Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Замкнутые геодезические на поверхности симплекса, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 2, 103–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:30:40

УДК 514.113.5

В. Ю. Протасов

Замкнутые геодезические на поверхности симплекса

В работе исследуются замкнутые несамопересекающиеся геодезические на поверхности трехмерного симплекса. Доказано, что любая геодезическая на произвольном симплексе реализуется на правильном симплексе. Это позволяет получить полную классификацию всех геодезических и описать их структуру. Получены условия существования геодезических для произвольного симплекса. Доказано, что симплекс имеет бесконечно много существенно различных геодезических тогда и только тогда, когда он равногранный. Для прочих симплексов получены оценки на число геодезических.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение и постановка задачи

В 1905 г. А. Пуанкаре выдвинул гипотезу о существовании трех замкнутых несамопересекающихся геодезических на гладкой выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$. В 1930 г. гипотеза была доказана Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом [1]; позже было установлено существование бесконечного числа геодезических [2], [3]. Наглядно это означает, что для гладкого выпуклого тела существует бесконечно много способов натянуть на него тонкое резиновое кольцо так, чтобы оно не сползло. Случай негладких поверхностей исследовался в работах А. Д. Александрова и А. В. Погорелова, где в числе прочего было доказано существование одной геодезической (которая, однако, может быть вырожденной) [4], [5]. Возникает естественная задача описания геодезических на простейших негладких поверхностях – плоских поверхностях (с нулевой гауссовой кривизной и конечным числом особых точек), в частности – на выпуклых многогранниках, начиная с трехмерного симплекса (тетраэдра). Исследования в этом направлении проводились в классической монографии В. Клингенберга [6], а также в ряде недавних работ Г. А. Гальперина [7], [8], А. О. Иванова и А. А. Тужилина [9], [10], А. В. Зорича [11] и др. Так, в работе [9] геодезические на плоских поверхностях применяются при изучении экстремальных сетей, а в [11] – при исследовании плоских билиардов.

Ситуация с геодезическими на выпуклых многогранниках коренным образом отличается от того, что мы имеем на гладких поверхностях. Например, как показано в [7], [8], многогранник “общего положения” не имеет ни одной невырожденной замкнутой несамопересекающейся геодезической. С другой стороны, если есть хотя бы одна геодезическая, то существует бесконечно много изоморфных ей геодезических, т.е. пересекающих те же ребра в той же последовательности. Легко показать, что геодезические на многограннике будут

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00066).

ломаными с вершинами на ребрах. У всех изоморфных геодезических длины равны и соответствующие стороны параллельны. Поэтому задача состоит в классификации всех неизоморфных геодезических. Известно, например, что у куба их ровно три (при этом одна не плоская), а у октаэдра – две. В 2002 г. В. М. Тихомировым была поставлена задача о классификации всех геодезических на произвольном тетраэдре. Ответ оказался довольно неожиданным. У равногранного тетраэдра (все грани – равные треугольники) существует бесконечно много неизоморфных геодезических. Все они явно описываются с помощью полной развертки. Каждой геодезической ставится в соответствие пара взаимно простых натуральных чисел (n, m) либо пара $(1, 0)$. Для любой такой пары строится своя геодезическая, имеющая $4(m + n)$ сторон. Этот результат элементарен, мы приводим его доказательство в § 2 для удобства читателя. Если же тетраэдр не является равногранным, то описание его геодезических представляет более сложную задачу. Оказывается, что число его неизоморфных геодезических всегда конечно (теорема 3), хотя может быть сколь угодно большим. Оценка на это число доказана в § 6. Необходимые условия существования хотя бы одной геодезической представлены в теореме 2. Тетраэдры общего положения им не удовлетворяют. Так, правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро не равно стороне основания, не имеет ни одной геодезической. Эти результаты основаны на теореме классификации (теорема 1), согласно которой любая геодезическая на произвольном тетраэдре может быть реализована на правильном тетраэдре. Следовательно, все возможные геодезические на тетраэдрах подпадают под классификацию для равногранных тетраэдров, представленную в § 2. Эта теорема распространяется также на составные геодезические (конечные семейства непересекающихся геодезических) и позволяет получить их полное описание. Доказательство теоремы 1 топологическое и опирается на несколько технических лемм, ему посвящен § 3. В § 4 приводится описание структуры произвольной геодезической. Каждая геодезическая либо четырехугольная (в этом случае она устроена просто), либо имеет четыре особых узла, которыми она зацепляется за каждую вершину тетраэдра (предложения 4, 5). В нескольких примерах показана точность полученных критериев и условий.

