Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Якубов, Дифференциальные уравнения с неклассическим поведением решений задачи Коши по параметру λ , *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 151–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:58:49

УДК 517.984

В. Я. Якубов

Дифференциальные уравнения с неклассическим поведением решений задачи Коши по параметру λ

Изучается поведение решений уравнений $y'' + \lambda\rho(x, \lambda)y = 0$ по спектральному параметру λ в предположении, что функция $\rho(x, \lambda)$ не удовлетворяет классическим условиям. Рассмотрено как уравнение Штурма–Лиувилля $y'' + \lambda\rho(x)y = 0$, решения которого по норме в пространстве $C[0, l]$ растут как $c(\rho)\lambda^m$ ($m > 0$ – любое число), так и уравнения вида $y'' + \lambda\rho(x, \lambda)y = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \rho(x, \lambda) = 1$, решения которых по норме в пространстве $C[0, l]$ могут расти как $c\lambda^m$ ($m > 0$ – любое число) и даже как $\exp\{m\lambda^{1-\gamma}\}$, где γ – некоторое число, $0 < \gamma < 1$.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, собственные функции, неклассические оценки собственных функций, задача Коши.

Введение

Для уравнения Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

где вес $\rho(x)$ – функция, суммируемая на отрезке $[0, l]$, $0 < l < \infty$, удовлетворяющая условиям

$$0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1, \quad (2)$$

где ρ_0, ρ_1 – некоторые заданные числа, рассмотрим две задачи Коши с начальными условиями (3) и (4) соответственно:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (3)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (4)$$

Решением задачи (1), (3) (соответственно (1), (4)) назовем непрерывную функцию $y = y(x, \lambda)$, имеющую абсолютно непрерывную производную на отрезке $[0, l]$, удовлетворяющую условиям (3) (соответственно (4)) и почти всюду на отрезке $[0, l]$ удовлетворяющую уравнению (1).

Для решений задач (1), (3) и (1), (4) хорошо известны следующие оценки, равномерные по $\lambda > 0$:

$$|y(x, \lambda)| \leq c_1, \quad |y(x, \lambda)| \leq c_2\lambda^{-1/2}, \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

доказанные в предположении, что вес ρ дважды непрерывно дифференцируем на $[0, l]$ (см. [1]).

В настоящей работе установлено, что

1) оценки (5) справедливы при более общих условиях (например, достаточно, чтобы вес удовлетворял условию (2) и имел ограниченную вариацию на $[0, l]$);

2) если не требовать ничего, кроме суммируемости ρ и выполнения условий (2), то решения рассматриваемых задач могут иметь в определенном смысле любой степенной рост по λ (вероятно, рост может быть даже экспоненциальным, но доказать это пока не удастся);

3) для более общего уравнения $y'' + \lambda \rho(x, \lambda)y = 0$, в котором $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho(x, \lambda) = 1$, $x > 0$, показано, что при некотором $x = x_0$ для решения задачи Коши возможен экспоненциальный рост по λ .

§ 1. Основные результаты

1.1. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Если вес $\rho(x)$ суммируем на отрезке $[0, l]$, то для решений задач (1), (4) и (1), (3) имеют место оценки

$$|y(x, \lambda)| \leq l \exp \left\{ |\lambda| \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) d\tau ds \right\}, \quad (6)$$

$$|y(x, \lambda)| \leq \exp \left\{ |\lambda| \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) d\tau ds \right\} \quad (7)$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (1) с учетом условий (4) получаем равенство

$$y(x, \lambda) = x - \lambda \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau ds, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$|y(x, \lambda)| \leq l + |\lambda| \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) |y(\tau, \lambda)| d\tau ds. \quad (9)$$

Обозначим правую часть последнего неравенства через $U(x)$. Тогда

$$U'(x) = |\lambda| \int_0^x \rho(\tau) |y(\tau, \lambda)| d\tau. \quad (10)$$

Учитывая теперь, что функция $U(x)$ возрастающая, из соотношений (9), (10) имеем

$$\frac{U'(x)}{U(x)} = |\lambda| \int_0^x \rho(\tau) \frac{|y(\tau, \lambda)|}{U(x)} d\tau \leq |\lambda| \int_0^x \rho(\tau) d\tau.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\ln U(x) - \ln U(0) \leq |\lambda| \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) d\tau ds,$$

откуда следует неравенство (6).

