Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Шрамов, К вопросу рациональности неособых трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 1, 133–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:34:20

УДК 512.76

К. А. Шрамов

**К вопросу рациональности
неособых трехмерных многообразий
с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4**

В работе получен критерий гладкости полного пересечения двух послойных квадрик в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_5))$. Из него выводится уточнение теоремы Алексева о рациональности стандартных расслоений на поверхности дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{P}^1$: доказывается, что всякое такое расслоение с топологической эйлеровой характеристикой $\chi(X) = -4$ рационально.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Вопросы рациональности трехмерных расслоений на поверхности дель Пеццо степени d над $\mathbb{P}^1$ изучались многими авторами. При $d \geq 5$ все такие многообразия рациональны. Расслоения с $d = 1, 2$ и 3 изучались в [1]–[6], в результате чего было получено практически полное решение вопроса о рациональности неособых расслоений на поверхности дель Пеццо степени $d = 1$ и (при условии общности) степени $d = 2, 3$.

Про расслоения на поверхности дель Пеццо степени 4 известно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (Алексеев, см. [7]). *Пусть V – стандартное расслоение на поверхности дель Пеццо¹ степени 4 над $\mathbb{P}^1$. Если топологическая эйлерова характеристика $\chi(V) \neq 0, -8, -4$, то V не рационально, если $\chi(V) = 0, -8$, то V рационально, наконец, если $\chi(V) = -4$, то многообразие V рационально тогда и только тогда, когда его промежуточный якобиан является якобианом кривой.*

Основная цель настоящей работы – доказать следующее уточнение теоремы Алексева.

ТЕОРЕМА 1.1. *Всякое стандартное расслоение на поверхности дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{P}^1$ с топологической эйлеровой характеристикой -4 рационально.*

Это утверждение окажется следствием описания пересечений послойных квадрик в скроллах с топологической эйлеровой характеристикой -4 (см. лемму 2.4 после введения соответствующих обозначений), которая, в свою очередь,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00353).

¹Определение см. в § 2.

получается в качестве следствия из критерия гладкости пересечения двух послойных квадрик в пятимерном скролле (теорема 2.2).

Автор благодарен И. А. Чельцову за неослабевающий интерес к работе и многочисленные советы, В. А. Исковских за внимание к работе и С. С. Галкину за полезные обсуждения.

§ 2. Определения, обозначения и формулировки основных результатов

Все многообразия считаются определенными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см., например, [7]). Неособое трехмерное многообразие X называется *стандартным расслоением на поверхности дель Пеццо над $\mathbb{P}^1$* , если X обладает такой структурой расслоения на поверхности дель Пеццо над $\mathbb{P}^1$, что все его слои нормальны и $\rho(X) = 2$.

Пусть $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – стандартное расслоение на поверхности дель Пеццо степени d над $\mathbb{P}^1$. Тогда при $d \geq 3$ многообразие X естественно вкладывается в проективизацию $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$ расслоения $\mathcal{E} = \phi_* \omega_X^{-1}$. Например, если $d = 4$, то X вкладывается в некоторый скролл $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_5))$ в качестве гладкого пересечения двух дивизоров, ограничение каждого из которых на слой является квадрикой в $\mathbb{P}^4$. Следовательно, можно всегда считать, что X вложено в Y как полное пересечение двух послойных квадрик. Обратно, если X – такое пересечение, причем X гладко и $\rho(X) = 2$, то X является стандартным расслоением на поверхности дель Пеццо степени 4. Таким образом, чтобы явно описывать расслоения на поверхности дель Пеццо степени 4 над $\mathbb{P}^1$, надо в первую очередь по данным линейным системам $|D_1|$ и $|D_2|$ послойных квадрик на Y научиться определять, существуют ли в них такие дивизоры, что их пересечение является гладким многообразием (или, что то же самое, является ли гладким пересечение двух общих дивизоров из этих линейных систем).

Зафиксируем некоторые обозначения, в терминах которых будет дан ответ на последний вопрос. Пусть $Y = \mathbb{F}(d_1, \dots, d_5) = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_5))$, где $d_1 \geq \cdots \geq d_5 = 0$ (определение и основные свойства Y описаны, например, в [8]). Пусть M_Y – тавтологический обратимый пучок на Y , L_Y – слой естественной проекции $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ (мы также будем использовать обозначения M и L вместо M_Y и L_Y в тех случаях, когда ясно, о каком многообразии идет речь). Пусть выбраны общие дивизоры $D_i \in |2M + b_i L|$, $i = 1, 2$, заданные уравнениями $f_1(x, t) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$ и $f_2(x, t) = \sum \beta_{ij} x_i x_j$ соответственно, где x_i – стандартные координаты в слое отображения φ , а $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t_0, t_1)$ (соответственно $\beta_{ij}(t_0, t_1)$) – многочлены от координат на базе степени $d_i + d_j + b_1$ (соответственно $d_i + d_j + b_2$). Нас интересуют условия на d_i, b_j , при которых $X = D_1 \cap D_2$ является гладким многообразием.

Пусть $Y_2, \dots, Y_5$ – отрицательные подскроллы в Y (т.е. Y_i – подмногообразие, заданное уравнениями $x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0$). Очевидно, что $\text{Bs } |D_1|$ может быть равно лишь Y_3, Y_4, Y_5 или $\emptyset$. Будем предполагать, что $b_1 \leq b_2$ (в частности, $\text{Bs } |D_2| \subset \text{Bs } |D_1|$).

