия, содержащие T , вкладываются в f . Как следствие, лишь счетное число корней из типичного $\mathbb{Z}^{d+1}$ -действия T может быть вложено в какое-нибудь $\mathbb{R}^d$ -действие.

§ 4. Доказательства вспомогательных утверждений

Пусть A – матрица размера $m \times n$ и h – некоторое $\mathbb{R}^m$ -действие. Определим $\mathbb{R}^n$ -действие h_A : $(h_A)^t = h^{At^*}$, где t^* есть вектор-столбец, соответствующий $t \in \mathbb{R}^n$. Два $\mathbb{R}^n$ -действия h и f лежат в одном классе эквивалентности, если существует невырожденная матрица C такая, что $h_C = f$. Если g вкладывается в h , то вкладывается и в любое эквивалентное h действие.

Для $\mathbb{R}^d$ -действия g рассмотрим множество всех векторов $\mathbf{r}$, лежащих в $\mathbb{R}^d$, с началом в точке нуля. Будем говорить, что вектор $\mathbf{r}$ *тождественен*, если $g^{\mathbf{r}} = I$. Если $g^{\alpha \mathbf{r}} = I$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, то мы будем говорить о тождественном направлении.

Множество тождественных векторов любого действия образует замкнутую группу. Оно дискретно только в случаях, если образующие зависимы рационально. В остальных случаях существует тождественное направление.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если множества тождественных векторов действий h и g , коммутирующих между собой, дискретны и не существует потока, который одновременно вкладывается в h и g , то множество тождественных векторов действия (h, g) дискретно. Также если мы имеем линейно зависимые тождественные векторы, то либо их проекции на любое подпространство будут рационально зависимы, либо существует тождественное направление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Пусть f лежит в множестве

$$\bigcap_{l=1}^{d-2} \left(\bigcap_{\substack{A \in M(d, l) \\ \text{ранг } A \text{ равен } l \\ A \text{ целочисленна}}} p_A^{-1}(F_l) \right),$$

где F_l – множество всех $\mathbb{Z}^l$ -действий, которые не могут быть вложены в $\mathbb{R}^{l-1}$ -действие. Лемма 2.4 гарантирует, что в наших предположениях такие f типичны.

Первое, что нужно заметить, это то, что в типичном случае h не имеет тождественных направлений, иначе бы f вкладывалось в $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие. Не теряя общности, можно считать, что выбранное подпространство X натянуто на первые k координатных векторов в $\mathbb{R}^d$. Каждый вектор $\mathbf{r}_i$ представляется в виде $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$, где $\mathbf{a}_i \in X$, а проекция $\mathbf{b}_i$ на X нулевая. Не все $\mathbf{a}_i$ нулевые, иначе бы f вкладывалось в $\mathbb{R}^{d-1-k}$ -действие. Пусть первые l векторов $\mathbf{a}_i$ независимы, а оставшиеся зависят от них. Тогда каждый из оставшихся векторов $\mathbf{a}_i$ должен с помощью рациональных коэффициентов выражаться через $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$.

Другими словами, существуют такие целые числа $\{\alpha_{ki}\}$, что

$$\alpha_{kk}\mathbf{a}_k + \sum_{i=1}^l \alpha_{ki}\mathbf{a}_i = 0 \quad \text{для } k = l+1, \dots, d,$$

причем $\alpha_{kk} \neq 0$. Это же утверждение означает, что векторы

$$\mathbf{d}_k = \alpha_{kk}\mathbf{r}_k + \sum_{i=1}^l \alpha_{ki}\mathbf{r}_i \quad \text{для } k = l+1, \dots, d$$

лежат в ортогональном дополнении к X , значит, соответствующее им $\mathbb{Z}^{d-l}$ -действие

$$(h^{\mathbf{d}_{l+1}}, \dots, h^{\mathbf{d}_d})$$

вкладывается в некоторое $\mathbb{R}^{d-k-1}$ -действие.

Поскольку все векторы $\mathbf{d}_k$, $k = l+1, \dots, d$, являются суммами векторов $\mathbf{r}_i$ с целочисленными координатами, имеем

$$(h^{\mathbf{d}_{l+1}}, \dots, h^{\mathbf{d}_d}) = f^A,$$

где (i, j) -й элемент матрицы $A \in M(d, d-l)$ равен α_{ij} , если α_{ij} определено, и нулю в противном случае. Матрица A имеет ранг $d-l$, поскольку ее последние $d-l$ строк порождают диагональную матрицу.