Для получения оценки (7) вместо равенства (8) надо использовать соответствующее равенство для задачи (1), (3):

$$y(x, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x \int_0^s \rho(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau ds.$$

Если вес $\rho(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, l]$ некоторым условиям гладкости, то при $\lambda > 0$ вместо оценок (6), (7) можно получить оценки (5). Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть вес $\rho(x)$ абсолютно непрерывен и удовлетворяет условиям (2) и условию

$$\int_0^l |\rho'(x)| dx = c(\rho) < +\infty. \quad (11)$$

Тогда при $\lambda > 0$ для решений $y(x, \lambda)$ задач (1), (3) и (1), (4) имеет место соответствующая оценка из (5), где

$$c_1 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{c(\rho)}{2\rho_0} \right\}, \quad c_2 = \rho_0^{-1/2} \exp \left\{ \frac{c(\rho)}{2\rho_0} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x) = y'^2(x, \lambda) + \lambda \rho(x) y^2(x, \lambda).$$

Дифференцируя ее по x , с учетом уравнения (1) и условий (4) получаем равенство

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2y'(x, \lambda)y''(x, \lambda) + \lambda \rho'(x)y^2(x, \lambda)y'(x, \lambda) + 2\lambda \rho(x)y(x, \lambda)y'(x, \lambda) \\ &= \lambda \rho'(x)y^2(x, \lambda), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$-\frac{|\rho'(x)|}{\rho(x)}v(x) \leq v'(x) \leq \frac{|\rho'(x)|}{\rho(x)}v(x)$$

или, так как $v(0) = 1$,

$$\exp \left\{ - \int_0^x \frac{|\rho'(\tau)|}{\rho(\tau)} d\tau \right\} \leq v(x) \leq \exp \left\{ \int_0^x \frac{|\rho'(\tau)|}{\rho(\tau)} d\tau \right\}. \quad (12)$$

Далее, вводя обозначение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{|\rho'(\tau)|}{\rho(\tau)} d\tau,$$

имеем

$$\lambda \rho(x) y^2(x, \lambda) \leq y'^2(x, \lambda) + \lambda \rho(x) y^2(x, \lambda) = v(x) < e^{\varphi(x)}$$

или

$$|y(x, \lambda)| < (\lambda \rho(x))^{-1/2} e^{\varphi(x)/2} \leq c_2 \lambda^{-1/2},$$

где $c_2 = \rho_0^{-1/2} \exp\{c(\rho)/(2\rho_0)\}$.

Первая оценка (5) доказывается аналогично.

Из теоремы 2 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функция $\rho(x)$, кроме условия (2), удовлетворяет еще и условию

$$\frac{1}{h} \int_0^l |\rho(x+h) - \rho(x)| dx \leq c(\rho) < +\infty, \quad (13)$$

где $h > 0$ – любое достаточно малое число (при $x+h \geq l$ считаем, что $\rho(x+h) \equiv \rho(l)$). Тогда для решений задач (1), (3) и (1), (4) имеет место соответствующая оценка из (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в задаче (1), (4) в качестве веса усреднение по Стеклову для функции $\rho(x)$, т.е. функцию

$$\rho(x, h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \rho(\tau) d\tau.$$

Очевидно, что функции $\rho(x, h)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Действительно, $\rho'(x, h) = (\rho(x+h) - \rho(x))/h$ и в силу (13) выполнение условия (11) обеспечено. Следовательно, для решения задачи (1), (4) при $\rho = \rho(x, h)$ имеем равномерную по x и h оценку $|y(x, \lambda, h)| \leq c_2 \lambda^{-1/2}$. Из оценок (12) и уравнения (1) получаем также равномерные по h и x оценки

$$|y'(x, \lambda, h)| \leq e^{c(\rho)/2}, \quad |y''(x, \lambda, h)| \leq c_2 \rho_1 \lambda^{1/2},$$

из которых следует, что однопараметрические семейства функций $y(x, \lambda, h)$ и $y'(x, \lambda, h)$ удовлетворяют условиям теоремы Арцела. Поэтому из этих семейств можно выбрать последовательности функций, равномерно сходящиеся к функциям $y(x, \lambda)$, $y'(x, \lambda)$, причем $|y(x, \lambda)| \leq c_2 \lambda^{-1/2}$, $|y'(x, \lambda)| \leq c_2$. Остается показать, что функция $y(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1). Действительно, интегрируя равенство $y''(x, \lambda, h) + \lambda \rho(x, h) y(x, \lambda, h) = 0$, для $y'(x, \lambda, h)$ получаем выражение

$$y'(x, \lambda, h) = 1 - \lambda \int_0^x \rho(\tau, h) y(\tau, \lambda, h) d\tau$$

Устремляя теперь h к нулю по последовательности, для которой имеется сходимость, и дифференцируя затем полученное равенство, убеждаемся, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1). Доказательство предложения для задачи (1), (3) аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\rho(x)$ – функция ограниченной вариации, то для решений задач (1), (3) и (1), (4) имеет место соответствующая оценка из (5).

