Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 8, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:03:42

УДК 517.9

В. В. Жиков

Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости

Работа посвящена подробному анализу понятия p -связности, в частности, дан критерий p -связности двух непересекающихся липшицевых областей, имеющих фрактальное касание. На этой основе строятся новые примеры периодических открытых множеств с положительной эффективной проводимостью. Вводятся также новые объекты – эллиптические операторы на евклидовом пространстве с мерой, формулируется соответствующее понятие p -связности и строится обобщенная теория усреднения.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

1) Пусть Q – периодическое открытое (не обязательно связное) множество в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\square = [-1/2, 1/2]^N$ – ячейка периодичности. Для наглядности можно предположить себе, что Q – это внешность периодической системы шаров.

Множество $Q_\varepsilon = \varepsilon Q = \{\varepsilon x, x \in Q\}$ имеет период ε и часто называется *перфорированным пространством*. В перфорированном пространстве рассмотрим простейшее эллиптическое уравнение с условием Неймана на границе

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f & \text{в } Q_\varepsilon, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\partial Q_\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Само уравнение понимается в следующем смысле.

Введем соболевское пространство $W^{1,p}(Q_\varepsilon)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ по норме $\left(\int_{Q_\varepsilon} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{1/p}$. Тогда $u^\varepsilon \in W^{1,2}(Q_\varepsilon)$ есть решение, если

$$\int_{Q_\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + u^\varepsilon \varphi) dx = \int_{Q_\varepsilon} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (1.2)$$

Смысл усреднения в том, что решение u^ε , определенное только в Q_ε , должно в определенном смысле сходиться к решению “усредненного” уравнения, заданного уже во всем пространстве. Более точно, имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^2 dx = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1720).

в котором u^0 – решение усредненной задачи

$$-\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) + u^0 = f \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

A^0 – постоянная симметрическая положительно определенная матрица.

Проблеме усреднения посвящено множество работ (см. [1], [2] и имеющиеся там ссылки). Классический подход основан на предположении, что область Q не только связна в $\mathbb{R}^N$ (этого было далеко недостаточно), но удовлетворяет “условию сильной связности”. Последнее означает существование операторов продолжения

$$P_\varepsilon : W^{1,2}(Q_\varepsilon) \rightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

со специальными оценками вида

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx \leq c_0 \int_{Q_\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx,$$

где $\tilde{\varphi} = P_\varepsilon \varphi$, а константа c_0 не зависит от ε .

Существование таких операторов возможно только при определенных ограничениях на периодическую область. Так, если Q есть внешность плотной кубической упаковки в $\mathbb{R}^3$, то операторы продолжения не существуют.

Между тем, свойства усреднения служат важным инструментом в целом ряде разделов таких, как теория перколяции, эффективная проводимость периодических и случайных сред и, особенно, теория диффузии. Например, свойство усреднения для диффузионного уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon & \text{в } Q_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\partial Q_\varepsilon} = 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_\varepsilon} |u^\varepsilon(x, t) - u^0(x, t)|^2 dx &= 0 \quad \forall t \geq 0, \\ \begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} = \operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) & \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u^0|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этого свойства делается следующий вывод. Броуновская частица, движущаяся в периодическом сосуде Q с условием отражения на его стенках, в целом ведет себя как частица в свободном пространстве, движущаяся с меньшей скоростью (“центральная предельная теорема”).

В 1985 году С. М. Козлов и автор этой статьи высказали гипотезу: для доказательства основных свойств усреднения операторы продолжения не нужны вообще, а достаточно обычной связности множества Q в $\mathbb{R}^N$. Обоснование этой гипотезы для периодических и случайных множеств дано в [3], [4]. При этом выяснилось, что условие связности можно существенно ослабить. Ослабленная форма связности определяется так.

Пусть $W_{\text{per}}^{1,p}(Q)$ есть замыкание множества $C_{\text{per}}^\infty(\square)$ всех гладких периодических функций по соболевской норме

$$\left(\int_{\square \cap Q} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Открытое периодическое множество Q называется *p -связным* (на торе периодичности), если

$$u \in W_{\text{per}}^{1,p}(Q), \quad \nabla u = 0 \text{ п.в. на } Q \Rightarrow u = \text{const п.в. на } Q.$$

Очевидно, что обычная связность Q на торе влечет p -связность при любом $p \geq 1$. Обратное неверно, как это будет видно из дальнейшего.

ТЕОРЕМА 1.2 (теорема усреднения [3], [4]). *Если Q является 2-связным на торе, то имеют место все свойства усреднения, кроме положительной определенности усредненной матрицы A^0 .*

Отметим сразу, что для положительной определенности матрицы A^0 нужна 2-связность множества Q не на торе, а в $\mathbb{R}^N$. Это – отдельный вопрос, подробно обсуждаемый в § 4.

Теорема усреднения доказана в [4] и для нелинейных уравнений. Сформулируем прежде всего свойства усреднения. Пусть u^ε – решение вариационной задачи

$$\min_{u \in W_{\text{per}}^{1,p}(Q_\varepsilon)} \int_{Q_\varepsilon} (|\nabla u|^p + |u|^p - fu) dx,$$

в которой $p > 1$, $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $p' = p/(p-1)$. Тогда свойства усреднения таковы:

- i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^p dx = 0$;
- ii) u^0 – решение усредненной задачи

$$\min_{u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} (\Phi(\nabla u) + |u|^p - fu) dx;$$

- iii) усредненный интегрант $\Phi(\xi)$ коэрцитивен: $\Phi(\xi) \geq c_0 |\xi|^p$, $c_0 > 0$.

Доказано, что p -связность влечет все свойства усреднения, кроме свойства iii).

2) Условие p -связности не только достаточно для усреднения, но и в определенном смысле необходимо. Поясним это важное обстоятельство подробно.

Пусть Q – произвольное открытое множество на торе, для простоты, состоящее из конечного числа связных компонент. Очевидно, множество Q можно представить как объединение конечного числа *максимальных* p -связных компонент:

$$Q = \bigcup Q^i, \quad Q^i \cap Q^j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

Q^i – максимальное p -связное открытое подмножество Q .

ТЕОРЕМА 1.3 (о разложении на p -связные фазы). Пусть u^ε – решение задачи (1.1) в области Q_ε . Тогда сужение $u_i^\varepsilon = u^\varepsilon|_{Q_\varepsilon^i}$, $Q_\varepsilon^i = \varepsilon Q^i$, есть решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u_i^\varepsilon + u_i^\varepsilon = f & \text{в } Q_\varepsilon^i, \\ \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\partial Q_\varepsilon^i} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Иначе говоря, общее уравнение (1.1) распадается на независимые уравнения на p -связных фазах. Для каждого отдельного уравнения (1.3) применима теорема усреднения и поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q_\varepsilon^i} |u_i^\varepsilon - u_i^0|^2 dx = 0,$$

где u_i^0 – решение соответствующего усредненного уравнения, которое, конечно, может зависеть от i . Тем самым решается вопрос об усреднении в случае произвольного открытого Q .

Докажем теорему 1.3 в качестве иллюстрации понятия p -связности. Доказательство основано на следующем факте.

ЛЕММА 1.4. Характеристическая функция максимальной p -связной фазы принадлежит пространству $W_{\text{рег}}^{1,p}(Q)$.

Теперь в интегральном тождестве (1.2) в качестве пробной функции возьмем

$$\varphi(x) = \chi_i(\varepsilon^{-1}x)\psi(x), \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

где χ_i – характеристическая функция фазы Q^i . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \chi_i(\varepsilon^{-1}x)\nabla \psi, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \chi_i(\varepsilon^{-1}x)(\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \psi + u^\varepsilon \psi) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_i(\varepsilon^{-1}x)\psi f dx. \end{aligned}$$

Это и означает, что уравнение (1.1) распадается на независимые уравнения на отдельных фазах.

Для доказательства леммы 1.4 рассмотрим подпространство

$$V = \{u \in W_{\text{рег}}^{1,p}(Q), \nabla u = 0 \text{ п.в. на } Q\}.$$

Полезное замечание: множество V есть алгебра относительно поточечного умножения, т.е. если $u, v \in V$, то $uv \in V$. Удобно фазы Q^i отождествить с точками $\overset{\circ}{x}_i \in Q^i$, и рассмотреть V как функцию на конечном множестве $\Gamma = \{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_k\}$, $u(\overset{\circ}{x}_i) = u|_{Q^i}$. Из максимальной p -связности компонент следует, что

$$\forall j \neq i, \exists u \in V, \quad u(\overset{\circ}{x}_j) \neq u(\overset{\circ}{x}_i).$$

Иначе говоря, алгебра функции V разделяет точки множества Γ . Тогда по теореме Стоуна–Вейерштрасса она совпадает с множеством всех функций на Γ , в частности, содержит функцию

$$u(\overset{\circ}{x}_i) = 1, \quad u(\overset{\circ}{x}_j) = 0 \quad \forall j \neq i,$$

что и доказывает лемму.

3) Теорема 1.3 показывает, что важно знать, когда две непересекающиеся области образуют одно p -связное множество. Обсудим этот вопрос, предполагая, что области лежат не на торе, а в $\mathbb{R}^N$. Предварительно введем некоторые обозначения и определения.

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$,

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{u|_{\bar{\Omega}}, u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}, \quad (1.4)$$

$W^{1,p}(\Omega)$ есть замыкание множества $C^\infty(\bar{\Omega})$ в соболевской норме.

Заметим, что пространство $W^{1,p}(\Omega)$ можно определить несколько иначе, именно, $W^{1,p}(\Omega)$ есть замыкание множества $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ в соболевской норме. Здесь и далее $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ – множество всех функций на Ω , удовлетворяющих условию Липшица. Эквивалентность этих определений следует из плотности $C^\infty(\bar{\Omega})$ в $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ (функцию из $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ можно продолжить до функции из $\text{Lip}(\bar{B})$, где B – шар, $\bar{\Omega} \subset B$, а для шара плотность $C^\infty(\bar{B})$ в $\text{Lip}(\bar{B})$ очевидна).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Ограниченное открытое множество называется p -связным, если

$$u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \nabla u = 0 \text{ п.в. на } \Omega \Rightarrow u = \text{const п.в. на } \Omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Две ограниченные непересекающиеся области называются p -связанными (через общую границу), если их объединение p -связно.

Следующий общий результат доказан в §2.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть Ω_1, Ω_2 – ограниченные липшицевы области, $\dim(\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2)$ – хаусдорфова размерность их непустой общей границы. Тогда число

$$\bar{p} = N - \dim(\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2)$$

есть порог связности, т.е. при $p > \bar{p}$ области Ω_1, Ω_2 будут p -связными, а при $p < \bar{p}$ – нет.

Рассмотрим две задачи, в которых виден физический аспект понятия p -связности.