Перед формулировкой результатов дадим необходимые определения. *Замкнутой геодезической* на границе выпуклого тела G называется спрямляемая жорданова кривая $g(t): \mathbb{T} \rightarrow \partial G$ со следующим свойством: для любого $t \in \mathbb{T}$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ дуга кривой g является кратчайшим путем между точками $g(t)$ и $g(\tau)$ по поверхности G . Через ∂G обозначена граница G , через $\mathbb{T}$ – единичная окружность. Далее будем обозначать одним символом и отображение g , и его образ. Нас будут интересовать только замкнутые несамопересекающиеся геодезические, по умолчанию любую геодезическую будем считать таковой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая на поверхности многогранника является геодезической тогда и только тогда, когда она является ломаной с вершинами на его ребрах, не проходит через его вершины и обладает “свойством отражения”: две последовательные стороны ломаной образуют равные углы с ребром.*

Все углы – ориентированные: угол между прямыми a и b равен углу поворота прямой a в положительном направлении до совпадения с b . То же – с лучами и

векторами. При формулировке свойства отражения задаем направление обхода ломаной, а направления ребер произвольны. Положительное направление на грани тетраэдра берется по отношению к внешней нормали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что геодезическая является ломаной с вершинами на ребрах. Свойство отражения следует из развертки двух соседних граней на плоскость (последовательные стороны ломаной, лежащие на этих гранях, окажутся на одной прямой). Если геодезическая прошла через вершину A многогранника, то разрежем многогранный угол A вдоль сторон ломаной, выходящих из этой вершины, на две части. Сумма плоских углов одной из частей будет меньше π (сумма всех углов при вершине меньше 2π). Развернем эту часть на плоскость и возьмем две близкие к A точки L и M на разных сторонах ломаной. Тогда ближайшим путем из L в M на развертке будет отрезок LM , а не путь по геодезической LAM . Следовательно, геодезическая не проходит через вершины многогранника.

Стороны геодезической будем также называть звеньями, а вершины – узлами. Две геодезические на многограннике *изоморфны*, если они пересекают одну и ту же последовательность ребер. *Составной геодезической* называется объединение конечного числа не пересекающих друг друга замкнутых геодезических.

§ 2. Геодезические на равногранном тетраэдре

Случай правильного тетраэдра является легким, все его геодезические могут быть элементарно классифицированы с помощью развертки. Возьмем правильный тетраэдр $ABCD$ и разобьем плоскость грани ABC на равные правильные треугольники, один из которых – ABC . Получившаяся треугольная решетка называется *полной разверткой* правильного тетраэдра, вершины треугольников – *узлы* решетки. Введем координаты на плоскости ABC : A – начало координат, $B = (1/2, 0)$, $C = (0, 1/2)$. Последовательной разверткой тетраэдра на плоскость заполняется вся решетка, причем данной точке x плоскости однозначно ставится в соответствие точка на поверхности тетраэдра, независимо от порядка, в котором разворачивались грани. Прообразом точки тетраэдра является множество на развертке $\{\pm x + v, v \in \mathbb{Z}^2\}$, где $\mathbb{Z}^2$ – множество целых векторов. Две точки развертки изображают одну и ту же точку тетраэдра, если они совмещаются либо целым сдвигом, либо центральной симметрией относительно узла решетки. В частности, вершине A соответствуют все целые точки, $B \mapsto (n + 1/2, m)$, $C \mapsto (n, m + 1/2)$, $D \mapsto (n + 1/2, m + 1/2)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Если развернуть тетраэдр вдоль геодезической g (последовательно разворачиваем грани на плоскость в том порядке, как их пересекает геодезическая), g перейдет в прямую на плоскости развертки – это следует из свойства отражения. Прямую будем обозначать тем же символом g . Она не проходит через узлы (предложение 1) и параллельна целому вектору. В самом деле, поскольку геодезическая замкнута, на прямой g найдутся две точки, представляющие одну точку тетраэдра. Они не могут быть симметричны относительно узла, так как g не содержит узлов, значит, вектор между этими точками целый. Обратное утверждение сформулируем как следующее несложное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Любая прямая на развертке, не проходящая через узлы и параллельная данному целому вектору, представляет замкнутую геодезическую. Все такие геодезические изоморфны и имеют одинаковую длину.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = (n, m)$ – данный целый вектор, прямая g ему параллельна и не проходит через узлы. С точностью до возможной перестановки вершин считаем, что $n \geq m \geq 0$. Если $m = 0$, то прямая g параллельна одной из линий решетки, в этом случае утверждение очевидно. Пусть $m \geq 1$ и $\text{НОД}(n, m) = 1$. Если точки $x, y \in g$ соответствуют одной и той же точке тетраэдра, то они либо симметричны относительно узла, либо переводятся одна в другую переносом на целый вектор. Первое невозможно (g не содержит узлов). Во втором случае вектор переноса равен rv , $r \in \mathbb{Z}$, поскольку координаты v взаимно просты. Взяв $r = 1$, получим, что $y - x = v$, и все точки интервала (x, y) соответствуют разным точкам тетраэдра. Следовательно, отрезок $[x, y]$ представляет на поверхности тетраэдра замкнутую несамопересекающуюся геодезическую длины $|v|$.