Следующая теорема дает критерий гладкости X в терминах параметров d_i, b_j . Отметим, что аналогичные рассуждения в случае расслоений на поверхности дель Пеццо степени 3 проводились в [6; лемма 26] и [9; предложения 31, 32].

ТЕОРЕМА 2.2. *При сделанных предположениях общее многообразие X является гладким тогда и только тогда, когда выполнен один из следующих (взаимоисключающих) наборов условий.*

1. $b_1 \geq 0$.
2. $b_1 < 0$, $2d_4 + b_1 \geq 0$ и выполнен один из следующих наборов условий:
 - а) $d_1 + b_1 < 0$, $b_2 = 0$;
 - б) $d_1 + b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$;
 - в) $b_1 = -d_1$, $b_2 < 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$;
 - г) $b_1 = -d_1$, $b_2 = -d_2$, $d_2 > d_3$;
 - д) $d_1 + b_1 > 0$, $d_2 + b_1 \geq 0$, $b_2 < 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$.
3. $2d_4 + b_1 < 0$, $2d_3 + b_1 \geq 0$ и выполнен один из следующих наборов условий:
 - а) $d_1 > d_2$, $d_4 > 0$, $b_1 = -(d_1 + d_4)$, $b_2 = 0$;
 - б) $d_1 > d_2$, $d_4 = 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = 0$;
 - в) $d_1 > d_2 + d_4$, $d_4 > 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = -2d_4$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$;
 - г) $d_1 + b_1 < 0$, $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$, $b_2 = 0$;
 - д) $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_2 + b_1 < 0$, $d_3 + d_4 + b_1 < 0$, $b_2 \geq 0$;
 - е) $d_1 > d_2$, $d_1 > d_3 + d_4$, $d_2 + d_4 > d_1$, $b_1 = -d_1$, $b_2 < 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$;
 - ж) $d_1 = d_2 + d_4$, $d_2 > d_3$, $d_4 > 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 < 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$;
 - з) $d_1 = d_2 + d_4$, $d_2 = d_3 + d_4$, $d_4 > 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = -d_2$;
 - и) $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_2 + b_1 < 0$, $b_2 \geq 0$;
 - к) $d_3 + d_4 \geq d_1$, $b_1 = -d_1$, $b_2 < 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$;
 - л) $d_2 + b_1 \geq 0$, $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$;
 - м) $d_2 + b_1 \geq 0$, $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$, $b_2 < 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$;
 - н) $d_1 = d_2 = d_3 > 0$, $d_4 = 0$, $b_1 = b_2 = -d_1$.
4. $2d_3 + b_1 < 0$, $2d_2 + b_1 \geq 0$ и выполнен один из следующих наборов условий:
 - а) $d_1 + d_4 = d_2 + d_3$, $d_3 > d_4 > 0$, $b_1 = -(d_1 + d_4)$, $b_2 = 0$;
 - б) $d_1 = d_2 > d_3 = d_4 > 0$, $b_1 = -(d_1 + d_4)$, $b_2 = 0$;
 - в) $d_1 = d_2 + d_3$, $d_3 > d_4 > 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = -2d_4$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$;
 - г) $d_1 = d_2 + d_3$, $d_3 > d_4 = 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = 0$;
 - д) $d_1 = d_2$, $d_3 = d_4 = 0$, $b_1 = -d_1$, $b_2 = 0$;
 - е) $d_4 > 0$, $d_3 = d_4$, $d_2 = 2d_4$, $d_1 = 3d_4$, $b_1 = -3d_4$, $b_2 = -2d_4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Нетрудно проверить, что для каждого из наборов условий из теоремы 2.2 существует многообразие X , удовлетворяющее условиям этого набора.

Доказательству теоремы 2.2 посвящен §4. Некоторая громоздкость этого результата частично оправдывается тем, что как следствие из него получается следующее утверждение (см. §5).

ЛЕММА 2.4. Пусть X – стандартное расслоение на поверхности дель Пе-цо степени 4 над $\mathbb{P}^1$ и $\chi(X) = -4$. Тогда X изоморфно полному пересечению двух послойных квадрик в скролле, причем для параметров d_i, b_j есть лишь следующие возможности:

- (X_1) $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$ (случай 1 теоремы 2.2);
 (X_2) $d_1 = 2, d_2 = d_3 = d_4 = 1, b_1 = -2, b_2 = -1$ (случай 2, в) теоремы 2.2).

Наконец, теорема 1.1 получается из леммы 2.4 после проверки рациональности многообразий X_1 и X_2 (см. § 5).

§ 3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 3.1. Многообразие X гладко тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (*) на $\text{Bs}|D_1| \setminus \text{Bs}|D_2|$ пересечение $D_2 \cap \text{Sing } D_1 = \emptyset$;
 (**) на $\text{Bs}|D_2|$ векторы $\text{grad}_x(f_1)$ и $\text{grad}_x(f_2)$ не пропорциональны ни в какой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если X гладко, то условия (*) и (**) выполнены. Обратно, предположим, что выполнены условия (*) и (**). В точках $D_1 \cap (D_2 \setminus \text{Bs}|D_2|)$ многообразие D_1 неособо по условию (*), а дивизор D_2 подвижен, так что по теореме Бертини многообразие X неособо всюду, кроме, быть может, множества $\text{Bs}|D_2|$. В точках $\text{Bs}|D_2|$ многообразие X гладко тогда и только тогда, когда векторы $\text{grad}(f_1) = (\text{grad}_x(f_1), \text{grad}_t(f_1))$ и $\text{grad}(f_2) = (\text{grad}_x(f_2), \text{grad}_t(f_2))$ не пропорциональны ни в какой точке. Пусть $D'_i, i = 1, 2$, – дивизоры, заданные уравнениями $\frac{\partial f_i}{\partial t_0} = 0$. Тогда $|D'_i| = |2M + (b_i - 1)L|$ и $\text{Bs}|D'_i| \supset \text{Bs}|D_i|$. Поэтому $\text{grad}_t(f_1)$ и $\text{grad}_t(f_2)$ тождественно равны нулю на $\text{Bs}|D_2|$ и условие непропорциональности градиентов переписывается в виде (**).