Предварительно напомним конструкцию классического канторова множества. Единичный отрезок $K_0 = [0, 1]$ делим на три равные части и, выбрасывая средний открытый интервал, получаем множество K_1 . Затем повторяем эту процедуру с двумя отрезками, составляющими множество K_1 и т. д. На n -ом шаге получаем множество K_n , состоящее из 2^n отрезков длины 3^{-n} . Множество K_n называется предканторовым, само канторово множество есть пересечение предканторовых, $K = \bigcap K_n$.

Фрактальная проводимость. Рассмотрим единичный квадрат $\square$. Сначала представим себе, что он целиком состоит из однородного проводящего материала, а затем разделим его на две части диэлектрической перегородкой (см. рис. 1).

На среднем горизонтальном сечении нашего квадрата берем предканторово множество K_n . Дополнительное к нему множество $K_0 \setminus K_n$ состоит из конечного числа интервалов. На каждом из интервалов, как на диагонали, строим замкнутый квадратик, объединение квадратиков – это предканторова перегородка L_n .

Рис. 1. Канторова перегородка

Сама канторова перегородка L – это объединение всех L_n и единичного отрезка $K_0 = [0, 1]$. Легко понять, что это множество замкнуто и делит наш квадрат на две липшицевы области Ω_1, Ω_2 , имеющие фрактальное касание:

$$\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = K - \text{канторово множество,}$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \square \setminus L, \quad L - \text{канторова перегородка.}$$

Теперь обратимся собственно к задаче проводимости. Берем квадрат $\square$ с предканторовой перегородкой, которую считаем идеальным диэлектриком. Проводящая часть $\square \setminus L_n$ связна и поэтому эффективная проводимость (в вертикальном направлении) положительна,

$$J_n = \inf_{u \in S} \int_{\square \setminus L_n} |\nabla u|^2 dx > 0,$$

$$S = \{u \in C^\infty(\overline{\square}), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad u|_{x_2=-1/2} = 0, \quad u|_{x_2=1/2} = 1\}.$$

Величина J_n убывает при $n \rightarrow \infty$ и ее предел естественно назвать *эффективной проводимостью квадрата с канторовской диэлектрической перегородкой*, при этом, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J = \inf_{u \in S} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \Omega = \square \setminus L.$$

Посмотрим, что означает равенство $J = 0$. В этом случае найдутся

$$u_n \in S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\square \setminus L_n} |\nabla u_n|^2 dx = 0.$$

Без потери общности можно считать, что $u_n \rightarrow u$ слабо в $W^{1,2}(\Omega)$. Тогда для предельной функции очевидно

$$\nabla u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{x_2=-1/2} = 0, \quad u|_{x_2=1/2} = 1,$$

и поэтому

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Omega_1; \\ 0 & \text{на } \Omega_2. \end{cases}$$

Другими словами, нулевая проводимость означает в точности, что Ω не 2-связно. В действительности, множество Ω является 2-связным, так как по теореме 1.7 порог связности $2 - \dim K = 2 - (\ln 2 / \ln 3) < 2$. Таким образом, эффективная проводимость положительна, $J > 0$. Можно сказать, что область Ω_1 передает ток области Ω_2 , хотя они соприкасаются только по канторову множеству.

Диффузия через фрактальную щель. Рассмотрим квадрат $\square$ как сосуд с непроницаемыми стенками. Тогда концентрация вещества есть решение уравнения диффузии с условием Неймана на границе:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{в } \square \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \square} = 0, & u|_{t=0} = f - \text{начальная концентрация.} \end{cases}$$

В процессе диффузии общая масса вещества остается постоянной, но вещество перераспределяется по квадрату с течением времени, концентрация выравнивается во всех точках квадрата, и при $t \rightarrow \infty$ распределение вещества становится равномерным по квадрату, каким бы ни было его первоначальное распределение.

Для наглядности сформулируем свойство диффузии так.

Свойство 1.8. Существует некоторое вполне определенное время $T_0 > 0$, по истечении которого не менее четверти всего вещества окажется в верхней половине квадрата, каким бы ни было распределение вещества в момент времени $t = 0$ (например, при $t = 0$ все вещество находилось в нижней половине).

Теперь рассмотрим квадрат с предканторовой перегородкой, которая рассматривается как непроницаемая граница. В этом случае концентрация $u(x, t) = u_n(x, t)$ удовлетворяет уравнению диффузии в области $\square \setminus L_n$, а на границе этой области – условию Неймана. При фиксированном n характер диффузии очевидно сохраняется. Возникает вопрос: выполняется ли свойство 1.8 с постоянной T_0 , не зависящей от n ? Ответ на этот вопрос положителен и также сводится в конечном счете к проблеме 2-связности предельного множества $\square \setminus L$.

В задаче диффузии вместо “толстой” перегородки L_n естественно взять “тонкую”, состоящую просто из интервалов $[0, 1] \setminus K_n$ (см. рис. 2). В этом случае концентрация $u_n(x, t)$ может принимать различные значения на верхнем и нижнем берегах указанных интервалов (разрезов), условие Неймана выполняется на каждом из берегов. С математической точки зрения этот вариант мало отличается от предыдущего, в частности, равномерное по n свойство диффузии 1.8 имеет место.

Для рассмотрения трехмерной задачи диффузии напомним построение канторовой пыли на квадрате (см. рис. 3).

Зададимся числом $r \in (0, 1/2)$, и пусть F_0 – единичный квадрат. Выбросим из него “крест”, составленный из двух перпендикулярных открытых полосок ширины $1 - 2r$, идущих вдоль средних линий квадрата F_0 . Останется множество F_1 , состоящее из четырех квадратов со стороной r , и процесс повторяется с каждым

Рис. 2. Два сосуда, соединенные канторовой щелью

Рис. 3. Канторова пыль

из них. На n -шаге получается множество F_n , состоящее из 4^n непересекающихся квадратов со стороной r^n . Хаусдорфова размерность пыли $F = \bigcap F_n$ зависит от параметра r и равна $\ln 4 / \ln(1/r)$.

Теперь рассмотрим диффузию в единичном кубе с непроницаемыми стенками. На среднем горизонтальном сечении куба, обозначаемом F_0 , возьмем предканторову пыль F_n . Множество F_n рассматриваем как “щель”, соединяющую обе половины куба, а дополнительное множество $F_0 \setminus F_n$ как двустороннюю непроницаемую границу.

При $n \rightarrow \infty$ половинки куба соприкасаются только по канторовой пыли. Может показаться, что диффузия из нижней половины в верхнюю должна сильно замедлиться, например, время T_0 из свойства 1.8 должно стремиться к ∞ при $n \rightarrow \infty$.

Это, однако, не совсем так. Все определяется размерностью пыли F . Если $\dim F > 1$ (это будет при $r > 1/4$), то время T_0 , необходимое для переноса четверти массы из нижней половины в верхнюю, можно выбрать не зависящим от номера n . В этом случае соприкосновения *только по канторовой* пыли достаточно для нормального хода диффузии. Если же $r \leq 1/4$, то с ростом n перенос из нижней половины в верхнюю замедляется, и при $n \rightarrow \infty$ половинки куба становятся полностью изолированными друг от друга.

§ 2. О p -связанности двух областей

1) Пусть Ω_1, Ω_2 – ограниченные области, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ответ о p -связанности множеств Ω_1, Ω_2 формулируется сначала в терминах p -емкости их общей границы $F = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 \neq \emptyset$.

В дальнейшем сама величина емкости роли не играет, важно только, равна она нулю или нет. Поэтому вместо собственно p -емкости будем использовать p -емкость множества относительно достаточно большого шара,

$$c_p(F) = \inf \left\{ \int_B |\nabla \varphi|^p dx, \varphi \in C_0^\infty(B), \varphi = 1 \text{ в окрестности } F \right\}. \quad (2.1)$$

Предположим, что $\overline{\Omega} \subset \frac{1}{4}B$. Напомним, что при $p > N$

$$c_p(F) = 0 \Leftrightarrow F = \emptyset.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть Ω_1, Ω_2 – липшицевы и $c_p(F) > 0$. Тогда они p -связаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним фундаментальную характеристику компакта F с положительной p -емкостью: на F существует нормированная борелевская мера μ , являющаяся непрерывным функционалом над $W_0^{1,p}(B)$, т.е.

$$\int_F \varphi d\mu \leq c_0 \left(\int_B |\nabla \varphi|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B).$$

Последнее, в частности, означает, что если

$$\varphi_\varepsilon, \varphi \in W_0^{1,\infty}(B), \quad \varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \text{ в } W_0^{1,p}(B), \quad (2.2)$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_F \varphi_\varepsilon d\mu = \int_F \varphi d\mu$$

(отметим, что под интегралом стоят непрерывные функции). Допустим, что Ω не p -связно. Тогда

$$\exists \theta_\varepsilon \in \text{Lip}(\overline{\Omega}), \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \theta \text{ в } W^{1,p}(\Omega), \quad (2.3)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Omega_1; \\ 0 & \text{на } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Будем использовать следующую форму классического результата о продолжении (см. [5, с. 126], [6, с. 231]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть Ω_1 – ограниченная липшицева область, $\overline{\Omega}_1 \subset \frac{1}{4}B$, где B – шар. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$T: W^{1,q}(\Omega_1) \rightarrow W_0^{1,q}(B), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

причем функция $u \equiv 1$ в Ω_1 продолжается функцией, равной 1 в $\frac{1}{2}B$.

Для доказательства рассмотрим классический оператор продолжения

$$P: W^{1,q}(\Omega_1) \rightarrow W^{1,q}(B), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

и определим новый оператор

$$\overline{P}u = t + P(u - t), \quad t = |\Omega_1|^{-1} \int_{\Omega_1} u \, dx.$$

Тогда константы будут продолжаться константами и остается положить

$$Tu = \psi \overline{P}u, \quad \text{где } \psi \in C_0^\infty(B), \quad \psi = 1 \text{ на } \frac{1}{2}B.$$

Возвращаясь к нашей ситуации (2.3), (2.4), заметим, что $\theta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega_1)$. Продолжим функцию $\theta_\varepsilon|_{\Omega_1}$, полагая $\tilde{\theta}_\varepsilon = T\theta_\varepsilon$. Так как $\theta_\varepsilon \rightarrow 1$ в $W^{1,p}(\Omega_1)$, то

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \tilde{\theta} \text{ в } W_0^{1,p}(B), \quad \tilde{\theta}|_{\frac{1}{2}B} = 1, \quad \tilde{\theta} \in W_0^{1,\infty}(B).$$

По свойству непрерывности (2.2) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_F \theta_\varepsilon \, d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_F \tilde{\theta}_\varepsilon \, d\mu = \int_F d\mu = 1.$$

Теперь применим аналогичные рассуждения к функции $\theta_\varepsilon|_{\Omega_2}$. Если $\overline{\theta}_\varepsilon$ – соответствующее продолжение, то

$$\overline{\theta}_\varepsilon \rightarrow \overline{\theta} \text{ в } W_0^{1,p}(B), \quad \overline{\theta}|_{\frac{1}{2}B} = 0, \quad \overline{\theta}_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(B).$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_F \theta_\varepsilon \, d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_F \overline{\theta}_\varepsilon \, d\mu = \int_F \overline{\theta} \, d\mu = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие липшицевости областей Ω_1, Ω_2 можно ослабить. Пусть имеются расширяющиеся семейства областей $\Omega_{1,\varepsilon}, \Omega_{2,\varepsilon}$ со свойствами

- i) $\Omega_{1,\varepsilon}, \Omega_{2,\varepsilon}$ – липшицевы;
- ii) $\overline{\Omega}_{1,\varepsilon} \cap \overline{\Omega}_{2,\varepsilon} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$;
- iii) $\Omega_1 = \bigcup \Omega_{1,\varepsilon}, \Omega_2 = \bigcup \Omega_{2,\varepsilon}$.