Осталось доказать изоморфизм геодезических, соответствующих параллельным прямым. Среди всех прямых, параллельных g и проходящих через узлы, выберем по одной ближайшей к g в каждой полуплоскости и назовем их g_1, g_2 . Возьмем пару ближайших узлов решетки K, L на g_1 (отрезок KL не содержит других узлов) и пару ближайших узлов M, N на g_2 . Так как g_1 и g_2 совмещаются параллельным сдвигом решетки, то $KL = MN$. Таким образом, $KLMN$ – параллелограмм, не содержащий других узлов решетки. Следовательно, его вершины представляют четыре различные вершины тетраэдра, иначе середина отрезка между двумя соответствующими узлами также была бы узлом. Любую другую прямую a , параллельную g , так же заключаем в полосу a_1a_2 , не содержащую узлов, при этом прямые a_1, a_2 содержат образы K', L', M', N' четырех вершин тетраэдра. Подходящий целый сдвиг или симметрия относительно узла решетки переводит полосу a_1a_2 в g_1g_2 , а узел K' – в K (следовательно, полная развертка переходит в себя). Поэтому можно считать, что a лежит в той же полосе g_1g_2 , а значит, соответствующая геодезическая изоморфна геодезической g .

Таким же приемом с разверткой вдоль геодезической устанавливается следующее утверждение, верное для любого тетраэдра.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если тетраэдр имеет геодезическую, то он имеет бесконечно много изоморфных ей геодезических. У изоморфных геодезических длины равны, а стороны, лежащие на одной грани, параллельны.*

Все геодезические, таким образом, разбиваются на классы эквивалентности. В дальнейшем мы будем отождествлять изоморфные геодезические и, если не оговорено обратное, считать разные геодезические неизоморфными.

Предложение 2 без изменений переносится на равногранный тетраэдр (грани являются равными треугольниками). Каждое из следующих условий равносильно тому, что тетраэдр равногранный:

- (а) площади граней равны;
- (б) сумма плоских углов при каждой вершине равна π ;
- (в) каждая пара противоположных ребер имеет общий серединный перпендикуляр.

Рис. 1. Геодезические типов $(1, 0)$, $(3, 2)$ и $(1, 1)$

Другие эквивалентные условия см. в [12; гл. 6, § 4]. Полная развертка равногранного тетраэдра образует решетку из равных треугольников, аффинно подобную правильной треугольной решетке.

Таким образом, геодезические на равногранном тетраэдре соответствуют прямым на развертке, параллельным целым векторам и не проходящим через узлы. Каждой паре взаимно простых чисел (n, m) (либо паре $(1, 0)$) соответствует своя геодезическая. Она имеет на сторонах AB , AC и BC соответственно m , n и $n + m$ узлов. Это задает полную классификацию замкнутых геодезических на равногранном тетраэдре с точностью до группы аффинных симметрий тетраэдра (перестановки его вершин). На рис. 1 показаны геодезические, соответствующие парам $(1, 0)$, $(3, 2)$ и $(1, 1)$. Так же получается классификация всех составных геодезических.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Любая составная геодезическая на равногранном тетраэдре является объединением нескольких изоморфных геодезических.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая из компонент составной геодезической представляется в виде прямой на развертке. Эти прямые параллельны друг другу, в противном случае различные компоненты пересекутся. Остается сослаться на предложение 2.

§ 3. Теорема классификации для произвольного тетраэдра

Для произвольного тетраэдра ситуация с геодезическими иная. Например, как будет показано в § 6, неравногранный тетраэдр всегда имеет не более, чем конечное число неизоморфных геодезических, он может и не иметь их вовсе. Различие объясняется тем, что для неравногранного тетраэдра последовательная развертка не заполняет плоскость и полной развертки не существует.

Оказывается, тем не менее, что классификация всех возможных геодезических правильного (или равногранного) тетраэдра, полученная в § 2, распространяется на все тетраэдры. Для любой составной геодезической на произвольном тетраэдре существует изоморфная ей составная геодезическая на правильном. Утверждение это носит топологический характер, и мы сформулируем его в более общем виде. Назовем *обобщенной ломаной* любую замкнутую кривую, последовательно соединяющую k точек (узлов, или вершин ломаной). *Обобщенной геодезической* назовем несамопересекающуюся обобщенную ломаную на поверхности тетраэдра, которая

- (а) имеет более трех узлов и не проходит через вершины тетраэдра;
- (б) все узлы лежат на ребрах, а стороны (звенья) не пересекают ребер;
- (в) соседние стороны (выходящие из одного узла) лежат на разных гранях.