Это вытекает из того, что для возрастающей функции $\rho(x)$ выполнено условие вида (13):

$$\frac{1}{h} \int_0^l |\rho(x+h) - \rho(x)| dx \leq \frac{1}{h} (h\rho(l) - h\rho(0)) = \rho(l) - \rho(0) < +\infty.$$

1.2. Далее будет показано, что норма решения задачи (1), (3) (соответственно (1), (4)) в пространстве $C([0, l])$ может иметь любой степенной рост по параметру λ .

Приведем сначала такие примеры в случае задачи (1), (4) (ср. [2], [3]). Рассмотрим трехпараметрическое семейство функций

$$\rho(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 3^{2\alpha} \pi^2, & x \in [x_{2(k-1)}, x_{2k-1}), \\ 3^{2\beta} \pi^2, & x \in [x_{2k-1}, x_{2k}), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $x_i = l(\gamma)(1 - 3^{-\gamma i})$, $i = 1, 2, \dots$, $l(\gamma) = 3^\gamma / (2(3^\gamma - 1))$, а α, β, γ – пока произвольные числа. Покажем, что функция

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} (-1)^{(\beta-\alpha)(k-1)} \frac{3^{(\beta-\alpha)k-\beta}}{\sqrt{\lambda} \pi} \sin(\sqrt{\lambda} 3^\alpha \pi x), & x \in [x_{2(k-1)}, x_{2k-1}), \\ (-1)^{(\beta-\alpha)k} \frac{3^{(\beta-\alpha)k-\beta}}{\sqrt{\lambda} \pi} \sin(\sqrt{\lambda} 3^\beta \pi x), & x \in [x_{2k-1}, x_{2k}), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

является решением задачи (1), (4) на отрезке $[0, x_{2n}]$ при $\rho = \rho(x, \alpha, \beta, \gamma)$, $\lambda = 3^{4n\gamma}$ и любом натуральном числе n (под решением понимаем функцию $y(x, \lambda)$, удовлетворяющую на интервалах (x_k, x_{k+1}) уравнению (1), при $x = 0$ – условиям (4) и непрерывную вместе с первой производной в точках x_i , $i = 1, 2, \dots$).

То, что при $x \neq x_i$ функция $y(x, \lambda)$, определенная равенством (15), есть решение задачи (1), (4), проверяется непосредственно. Поэтому остается показать, что при $\lambda = 3^{4n\gamma}$ и любом $i = 1, 2, \dots$ имеют место равенства $y(x_i - 0, \lambda) = y(x_i + 0, \lambda)$, $y'(x_i - 0, \lambda) = y'(x_i + 0, \lambda)$.

При произвольном $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} y(x_{2k-1} + 0, \lambda) &= (-1)^{(\beta-\alpha)k} \cdot \frac{3^{(\beta-\alpha)k-\beta}}{3^{2n\gamma} \pi} \sin\left(3^{2n\gamma} 3^\beta \pi \cdot \frac{3^\gamma}{2(3^\gamma - 1)} (1 - 3^{-(2k-1)\gamma})\right) \\ &= (-1)^{(\beta-\alpha)k} \cdot \frac{3^{(\beta-\alpha)k-\beta}}{3^{2n\gamma} \pi} \sin\left(3^{2(n-k+1)\gamma+\beta} (3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1) \frac{\pi}{2}\right), \\ y(x_{2k-1} - 0, \lambda) &= (-1)^{(\beta-\alpha)k} \cdot \frac{3^{(\beta-\alpha)k-\beta}}{3^{2n\gamma} \pi} \sin\left(3^{2(n-k+1)\gamma+\alpha} (3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1) \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку при α и β одной четности справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sin\left(3^{2(n-k+1)\gamma+\alpha} (3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1) \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(3^{2(n-k+1)\gamma+\beta} (3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1) \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