В дальнейшем для проверки гладкости X всюду будут проверяться именно условия (*) и (**).

Зафиксируем некоторые обозначения. Пусть M_4 обозначает (2×3) -матрицу

$$M_4 = \begin{pmatrix} \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 & \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5 & \alpha_{34}x_4 + \alpha_{35}x_5 \\ \beta_{14}x_4 + \beta_{15}x_5 & \beta_{24}x_4 + \beta_{25}x_5 & \beta_{34}x_4 + \beta_{35}x_5 \end{pmatrix},$$

а M_5 – (2×4) -матрицу

$$M_5 = \begin{pmatrix} \alpha_{15} & \alpha_{25} & \alpha_{35} & \alpha_{45} \\ \beta_{15} & \beta_{25} & \beta_{35} & \beta_{45} \end{pmatrix}.$$

Пусть $m_{ij}^{(l)}, 1 \leq i < j \leq 3, l = 4, 5$, обозначает (2×2) -минор матрицы M_l , составленный из ее столбцов с номерами i и j .

Рассмотрим следующие условия:

- (**) $_4$ многочлены $m_{ij}^{(4)}$ не имеют общих нулей на Y_4 ;
 (**) $_5$ многочлены $m_{ij}^{(5)}$ не имеют общих нулей на Y_5 .

(Смысл этих условий в том, что при $Bs|D_2| = Y_4$ условие $(**)_{4}$ равносильно условию $(**)_{4}$, а при $Bs|D_2| = Y_5$ – условию $(**)_{5}$.)

ЛЕММА 3.2. *При сделанных предположениях условие $(**)_{4}$ выполняется в том и только том случае, если $b_1 = -d_1 = -(d_2 + d_4)$, $b_2 = -d_2 = -(d_3 + d_4)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, для выполнения условия $(**)_{4}$ необходимо, чтобы последний столбец M_4 не был нулевым, т.е. необходимо, чтобы $d_3 + d_4 + b_2 \geq 0$. Кроме того, если $\beta_{25} = 0$ или $\alpha_{15} = 0$, то $m_{ij}^{(4)}$ обращаются в нуль на Y_5 , т.е. условие $(**)_{4}$ влечет неравенства $d_2 + b_2 \geq 0$ и $d_1 + b_1 \geq 0$. Наконец, если $\alpha_{24} = 0$, то условие $(**)_{4}$ также не выполнено, т.е. $(**)_{4}$ влечет $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$.

Предположим теперь, что имеют место перечисленные неравенства. На поверхности $Y_4 \cong \mathbb{F}(d_4, 0)$ рассмотрим дивизоры $C_{ij} \in |2M_{Y_4} + (d_i + d_j + b_1 + b_2)L_{Y_4}|$, заданные уравнениями $m_{ij}^{(4)} = 0$, дивизор $A \in |M_{Y_4} + (d_1 + b_1)L_{Y_4}|$, заданный уравнением $\alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 = 0$, и дивизор $B \in |M_{Y_4} + (d_1 + b_2)L_{Y_4}|$, заданный уравнением $\beta_{14}x_4 + \beta_{15}x_5 = 0$. Тогда дивизоры C_{12} , A и B подвижны, C_{12} с C_{13} и A с B пересекаются трансверсально. Следовательно, $C_{12} \cap C_{13}$ содержит $C_{12}C_{13} = 4(d_1 + d_4 + b_1 + b_2) + 2(d_2 + d_3)$ точек, а $A \cap B$ содержит $AB = 2d_1 + d_4 + b_1 + b_2$ точек.

Если $C_{12}C_{13} = 0$, то условие $(**)_{4}$ выполнено; равенство

$$0 = C_{12}C_{13} = 4(d_1 + b_1) + 2(d_2 + b_2) + 2(d_3 + d_4 + b_2) + 2d_4$$

при сделанных предположениях эквивалентно тому, что $b_1 = b_2 = -d_1 = -d_2 = -d_3$, $d_4 = 0$. Пусть $C_{12}C_{13} \neq 0$. Заметим, что одновременное обращение в нуль миноров $m_{12}^{(4)}$ и $m_{13}^{(4)}$ влечет обращение в нуль минора $m_{23}^{(4)}$, за исключением случая, когда обращается в нуль первый столбец матрицы M_4 . Поэтому если $C_{12}C_{13} \neq 0$, то для выполнения условия $(**)_{4}$ необходимо и достаточно, чтобы $C_{12} \cap C_{13} \subset A \cap B$. Так как $A \cap B \subset C_{12} \cap C_{13}$, это условие равносильно тому, что

$$\begin{aligned} 0 &= (4(d_1 + d_4 + b_1 + b_2) + 2(d_2 + d_3)) - (2d_1 + d_4 + b_1 + b_2) \\ &= 2(d_1 + d_2 + d_3) + 3(d_4 + b_1 + b_2) \\ &= 2(d_1 + b_1) + (d_2 + b_2) + (d_2 + d_4 + b_1) + 2(d_3 + d_4 + b_2). \end{aligned}$$

При сделанных предположениях это равенство эквивалентно тому, что $b_1 = -d_1 = -(d_2 + d_4)$, $b_2 = -d_2 = -(d_3 + d_4)$. Чтобы получить окончательный ответ, заметим, что эти условия слабее тех, которые получались при $C_{12}C_{13} = 0$.