Определение топологическое, поэтому вид тетраэдра не важен. Каждая обычная геодезическая на произвольном тетраэдре является также и обобщенной геодезической. В пояснении нуждается лишь условие (а). Если геодезическая имеет только три узла, то она является треугольником с вершинами на соседних ребрах (выходящих из одной вершины). Пользуясь свойством отражения, простым подсчетом углов получаем, что сумма плоских углов при этой вершине должна быть равна нулю. Составная обобщенная геодезическая – это конечное семейство непересекающихся обобщенных геодезических. Следующая теорема классифицирует все составные обобщенные геодезические.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая составная обобщенная геодезическая на тетраэдре изоморфна некоторой составной геодезической на правильном тетраэдре.*

Таким образом, любая составная обобщенная геодезическая реализуется в виде нескольких изоморфных друг другу геодезических на правильном тетраэдре. Следовательно, структура всех обобщенных геодезических классифицирована в предыдущем параграфе, и других геодезических быть не может.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Каждая геодезическая на произвольном тетраэдре изоморфна некоторой геодезической на правильном тетраэдре.*

То же верно для составных геодезических. Доказательство теоремы 1 основано на нескольких леммах. Везде в доказательстве будем обозначать обобщенную составную геодезическую через Γ , термины “обобщенная” и “составная” будем опускать. Выделим грань ABC тетраэдра в качестве его основания, три остальные грани составляют его боковую поверхность. Назовем *следом* любое звено Γ , лежащее на основании, а *путем* – несколько последовательных звеньев, идущих по боковой поверхности и соединяющих две точки границы основания. Иногда мы будем отождествлять боковую поверхность с ее проекцией на основание, при этом вершина D будет отождествляться с центром O треугольника ABC . Звенья геодезической будем называть *параллельными*, если они не пересекаются и имеют концы на одних и тех же ребрах.

Каждый путь начинается в некоторой точке границы треугольника ABC и заканчивается в другой точке границы; других общих точек с основанием он не имеет. Путь, начало и конец которого лежат на одной стороне треугольника ABC , назовем *петлей*, опирающейся на эту сторону. *Основание* петли – отрезок, соединяющий ее концы. Геодезическая на рис. 2 имеет единственную петлю, ее основание – отрезок K_1K_2 . Петля l *охватывает вершину* D (в проекции на ABC – охватывает центр O), если кусок боковой поверхности тетраэдра,

ограниченный петлей l и ее основанием, содержит D . В проекции это означает, что петля не может быть непрерывно стянута к своему основанию, не пересекая центра O . Если точка M движется из начала петли в ее конец, а затем по основанию петли возвращается в начало, то вектор OM поворачивается на угол 2π вокруг точки O , если петля охватывает O , либо поворачивается на нулевой угол в противном случае. Конечное число петель составляют *вложенную систему*, если их основания образуют вложенную систему отрезков и не содержат других точек геодезической, кроме концов этих петель.

ЛЕММА 1. *Если геодезическая имеет петли, то все они опираются на одну сторону, охватывают O и образуют вложенную систему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть петля начинается в некоторой точке K стороны BC . Если точка M движется по петле из начала $M_1 = K$, то она приходит либо к ребру OB , либо к OC . Пусть – к OB , в некоторой точке M_2 . Далее она должна пересечь это ребро, затем ребро OA (иначе она придет к стороне AC и не будет петель) и прийти к ребру OB в некоторой точке M_3 . Далее она либо приходит к концу на BC , либо вновь идет к OA и делает еще один оборот вокруг точки O , и т.д. Наконец, она приходит к BC в некоторой точке M_k , затем идет по основанию петли от M_k к $M_{k+1} = M_1$. При каждом i на пути от OM_i к OM_{i+1} точка M поворачивается вокруг O в положительном направлении. Поэтому отрезок OM не может в результате повернуться на нулевой угол. Следовательно, петля охватывает O .

Итак, все петли охватывают O , а поскольку они не пересекаются, области, которые они ограничивают, вложены одна в другую. Значит, все петли опираются на одну сторону и их основания вложены одно в другое. Остается показать, что основания не содержат других узлов геодезической. Предположим, что основание петли l содержит конец некоторого пути r . Поскольку r не пересекает l , он должен вернуться к той же стороне (значит, является петлей) и его основание содержится в основании l . Поэтому петля r принадлежит той же вложенной системе.

Назовем путь *угловой петлей*, если он соединяет два ближайших к данной вершине C узла (лежащих на разных сторонах), которые к тому же соединены следом на основании. Угловая петля делит треугольник ABC на две области. Если область, содержащая C , содержит и центр O , то угловая петля *охватывает* O .

ЛЕММА 2. *Угловая петля если есть, то единственна и охватывает O , при этом (обычных) петель нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть угловая петля l выходит из точки K стороны BC и заканчивается в точке L стороны AC . Предположим, что на ее пути первым встречается ребро OC (M – точка пересечения), а если двигаться вдоль l из конца L , то первым вновь встретится OC (в некоторой точке N). Ясно, что $M \neq N$, иначе Γ имеет треугольную компоненту. Пусть для определенности $CM < CN$. Двигаясь по петле дальше от M , придем к отрезку CL , что невозможно, поскольку L – ближайший узел к C . Таким образом, выходя либо из K , либо из L , первым встречаем ребро, отличное от OC . Пусть для определенности – из K . Теперь используем прием из доказательства леммы 1: точка M , идущая вдоль l из точки $M_1 = K$, последовательно пересечет ребра $OB, OA, OC, \dots$ в некоторых точках $M_2, M_3, M_4, \dots$, пока не придет в конец

$M_k = L$. На пути от M_i к M_{i+1} точка M поворачивается вокруг O в положительном направлении, поэтому отрезок OM не может в результате повернуться на нулевой угол. Следовательно, l охватывает O .