а при α и β разной четности синусы отличаются только знаком, то

$$y(x_{2k-1} - 0, \lambda) = y(x_{2k-1} + 0, \lambda), \quad k = 1, \dots, n.$$

Теперь видно, что

$$y'(x_{2k-1} - 0, \lambda) = y'(x_{2k-1} + 0, \lambda) = 0, \quad y(x_{2k} - 0, \lambda) = y(x_{2k} + 0, \lambda) = 0, \\ k = 1, \dots, n-1.$$

Найдем $y'(x_{2k} - 0, \lambda)$ и $y'(x_{2k} + 0, \lambda)$, $k = 1, \dots, n-1$. Имеем

$$y'(x_{2k} + 0, \lambda) = (-1)^{(\beta-\alpha)k} 3^{(\beta-\alpha)k} \\ \times \cos\left(3^{(2n-2k+1)\gamma+\alpha}(3^\gamma + 1)(3^{(2k-1)\gamma} + 3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1)\frac{\pi}{2}\right) \\ = (-3)^{(\beta-\alpha)k}, \\ y'(x_{2k} - 0, \lambda) = (-1)^{(\beta-\alpha)k} 3^{(\beta-\alpha)k} \\ \times \cos\left(3^{(2n-2k+1)\gamma+\beta}(3^\gamma + 1)(3^{(2k-1)\gamma} + 3^{(2k-2)\gamma} + \dots + 1)\frac{\pi}{2}\right) \\ = (-3)^{(\beta-\alpha)k}.$$

Сформулируем основной результат этой части работы.

ТЕОРЕМА 3. Для любого числа t существуют функция $\rho(x)$, $x \in [0, l]$, и числа $\lambda_n \rightarrow +\infty$ такие, что для соответствующего решения $y(x, \lambda_n)$ задачи (1), (4) имеет место оценка

$$\sup_{x \in [0, l]} |y(x, \lambda_n)| > c\lambda_n^m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве веса $\rho(x)$ возьмем функцию $\rho(x, \alpha, \beta, \gamma)$, определенную равенством (14) на отрезке $[0, l(\gamma)]$, а в качестве чисел λ_n — числа $3^{4n\gamma}$. Тогда из равенства (15) следует, что

$$\sup_{x \in [0, l(\gamma)]} |y(x, \lambda_n)| \geq |y(x_{2n-1}, \lambda_n)| = \frac{3^{(\beta-\alpha)(2n-1)-\beta}}{3^{2n\gamma}\pi} \\ = \frac{1}{\pi} 3^{2n(\beta-\alpha-\gamma)-2\beta+\alpha} = 3^{\alpha-2\beta} (3^{4n\gamma})^{(\beta-\alpha-\gamma)/(2\gamma)}. \quad (17)$$

Остается выбрать числа α, β, γ такими, чтобы выполнялось условие $\beta - \alpha - \gamma > 2m\gamma$.

Отметим, что приемом, предложенным в работе [3], можно получить оценку (16) и в случае веса $\rho(x)$, непрерывного на промежутке $[0, l)$.

Аналогично можно доказать, что функция

$$y = \begin{cases} (-1)^{(\beta-\alpha)(k-1)} \cdot 3^{-(\beta-\alpha)(k-1)} \cos(\sqrt{\lambda} 3^\alpha \pi x), & x \in [x_{2(k-1)}, x_{2k-1}], \\ (-1)^{(\beta-\alpha)k} \cdot 3^{-(\beta-\alpha)k} \cos(\sqrt{\lambda} 3^\beta \pi x), & x \in [x_{2k-1}, x_{2k}], \end{cases} \quad (18)$$

является решением задачи (1), (3) и для нее также выполнена оценка (16) при условии $\beta < \alpha$ и $\lambda_n = 3^{4n\gamma}$.

1.3. Покажем, что в случае веса, зависящего от λ и удовлетворяющего условию $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho(x, \lambda) = 1$, для уравнения

$$y'' + \lambda \rho(x, \lambda) y = 0 \quad (19)$$

одно из решений задач (19), (3) или (19), (4) при $x = x_0 \geq 0$ может иметь экспоненциальный рост по параметру λ .