Тогда, если $c_p(\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2) > 0$, то Ω_1, Ω_2 p -связаны. Совсем отказаться от липшицевости нельзя, как показывает приведенный далее пример.

Обратный к лемме 2.1 результат не предполагает липшицевости.

ЛЕММА 2.3. Если $c_p(\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2) = 0$, то области Ω_1, Ω_2 не являются p -связанными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения p -емкости (2.1) следует, что

$$\exists \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\overline{B}), \quad \varphi_\varepsilon \rightarrow 1 \quad \text{в} \quad W^{1,p}(B), \quad \varphi_\varepsilon = 0 \quad \text{в окрестности} \quad F = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2.$$

Рассмотрим функцию $\theta(x)$ из (2.4) и положим $\theta_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \theta$. Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon &\in \text{Lip}(\overline{\Omega}), \quad \nabla \theta_\varepsilon = \theta \nabla \varphi_\varepsilon, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\theta - \theta_\varepsilon|^p dx &= 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla \theta_\varepsilon|^p dx = 0, \end{aligned}$$

что и означает, что Ω не является p -связной. Лемма доказана.

2) Введем критический показатель связности и установим его связь с другими геометрическими характеристиками.

Прежде всего заметим, что для любого открытого множества p -связность влечет p_1 -связность для $p_1 \geq p$. Поэтому имеет смысл *критический показатель связности*

$$\bar{p} = \bar{p}(\Omega) = \inf \{p \geq 1, \Omega \text{ } p\text{-связна}\}.$$

Будем говорить, что *критический показатель связности достигим*, если область Ω является $\bar{p}$ -связной. Введем также *емкостную размерность компакта* F равенством

$$\dim_{\text{cap}} F = \inf \{p \geq 1, c_p(F) > 0\}$$

и *размерность по Хаусдорфу*

$$\dim F = \inf \{s \geq 0, H^s(F) = 0\},$$

где $H^s(F)$ – мера Хаусдорфа порядка s . Хорошо известно (см. [8, с. 154]), что $\dim_{\text{cap}} F = N - \dim F$. Поэтому из лемм 2.1, 2.3 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.4. Если Ω_1, Ω_2 – липшицевы, то

$$\bar{p}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \dim_{\text{cap}}(\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2) = N - \dim(\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2). \quad (2.5)$$

Вопрос о достижимости критического показателя довольно сложен. Здесь важна величина меры

$$H^\alpha(F), \quad \alpha = \dim F, \quad F = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2.$$

Если $H^\alpha(F) > 0$, то $c_{N-\alpha}(F) = 0$ (см. [8, с. 154]) и по лемме 2.3 множество Ω не является p -связным, т.е. критический показатель не достигим. Именно так обстоит дело, если F есть канторово множество ($N = 2$), канторова пыль ($N = 3$). Однако, если в качестве F взять подходящую модификацию канторова множества, то критический показатель окажется достижимым. Мы не будем останавливаться на деталях.

Рассмотрим теперь пример с нелипшицевой областью.

Рис. 4. Пример с нелипшицевой областью

ПРИМЕР. Области Ω_1, Ω_2 изображены на рис. 4. Область Ω_1 – липшицева (квадрат), область Ω_2 – пик, заданный уравнением

$$x_2 \geq |x_1|^{1/\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

В случае $\gamma \leq 1$ область Ω_2 также липшицева и поэтому $\bar{p} = 2$. Проверим, что $\bar{p} = \gamma + 1$ при $\gamma \geq 1$.

Рассмотрим кусочно-линейные функции

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \leq 0; \\ \varepsilon^{-1} x_2, & \text{если } 0 \leq x_2 \leq \varepsilon; \\ 1, & \text{если } x_2 \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Так как

$$\int_{\Omega} |\nabla \theta_\varepsilon|^p dx \leq c \varepsilon^{-p+\gamma+1},$$

то при $p \leq \gamma + 1$ пространство $W^{1,p}(\Omega)$ содержит функцию, равную нулю в Ω_2 и единице в Ω_1 , т.е. p -связности нет. Если же $p > \gamma + 1$, то согласно результатам работы [7] функции из $W^{1,p}(\Omega)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$. Отсюда следует, что область Ω p -связна. Этот пример изучен совместно с О. О. Барабановым и А. В. Черкаевым.

3) До сих пор считалось, что “связь” между областями Ω_1, Ω_2 происходит через их общую границу $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. Сейчас рассмотрим ситуацию, когда связь осуществляется только через часть общей границы, а остальная общая граница служит перегородкой.

Пусть F – непустое замкнутое множество, $F \subset \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. $W^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega, F)$ есть замыкание по соболевской норме множества всех функций $u(x)$, $x \in \Omega$, таких, что $u|_{\Omega_i} \in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, $i = 1, 2$, $u(x)$ – непрерывна в точках $x \in F$.

При этом F будем называть *контактным* множеством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Области Ω_1, Ω_2 p -связаны (через контактное множество F), если

$$u \in W^{1,p}(\Omega, F), \quad \nabla u = 0 \text{ п.в. на } \Omega \Rightarrow u = \text{const п.в. на } \Omega.$$

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.7. *Две ограниченные липшицевы области p -связаны тогда и только тогда, когда контактное множество имеет положительную p -емкость.*

ТЕОРЕМА 2.8. *Критический показатель связности двух ограниченных липшицевых областей равен $N - \dim(F)$, где F — непустое контактное множество, $\dim(F)$ — его хаусдорфова размерность.*

Доказательство ничем не отличается от предыдущего случая, когда контактное множество совпадало с общей границей.

4) Если ограниченные липшицевы области Ω_1, Ω_2 являются p -связанными, то для введенного выше соболевского пространства $W^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega, F)$ справедливы стандартные теоремы вложения, как если бы Ω была просто липшицевой областью. Например, имеет место неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{p/q} \leq c_0 \left(\left(\int_{\Omega} u dx \right)^p + \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \quad (2.6)$$

для любого $q \in [p, p^*]$, $p^* = Np/(N-p)$, $p^* < \infty$.

Доказывается оно обычным рассуждением от противного. Если (2.6) не выполняется, то найдутся

$$u_{\varepsilon} \in W^{1,p}(\Omega), \quad \int_{\Omega} u_{\varepsilon} dx = 0, \quad \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^q dx = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^p dx = 0. \quad (2.7)$$

Из неравенства Соболева–Пуанкаре для областей Ω_1, Ω_2 имеем

$$\int_{\Omega_j} |u_{\varepsilon} - K_{\varepsilon}^j|^q dx \leq c_1 \left(\int_{\Omega_j} |\nabla u_{\varepsilon}|^p dx \right)^{q/p}, \quad K_{\varepsilon}^j = |\Omega_j|^{-1} \int_{\Omega_j} u_{\varepsilon} dx, \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, согласно (2.7)

$$|K_{\varepsilon}^j| \leq \left(|\Omega_j|^{-1} \int_{\Omega_j} |u_{\varepsilon}|^q dx \right)^{1/q} = |\Omega_j|^{-1/q}, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следует, что последовательность u_{ε} компактна в $L^q(\Omega)$. Поэтому, если $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$, то

$$\int_{\Omega} |u|^q dx = 1, \quad \int_{\Omega} u dx = 0, \quad \nabla u = 0,$$

что противоречит p -связности.

§ 3. Диффузия через фрактальную щель

1) Пусть две ограниченные липшицевы области Ω_1, Ω_2 являются 2-связанными через контактное множество $F \subset \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$. Множества Ω_1, Ω_2 называем *сосудами*, F — *щелью*. Границы сосудов считаем непроницаемыми всюду, кроме щели F .

На рис. 2 сосуды — это половинки квадрата, а щель — канторово множество. Аналогично, в качестве сосудов Ω_1, Ω_2 можно взять две половинки единичного куба в $\mathbb{R}^3$, а в качестве щели — канторову пыль на их общей грани. В данном случае щель имеет нулевую площадь, но ее хаусдорфова размерность больше единицы, если параметр $r > 1/4$. Поэтому сосуды Ω_1, Ω_2 будут 2-связанными. Ниже мы покажем, что броуновская частица проникает из сосуда Ω_1 в сосуд Ω_2 через щель F ; более того, качественные свойства диффузии — такие же, как если бы открытое множество $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ было связным в обычном смысле.

Начнем с построения оператора Лапласа в области Ω с краевым условием Неймана, выполняющимся всюду на $\partial\Omega$, кроме контактного множества. Очевидно, что задача

$$u \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_{\Omega} g \varphi dx \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

имеет единственное решение для любого $g \in L^2(\Omega)$ (по поводу пространства $W^{1,2}(\Omega)$ см. определение 2.5). Через $D(A)$ обозначим совокупность всех решений этой задачи, когда g пробегает $L^2(\Omega)$. Тогда равенство

$$Au = g - u$$

задает самосопряженный неотрицательный оператор в $L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} Au \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx.$$

Это и есть искомый оператор Лапласа, $A = -\Delta$.

Полугруппа операторов e^{-At} сильно непрерывна в $L^2(\Omega)$, она соответствует уравнению диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u|_{t=0} \in L^2(\Omega), \quad (3.1)$$

именно, $u(\cdot, t) = e^{-At} f$, $f = u|_{t=0}$.

Нашей целью будет доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения диффузии с начальным значением $u(x, 0) = f(x)$,

$$f \geq 0, \quad |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f dx = 1, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Тогда при $t \geq 1$

$$\|u(\cdot, t) - 1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \exp(-\lambda_0 t), \quad \lambda_0 > 0, \quad (3.2)$$

где постоянные C, λ_0 зависят только от Ω .

Из оценки (3.2), конечно, следует обсуждавшееся в §1 свойство 1.8. Отметим, что условие $f \in L^2(\Omega)$ можно ослабить; как будет видно из дальнейшего, решение уравнения диффузии можно определить для $f \in L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы начнем со следующего замечания. Оператор $-\Delta$ имеет нулевое собственное значение, соответствующая собственная функция – константа. Из неравенства Пуанкаре (2.6) (для $q = p = 2$) следует, что весь остальной спектр лежит правее некоторой точки $\lambda_0 > 0$. Следовательно, если

$$u(x, 0) \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} u(x, 0) dx = 0, \quad (3.3)$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx &\leq \exp(-\lambda_0 t) \int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 dx, \\ \int_{\Omega} u(x, t) dx &= 0 \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Основной шаг составляет следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. *Если выполнено условие (3.3), то*

$$\|u(\cdot, 1)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\Omega)}, \quad (3.5)$$

где постоянная c зависит только от Ω .