Любая другая петля (угловая или нет) также охватывает O (лемма 1) и поэтому пересекает l , что невозможно.

ЛЕММА 3. 1) Если путь, выходящий из ближайшего к вершине C на стороне BC узла, идет к стороне AC , то либо его конец на AC также является ближайшим узлом к C , либо существует петля, опирающаяся на AC .

2) Если два пути, выходящие из последовательных узлов на стороне BC , идут к стороне AC , то либо их концы на AC также являются последовательными узлами, либо существует петля, опирающаяся на AC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим обратное: K и L – ближайшие к вершине C узлы на сторонах BC и AC соответственно, путь из K идет к AC , но не в точку L . Тогда путь из L должен вернуться к AC , иначе он пересечет первый путь. Следовательно, существует петля, опирающаяся на AC .

2) Снова предположим обратное: два пути идут к стороне AC из последовательных узлов K_1, K_2 на стороне BC , и отрезок между их концами на AC содержит некоторый узел L . Тогда путь, выходящий из L , должен вернуться к AC , иначе он пересечет один из этих двух путей. Следовательно, он является петлей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем любую грань ABC и рассмотрим ее ребро, содержащее наибольшее число узлов. Пусть это ребро BC , оно содержит $m + n$ узлов, причем n следов от них идут к AC и m идут к AB .

А) Пусть $m = 0$. В этом случае все следы идут к AC и пересекают ее в n узлах в той же последовательности. Других узлов на AC нет, это противоречило бы максимальности ребра BC . Итак, от BC к AC идут n параллельных следов, и других следов на грани ABC нет. В частности, нет узлов на стороне BC . Теперь выясним, какие будут пути на боковой поверхности. Во-первых, не будет петель. Если есть петля, опирающаяся, скажем, на BC , то от BC к AC идут не более $n - 2$ путей, поэтому AC содержит по крайней мере два узла, пути из которых не идут к BC . Они не могут идти и к AB , поэтому каждый из них возвращается на AC , а значит, является петлей, что противоречит лемме 1. Итак, петель нет. Применив теперь лемму 3, получаем, что все n путей выходят из BC и приходят в AC в том же порядке (иначе будут самопересечения). Таким образом, геодезическая состоит из n компонент.

Б) Пусть $n \geq m \geq 1$. В этом случае все n узлов, из которых следы идут к AC , лежат с одной стороны от m узлов, из которых следы идут к AB . Иначе будут самопересечения. Предположим сначала, что нет петель, опирающихся на AB . Согласно лемме 1 одна из двух других сторон основания (пусть AC) также не имеет петель. Обозначим через K_1 и L_1 ближайшие к вершине C узлы на сторонах BC и AC соответственно. Предположим, они не соединены угловой петлей; тогда по лемме 3 пути идут из точек K_1 и L_1 к стороне AB . Пусть они заканчиваются в узлах N_1 и P_1 соответственно. Ясно, что $N_1 \in BP_1$, иначе эти пути будут пересекаться. По той же причине $n + m$ путей, выходящих из BC (по предположению среди них нет петель), также заканчиваются на отрезке BP_1 . Итак, AB содержит не менее $n + m + 1$ узлов, что противоречит максимальности ребра BC . Остался случай, когда узлы K_1 и L_1 соединены угловой петлей. По лемме 2 других петель нет. В частности, нет петель,

опирающихся на BC . Тогда повторяем те же рассуждения для стороны AB вместо AC и замечаем, что случай угловой петли теперь невозможен.

Итак, обязательно есть петля, опирающаяся на BC . Тогда (лемма 2) не будет ни петель, опирающихся на другие стороны, ни угловых петель. Пусть L_p и R_q – ближайшие к вершине A узлы на ребрах AC и AB соответственно. Так как эти стороны содержат соответственно не менее n и m узлов, то $p \geq n$, $q \geq m$. Покажем, что L_p и R_q связаны путем. Если путь, начинающийся в L_n , не идет в R_m , то по лемме 3 он не может заканчиваться ни на AB , ни на AC , иначе найдется петля, опирающаяся на одну из этих сторон. Значит, он идет к BC . Так же показываем, что путь из R_m идет к BC . Поскольку нет самопересечений, $m + n$ путей, начинающихся на сторонах AC и AB , идут к BC и пересекают ее в $n + m$ узлах. Однако есть еще и петля, опирающаяся на BC , поэтому BC содержит не менее $n + m + 2$ узлов. Получили противоречие, доказывающее, что L_n и R_m связаны путем. Поскольку угловых петель нет, L_n и R_m не связаны следом, поэтому следы из этих узлов идут к стороне BC . Итак, *ребра AC и AB содержат ровно n и m узлов, поэтому $p = n$, $q = m$.*

Таким образом, грань ABC содержит ровно $n + m$ следов, и последние узлы L_n и R_m связаны путем. Предыдущая пара узлов L_{n-1} и R_{m-1} также связана путем. Иначе если путь из L_{n-1} приходит в другой узел стороны AB , то это будет противоречить лемме 3. А если оба пути из точек L_{n-1} и R_{m-1} приходят к BC , то, применяя те же рассуждения, приходим к противоречию с максимальностью BC .