Рассмотрим трехпараметрическое семейство функций

$$\varphi(x) = \frac{\cos^\alpha x \sin^\beta x}{x^\gamma}, \quad x \in [0, +\infty),$$

где α, β, γ – некоторые положительные числа, причем выполняется условие $\gamma \leq \beta$, обеспечивающее непрерывность функции $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ (символы $\cos^\alpha x$, $\sin^\beta x$ понимаем как $|\cos x|^\alpha \operatorname{sgn} \cos x$, $|\sin x|^\beta \operatorname{sgn} \sin x$). Ограничение $\gamma \leq \beta$ можно снять, если взять $x \in [\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

а) Пусть числа α и β таковы, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt = 0$$

(например, хотя бы одно из чисел α или β нечетно). Тогда при любом $\gamma > 0$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt$$

сходится.

б) Если $\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt = c \neq 0$, то в зависимости от числа γ при $x \rightarrow +\infty$ имеют место следующие факты:

- 1) если $\gamma = 1$, то $\int_0^\infty \varphi(t) dt \sim \frac{c}{2\pi} \ln x$;
- 2) если $0 < \gamma < 1$, то $\int_0^x \varphi(t) dt \sim \frac{c}{2\pi(1-\gamma)} x^{1-\gamma}$;
- 3) если $\gamma > 1$, то $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dx$ сходится.

Действительно, в случае а) для любого числа $B > 0$, полагая $k = [B/(2\pi)]$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^B \cos^\alpha t \sin^\beta t dt \right| &= \left| \int_{2k\pi}^B \cos^\alpha t \sin^\beta t dt \right| = \left| \int_0^{B-2k\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\cos^\alpha t \sin^\beta t| dt \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ сходится при любом $\gamma > 0$.

В случае б) рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left[\varphi(t) - \frac{c}{2\pi t^\gamma} \right] dt$$

и покажем, что он сходится при любом $\gamma > 0$:

$$\int_0^{2\pi} (2\pi \cos^\alpha t \sin^\beta t - c) dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt - 2\pi c = 0.$$

Далее поступаем как при доказательстве утверждения из п. а):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^B (2\pi \cos^\alpha t \sin^\beta t - c) dt \right| &\leq \int_0^{2\pi} |2\pi \cos^\alpha t \sin^\beta t| dt + |c| \int_0^{2\pi} dt \\ &\leq 2\pi(2\pi + |c|) = c_3. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left[\varphi(t) - \frac{c}{2\pi t^\gamma} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{(2\pi \cos^\alpha t \sin^\beta t - c)}{2\pi t^\gamma} dt$$

сходится при любом $\gamma > 0$. Пусть

$$\int_0^\infty \left[\varphi(t) - \frac{c}{2\pi t^\gamma} \right] dt = c_4(\gamma).$$

Поэтому интегралы $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ и $\int_0^{+\infty} t^{-\gamma} dt$ сходятся или расходятся одновременно и

$$\int_0^x \left[\varphi(t) - \frac{c}{2\pi t^\gamma} \right] dt = c_4(\gamma) + \delta(x),$$

где $\delta(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{c}{2\pi} \int_0^x \frac{dt}{t^\gamma} + c_4(\gamma) + \delta(x)$$

и утверждения п. б) доказаны.

Теперь рассмотрим семейство уравнений

$$\begin{aligned} y'' + \mu^2 \left[1 + m \frac{\cos^{\alpha-1} \mu x \sin^{\beta-1} \mu x ((\alpha+2) \sin^2 \mu x - \beta \cos^2 \mu x)}{(\mu x)^\gamma} \right. \\ \left. + m \frac{\gamma \cos^\alpha \mu x \sin^\beta \mu x}{(\mu x)^{\gamma+1}} - \left(m \frac{\gamma \cos^\alpha \mu x \sin^\beta \mu x}{(\mu x)^\gamma} \right)^2 \right] y = 0, \quad x > 0, \quad (20) \end{aligned}$$

где α, β, γ – числа, принимающие такие же значения, что и выше, но с единственным изменением: считаем, что $\beta \geq \gamma + 1$, m – произвольное вещественное число; $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ясно, что выражение в квадратных скобках стремится к единице при фиксированном $x > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функции

$$y_1(x, \mu) = \cos \mu x \cdot \exp \left\{ m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} y_2(x, \mu) = \frac{\sin \mu x}{\mu} \cdot \exp \left\{ -m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\} \\ + \frac{2m}{\mu} \cos \mu x \cdot \exp \left\{ m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\} \\ \times \int_0^{\mu x} \frac{\cos^{\alpha-1} t \sin^{\beta+1} t}{t^\gamma} \exp \left\{ -2m \int_0^t \frac{\cos^\alpha \tau \sin^\beta \tau}{\tau^\gamma} d\tau \right\} dt \quad (22) \end{aligned}$$

при $x \in [0, +\infty)$ являются решениями задач Коши (20), (3) и (20), (4) соответственно. Наконец, используя доказанные утверждения из п. а) и п. б), получаем следующие результаты п. 1.3.