Теорема 3.1 получается очевидной комбинацией оценок (3.4), (3.5).

2) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Для получения оценки (3.5) будет достаточно неравенства Соболева–Пуанкаре

$$\left(\int_{\Omega} |u|^\beta dx \right)^{2/\beta} \leq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int_{\Omega} u dx = 0, \quad (3.6)$$

с некоторым показателем $\beta > 2$. (Мы видели в конце § 2, что такой показатель найдется в силу 2-связности области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.)

Далее, по неравенству Гёльдера

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^\beta(\Omega)}^{1-\lambda}, \quad 2 \leq p \leq \beta, \quad \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{\beta}.$$

Выбирая $p = 4(1 - 1/\beta)$, получим из (3.6)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{p-2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad u \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int_{\Omega} u dx = 0.$$

Отсюда для непрерывной по $t \in [t_1, t_2]$ функции $u(x, t)$ со значениями в $W^{1,2}(\Omega)$, $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u|^p dx dt \right)^{2/p} &\leq c_1^2 \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{2(p-2)/p} \cdot \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{2/p} \\ &\leq c_2 \left(\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Дальнейшие рассуждения опираются только на эту оценку, причем важно лишь то, что $p > 2$. Умножим уравнение (3.1) скалярно на

$$\eta^2(t)|u|^{2s-2}u, \quad s \geq 1,$$

$\eta(t)$ — гладкая функция на $[0, \infty)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(0) = 0$. Тогда получим

$$\int_{\Omega} \eta^2 \frac{\partial u}{\partial t} |u| dx = \frac{1}{2s} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta^2 |u|^{2s} dx - \frac{1}{s} \int_{\Omega} \eta \frac{d\eta}{dt} |u|^{2s} dx = -\eta^2 \frac{2s-1}{s^2} \int_{\Omega} |\nabla u^s|^2 dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta^2 |u|^{2s} dx + \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla u^s|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} \eta \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| |u|^{2s} dx, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} \eta^2 |u|^{2s} dx + \int_0^T \int_{\Omega} \eta^2 |\nabla u^s|^2 dx dt &\leq 2 \int_0^T \int_{\Omega} \eta \left| \frac{d\eta}{dt} \right| |u|^{2s} dx dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Фиксируя t_0 , рассмотрим интервалы

$$I_k = t_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

и функции

$$\eta_k \in C_0^\infty(I_{k-1}), \quad 0 \leq \eta_k \leq 1, \quad \eta_k = 1 \text{ на } I_k, \quad \left| \frac{d\eta_k}{dt} \right| \leq 2t_0^{-1} 2^k.$$

Считая $\eta = \eta_k$ в неравенстве (3.8) и используя оценку (3.7), получим

$$\left(\int_{I_k} \int_{\Omega} |u|^{ps} dx dt \right)^{2/p} \leq 2c_2 \int_{I_{k-1}} \int_{\Omega} \eta_k \left| \frac{d}{dt} \eta_k \right| |u|^{2s} dx dt.$$

Возьмем $q = p/2$, $s_k = q^{k-1}$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда $2s_k = ps_{k-1}$ и поэтому

$$\left(\int_{I_k} \int_{\Omega} |u|^{ps_k} dx dt \right)^{1/p} \leq \widehat{c}_0 t_0^{-1/2} 2^k \left(\int_{I_{k-1}} \int_{\Omega} |u|^{ps_{k-1}} dx dt \right)^{1/2}.$$

Обозначим левую часть этого неравенства через Φ_k ; тогда

$$\Phi_k \leq \widehat{c}_0 t_0^{-1/2} 2^k \Phi_{k-1}^q, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда по индукции

$$\Phi_k \leq (\widehat{c}_0 t_0^{-1/2})^{(q^k-1)/(q-1)} 2^{(q^k-(q-1)k-1)/(q^2-2q+1)} \Phi_0^{q^k},$$

и поэтому

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega \times [t_0/2, t_0])} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[q^k]{\Phi_k} \leq \widehat{c}_1 t_0^{-q/(2q-2)} \Phi_0^q.$$

Так как (см. оценку (3.4))

$$\Phi_0^q = \left(\int_0^{t_0} \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \leq t_0^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 dx \right)^{1/2},$$

то окончательно

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widehat{c}_1 t^{-1/(2q-2)} \|u(x, 0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда по двойственности

$$\|u(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{c}_1 t^{-1/(2q-2)} \|u(x, 0)\|_{L^1(\Omega)},$$

и поэтому

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c t^{-1/(q-1)} \|u(x, 0)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

§ 4. О коэрцитивности усредненного интегранта

Усредненный интегрант определяется по формуле

$$|\square \cap Q| \Phi(\xi) = \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square} \chi(x) |\xi + \nabla u|^p dx, \quad (4.1)$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция множества Q . Для коэрцитивности этого интегранта недостаточно p -связности множества Q на торе, а требуется p -связность в $\mathbb{R}^N$. Приведем соответствующее определение. Пусть $B_R = \{|x| < R\}$ – шар радиуса R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Открытое периодическое множество Q называется p -связным в $\mathbb{R}^N$, если из соотношений

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q \cap B_R} |u - u_\varepsilon|^p dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q \cap B_R} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = 0 \quad \forall R > 0,$$

в которых $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, следует, что $u(x) = \text{const}$ п.в. на Q .

Очевидно, что обычная связность Q в $\mathbb{R}^N$ влечет p -связность при любом $p \geq 1$. Кроме того, из p -связности в $\mathbb{R}^N$ следует p -связность на торе.

В работе [4] доказано, что обычная связность Q в $\mathbb{R}^N$ влечет коэрцитивность усредненного интегранта при любом $p \geq 1$.

ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС. *Следует ли из p -связности в $\mathbb{R}^N$ коэрцитивность соответствующего усредненного интегранта?*

Ниже дается частичный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть Q является p -связным в $\mathbb{R}^N$. Если дополнительно множество Q симметрично относительно координатных плоскостей, то усредненный интегрант коэрцитивен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал $\Phi(\xi)$ выпуклый и p -однородный. Поэтому достаточно проверить неравенства

$$\Phi(e^i) > 0,$$

где $e^1, \dots, e^N$ – естественный базис в $\mathbb{R}^N$. Предполагая $\Phi(e^1) = 0$, найдем

$$u^\delta \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square} \chi |e^1 + \nabla u^\delta|^p dx = 0, \quad \int_{\square} \chi u^\delta dx = 0.$$

К сожалению, к периодической задаче (4.1) не применимы соображения, связанные со срезкой и принципом максимума. Поэтому о поведении потенциалов u^δ ничего нельзя сказать без дополнительных условий.

Представим на минуту, что потенциалы u^δ ограничены в $L_{\text{per}}^p(\square)$. Тогда u^δ ограничены в $W_{\text{per}}^{1,p}(Q)$, и поэтому

$$u^\delta \rightarrow u \text{ слабо в } W_{\text{per}}^{1,p}(Q)$$

и $\nabla u|_Q = -e^1$. Для функции

$$z(x) = u(x) + x_1$$

мы имеем $\nabla z = 0$ в Q ; следовательно, $z = c = \text{const}$ в Q по определению p -связности в $\mathbb{R}^N$. Таким образом,

$$c = u(x) + x_1 \text{ в } Q, \quad u(x) \text{ периодична,} \quad u \in L^p_{\text{per}}(Q),$$

что невозможно.

Благодаря симметрии, вариационная задача (4.1) может быть заменена другой краевой задачей, к которой уже применим принцип максимума. Пусть для определенности $N = 2$, $\square = [-1/2, 1/2]^2$. Положим

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(u(x_1, x_2) - u(-x_1, x_2)), \quad u \in C^\infty_{\text{per}}(\square).$$

Тогда по симметрии

$$\int_{\square} \chi |e^1 + \nabla u|^p dx = 2 \int_{\square_+} \chi |e^1 + \nabla \bar{u}|^p dx,$$

где $\square_+ = \{x \in \square, x_1 > 0\}$ — правая половина квадрата. Поэтому

$$\Phi(e^1) = 2 \inf \left\{ \int_{\square_+} \chi |\nabla v|^p dx, v \in C^\infty(\bar{\square}_+), \right.$$

$$\left. v \text{ периодична по } x_2, v|_{x_1=0} = 0, v|_{x_1=1} = \frac{1}{2} \right\}.$$

Если v^δ — минимизирующая последовательность, то (с помощью приема срезки) убедимся, что $0 \leq v^\delta \leq 1/2$ на $\square_+$. Разность $u^\delta = v^\delta - x_1$ периодична по x_2 и равна нулю при $x_1 = 0$ и $x_1 = 1/2$. Продолжим ее нечетно на весь квадрат $\square$, а затем периодически (по x_1) на $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$u^\delta \in C^\infty_{\text{per}}(\square), \quad |u^\delta| \leq 1, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square} \chi |\nabla u^\delta + e^1|^p dx = 0,$$

и завершим доказательство так же, как и выше. Теорема доказана.

Рис. 5. Периодическое множество с канторовыми стенками

На рис. 5 представлено периодическое множество Q , полученное с помощью канторовых перегородок. Это множество симметрично, связно на квадрате периодичности и p -связно в $\mathbb{R}^2$ для $p > 2 - (\ln 2)/(\ln 3)$, в частности, оно 2-связно в $\mathbb{R}^2$. Поэтому соответствующая усредненная матрица положительно определенная.

§ 5. Евклидово пространство с мерой: соболевские пространства и эллиптические уравнения

1) Дана нормированная борелевская мера μ на торе периодичности $\square$. Определим соболевское пространство $W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu)$ следующим образом.

Пусть $V^p = V^p(\square, d\mu)$ есть подпространство пространства

$$\begin{aligned} & L^p(\square, d\mu) \times (L^p(\square, d\mu))^N, \\ & (u, z) \in V^p, \quad \text{если} \quad \exists u_\varepsilon \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} |u - u_\varepsilon|^p d\mu = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} |z - \nabla u_\varepsilon|^p d\mu = 0. \end{aligned}$$

Совокупность всех первых компонент u обозначим через $W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu)$ и будем называть соболевским пространством, т.е.

$$u \in W^{1,p}(\square, d\mu), \quad \text{если} \quad (u, z) \in V^p.$$

Вектор z будем обозначать ∇u и называть градиентом функции u . Функция u из соболевского пространства может иметь много градиентов. Обозначим $\Gamma_p(0)$ множество градиентов нуля,

$$z \in \Gamma_p(0), \quad \text{если} \quad (0, z) \in V^p.$$

Нетрудно увидеть, что $\Gamma_p(0)$ – замкнутое подпространство в $(L^p(\square, d\mu))^N$ и для множества $\Gamma_p(u)$ градиентов функции u верно равенство

$$\Gamma_p(u) = \nabla u + \Gamma_p(0), \tag{5.1}$$

где ∇u – некоторый градиент u .