ЛЕММА 3.3. *При сделанных предположениях условие $(**)_{5}$ выполняется в том и только том случае, если выполнены условия $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_3 + b_2 \geq 0$ или если выполнены условия $d_1 + b_1 = 0$, $d_2 + b_2 = 0$ и хотя бы одно из двух условий $d_1 + b_2 = 0$ и $d_2 + b_1 < 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $d_1 + b_1 < 0$ первая строка матрицы M_5 нулевая, так что $d_1 + b_1 \geq 0$ необходимо для выполнения $(**)_{5}$. Если же $d_1 + b_1 \geq 0$, то $(**)_{5}$ выполнено либо когда не равны нулю тождественно два минора $m_{ij}^{(5)}$ (и тогда можно считать, что это миноры $m_{12}^{(5)}$ и $m_{13}^{(5)}$), т.е. при $\deg(\beta_{25}) = d_3 + b_2 \geq 0$, либо когда $\deg(m_{12}^{(5)}) = \deg(\alpha_{15}\beta_{25} - \alpha_{25}\beta_{15}) = 0$, т.е. при $\deg(\alpha_{15}) = d_1 + b_1 = 0$,

$\deg(\beta_{25}) = d_2 + b_2 = 0$ и одном из двух условий: $\deg(\beta_{15}) = d_1 + b_2 = 0$ или $\deg(\alpha_{25}) = d_2 + b_1 < 0$.

Следующее утверждение поможет сократить вычисления в п. 4.4.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\text{Bs}|D_1| = Y_3$, $d_2 + d_3 + b_1 \geq 0$. Тогда для выполнения условия (*) необходимо, чтобы $2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 0$. Если при этом либо $d_1 + d_4 + b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, либо $d_1 + b_1 \geq 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, то это условие также достаточно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Bs}|D_1| = Y_3$, то все компоненты $\text{grad}_x(f_1)$, кроме, быть может,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5,$$

тождественно равны нулю на Y_3 . Так как $d_2 + d_3 + b_1 \geq 0$, то многочлены α_{23} и α_{13} ненулевые.

Пусть A_1 и A_2 – дивизоры, заданные уравнениями $\alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 = 0$ и $\alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5 = 0$ соответственно. Так как $\text{Sing}(D_1) = A_1 \cap A_2 \cap Y_3$, то условие (*) означает, что $D_2 \cap A_1 \cap A_2 \cap Y_3 = \emptyset$. В частности, необходимо, чтобы $A_1 A_2 D_2|_{Y_3} = 0$, т.е. так как $|A_1| = |M_{Y_3} + (d_1 + b_1)L_{Y_3}|$, $|A_2| = |M_{Y_3} + (d_2 + b_1)L_{Y_3}|$ и $Y_3 \cong \mathbb{F}(d_3, d_4, 0)$, то это условие переписывается в виде $2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 0$.

Если $d_1 + d_4 + b_1 \geq 0$, то A_1 и A_2 не имеют общих компонент и их пересечение – эффективная кривая на Y_3 , так что при $Y_5 \not\subset \text{Bs}|D_2|$ из $A_1 A_2 D_2|_{Y_3} = 0$ следует, что $D_2 \cap A_1 \cap A_2 \cap Y_3 = \emptyset$. Если $d_1 + b_1 \geq 0$, то A_1 и A_2 не имеют общих компонент и $Y_5 \not\subset A_1$, так что при $Y_4 \not\subset \text{Bs}|D_2|$ из $A_1 A_2 D_2|_{Y_3} = 0$ следует, что $D_2 \cap A_1 \cap A_2 \cap Y_3 = \emptyset$.

§ 4. Доказательство теоремы 2.2

4.1. Случай $\text{Bs}|D_1| = \emptyset$. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $b_1 \geq 0$. Условия (*) и (**) выполнены автоматически (случай 1 теоремы 2.2).

4.2. Случай $\text{Bs}|D_1| = Y_5$. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $b_1 < 0$, $2d_4 + b_1 \geq 0$. По условию все компоненты $\text{grad}_x(f_1)$, кроме, быть может,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_{15}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \alpha_{25}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \alpha_{35}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \alpha_{45},$$

тождественно равны нулю на Y_5 .

Рассмотрим несколько возможностей.

4.2.1. Случай $d_1 + b_1 < 0$. Тогда $\text{grad}_x(f_1) = 0$ тождественно на Y_5 . Из (**) следует, что $\text{Bs}|D_2| = \emptyset$, а из (*) следует, что $D_2 \cap Y_5 = \emptyset$, т.е. $b_2 = 0$ (случай 2, а) теоремы 2.2). Очевидно, это условие является также и достаточным для выполнения условий (*) и (**).