ТЕОРЕМА 4. а) Пусть числа α, β, γ таковы, что

- 1) $\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta - 1 \geq \gamma > 0, \text{ или}$
- 2) $\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt = c \neq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta - 1 \geq \gamma > 1.$

Тогда при $\mu = \sqrt{\lambda}$ решение (21) задачи (20), (3) удовлетворяет первому условию (5), а решение (22) задачи (20), (4) – второму условию (5). Другими словами, для решений задач Коши (20), (3) и (20), (4) имеют место классические оценки (5).

б) Если числа α, β, γ и m таковы, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^\alpha t \sin^\beta t dt = c \neq 0, \quad mc > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta - 1 \geq \gamma = 1,$$

то при

$$x = 1, \quad \mu = \mu_n = n\pi, \quad n \rightarrow \infty,$$

решение (21) задачи (20), (3) имеет степенной рост относительно μ_n , т.е.

$$y_1(1, \mu_n) \sim (-1)^n (\mu_n)^{cm/(2\pi)}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (23)$$

а решение (22) $y_2(x, \mu)$ задачи (20), (4) убывает как экспонента, т.е. быстрее, чем в классической ситуации (вторая оценка (5)).

Если же $0 < \gamma < 1$, то решение (21) задачи (20), (3) имеет экспоненциальный рост по μ_n , т.е.

$$y_1(1, \mu_n) \sim (-1)^n \exp \left\{ \frac{cm}{2\pi(1-\gamma)} \mu_n^{1-\gamma} \right\}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

а решение (22) $y_2(x, \mu)$ задачи (20), (4) убывает как экспонента.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $mc < 0$, то оценки для решений y_1 и y_2 поменяются местами.

Отметим, что получено еще одно семейство уравнений вида (20):

$$y'' + \mu^2 \left[1 + m \frac{\cos^{\alpha-1} \mu x \sin^{\beta-1} \mu x (\alpha \sin^2 \mu x - (\beta+2) \cos^2 \mu x)}{(\mu x)^\gamma} + m \frac{\gamma \cos^\alpha \mu x \sin^\beta \mu x}{(\mu x)^{\gamma+1}} - \left(m \frac{\cos^\alpha \mu x \sin^\beta \mu x}{(\mu x)^\gamma} \right)^2 \right] y = 0, \quad x > 0. \quad (25)$$

Для этого уравнения решения задач Коши с условиями (3) и (4) выглядят по-другому, а именно,

$$y_1(x, \mu) = \cos \mu x \cdot \exp \left\{ -m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\} + 2m \sin \mu x \cdot \exp \left\{ m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\} \times \int_0^{\mu x} \frac{\cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta-1} t}{t^\gamma} \cdot \exp \left\{ -2m \int_0^t \frac{\cos^\alpha \tau \sin^\beta \tau}{\tau^\gamma} d\tau \right\} dt, \quad (26)$$

$$y_2(x, \mu) = \frac{\sin \mu x}{\mu} \cdot \exp \left\{ m \int_0^{\mu x} \frac{\cos^\alpha t \sin^\beta t}{t^\gamma} dt \right\}. \quad (27)$$

Здесь также имеют место утверждения, аналогичные сформулированным выше.

Список литературы

- [1] И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, 3-е изд., Физматгиз, М., 1961; англ. пер. 1-го изд.: I. G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1954.
- [2] В. Я. Якубов, “Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:2 (1999), 58–67; англ. пер.: V. Ya. Yakubov, “Estimates for eigenfunctions of elliptic operators with respect to the spectral parameter”, *Funct. Anal. Appl.*, **33**:2 (1999), 128–136.
- [3] В. Я. Якубов, “Оценки для решений задач Коши по спектральному параметру”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 59–63; англ. пер.: V. Ya. Yakubov, “Estimates for solutions to a Cauchy problem involving a spectral parameter”, *Differential Equations*, **34**:1 (1998), 59–64.

В. Я. Якубов (V. Ya. Yakubov)

Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)

E-mail: matan@miem.edu.ru

Поступила в редакцию

26.10.2005 и 25.05.2009