Так же показываем, что последовательные узлы $L_n, \dots, L_1$ связаны путями с узлами $R_m, \dots, R_1, K_{n+m}, \dots, K_{2m+1}$ соответственно. Тогда из леммы 1 следует, что оставшиеся узлы $K_1, \dots, K_{2m+1}$ связаны m вложенными петлями. Подведем промежуточный итог, объединив результаты пп. А) и Б).

Пусть среди сторон грани ABC наибольшее число узлов содержит BC , а стороны AC и AB содержат n и m узлов соответственно, $n \geq m \geq 0$; тогда BC содержит $n + m$ узлов и существует не более одного способа соединить эти узлы следами и путями так, чтобы получить составную обобщенную геодезическую.

Именно, n следов, выходящих из n последовательных узлов BC со стороны вершины C , заканчиваются в узлах стороны AC в том же порядке, также m следов из m последовательных узлов BC со стороны вершины B заканчиваются в том же порядке на AB . Далее, n путей из n последовательных узлов AC (считая от C) идут соответственно в m последовательных узлов AB и в $n - m$ последовательных узлов BC (считая от B); оставшиеся $2m$ узлов на ребре BC связаны m вложенными петлями.

Итак, числа n, m полностью определяют комбинаторную структуру геодезической на грани ABC . Осталось показать, что они однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют геодезическую на всем тетраэдре. Вновь рассмотрим два случая.

1) Пусть $m = 0$. В доказательстве леммы 2 было показано, что ближайшие к C узлы K_1 и N_1 на сторонах BC и AC соответственно связаны угловой петлей l . Более того, двигаясь либо из K_1 , либо из L_1 вдоль l , мы сначала пересечем ребро DA . Пусть это верно для K_1 . Точка M при движении вдоль l из $M_1 = K_1$ последовательно пересечет ребра DA и DB в некоторых узлах M_2, M_3 , затем она идет либо к AC , либо к BC . В первом случае она встречает

AC в некотором узле M_4 , затем идет в узел $M_5 \in DM_3$ (иначе путь самопересекающийся), затем идет в $M_6 \in DM_4$ и т.д. Таким образом, путь никогда не придет в M_1 . Поэтому имеет место второй случай: l идет из M_4 к стороне BC . Как показано выше (случай А)), он идет в точку M_1 . Получили четырехугольный путь $M_1M_2M_3M_4$. Так же показываем, что при любом $i = 1, \dots, n$ узлы K_i и L_i соединены четырехугольным путем. Итак, имеем n изоморфных четырехугольных геодезических, последовательно пересекающих ребра BC , CA , AD , DB .

2) Пусть $n \geq m \geq 1$. Пусть l – наименьшая петля во вложенной системе из m петель, опирающихся на BC . Она соединяет узлы K_m и K_{m+1} . Рассуждая так же, как в случае 1), показываем, что l выходит из K_m , пересекает последовательно ребра DC , DA , DB и приходит в K_{m+1} . Таким образом, петля l четырехсторонняя. Каждая из оставшихся $m - 1$ петель изоморфна l (пересекает те же ребра в том же порядке). Поскольку нет самопересечений, получаем, что $n - m$ путей из $K_{2m+1}, \dots, K_{n+m}$ трехсторонние и также изоморфны друг другу. Они пересекают ребра DA и DB и приходят в узлы $L_1, \dots, L_{n-m}$ соответственно. Наконец, m параллельных двухсторонних путей выходят из точек $R_m, \dots, R_1$, пересекают ребро DA и приходят к стороне AC в точках $L_n, \dots, L_{n-m+1}$ соответственно. На рис. 2 представлен случай $m = 1$, $n = 2$.

Рис. 2. Геодезическая типа $(2, 1)$

Итак, для любой пары чисел (n, m) , где $n \geq m \geq 0$, существует не более одной, с точностью до изоморфизма, обобщенной геодезической, имеющей n узлов на ребре AC , m узлов на AB , для которой ребро BC является максимальным (содержит по крайней мере n узлов). С другой стороны, для любой пары (n, m) существует реализация в виде семейства изоморфных параллельных геодезических на правильном тетраэдре (§ 2), что завершает доказательство.