4.2.2. *Случай $d_1 + b_1 = 0$.* При этом условии $\deg(\alpha_{15}) = 0$. Если при этом $\text{Bs } |D_2| = \emptyset$ (т.е. $b_2 \geq 0$), то (*) и (**) выполнены автоматически (случай 2, б) теоремы 2.2). Если же $\text{Bs } |D_2| = Y_5$ ($b_2 < 0$), то необходимо и достаточно проверить условие (**) на Y_5 . Так как никакие два из многочленов α_{ij}, β_{kl} не имеют общих нулей на Y_5 , то (**) равносильно $(**)_5$. Таким образом, по лемме 3.3 условие (**) выполнено либо при $d_3 + b_2 \geq 0$ (случай 2, в) теоремы 2.2), либо при $d_2 + b_2 = 0$ и одном из двух условий: $d_1 + b_2 = 0$ или $d_2 + b_1 < 0$; нетрудно заметить, что при сделанных предположениях $d_1 + b_2 = 0$ эквивалентно тому, что $b_1 = b_2$, а $d_2 + b_1 < 0$ эквивалентно тому, что $b_1 < b_2$, т.е. одно из этих двух условий выполняется автоматически (это случай 2, г) теоремы 2.2).

4.2.3. *Случай $d_1 + b_1 > 0$.* Если при этом $d_2 + b_1 < 0$, то D_1 имеет изолированные особенности на Y_5 и по условию (*) необходимо, чтобы $\text{Bs } |D_2| = \emptyset$, т.е. $b_2 \geq 0$. Очевидно, условие $b_2 \geq 0$ является также достаточным для выполнения условий (*) и (**) (независимо от предположения $d_2 + b_1 < 0$). Это случай 2, б) теоремы 2.2. Если же $d_2 + b_1 \geq 0$ и $b_2 < 0$, то $\text{Bs } |D_2| = Y_5$ и (**) равносильно $(**)_5$, т.е. (так как $d_1 + b_1 \neq 0$) по лемме 3.3 условие (**) равносильно $d_3 + b_2 \geq 0$ (случай 2, д) теоремы 2.2).

4.3. Случай $\text{Bs } |D_1| = Y_4$. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $2d_4 + b_1 < 0$, $2d_3 + b_1 \geq 0$. По условию все компоненты $\text{grad}_x(f_1)$, кроме, быть может,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \alpha_{34}x_4 + \alpha_{35}x_5,$$

тождественно равны нулю на Y_4 .

Рассмотрим несколько возможностей.

4.3.1. *Случай $d_1 + d_4 + b_1 < 0$.* Тогда $\text{Sing}(D_1) = Y_4$; в частности, $\text{Sing}(D_1)$ содержит прямую l , лежащую в слое отображения φ . Так как $D_2 \in |2M + b_2L|$, то $l \cap D_2 \neq \emptyset$ и условие (*) не выполнено.

4.3.2. *Случай $d_1 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_1 + b_1 < 0$, $d_2 + d_4 + b_1 < 0$.* Тогда $\alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = 0$ и в случае $\deg(\alpha_{14}) > 0$ дивизор D_1 особ вдоль некоторой прямой в слое φ , так что из условия (*) следует, что $\deg(\alpha_{14}) = 0$, т.е. $d_1 + d_4 + b_1 = 0$. Далее, так как D_1 особ вдоль Y_5 , то из условия (*) также следует, что $b_2 = 0$. Очевидно, что эти условия являются также достаточными для выполнения условий (*) и (**) (случай 3, а) теоремы 2.2).

4.3.3. *Случай $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_2 + d_4 + b_1 < 0$.* Тогда $\alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = 0$ и $\text{Sing}(D_1) = C$, где кривая C задана на Y_4 уравнением $\alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 = 0$. Так как $C \neq \emptyset$, то по условию (*) необходимо, чтобы $\text{Bs } |D_2| \subset Y_5$, т.е. $2d_4 + b_2 \geq 0$. Также по условию (*) необходимо, чтобы

$$0 = D_2C = 2(d_1 + d_4 + b_1) + b_2 = 2(d_1 + b_1) + 2d_4 + b_2,$$

т.е. $d_1 + b_1 = 0$, $2d_4 + b_2 = 0$. Так как $C \not\subset Y_5$, то этого достаточно для выполнения условия (*). Если $d_4 = 0$, то условие (**) выполнено автоматически (случай 3, б) теоремы 2.2), а если $d_4 > 0$, то $\text{Bs } |D_2| = Y_5$ и по лемме 3.3 условие (**) выполняется либо при $d_3 + b_2 \geq 0$, либо при $d_2 + b_2 = 0$ (случай 3, в) теоремы 2.2).

4.3.4. Случай $d_1 + b_1 < 0$, $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$. Тогда $\alpha_{15} = \alpha_{25} = \alpha_{35} = 0$. При этом, так как многочлены α_{14} и α_{24} не имеют общих нулей, то $\text{Sing}(D_1) = Y_5$. Из условия (*) следует, что $b_2 = 0$. Очевидно, это условие также является достаточным для выполнения условий (*) и (**) (случай 3, г) теоремы 2.2).

4.3.5. Случай $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_2 + b_1 < 0$, $d_3 + d_4 + b_1 < 0$. Тогда $\alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = 0$ и D_1 имеет не более чем изолированные особенности. Если $d_1 + b_1 > 0$, то D_1 в числе прочего имеет особенности на Y_5 , так что из условия (*) следует, что $b_2 \geq 0$. Очевидно, это условие является достаточным для выполнения условий (*) и (**) независимо от предположения $d_1 + b_1 > 0$ (случай 3, д) теоремы 2.2).