Из определения $\Gamma_p(0)$ легко получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пространство $\Gamma_p(0)$ есть модуль над $C_{\text{per}}^\infty(\square)$, т.е.*

$$z \in \Gamma_p(0), \quad b \in C_{\text{per}}^\infty(\square) \Rightarrow bz \in \Gamma_p(0).$$

Отсюда и замкнутости $\Gamma_p(0)$ следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если $\Gamma_p(0)$ содержит все постоянные векторы, то*

$$\Gamma_p(0) = (L^p(\square, d\mu))^N \quad (\text{“полная несвязность”}). \tag{5.2}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Если выполнено (5.2), то

$$W^{1,p}(\square, d\mu) = (L^p(\square, d\mu))^N.$$

Это свойство мы докажем позже.

Рассмотрим некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть Q – открытое множество на торе,

$$d\mu = \frac{1}{|\square \cap Q|} \chi(x) dx, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } Q; \\ 0 & \text{вне } Q. \end{cases}$$

В этом случае $\Gamma(0) = \Gamma_p(0) = \{0\}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $N = 1$, μ_0 – естественная нормированная мера, сосредоточенная на канторовом множестве $K \subset [0, 1]$. Мера μ_0 определяется как слабый предел мер $\rho_n(x) dx$,

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|K_n|}, & \text{если } x \in K_n; \\ 0, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus K_n, \end{cases}$$

где K_n – предканторовы множества. Утверждается, что выполняется соотношение (5.2), т.е. $\Gamma(0) = L^p([0, 1], d\mu_0)$. Для доказательства (согласно предложению 5.2) достаточно проверить, что $1 \in \Gamma(0)$. С этой целью рассмотрим множество K_n . Оно состоит из 2^n непересекающихся отрезков длины 3^{-n} . Берем любую функцию $f_n(x) \in C_{\text{per}}^\infty(0, 1)$, которая равна $x - x_i$ на каждом из отрезков (x_i – центр отрезка). Тогда

$$|f_n| \leq 3^{-n}, \quad \frac{df_n}{dx} = 1 \quad \text{на } K_n. \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что $1 \in \Gamma(0)$.

Равенство (5.2) означает “полную несвязность”. Для канторова множества оно кажется совершенно естественным. Далее мы увидим, что равенство (5.2) выполняется и для ковra Серпинского.

ПРИМЕР 3 (канторова полоса). На квадрате $[0, 1]^2 = \square$ берем меру $d\mu = dx_1 \times d\mu_0$; она сосредоточена на полосе $[0, 1] \times K$. Нетрудно проверить, что $\Gamma(0) = \{0\} \times L^p(\square, d\mu)$.

ПРИМЕР 4 (канторов каркас). На квадрате $[0, 1]^2$ берем меру

$$d\mu = \frac{d\mu_0(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times d\mu_0(x_2)}{2},$$

где μ_0 – мера из примера 2. Эта мера сосредоточена на каркасе

$$K \times [0, 1] \cup [0, 1] \times K.$$

Символически каркас изображен на рисунке 6. По определению меры

$$2 \int_{\square} g d\mu = \int_0^1 \int_K g d\mu_0 dx_2 + \int_K \int_0^1 g dx_1 d\mu_0. \quad (5.4)$$

Рис. 6. Канторов каркас или сетка

Докажем, что $\Gamma(0) \neq \{0\}$. Возьмем $\varphi(t) \in C_0^\infty(I)$, где I – какой-нибудь из интервалов $[0, 1] \setminus K$, и проверим, что

$$\{\varphi(x_2), 0\} \in \Gamma(0). \quad (5.5)$$

Для этого положим $u_n(x) = f_n(x_1)\varphi(x_2)$, где f_n из примера 2. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f'_n(x_1)\varphi(x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = f_n(x_1)\varphi'(x_2),$$

то из (5.3) получим, что

$$|u_n(x)| \leq C3^{-n}, \quad \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_1} = \varphi(x_2), \quad \left| \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_2} \right| \leq C3^{-n}$$

для любой точки x из каркаса. Тем самым соотношение (5.5) доказано. Поскольку $\varphi(x_2) \neq 0$ μ -п.в., то $\Gamma(0) \neq \{0\}$.

Следующий пример важен для теории вырождающихся эллиптических уравнений.

ПРИМЕР 5. Пусть мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на торе,

$$d\mu = a(x)dx, \quad 0 \leq a \in L^1_{\text{per}}(\square, dx). \quad (5.6)$$

Проверим, что условие

$$\int_{\square} a^{-1/(p-1)} dx < \infty, \quad p > 1, \quad (5.7)$$

влечет свойство $\Gamma_p(0) = \{0\}$. Действительно, пусть $z \in \Gamma_p(0)$, т.е.

$$\exists u_\varepsilon \in C^\infty_{\text{per}}(\square), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} a|u_\varepsilon|^p dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} a|z - \nabla u_\varepsilon|^p dx = 0. \quad (5.8)$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\square} |z - \nabla u_{\varepsilon}| dx &\leq \left(\int_{\square} a |z - \nabla u_{\varepsilon}|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\square} a^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \rightarrow 0, \\ \int_{\square} |u_{\varepsilon}| dx &\leq \left(\int_{\square} a |u_{\varepsilon}|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\square} a^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $z = 0$.

Прежде чем перейти к очередному примеру, сделаем одно общее замечание: для абсолютно непрерывных мер (5.6) в определении соболевского пространства $W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu)$ вместо $C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$ можно брать более широкое множество $W_{\text{per}}^{1,\infty}(\square, dx)$.

ПРИМЕР 6 (абсолютно непрерывная мера со свойством полной несвязности). Пусть $N = 1, p > 1$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq a(x) \leq 1, \quad a(x) > 0 \text{ п.в. на } [0, 1], \\ \int_I a^{-1/(p-1)} dx &= \infty \text{ для любого отрезка } I \subset [0, 1] \end{aligned} \quad (5.9)$$

(пример такой функции дан в [11, с. 136]). Положим

$$b_k(x) = \min\{a^{-1/(p-1)}(x), k\}, \quad k > 0.$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных отрезков

$$I_j = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right], \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

и построим некоторую последовательность

$$u_n(x) \in W^{1,\infty}([0, 1]), \quad u_n(0) = u_n(1) = 0.$$

Определим $u_n(x)$ на каждом отрезке I_j равенством

$$u_n(x) = x - \frac{j}{n} - \frac{1}{n\lambda_j} \int_{j/n}^x b_k(y) dy, \quad \lambda_j = \int_{I_j} b_k dx.$$

По построению

$$|u_n(x)| \leq \frac{2}{n} \text{ на } [0, 1].$$

Далее, так как $ab_k^{p-1} \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_{I_j} a \left| \frac{du_n}{dx} - 1 \right|^p dx &= \frac{1}{n^p \lambda_j^p} \int_{I_j} ab^p dx \leq \frac{1}{n^p \lambda_j^p} \int_{I_j} b_k dx = \frac{1}{n^p} \left(\int_{I_j} b_k dx \right)^{-1/(p-1)}, \\ \int_0^1 a \left| \frac{du_n}{dx} - 1 \right|^p dx &< \frac{1}{n^p} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_{I_j} b_k dx \right)^{-1/(p-1)} \leq \frac{1}{n^p}, \end{aligned}$$

если только (при фиксированном n) величину k взять достаточно большой. Действительно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_j} b_k dx = \int_{I_j} a^{-1/(p-1)} dx = \infty$$

в силу условия (5.9). Тем самым доказано, что $1 \in \Gamma_p(0)$. Отсюда следует равенство $\Gamma_p(0) = L^p([0, 1], d\mu)$. Тем самым свойство полной несвязности установлено.

Случай $p = 1$ требует отдельного рассмотрения. Пусть плотность $a(x)$ такова, что

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in I} a(x) = 0 \quad \text{для любого отрезка } I \subset [0, 1] \quad (5.10)$$

(вопрос о построении такой функции рассмотрим позже). Проверим, что $1 \in \Gamma_1(0)$.

Снова разбиваем отрезок $[0, 1]$ на n равных отрезков I_j . Множество

$$K = \left\{ x \in [0, 1], a(x) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

обладает тем свойством, что $|K \cap I_j| > 0$ для любого $j = 0, 1, \dots, n-1$. Это следует из (5.10). Определим функцию $u_n(x) \in W^{1,\infty}([0, 1])$, $u_n(0) = u_n(1) = 0$, равенством

$$u_n(x) = x - \frac{j}{n} - \frac{1}{n\lambda_j} \int_{j/n}^x \chi(y) dy \quad \text{на } I_j,$$

$$\lambda_j = |K \cap I_j|, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } K; \\ 0 & \text{на } [0, 1] \setminus K. \end{cases}$$

По построению

$$|u_n(x)| \leq \frac{2}{n} \quad \text{на } [0, 1],$$

$$\int_{I_j} a \left| \frac{du_n}{dx} - 1 \right| dx = \frac{1}{n\lambda_j} \int_{I_j} a\chi dx \leq \frac{1}{n^2\lambda_j} \int_{I_j} \chi dx = \frac{1}{n^2},$$

$$\int_0^1 a \left| \frac{du_n}{dx} - 1 \right| dx \leq \frac{1}{n}.$$

Тем самым свойство полной несвязности установлено.

Укажем, как обеспечить свойство (5.10). Рассмотрим последовательность G_n открытых множеств таких, что

$$G_0 = (0, 1), \quad G_{n+1} \subset G_n, \quad G_n \text{ плотно в } [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |G_n| = 0,$$

и определим $a(x)$ равенством

$$a(x) = \alpha_n \quad \text{на } G_n \setminus G_{n+1},$$

где $\alpha_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Тогда свойство (5.10) обеспечено. При этом (путем выбора чисел α_n) можно добиться сходимости интеграла (5.7) при любом $p > 1$. Тем самым получен пример, когда

$$\Gamma_p(0) = \begin{cases} L^1([0, 1], d\mu) & \text{при } p = 1; \\ \{0\} & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

2) *Неединственность градиента не является препятствием для рассмотрения эллиптических уравнений.*

Пусть $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ – периодическая μ -измеримая симметрическая матрица,

$$\gamma_0^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma_0|\xi|^2, \quad \gamma_0 > 0. \quad (5.11)$$

Мы хотим рассмотреть уравнение

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + u = f \quad \text{в } W_{\text{per}}^{1,2}(\square, d\mu), \quad (5.12)$$

где f – заданный элемент из $L^2(\square, d\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Функция $u \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square, d\mu)$ есть *решение задачи* (5.12), если выполнено интегральное тождество

$$\int_{\square} (A\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) d\mu = \int_{\square} f\varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad (5.13)$$

в котором ∇u – *некоторый* градиент u .