Но для такого A , выбранного нами f и $d-l \leq d-k-1$ действие f^A не может быть вложено в $\mathbb{R}^{d-k-1}$ -действие. Следовательно, $l \geq k+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Пусть g и h – действия групп $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^{d-1}$ соответственно, содержащие $f = (f_1, \dots, f_d)$, причем g не имеет тождественных направлений. Действие h для типичного f таких направлений не имеет, так как f не вкладывается в $\mathbb{R}^{d-2}$ -действие. Через n обозначим размерность подпространства, порожденного тождественными векторами действия g в $\mathbb{R}^m$, через $Z_n = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ – какой-либо базис этого подпространства. Возможны два случая: либо действие h целиком вкладывается в действие g , либо для некоторого $k < d-1$ существует $\mathbb{R}^k$ -действие, вкладываемое одновременно и в h , и в g , но такого $(k+1)$ -мерного действия уже не существует. Рассмотрим второй случай. Переходя, если понадобится, к эквивалентному h действию, можно считать, что в g вкладывается $(h_{d-k}, \dots, h_{d-1})$. Рассмотрим действие $(g, (h_1, \dots, h_{d-k-1}))$. В него вкладывается и g , и h . Это действие имеет как минимум n независимых тождественных векторов (а именно $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, дополненных нулями справа; мы не будем менять их обозначения после этой нехитрой операции) и еще d векторов (возможно, линейно зависимых) вида

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{t}_i,$$

$i = 1, \dots, d$, где $g^{\mathbf{q}_i} = f_i$ (и дополняем эти векторы нулями справа), а $\mathbf{t}_i$ есть вектор, соответствующий такому вектору $\mathbf{s}_i$, что $g^{\mathbf{s}_i} = f_i$. Первые $d-k-1$ координата $\mathbf{s}_i$ совпадают с последними $d-k-1$ координатой $\mathbf{t}_i$ (а значит, и $\mathbf{p}_i$).

Поскольку $(h_1, \dots, h_{d-k-1})$ не имеет общих потоков с g , эта система должна порождать дискретную подгруппу в $\mathbb{R}^{m+k}$. Рассмотрим проекции $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ векторов $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ на $d - k - 1$ последнюю координату. Если некоторые из этих проекций линейно зависимы, то линейно зависимы и некоторые из тождественных векторов $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$. У действия нет тождественных направлений, и по замечанию 4.1 проекции этих векторов должны оказаться рационально зависимы. С другой стороны, векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_d$ можно рассматривать как проекции $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ на первые $d - k - 1$ координату. В этом случае применима лемма 3.4 и как минимум $d - k$ векторов (скажем, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d-k}$) линейно независимы. Тогда линейно независимы и векторы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d-k}$. Предположим, что векторы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d-k}$ и $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ линейно зависимы. Тогда для некоторых действительных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_{d-k}$ имеем

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{z}_i + \sum_{i=1}^{d-k} \beta_i \mathbf{p}_i = 0.$$

Сумма проекций этих векторов на последние $d - k - 1$ координату также должна быть равна нулю. Поскольку проекции векторов $\mathbf{z}_i$ на эти координаты нулевые, а проекции оставшихся векторов независимы, то все β_i должны равняться нулю. Тогда последнее равенство принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{z}_i = 0,$$

что невозможно, так как Z_n — независимая система.

Таким образом, тождественные векторы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d-k}$ и $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ линейно независимы. Получившееся действие $(g, (h_1, h_2, \dots, h_{d-k-1}))$ не имеет тождественного направления и имеет как минимум $d - k + n$ линейно независимых тождественных векторов.

Пусть $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие g_1 содержит f . Предположив, что g_1 не удовлетворяет требованию теоремы, мы должны заключить, что существует действие h , которое в g_1 не вкладывается. Как показано выше, мы можем получить действие g_2 , в которое вкладываются и g_1 , и h . При этом размерность действия вырастет меньше, чем количество независимых тождественных векторов у него. Если g_2 не удовлетворяет требованию теоремы, мы должны заключить, что существует действие f , которое в g_2 не вкладывается. Продолжая эту процедуру, скоро мы придем к действию g_p , размерность которого меньше числа его независимых тождественных векторов. Поскольку такого не бывает, начиная с некоторого g все $\mathbb{R}^{d-1}$ -действия h , содержащие f , вкладываются в g .

Все $\mathbb{R}^{d-1}$ -действия, в которые вкладываются корни из f , содержат также и f , значит, вкладываются в действие g . Осталось заметить, что f вкладывается в действие g не более чем счетным числом различных способов (потому что у g не более чем счетное число тождественных векторов) и, следовательно, не более счетного числа корней из типичного f вкладывается в g . А значит, и вообще в какое-либо $\mathbb{R}^{d-1}$ -действие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Предположим, что