Если $d_1 + b_1 = 0$, $b_2 < 0$ и $d_2 + d_4 + b_1 > 0$, то D_1 имеет особенности на $Y_4 \setminus Y_5$ и по условию (*) необходимо, чтобы $\text{Bs } |D_2| \neq Y_4$, т.е. $2d_4 + b_2 \geq 0$, так что $\text{Bs } |D_2| = Y_5$. По лемме 3.3 условие (**) в этом случае эквивалентно тому, что либо $d_3 + b_2 \geq 0$, либо $d_2 + b_2 = 0$ (случай 3, е) теоремы 2.2).

Если $d_1 + b_1 = 0$, $b_2 < 0$ и $d_2 + d_4 + b_1 = 0$, то D_1 неособ. Если при этом $\text{Bs } |D_2| = Y_5$, т.е. $2d_4 + b_2 \geq 0$, то по лемме 3.3 условие (**) эквивалентно тому, что либо $d_3 + b_2 \geq 0$, либо $d_2 + b_2 = 0$ (случай 3, ж) теоремы 2.2). Если же $\text{Bs } |D_2| = Y_4$, т.е. $2d_4 + b_2 < 0$, то условие (**) равносильно условию (**)₄. По лемме 3.2 это эквивалентно тому, что $b_1 = -d_1 = -(d_2 + d_4)$, $b_2 = -d_2 = -(d_3 + d_4)$ (случай 3, з) теоремы 2.2).

4.3.6. Случай $d_1 + b_1 \geq 0$, $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_2 + b_1 < 0$. Тогда $\alpha_{25} = \alpha_{35} = 0$. Если $d_1 + b_1 > 0$, то D_1 имеет (изолированные) особенности на Y_5 , так что из условия (*) следует, что $b_2 \geq 0$. Это условие является достаточным для выполнения условий (*) и (**) независимо от предположения $d_1 + b_1 > 0$ (случай 3, и) теоремы 2.2).

Если $d_1 + b_1 = 0$, $b_2 < 0$, то D_1 неособ. Если $\text{Bs } |D_2| = Y_5$, т.е. $2d_4 + b_2 \geq 0$, то по лемме 3.3 условие (**) эквивалентно тому, что либо $d_3 + b_2 \geq 0$, либо $d_2 + b_2 = 0$ (случай 3, к) теоремы 2.2). Если же $\text{Bs } |D_2| = Y_4$, то условие (**) равносильно условию (**)₄. По лемме 3.2 отсюда следует, что $d_2 = d_3 + d_4$. Это противоречит предположениям $d_2 + b_1 < 0$, $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$.

4.3.7. Случай $d_3 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_2 + b_1 \geq 0$. Тогда D_1 неособ. Если $b_2 \geq 0$, то условие (**) выполнено автоматически (случай 3, л) теоремы 2.2). Если $b_2 < 0$, $2d_4 + b_2 \geq 0$, т.е. $\text{Bs } |D_2| = Y_5$, то, так как при этом $b_2 > b_1$, по лемме 3.3 условие (**) выполнено только при $d_3 + b_2 \geq 0$ (случай 3, м) теоремы 2.2). Если же $2d_4 + b_2 < 0$, т.е. $\text{Bs } |D_2| = Y_4$, то условие (**) равносильно условию (**)₄. По лемме 3.2 это эквивалентно тому, что $b_1 = -d_1 = -(d_2 + d_4)$, $b_2 = -d_2 = -(d_3 + d_4)$. При сделанных предположениях отсюда следует, что $b_1 = b_2$, $d_1 = d_2 = d_3 > 0$, $d_4 = 0$ (случай 3, н) теоремы 2.2).

4.4. Случай $\text{Bs } |D_1| = Y_3$. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $2d_3 + b_1 < 0$, $2d_2 + b_1 \geq 0$. По условию все компоненты $\text{grad}_x(f_1)$, кроме, быть может,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5,$$

тождественно равны нулю на Y_3 .

Рассмотрим несколько возможностей.

4.4.1. Случай $d_2 + d_3 + b_1 < 0$. Тогда $\alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = 0$ и $\text{Sing}(D_1)$ содержит прямую в общем слое отображения φ , следовательно, условие (*) не выполняется.

4.4.2. Случай $d_2 + d_3 + b_1 \geq 0$, $d_2 + d_4 + b_1 < 0$, $d_1 + b_1 < 0$. Тогда $\alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = 0$. Если $\deg(\alpha_{23}) > 0$, то $\text{Sing}(D_1)$ содержит кривую в слое отображения φ над нулем многочлена α_{23} . Таким образом, по условию (*) необходимо, чтобы $d_2 + d_3 + b_1 = 0$. В этом случае $\text{Sing}(D_1) \subset Y_4$. Если $\deg(\alpha_{14}) \neq 0$ (в том числе если эта степень меньше нуля, т.е. многочлен α_{14} нулевой), то $\text{Sing}(D_1)$ содержит прямую в слое φ , так что необходимо, чтобы $d_1 + d_4 + b_1 = 0$. В этом случае $\text{Sing}(D_1) = Y_5$ и для выполнения условий (*) и (**) необходимо и достаточно, чтобы $b_2 = 0$ (случай 4, а) теоремы 2.2).