Существование и единственность решения как пары $\{u, \nabla u\} \in V^2$ легко следует из леммы Лакса–Мильграма. Таким образом, единственность двойная: одна функция из соболевского пространства и лишь один из ее градиентов удовлетворяют тождеству (5.13). Предельным переходом это тождество распространяется на $\varphi \in W_{\text{per}}^{1,2}$. Считая $\varphi = 0$, получим свойство ортогональности

$$A\nabla u \perp \Gamma_2(0) \quad \text{в } (L^2(\square, d\mu))^N. \quad (5.14)$$

Очевидно, что этим условием градиент функции u определяется однозначно, так как разность двух градиентов принадлежит $\Gamma_2(0)$ в силу (5.1). В частности, рассмотрим случай “полной несвязности” (5.2), $p = 2$. Тогда из (5.14) следует, что $\nabla u = 0$, а из тождества (5.13), что $u = f$, т.е. $W_{\text{per}}^{1,2} = (L_{\text{per}}^2)^N$. Тем самым доказано предложение 5.3 для $p = 2$. Случай $p > 1$ может быть исследован с помощью соответствующего нелинейного уравнения. На этом мы сейчас останавливаться не будем.

До сих пор мы рассматривали периодическую ситуацию. Сейчас коротко рассмотрим задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^N$.

Меру μ , первоначально заданную на торе периодичности, продолжим периодически на $\mathbb{R}^N$, сохранив за продолжением обозначение μ . Периодическое продолжение возможно всегда, но для простоты считаем, что для исходной меры μ выполнено условие $\mu(\partial\square) = 0$. Тогда периодическое продолжение очевидно.

Пространство $V^p(\mathbb{R}^N, d\mu)$ и соболевское пространство $W^{1,p}(\mathbb{R}^N, d\mu)$ определяются аналогично периодическому случаю – вместо $C_{\text{per}}^{\infty}(\square)$ нужно взять $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

3) Предыдущие результаты позволяют с каждой периодической мерой μ связать естественный объект – оператор Лапласа Δ_{μ} . Это будет самосопряженный в $L^2(\square, d\mu)$ или $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$. Для построения оператора Лапласа рассмотрим уравнение (5.12), в котором $A = E$ – единичная матрица. Уравнение имеет единственное решение для любого $f \in L^2(\square, d\mu)$. Совокупность всех решений, когда f пробегает $L^2(\square, d\mu)$, обозначим $D(\Delta_{\mu})$. Это – область определения оператора Δ_{μ} ,

$$\Delta_{\mu}u = u - f \quad \forall u \in D(\Delta_{\mu}).$$

Разумеется, в случае “полной несвязности” оператор Лапласа – нулевой.

ПРИМЕР 7 (оператор Лапласа на квадратной сетке). Рассмотрим на плоскости обычную квадратную сетку с естественной линейной мерой μ . Будем различать узлы сетки и соединяющие их звенья – вертикальные и горизонтальные отрезки с длиной 1.

Опишем оператор Лапласа в $L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)$. Функция $u(x)$, заданная на сетке, $u \in L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)$, принадлежит $D(\Delta_\mu)$, если

- 1) $u(x)$ непрерывна на сетке (в том числе и в узлах);
- 2) на горизонтальных и вертикальных звеньях она имеет первую и вторую производные, суммируемые с квадратом (так что первая производная непрерывна на каждом звене);
- 3) производные $\frac{du}{dx_1}$ (на горизонтальных звеньях) и $\frac{du}{dx_2}$ (на вертикальных) могут иметь разрывы в узлах, но скачок $\frac{du}{dx_1} + \text{скачок } \frac{du}{dx_2} = 0$ в каждом узле.

При этом

$$\Delta_\mu u = \begin{cases} \frac{d^2 u}{dx_1^2} & \text{на горизонтальных звеньях;} \\ \frac{d^2 u}{dx_2^2} & \text{на вертикальных звеньях.} \end{cases}$$

§ 6. Обобщенная p -связность и обобщенная теорема усреднения

1) Дадим следующее определение p -связности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Для меры μ выполнено *условие p -связности* (на торе), если

$$u \in W_{\text{per}}^{1,p}(\square, d\mu), \quad 0 \in \Gamma_p(u) \Rightarrow u \equiv \text{const } \mu\text{-п.в.}$$

Условие связности меры μ в $\mathbb{R}^N$ определяется аналогично (см. определение 4.1).

В качестве примера рассмотрим канторов каркас. Установим неравенство Пуанкаре

$$\frac{1}{2} \int_{\square} f^2 d\mu \leq \left(\int_{\square} f d\mu \right)^2 + \int_{\square} |\nabla f|^2 d\mu \quad \forall f \in C^\infty(\overline{\square}), \quad (6.1)$$

из которого следует 2-связность на торе, а также аналогичное неравенство для квадрата $n\square$, где n – целое, из которого ясна 2-связность в $\mathbb{R}^2$.

Доказывается (6.1) обычными рассуждениями. Берем точки

$$x \in K \times [0, 1], \quad x' \in [0, 1] \times K$$

и интегрируем по ломаной, соединяющей точки x и x' , получим (см. рис. 6)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &\leq \int_T |\nabla f| dx_1 + \int_{T'} |\nabla f| dx'_2, \\ (f(x))^2 - 2f(x)f(x') + (f(x'))^2 &\leq 2 \int_T |\nabla f|^2 dx_1 + 2 \int_{T'} |\nabla f|^2 dx_2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где T – горизонтальное сечение, проходящее через точку x , T' – вертикальное сечение, проходящее через x' . Последнее неравенство интегрируем по $x \in I \times K$, а затем по $x' \in K \times I$. В результате

$$\begin{aligned} & \int_{I \times K} f^2 dx_1 d\mu_0 + \int_{K \times I} f^2 d\mu_0 dx_2 \\ & \leq 2 \int_{I \times K} f dx_1 d\mu_0 \cdot \int_{K \times I} f d\mu_0 dx_2 \\ & + 2 \left(\int_{K \times I} |\nabla f|^2 d\mu_0 dx_2 + \int_{I \times K} |\nabla f|^2 dx_1 d\mu_0 \right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенства $2ab \leq (a+b)^2$ и определения меры (см. (5.4)), получаем искомое неравенство (6.1).

В действительности имеет место более сильный результат, доказанный совместно с О. О. Барабановым.

ЛЕММА 6.2. *Канторов каркас 1-связен на торе и в $\mathbb{R}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества

$$A_1 = I_1 \times K_1, \quad A_2 = K_2 \times I_2, \quad (6.3)$$

где K_1, K_2 – μ_0 -измеримые подмножества K , I_1, I_2 – измеримые по Лебегу подмножества $I = [0, 1]$.

Интегрируя (6.2) сначала по $x \in A_1$, затем по $x' \in A_2$, получим

$$\mu(A_2) \int_{A_1} f d\mu - \mu(A_1) \int_{A_2} f d\mu \leq 2 \int_{\square} |\nabla f| d\mu$$

или по симметрии

$$\left| \frac{1}{\mu(A_1)} \int_{A_1} f d\mu - \frac{1}{\mu(A_2)} \int_{A_2} f d\mu \right| \leq \frac{2}{\mu(A_1)\mu(A_2)} \int_{\square} |\nabla f| d\mu.$$

Пусть теперь

$$f_\varepsilon \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad \int_{\square} |\nabla f_\varepsilon| d\mu \rightarrow 0, \quad \int_{\square} |f - f_\varepsilon| d\mu \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(A_1)} \int_{A_1} f d\mu &= \frac{1}{\mu(A_2)} \int_{A_2} f d\mu, \\ \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu &= c = \text{const}, \end{aligned}$$

где A – любое из множеств A_1, A_2 вида (6.3). Отсюда следует, что $f = C$ μ -п.в. Этим доказана 1-связность на торе; случай $\mathbb{R}^2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Сформулируем теперь теорему усреднения.

Для этого определим в $\mathbb{R}^N$ меру μ_ε равенством

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B) \quad (6.4)$$

для любого борелевского $B \subset \mathbb{R}^N$. По построению мера μ_ε имеет период ε . В случае меры $\chi(x)dx$ мы имеем меру $\chi(\varepsilon^{-1}x)dx$, участвующую в обычной задаче усреднения.

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = f \quad \text{в } W^{1,2}(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon), \quad (6.5)$$

в котором $A(x)$ — периодическая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию (5.6).

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть мера μ является 2-связной на торе и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} (u^\varepsilon - u^0)^2 d\mu_\varepsilon = 0, \quad (6.6)$$

где u^0 — решение усредненной задачи

$$-\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) + u^0 = f \quad \text{в } W^{1,2}(\mathbb{R}^N, dx), \quad (6.7)$$

A^0 — постоянная симметрическая неотрицательно определенная матрица.

Отметим, что для канторова каркаса и, вообще, для симметрической меры с условием связности в $\mathbb{R}^N$, матрица A^0 будет положительно определенной.

Доказательство теоремы 6.3 будет дано в §8. Отметим, что p -связность меры обеспечивает и усреднение нелинейных эллиптических уравнений, как вариационных, так и невариационных. Однако нелинейное усреднение более сложно и в настоящей работе не излагается.

2) Приведем другие примеры p -связных мер.

Рассмотрим абсолютно непрерывную меру (5.6) и предположим, что множество $Q = \{x \in \mathbb{R}^N, a(x) > 0\}$ открыто (с точностью до множества нулевой лебеговой меры). Например, если $a(x) > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^N$, то $Q = \mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 6.4. Предположим, что множество Q является α -связным на торе для некоторого $\alpha \geq 1$. Пусть для некоторого $p \geq \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\square \cap Q} a^{-\alpha/(p-\alpha)} dx &< \infty, & \text{если } p > \alpha, \\ a^{-1} &\in L^\infty(\square \cap Q), & \text{если } p = \alpha. \end{aligned}$$

Тогда мера $a dx$ является p -связной на торе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\exists u_\varepsilon \in C_{\text{per}}^\infty(\square), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} a|u - u_\varepsilon|^p dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square} a|\nabla u_\varepsilon|^p dx = 0. \quad (6.8)$$

Требуется проверить, что $u = \text{const}$ в $L^p(\square, d\mu)$. Можно считать, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ п.в. на Q . Тогда для срезки

$$u_\varepsilon^k = \begin{cases} u_\varepsilon, & \text{если } |u_\varepsilon| \leq k; \\ \pm k, & \text{если } |u_\varepsilon| > k, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\square \cap Q} |u^k - u_\varepsilon^k| dx &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\square} a|u - u^k|^p dx &= 0, \quad a|\nabla u_\varepsilon^k| \leq a|\nabla u_\varepsilon|, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где u^k — срезка для u . Поэтому

$$\int_{\square \cap Q} |\nabla u_\varepsilon^k|^\alpha dx \leq \left(\int_{\square} a|\nabla u_\varepsilon|^p dx \right)^{\alpha/p} \left(\int_{\square \cap Q} a^{-\alpha/(p-\alpha)} dx \right)^{(p-\alpha)/p} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном k . Отсюда и (6.9) ясно $u^k = \text{const}$ в Q (так как область Q по условию α -связна). Но тогда и $u = \text{const}$ в $L^p(\square, d\mu)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнено условие (5.8), то мера adx является p -связной.