§ 4. Структура замкнутых геодезических

СЛЕДСТВИЕ 3. *Каждая составная геодезическая имеет одну и ту же картину следов на всех четырех гранях тетраэдра. Она пересекает одну сторону грани в $n + m$ точках, а другие стороны – в n и m точках соответственно.*

Таким образом, обобщенной геодезической однозначно ставится в соответствие пара чисел (n, m) . Будем называть эту пару *типом* данной геодезической. Согласно следствию 3 геодезическая типа (n, m) имеет по $n + m$ узлов на каждом из двух противоположных ребер тетраэдра, по n узлов на каждом из противоположных ребер другой пары и по m узлов на оставшихся противоположных ребрах.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Геодезическая типа (n, m) имеет $4(n+m)$ узлов. Она состоит из одной компоненты тогда и только тогда, когда либо $d = \text{НОД}(n, m) = 1$, либо $n = 1, m = 0$. Если $d \geq 2$, то обобщенная геодезическая состоит из d изоморфных компонент, являющихся геодезическими типа (n', m') , где $n = dn', m = dm'$.*

Согласно теореме 1 обобщенная геодезическая каждого типа единственна с точностью до изоморфизма и перестановки вершин тетраэдра. В случае $d = 1$ она реализуется в виде геодезической на правильном тетраэдре; в случае $d \geq 2$ – в виде семейства из d параллельных геодезических. Поэтому далее мы ограничимся случаем одной геодезической, когда n, m взаимно просты либо когда $n = 1, m = 0$. Все результаты будем формулировать для геодезических, помня, что они верны и для обобщенных геодезических.

В случае $n = 1, m = 0$ геодезическая устроена просто: она является четырехугольником и пересекает последовательно две пары противоположных ребер. Оказывается, что все остальные геодезические имеют по четыре особых узла, в которых они “зацепляются” за вершины тетраэдра. Узел L геодезической называется *узлом зацепления*, если он и два соседних с ним узла лежат на трех ребрах, выходящих из одной вершины D тетраэдра, и являются ближайшими к D узлами на этих ребрах. При этом D называется *вершиной зацепления* для узла L . Так, геодезическая на рис. 2 зацепляется за каждую вершину тетраэдра; для вершин B и C узлы зацепления – K_3 и K_1 соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Любая геодезическая типа (n, m) , где $n \geq m \geq 1$, имеет в точности четыре узла зацепления. Они составляют две пары противоположных узлов геодезической, каждая пара разбивает ее на две части с одинаковым числом узлов. Каждая вершина тетраэдра является вершиной зацепления для одного из узлов.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть a_1 и b_1 – звенья геодезической, выходящие из узла зацепления, a_2 и b_2 – следующие за ними, и т.д. Для каждого $i = 2, \dots, 2n + 2m - 1$ звенья a_i и b_i лежат на одной грани и между ними нет других точек геодезической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЙ 4 и 5 согласно теореме 1 достаточно провести для правильного тетраэдра. Представим геодезическую g как прямую на развертке и воспользуемся конструкцией из доказательства предложения 2. Докажем, что g зацепляется за вершину K , с другими вершинами рассуждение аналогично. Проведем прямую g' , симметричную g относительно точки K . Ясно, что полоса между g и g' не содержит других узлов кроме тех, которые лежат на g_1 . Поэтому прямые g и g' пересекают все шесть отрезков решетки, выходящих из K , и каждая из шести точек пересечения представляет узел на геодезической, ближайший к вершине K на соответствующем ребре тетраэдра. Следовательно, геодезическая зацепляется за K . Более того, прямые g

и g' идут параллельно по треугольникам решетки (граням), пока не пересекут шесть отрезков решетки, выходящих из K . Это доказывает предложение 5.

Таким образом, геодезическая зацепляется за вершину D звеньями a_1 и b_1 , затем звенья a_2, b_2 идут по одной грани, встречаются ребро этой грани в соседних узлах, далее a_3, b_3 идут по следующей грани и т.д., пока, наконец, геодезическая не зацепится за вершину C сторонами a_{2n+2m}, b_{2n+2m} . Геодезическая ограничивает полосу на поверхности тетраэдра парами сторон a_i, b_i . Наглядно, мы “натягиваем” геодезическую на трехгранный угол при вершине D , затем намазываем ее на поверхность тетраэдра, делая $2n+2m-1$ перегибов через ребра, и зацепляем ее за вершину C . Согласно предложениям 4, 5 любая геодезическая получается таким образом, при этом каждая вершина тетраэдра может быть выбрана в качестве начальной.

§ 5. Необходимые условия существования геодезических

Теорема 1 и предложения 4, 5 полностью классифицируют все возможные геодезические на произвольном тетраэдре и описывают их структуру. Они также позволяют получить необходимые условия для существования хотя бы одной геодезической.

Пусть $ABCD$ – произвольный тетраэдр. Обозначим через $\sigma(D)$ сумму трех плоских углов при вершине D и аналогично для трех других вершин. Таким образом, $\sigma(D) = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDA$. Предположим, что тетраэдр имеет замкнутую геодезическую g . Согласно предложению 4 она зацепляется за вершину D . В терминах предложения 5 рассмотрим ориентированный угол $\widehat{a_2 b_2}$ между звеньями a_2 и b_2 (оба отрезка направлены от вершины D , т.е. к сторонам a_3 и b_3 соответственно).