4.4.3. Случай $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_1 + b_1 < 0$. Тогда $\alpha_{15} = \alpha_{25} = 0$ и $Y_5 \subset \text{Sing}(D_1)$. Следовательно, для выполнения условия (*) необходимо, чтобы $b_2 = 0$. По лемме 3.4 условие (*) равносильно условию

$$0 = 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 2(d_2 + d_4 + b_1) + 2(d_1 + d_3 + b_1),$$

т.е. $d_2 + d_4 + b_1 = d_1 + d_3 + b_1 = 0$. Так как $b_2 = 0$, то условие (**) выполнено автоматически (случай 4, б) теоремы 2.2).

4.4.4. Случай $d_2 + d_3 + b_1 \geq 0$, $d_2 + d_4 + b_1 < 0$, $d_1 + b_1 \geq 0$. Тогда $\alpha_{24} = \alpha_{25} = 0$. Если $d_1 + b_1 > 0$, то $\text{Sing}(D_1) \cap Y_5 \neq \emptyset$ и необходимо, чтобы $b_2 \geq 0$. По лемме 3.4 условие (*) равносильно условию

$$0 = 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 2(d_1 + b_1) + 2(d_2 + d_3 + b_1) + 2d_4 + b_2 > 0,$$

противоречие. Поэтому необходимо, чтобы $d_1 + b_1 = 0$. Так как при $d_2 + d_3 + b_1 > 0$ множество $\text{Sing}(D_1)$ содержит прямую в слое φ , то необходимо также, чтобы $d_2 + d_3 + b_1 = 0$.

По лемме 3.4 из условия (*) следует

$$0 = 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 2(d_1 + b_1) + 2(d_2 + d_3 + b_1) + 2d_4 + b_2,$$

что равносильно $2d_4 + b_2 = 0$, т.е. (снова по лемме 3.4) при сделанных предположениях условие (*) равносильно условию $2d_4 + b_2 = 0$. Если при этом $d_4 > 0$, то $\text{Bs } |D_2| = Y_5$ и условие (**) равносильно $(**)_{5,1}$, а это условие (так как $d_2 + b_1 < 0$, $d_1 + b_1 = 0$) по лемме 3.3 равносильно тому, что $d_3 + b_2 \geq 0$ или $d_2 + b_2 = 0$ (случай 4, в) теоремы 2.2). Если же $d_2 = 0$, т.е. $\text{Bs } |D_2| = \emptyset$, то имеем $b_2 = 0$, что, очевидно, влечет выполнение условия (**) (случай 4, г) теоремы 2.2).

4.4.5. Случай $d_2 + d_4 + b_1 \geq 0$, $d_1 + b_1 \geq 0$. Так как $\text{Sing}(D_1) \neq \emptyset$, то $\text{Bs } |D_2| \neq Y_3$, т.е. $2d_3 + b_2 \geq 0$. По лемме 3.4 из условия (*) следует, что

$$0 = 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + 4b_1 + b_2 = 2(d_1 + b_1) + 2(d_2 + d_4 + b_1) + 2d_3 + b_2,$$

т.е. $d_2 + d_4 + b_1 = d_1 + b_1 = 2d_3 + b_2 = 0$. Если при этом $d_3 > d_4$, то $\text{Bs } |D_2| = Y_4$ и по лемме 3.2 из условия (**) следует, что $b_2 = -(d_3 + d_4)$, т.е. $d_3 = d_4$,

противоречие. Таким образом, $d_3 = d_4$ и по лемме 3.4 перечисленные условия также достаточны для выполнения условия (*).

Условие $2d_4 + b_2 = 0$ означает, что $\text{Bs } |D_2| \subset Y_5$. Если $\text{Bs } |D_2| = \emptyset$, то из $b_2 \geq 0$ следует, что $b_2 = d_3 = d_4 = 0$; условие (**) при этом выполнено автоматически (случай 4, д) теоремы 2.2). Если же $\text{Bs } |D_2| = Y_5$, т.е. $d_4 > 0$, то условие (**) равносильно условию (**)₅. Ввиду того что $d_2 + b_1 < 0$ и $d_3 + b_2 < 0$, по лемме 3.3 условие (**) равносильно тому, что $d_2 + b_2 = 0$ (случай 4, е) теоремы 2.2).

§ 5. Приложение к расслоениям на поверхности дель Педро степени 4

Применяя теорему 2.2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть при сделанных в § 2 предположениях многообразие X неособо и топологическая эйлерова характеристика $\chi(X) = -4$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

- (X_1) $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ (случай 1 теоремы 2.2);
- (X_2) $d_1 = 2$, $d_2 = d_3 = d_4 = 1$, $b_1 = -2$, $b_2 = -1$ (случай 2, в) теоремы 2.2);
- (X_3) $d_1 = 4$, $d_2 = 3$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1$, $b_1 = -4$, $b_2 = -3$ (случай 3, з) теоремы 2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что $\chi(X) = -16 \sum d_i - 20b_1 - 20b_2 + 16$ (это следует, например, из [10; пример 3.2.11]). Остается только решить уравнение $-16 \sum d_i - 20b_1 - 20b_2 + 16 = -4$ совместно с наборами уравнений и неравенств на d_i , b_j из теоремы 2.2.