Действительно, в этом случае $Q = \mathbb{R}^N$ и можно взять $\alpha = 1$.

Мы видим, что условие (5.8) обеспечивает как p -связность, так и свойство $\Gamma_p(0) = \{0\}$.

ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС. Существует ли абсолютно непрерывная мера со свойством p -связности, но для которой $\Gamma_p(0) \neq \{0\}$?

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Q связано в обычном смысле и

$$\int_{\square \cap Q} a^{-1/(p-1)} dx < \infty. \quad (6.10)$$

Тогда мера adx является p -связной.

Наконец, отметим один простой случай, когда интегральные условия типа (6.10) не требуются.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть множество $Q^\delta = \{x \in \mathbb{R}^N, a(x) > \delta\}$ открыто и p -связно при любом достаточно малом $\delta > 0$. Тогда мера adx является p -связной. Кроме того, $\Gamma_p(0) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (6.8) следует, что $u = \text{const}$ в Q^δ . Поэтому $u = \text{const}$ в $L^p(\square, d\mu)$. Далее, из (5.8) следует, что $z = 0$ в Q^δ , так как Q^δ открыто. Поэтому $\Gamma_p(0) = \{0\}$. Теорема доказана.

§ 7. Замечания о ковре Серпинского

1) Напомним конструкцию ковра Серпинского. Обозначим $F_0 = [0, 1]^2$ единичный квадрат; разобьем его на девять одинаковых квадратов и выбросим центральный открытый квадрат. F_1 – оставшиеся восемь квадратов. Затем повторяем эту операцию с квадратами из F_1 . На n -шаге получаем множество F_n , составленное из 8^n квадратов со стороной 3^{-n} , $F_{n+1} \subset F_n$, $|F_n| = (8/9)^n$. Ковр Серпинского есть пересечение предковров F_n , $F = \bigcap F_n$ (см. рис. 7). На F имеется мера μ , определяемая как слабый предел мер

$$d\mu_n = \rho_n(x) dx, \quad \rho_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|F_n|} = (9/8)^n & \text{на } F_n; \\ 0 & \text{на } [0, 1]^2 \setminus F_n. \end{cases}$$

Рис. 7. Ковр Серпинского

Полезно сравнить ковер Серпинского и канторов каркас, который, как мы видели, p -связен. Вполне очевидно, что *канторов каркас есть подмножество ковра Серпинского*. Однако соответствующие меры существенно разные. Важнейшим свойством меры на ковре (которым не обладает мера на каркасе) является ее самоподобие. Ковр F можно разбить на 8 частей, которые получаются из F сжатием в 3 раза и сдвигом. В левом нижнем углу находится $\frac{1}{3}F$, остальные получаются из $\frac{1}{3}F$ сдвигом. По построению

$$\mu\left(\frac{1}{3}F\right) = \frac{1}{8}\mu(F) = \frac{1}{8}.$$

Вообще, для любого μ -измеримого множества $A \subset [0, 1]^2 = \square$

$$\mu\left(\frac{1}{3}A\right) = \frac{1}{8}\mu(A) \quad (\text{“свойство самоподобия”}). \quad (7.1)$$

Эффективная проводимость предковра и ковра определяется равенствами

$$\begin{aligned} J_n &= \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square} |e^1 + \nabla u|^2 d\mu_n, \quad e^1 = (1, 0), \\ J &= \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square} |e^1 + \nabla u|^2 d\mu, \end{aligned} \quad (7.2)$$

при этом, очевидно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_n \leq J. \quad (7.3)$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Для ковра Серпинского имеет место свойство “полной не-связности” (5.2) при любом $p \geq 1$.*

Доказательство дадим ниже, а сейчас выведем из этой теоремы некоторые следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Эффективная проводимость ковра Серпинского равна нулю, т.е. $J = 0$.*

Действительно, согласно (7.2)

$$J \leq \inf_{z \in \Gamma_2(0)} \int_{\square} |e^1 + z|^2 d\mu = 0,$$

так как $\Gamma_2(0) = (L^2(\square, d\mu))^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Ковер Серпинского не является p -связным на торе при любом $p \geq 1$.*

Действительно, согласно (5.1), (5.2) имеем $\Gamma(u) = (L^2(\square, d\mu))^2$, т.е. всякая функция из соболевского пространства имеет нулевой градиент.

Далее, Барлоу и Басс [9] установили замечательный результат: для некоторой константы $\rho > 0$

$$4^{-1}\rho^n \leq J_n \leq 4\rho^n.$$

С. М. Козлов [10] доказал, что в этом неравенстве вместо 4 можно взять $3/2$.

Из (7.3) и $J = 0$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 3. *Константа ρ строго меньше 1.*

Тем самым доказана гипотеза, выдвинутая в [9] на основе численных экспериментов.

2) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Мету μ и функцию $f \in L^p(\square, d\mu)$ считаем периодически продолженными на $\mathbb{R}^2$. Положим

$$(Tf)x = f(3x).$$

Из свойства самоподобия (7.1) следует, что

$$\int_{\square} |f(3x)|^p d\mu = \int_{\square} |f(x)|^p d\mu.$$

Иначе говоря, оператор T сохраняет норму в $L^p(\square, d\mu)$. Проверим, что инвариантной функцией является только константа. Действительно, пусть $f(3x) = f(x)$ в $L^p(\square, d\mu)$. Ковер F можно представить в виде объединения 8^m частей, полученных из $\frac{1}{3^m}F$ сдвигом, $y + \frac{1}{3^m}F$. На каждой такой части имеем:

$$\int_{y + \frac{1}{3^m}F} f(x) d\mu = \int_{y + \frac{1}{3^m}F} f(3^m x) d\mu = \frac{1}{8^m} \int_{\square} f d\mu = \frac{1}{\mu(y + \frac{1}{3^m}F)} \int_F f d\mu$$

или

$$\frac{1}{\mu(y + \frac{1}{3^m} F)} \int_{y + \frac{1}{3^m} F} f(x) d\mu = \text{const} = \int_{\square} f d\mu.$$

Отсюда, конечно, следует, что $f(x) \equiv \text{const}$ μ -п.в. Тогда по эргодической теореме

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m T^k f \xrightarrow{L^p(\square, d\mu)} c = \int_{\square} f d\mu, \quad p > 1.$$

Теперь займемся собственно теоремой. Достаточно рассмотреть случай $p > 1$ и доказать, что $\Gamma_p(0)$ содержит все постоянные векторы. Легко проверить, что

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \exists \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square), \quad \int_{\square} \nabla \varphi d\mu = \xi$$

(для этого надо рассмотреть ряд Фурье меры μ и воспользоваться симметричностью этой меры). Положим $\varphi_k(x) = 3^{-k} \varphi(3^k x)$. Тогда

$$\nabla \varphi_k = T^k \nabla \varphi, \quad \varphi_k \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square),$$

и для

$$u_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \varphi_k$$

имеем при $m \rightarrow \infty$

$$\|u_m\|_{L^p(\square, d\mu)} \rightarrow 0, \quad \|\nabla u_m - \xi\|_{L^p(\square, d\mu)} \rightarrow 0,$$

что требовалось.

§ 8. Доказательство обобщенной теоремы усреднения

Здесь мы докажем теорему 6.3. Доказательство будет разбито на ряд шагов.

1) Прежде всего рассмотрим свойства меры μ_{ε} , определенной равенством (6.4). Она имеет период ε и

$$\int_{\varepsilon \square} d\mu_{\varepsilon} = \varepsilon^N \int_{\square} d\mu = \varepsilon^N. \quad (8.1)$$

Отсюда следует, что мера μ_{ε} слабо сходится к мере Лебега,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N). \quad (8.2)$$

Далее, функции из пространства $L_{\text{per}}^p(\square, d\mu)$ будем считать периодически продолженными на $\mathbb{R}^N$. Для $b \in L_{\text{per}}^1(\square)$ положим

$$\langle b \rangle = \int_{\square} b(x) d\mu.$$

Тогда имеем следующие свойства среднего значения:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} b(\varepsilon^{-1}x) \varphi(x) d\mu_\varepsilon = \langle b \rangle \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad (8.3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon = |B| \langle b \rangle \quad (8.4)$$

для любого шара $B \subset \mathbb{R}^N$. Эти свойства легко получить из (8.1).

2) Пусть u^ε – решение уравнения (6.5). По определению это означает, что $u^\varepsilon \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$ и выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + u^\varepsilon \varphi) d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi d\mu_\varepsilon \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (8.5)$$

В этом тождестве в качестве φ можно брать и любую функцию из $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$. Считая $\varphi = u^\varepsilon$, имеем оценку

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + |u^\varepsilon|^2) d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} f u^\varepsilon d\mu_\varepsilon \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \right)^{1/2}.$$

Отсюда с учетом условия (5.6) на матрицу $A(x)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq c, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |p^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq c, \quad (8.6)$$

где мы положили

$$p^\varepsilon(x) = A(\varepsilon^{-1}x) \nabla u^\varepsilon(x). \quad (8.7)$$

Без ограничения общности можно считать, что меры

$$u^\varepsilon d\mu_\varepsilon, \quad p^\varepsilon d\mu_\varepsilon$$

слабо сходятся к некоторым мерам Радона U, P ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dU \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

и аналогично для $p^\varepsilon d\mu_\varepsilon$. Эти меры абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Действительно,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^\varepsilon d\mu_\varepsilon \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 d\mu_\varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^N} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 d\mu_\varepsilon$$

и поэтому

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dU \right|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 dx$$

в силу (8.2). Отсюда $dU = u^0 dx$, $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^N, dx)$. Аналогично, $dP = p^0 dx$, $p_i^0 \in L^2(\mathbb{R}^N, dx)$. Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^\varepsilon d\mu_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^0 dx, \quad u^0 \in L^2(\mathbb{R}^N, dx), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi p^\varepsilon d\mu_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi p^0 dx, \quad p^0 \in (L^2(\mathbb{R}^N, dx))^N. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Это позволяет перейти к пределу в тождестве (8.5):

$$\int_{\mathbb{R}^N} (p^0 \cdot \nabla \varphi + u^0 \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (8.9)$$

3) Определим усредненную матрицу A^0 равенством

$$\begin{aligned} \xi A^0 \xi &= \inf_{u \in C_{\text{per}}^\infty(\square)} \int_{\square} A(x) (\xi + \nabla u(x)) \cdot (\xi + \nabla u(x)) d\mu(x) \\ &= \min_{v \in X} \int_{\square} A(x) (\xi + v(x)) \cdot (\xi + v(x)) d\mu(x) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