$$\{(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

суть различные коммутирующие $\mathbb{R}^d$ -действия, в которые вкладывается $\mathbb{Z}^d$ -действие $(f_1, \dots, f_d)$. Поскольку таких действий несчетное число, то они не вкладываются в n -мерное действие для любого $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что существует последовательность $\{\alpha_i\}$ такая, что действия $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_1}, \dots, h_{d,\alpha_i})$ не содержат $h_{\alpha_{i+1}}$ для всех натуральных i . Получившееся на i -м шаге действие не имеет тождественных направлений, так как h_{d,α_i} не вкладывается в $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_1}, \dots, h_{d,\alpha_{i-1}})$; h_{d,α_i} добавляет к базису Z_i множества тождественных векторов как минимум два: $(0, \dots, 0, -1, 1)$ и второй вектор $\mathbf{r}$, соответствующий ненулевому тождественному вектору действия $(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_i})$. Если получившаяся система векторов Z_{i+1} будет линейно независима для всех i , то размерность множества тождественных векторов рано или поздно превысит размерность пространства, в котором оно находится, так как растет быстрее. Это невозможно, поэтому существует такое i , что векторы $\mathbf{r}$, $(0, \dots, 0, -1, 1)$ и Z_i линейно зависимы. Заметим, что если убрать из этой системы вектор $\mathbf{r}$, то она будет независимой. Тогда по замечанию 4.1 вектор $\mathbf{r}$ выражается через остальные векторы с помощью рациональных коэффициентов. В частности, это означает, что последняя координата вектора $\mathbf{r}$ рациональна (из векторов, через которые мы $\mathbf{r}$ выражаем, последняя координата ненулевая лишь у $(0, \dots, 0, -1, 1)$). Тогда для некоторого натурального n последняя координата $n\mathbf{r}$ целочисленна. Имеем

$$(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_1}, \dots, h_{d,\alpha_{i-1}})^{n\mathbf{r}} = I.$$

Убирая те координаты $n\mathbf{r}$, которые заведомо равны нулю, получаем вектор $(p_1, \dots, p_d)$ такой, что

$$(h_1, \dots, h_{d-1}, h_{d,\alpha_i})^{(p_1, \dots, p_d)} = I$$

или

$$(h_1, \dots, h_{d-1})^{(p_1, \dots, p_{d-1})} = h_{d,\alpha_i}^{-p_d} = f_d^{p_d}.$$

ВОПРОСЫ. Мы не доказываем, что типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие не вкладывается в неинъективное $\mathbb{R}^m$ -действие, а показываем, что не все этими действиями исчерпывается. Из результатов нашей работы следует, что при $m > d$ типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вкладывается в неинъективное $\mathbb{R}^m$ -действие, а при $m < d$ нет. Остается открытым вопрос:

– Можно ли типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вложить в неинъективное $\mathbb{R}^d$ -действие?

В случае $d = 1$ ответ отрицателен [7], однако для больших размерностей пока ничего неизвестно.

Какие значения может принимать число не перемешивающих слабо направлений в типичном случае? Два крайних вопроса здесь выглядят так:

- Можно ли типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вложить в $\mathbb{R}^d$ -действие без не перемешивающих слабо направлений?⁵
- Можно ли типичное $\mathbb{Z}^d$ -действие вложить в $\mathbb{R}^d$ -действие, имеющее не перемешивающие слабо направления?

Список литературы

- [1] П. Р. Халмош, *Лекции по эргодической теории*, ИЛ, М., 1959.
- [2] J. L. F. King, “The generic transformation has roots of all orders”, *Colloq. Math.*, **84/85**:2 (2000), 521–547.
- [3] E. Glasner, J. L. King, “A zero-one law for dynamical properties”, *Contemp. Math.*, **215** (1998), 231–242.
- [4] А. М. Степин, *Доклад на конференции “Ломоносовские чтения”*, МГУ, апрель, 2000.
- [5] О. Н. Агеев, “Типичный автоморфизм пространства Лебега сопряжен с G -расширением для любой конечной абелевой группы G ”, *Докл. РАН*, **374**:4 (2000), 439–442.
- [6] О. Н. Агеев, “О типичности некоторых неасимптотических динамических свойств”, *УМН*, **58**:1 (2003), 177–178.
- [7] T. de la Rue, J. Lasaro, “Une transformation générique peut être insérée dans un flot”, *Ann. Henri Poincaré*, **39**:1 (2003), 121–134.
- [8] А. М. Степин, А. М. Еременко, “Типичное сохраняющее меру преобразование имеет обширный централизатор”, *Докл. РАН*, **394**:6 (2004), 739–742.
- [9] А. М. Степин, А. М. Еременко, “Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108.
- [10] С. В. Тихонов, “Типичное действие группы $\mathbb{Z}^d$ вкладывается в действие группы $\mathbb{R}^d$ ”, *Докл. РАН*, **391**:1 (2003), 26–28.
- [11] J. L. King, “The commutant in the weak closure of the powers, for rank-1 transformations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6** (1986), 363–384.
- [12] И. Корнфельд, Я. Синай, С. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [13] С. В. Тихонов, “Типичные свойства абелевых групп преобразований и спектральная дизъюнктивность”, *Дис. . . . канд. физ.-матем. наук*, МГУ, М., 2004.
- [14] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966.
- [15] Y. Katznelson, B. Weiss, “Commuting measure preserving transformations”, *Israel J. Math.*, **12** (1972), 16–173.

С. В. Тихонов (S. V. Tikhonov)

Российский государственный
торгово-экономический университет
E-mail: Tikhonovc@mail.ru

Поступила в редакцию

21.03.2005

⁵Этот вопрос задал В. Рыжиков на одном из семинаров по динамическим системам в МГУ.