Таким образом, все интересующие нас многообразия содержатся в трех перечисленных семействах и нам достаточно проверить рациональность общего члена каждого из этих семейств.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В случае (X_3) базисные множества $\text{Bs } |D_1|$ и $\text{Bs } |D_2|$ содержат Y_4 . Рассмотрим общий слой X_3 как поверхность над полем $\mathbb{C}(t_0)$ рациональных функций на прямой. Эта поверхность содержит прямую, определенную над $\mathbb{C}(t_0)$, а значит, относительное число Пикара $\rho(X_3/\mathbb{P}^1)$ не меньше 2.

Из следствия 5.1 и замечания 5.2 моментально получается лемма 2.4.

ЛЕММА 5.3. Многообразия X_1 и X_2 рациональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция $X_1 \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^4$ дает бирациональный (так как в этом случае $D_2 \in |2M + L|$) морфизм на трехмерную квадрику $Q \subset \mathbb{P}^4$, откуда сразу получаем рациональность X_1 .

Для доказательства рациональности $X_2 \subset Y = \mathbb{F}(2, 1, 1, 1, 0)$ рассмотрим проекцию $\pi: Y \rightarrow Y' = \mathbb{F}(2, 1, 1, 1)$ из кривой $Y_5 \subset Y$. При этой проекции X_2 бирационально отображается на дивизор $X'_2 \in |3M_{Y'} - 3L_{Y'}|$. При отождествлении Y' с $Y'' = \mathbb{F}(1, 0, 0, 0)$ многообразие $X'_2 \subset Y''$ становится дивизором из линейной системы $|3M_{Y''}|$. Наконец, стягивание $\sigma: Y'' \rightarrow \mathbb{P}^4$ отрицательного подскрулла Y''_2 представляет Y'' в виде раздутия плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$ и бирационально отображает X'_2 на кубик в $\mathbb{P}^4$. Теперь для доказательства рациональности X_2 достаточно показать, что эта кубика особа.

Покажем, что особенности возникают уже на X'_2 . Для этого найдем все кривые, стягиваемые отображением π . Очевидно, что они должны быть прямыми в слоях φ , пересекающими Y_5 . Всякая такая прямая l в координатах $(x_1, \dots, x_4)$ в аффинном пространстве $x_5 = 1$ задается параметрически в виде $(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Условие $l \subset D_1 \cap D_2$ означает, что при всех значениях параметра s выполнены равенства

$$\begin{aligned} & ((\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4)x_1 \\ & \quad + (\alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \alpha_{44}x_4^2 + \alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{24}x_2x_4 + \alpha_{34}x_3x_4))s^2 \\ & \quad + \alpha_{15}x_1s = 0, \\ & ((\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{14}x_4)x_1 \\ & \quad + (\beta_{22}x_2^2 + \beta_{33}x_3^2 + \beta_{44}x_4^2 + \beta_{23}x_2x_3 + \beta_{24}x_2x_4 + \beta_{34}x_3x_4))s^2 \\ & \quad + (\beta_{15}x_1 + (\beta_{25}x_2 + \beta_{35}x_3 + \beta_{45}x_4))s = 0. \end{aligned}$$

Так как α_{15} – ненулевая константа, то эти равенства переписываются в виде

$$x_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$\alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \alpha_{44}x_4^2 + \alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{24}x_2x_4 + \alpha_{34}x_3x_4 = 0, \quad (5.2)$$

$$\beta_{22}x_2^2 + \beta_{33}x_3^2 + \beta_{44}x_4^2 + \beta_{23}x_2x_3 + \beta_{24}x_2x_4 + \beta_{34}x_3x_4 = 0, \quad (5.3)$$

$$\beta_{25}x_2 + \beta_{35}x_3 + \beta_{45}x_4 = 0. \quad (5.4)$$

В частности, в общем слое ничего не стягивается. С другой стороны, в двух слоях стягивается по одной прямой: уравнения (5.1), (5.2) и (5.4) (не зависящие от t) задают (с точностью до пропорциональности) два возможных значения направляющего вектора $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, для каждого из которых линейное по t уравнение (5.3) дает ровно одно значение t такое, что прямая с направляющим вектором v в соответствующем слое содержится в $D_1 \cap D_2$. Таким образом, многообразие X'_2 имеет две (обыкновенные двойные) особые точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Доказать рациональность многообразия X_3 тоже несложно – X_3 содержит поверхность Y_4 и проекция из Y_4 бирационально отображает X_3 на рациональное многообразие $\mathbb{F}(4, 3, 2)$.

Леммы 2.4 и 5.3 доказывают теорему 1.1.

Список литературы

- [1] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164.
- [2] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 17–38.
- [3] M. Grinenko, “On the birational rigidity of some pencils of del Pezzo surfaces”, *J. Math. Sci.*, **102**:2 (2000), 3933–3937.
- [4] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2. II”, *Матем. сб.*, **194**:5 (2003), 31–60.
- [5] В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204.

- [6] I. Cheltsov, “Nonrational del Pezzo fibrations”, [arXiv:math.AG/0407343](#), 2004.
- [7] В. А. Алексеев, “Об условиях рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4”, *Матем. заметки*, **41**:5 (1987), 724–730.
- [8] M. Reid, “Chapters on algebraic surfaces”, *Complex algebraic geometry*, Lecture notes from a summer program (New York, Park City, Utah, 1993), ed. J. Kollár, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 5–159.
- [9] G. Brown, A. Corti, F. Zucconi, “Birational geometry of 3-fold Mori fibre spaces”, [arXiv:math.AG/0307301](#), 2004.
- [10] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.