где X есть замыкание множества $\{\nabla h, h \in C_{\text{per}}^\infty(\square)\}$ в $(L^2(\square, d\mu))^N$. Соответствующее уравнение Эйлера дает вспомогательную периодическую задачу:

$$v \in X, \quad \int_{\square} A(x) (\xi + v(x)) \cdot \nabla h(x) d\mu(x) = 0 \quad \forall h \in C_{\text{per}}^\infty(\square),$$

при этом

$$A^0 \xi = \int_{\square} A(x) (\xi + v(x)) d\mu(x) = \langle q \rangle, \quad q(x) = A(x) (\xi + v(x)).$$

Для вектора $q(x)$, очевидно, имеем обобщенную соленоидальность:

$$\int_{\square} q(x) \cdot \nabla h(x) d\mu(x) = 0 \quad \forall h \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

По определению пространства X найдутся $v^\delta = \nabla w^\delta$, $w^\delta \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square} |v - v^\delta|^2 d\mu = 0. \quad (8.10)$$

В частности (см. (8.4)),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |v(\varepsilon^{-1}x) - v^\delta(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon = 0. \quad (8.11)$$

4) Положим $q_\varepsilon(x) = q(\varepsilon^{-1}x)$. Тогда мы имеем очевидное тождество

$$(\xi + v(\varepsilon^{-1}x)) \cdot p^\varepsilon(x) = q^\varepsilon(x) \cdot \nabla u^\varepsilon(x).$$

Найдем предел величины

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\xi + v(\varepsilon^{-1}x)) \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi q_\varepsilon(x) \cdot \nabla u^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

двумя способами.

Первый способ осуществляется без особого труда. Имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \xi \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) v^\delta(\varepsilon^{-1}x) \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) (v(\varepsilon^{-1}x) - v^\delta(\varepsilon^{-1}x)) \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2 + J_\varepsilon^3. \end{aligned}$$

Согласно (8.8)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^1 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \xi \cdot p^0(x) dx.$$

Далее, из (8.10) и тождества (8.5) имеем

$$\begin{aligned} v^\delta(\varepsilon^{-1}x) &= \nabla w_\varepsilon^\delta(x), \quad w_\varepsilon^\delta(x) = \varepsilon w^\delta(\varepsilon^{-1}x), \\ J_\varepsilon^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \nabla w_\varepsilon^\delta \cdot p^\varepsilon d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\varphi w_\varepsilon^\delta) \cdot p^\varepsilon d\mu_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon^\delta \nabla \varphi \cdot p^\varepsilon d\mu_\varepsilon \\ &= -\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) w^\delta(\varepsilon^{-1}x) (u^\varepsilon(x) + f(x)) d\mu_\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^N} w^\delta(\varepsilon^{-1}x) \nabla \varphi(x) \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) (v(\varepsilon^{-1}x) - v^\delta(\varepsilon^{-1}x)) \cdot p^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon \right|^2 \\ &\leq \sup |\varphi|^2 \int_B |v(\varepsilon^{-1}x) - v^\delta(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^N} |p^\varepsilon(x)|^2 d\mu_\varepsilon \\ &\leq c \int_B |v(\varepsilon^{-1}x) - v^\delta(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu, \end{aligned}$$

где B — шар, содержащий носитель функции φ . Поэтому (см. (8.11))

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^3 = 0.$$

Тем самым доказано равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \xi \cdot p^0(x) dx. \quad (8.12)$$

5) Найдем предел величины

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) q_\varepsilon(x) \cdot \nabla u^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon$$

другим способом. Мы можем считать, что $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, как это следует из определения пространства $W^{1,2}(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$. В силу обобщенной соленоидальности вектора $q_\varepsilon(x)$ можем записать:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= - \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon \nabla \varphi \cdot q_\varepsilon d\mu_\varepsilon \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \langle q \rangle d\mu_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon \nabla \varphi \cdot (q_\varepsilon - \langle q \rangle) d\mu = J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Согласно (8.8)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^1 = - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \nabla \varphi \cdot \langle q \rangle dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \nabla \varphi \cdot A^0 \xi dx$$

и остается проверить, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 = 0$.

Воспользуемся следующим важным результатом.

ЛЕММА 8.2 (лемма об аппроксимации). *Пусть дана функция $b \in L_{\text{per}}^2(\square, d\mu)$, $\langle b \rangle = 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся*

$$b_0, b_1, \dots, b_N \in L_{\text{per}}^2(\square, d\mu), \quad \|b_0\|_{L^2(\square, d\mu)} \leq \delta,$$

такие, что справедливо тождество

$$\int_{\square} b \varphi d\mu = \int_{\square} b_0 \varphi d\mu + \int_{\square} b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square). \quad (8.13)$$

Доказательство будет дано ниже. Непосредственным следствием этой леммы является такое утверждение.

ЛЕММА 8.3. *Пусть $b(x)$ — функция из леммы 8.2. Если B — шар,*

$$w^\varepsilon \in C_0^\infty(B), \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B (|w^\varepsilon|^2 + |\nabla w^\varepsilon|^2) d\mu_\varepsilon < \infty, \quad (8.14)$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B b(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = 0. \quad (8.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (8.13) легко следует аналогичное тождество в $\mathbb{R}^N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x) \varphi(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} b_0(x) \varphi(x) d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Отсюда

$$\int_B b(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon = \int_B b_0(\varepsilon^{-1}x) w^\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon + \varepsilon \int_B b_i(\varepsilon^{-1}x) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} d\mu_\varepsilon.$$

Принимая во внимание (8.14) и соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B |b_i(\varepsilon^{-1}x)|^2 d\mu_\varepsilon = |B| \int_\square |b_i|^2 d\mu, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\int_\square |b_0(x)|^2 d\mu \leq \delta^2,$$

по неравенству Коши–Буняковского, получим (8.15). Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^\varepsilon (q^\varepsilon - \langle q \rangle) d\mu_\varepsilon = 0.$$

Тем самым доказано равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^0 \nabla \varphi \cdot \langle q \rangle dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi u^0 \nabla \varphi \cdot A^0 \xi dx.$$

С учетом (8.12) имеем тождество

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \xi \cdot p^0(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) u^0(x) \nabla \varphi(x) \cdot A^0 \xi dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

или

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) p^0(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) u^0(x) A^0 \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

из которого следует ключевое равенство $p^0(x) = A^0 \nabla u^0$. Тогда из тождества (8.9) видим, что u^0 есть решение усредненной задачи.

В действительности, итог предыдущих рассуждений можно представить в более общей форме, когда правая часть уравнения (6.5) зависит от ε . Сформулируем этот результат отдельно, так как ниже он нам понадобится. Имеется уравнение

$$-\operatorname{div}(A(\varepsilon^{-1}x) \nabla w^\varepsilon) + w^\varepsilon = g^\varepsilon \quad \text{в } W^{1,2}(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon), \quad (8.16)$$

причем $g^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu_\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq C, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi g^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi g^0 dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

отсюда автоматически $g^0 \in L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ (см. аналогичные рассуждения для u^ε в начале этого параграфа). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq C, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi w^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi w^0 dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

где w^0 – решение усредненной задачи

$$-\operatorname{div}(A^0 \nabla w^0) + w^0 = g^0 \quad \text{в } W^{1,2}(\mathbb{R}^N, dx).$$

6) Теперь докажем соотношение (6.6). Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u^\varepsilon - u^0)^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon - 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon u^0 d\mu_\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^N} |u^0|^2 d\mu_\varepsilon. \quad (8.17)$$

Напомним, что мы не предполагаем положительной определенности усредненной матрицы A^0 . Однако, в любом случае (так как $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) решение u^0 бесконечно дифференцируемо и убывает на бесконечности быстрее любой степени. Поэтому (см. (8.8))

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon u^0 d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} |u^0|^2 dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u^0|^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} |u^0|^2 dx.$$

Остается (см. (8.17)) доказать не совсем очевидное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u^\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} |u^0|^2 dx.$$

С этой целью рассуждаем так. Рассмотрим совместно уравнения (6.5) и (8.16), а также пару соответствующих усредненных уравнений. По формуле Грина

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon g^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} w^\varepsilon f d\mu_\varepsilon, \quad \int_{\mathbb{R}^N} u^0 g^0 dx = \int_{\mathbb{R}^N} w^0 f dx.$$

Положим $g^\varepsilon = u^\varepsilon$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u^\varepsilon u^\varepsilon d\mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} w^\varepsilon f d\mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} w^0 f dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^0 u^0 dx,$$

что и требовалось.

7) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ. Рассмотрим уравнение диффузии в пространстве периодических функций,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (8.18)$$

где Δ – оператор Лапласа в $L^2_{\text{per}}(\square, d\mu)$. По определению оператора Лапласа

$$-\int_{\square} \Delta u \cdot u d\mu = \int_{\square} |\nabla u|^2 d\mu.$$

Отсюда, если $\Delta u = 0$, то $\nabla u = 0$ в $L^2(\square, d\mu)$. В силу 2-связности отсюда следует, что $u = \text{const}$. Итак, нулями оператора Δ служат только константы.

Воспользуемся следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть A – неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Если элемент b ортогонален ядру оператора A , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-At}b\|_H = 0.$$

Доказательство легко следует из спектрального представления оператора e^{-At} . Возвращаясь к уравнению диффузии (8.18) возьмем начальное значение

$$u|_{t=0} = b, \quad b \in L^2(\square, d\mu), \quad \langle b \rangle = 0.$$

Тогда

$$b(x) - u(x, t) = \Delta \left(\int_0^t u(x, s) ds \right),$$

$$b(x) = u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x, t)), \quad b_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t u(x, s) ds.$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\square, d\mu)} = 0,$$

то достаточно взять $b_0 = u(x, t)$ при достаточно большом t . Представление (8.13) будет выполнено. Лемма доказана.

Список литературы

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
2. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: МГУ, 1990.
3. Жиков В. В. Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 41–58.
4. Жиков В. В. On the Homogenization of Nonlinear Variational Problems in perforated Domains // Russian J. Math. Phys. 1994. Т. 2. № 3. С. 393–408.
5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
6. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
7. Мазья В. Г., Поторчий С. В. Продолжение из классов С. Л. Соболева во внешности области с вершиной пика на границе, I. // Czechoslovak Math. J. 1986. Т. 36 (111). С. 634–661.
8. Evans L. C., Gariepy R. F. Measure theory and fine properties of functions. London: CRC PRESS, 1992.
9. Barlow M. T., Bass R. F. On the resistances of the Sierpinski carpet // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1990. V. 431. № 1882. P. 345–360.
10. Kozlov S. M. Harmonization and homogenization on Fractals // Commun. Math. Phys. 1993. V. 153. P. 339–357.
11. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
27.09.1995