ЛЕММА 4. *Если геодезическая зацепляется за вершину D звеньями a_1, b_1 , то $\widehat{a_2 b_2} = \sigma(D) - \pi$.*

Доказательство является легким упражнением на подсчет углов.

ТЕОРЕМА 2. *Если тетраэдр имеет хотя бы одну замкнутую геодезическую, то у него найдется пара вершин (обозначим их C и D) такая, что $\sigma(C) + \sigma(D) = 2\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $m = 0$ простым подсчетом углов показываем, что если четырехугольная геодезическая пересекает ребра AD, DB, BC, CA , то $\sigma(C) + \sigma(D) = 2\pi$. Пусть теперь $m \geq 1$. Согласно предложению 4 геодезическая зацепляется за вершину D , а согласно лемме 4 $\widehat{a_2 b_2} = \sigma(D) - \pi$. Применив предложение 5, получаем, что для любого $k = 2, \dots, 2n+2m-1$ звенья a_k и b_k пересекают одну и ту же пару ребер тетраэдра. Применяя свойство отражения последовательно ко всем ребрам, которые пересекает геодезическая, имеем $\widehat{a_2 b_2} = \widehat{a_3 b_3} = \dots = \widehat{a_{2n+2m-1} b_{2n+2m-1}}$ (каждое звено направлено от предыдущего к следующему). Таким образом, $\widehat{a_{2n+2m-1} b_{2n+2m-1}} = \sigma(D) - \pi$. Пусть C – противоположная вершина зацепления. Применив лемму 4 к вершине C , получаем, что угол между $a_{2n+2m-1}$ и $b_{2n+2m-1}$ равен $\sigma(C) - \pi$. Однако в лемме 4 эти звенья имеют направления, противоположные принятым здесь. Поэтому $\widehat{a_{2n+2m-1} b_{2n+2m-1}} = \pi - \sigma(C)$. Таким образом, $\sigma(D) - \pi = \pi - \sigma(C)$, что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно лемме 4 звенья геодезической, лежащие на одной грани, будут параллельны тогда и только тогда, когда $\sigma(D) = \sigma(C) = \pi$.

Из теоремы 2 следует, что большинство тетраэдров вообще не имеют замкнутых геодезических. Например, для правильной треугольной пирамиды необходимые условия очевидным образом не выполнены.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Правильная треугольная пирамида, не являющаяся правильным тетраэдром, не имеет замкнутых геодезических.*

Если $\sigma(C) + \sigma(D) = 2\pi$, то, конечно же, $\sigma(A) + \sigma(B) = 2\pi$. В этом случае пару противоположных ребер AB и CD будем называть *подходящей*. Для каждого ребра из подходящей пары шесть плоских углов при вершинах этого ребра в сумме дают 2π .

Подходящие пары характеризуются несколькими равносильными свойствами, доказательства которых элементарны. Для данной пары противоположных ребер AB и CD следующие свойства эквивалентны:

- (а) $\sigma(A) + \sigma(B) = \sigma(C) + \sigma(D) = 2\pi$;
- (б) сумма двух плоских углов, опирающихся на одно ребро, равна сумме двух углов, опирающихся на другое ребро: $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \widehat{CAD} + \widehat{CBD}$;
- (в) сумма площадей граней, примыкающих к одному ребру, равна сумме площадей граней, примыкающих к другому ребру: $S_{ACB} + S_{ADB} = S_{CAD} + S_{CBD}$.

Для равногранного тетраэдра и только для него все три пары ребер являются подходящими. Тетраэдр имеет ровно две подходящие пары тогда и только тогда, когда ребра третьей пары не равны и имеют общий серединный перпендикуляр.

По теореме 2 тетраэдр, имеющий хотя бы одну геодезическую, имеет подходящую пару ребер. Для четырехугольной геодезической (типа $(1, 0)$) два ребра, которые она не пересекает, формируют подходящую пару. У геодезической типа (n, m) , $m \geq 1$, каждая пара противоположных узлов зацепления соответствует вершинам одного из ребер подходящей пары. Будем говорить, что геодезическая типа (n, m) соответствует подходящей паре ребер, если вершины каждого из этих ребер являются противоположными вершинами зацепления (в случае $m \geq 1$) или сами ребра не пересекают геодезическую (при $m = 0$).

Условия из теоремы 2 необходимы, но не достаточны для существования геодезической. Контрпримеры строятся с использованием следующего несложного утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если тетраэдр имеет вершину, сумма любых двух плоских углов при которой больше или равна π , то он не имеет замкнутых геодезических кроме, может быть, четырехугольных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершина B обладает указанным свойством. Любая геодезическая типа (n, m) , $m \geq 1$, зацепляется за эту вершину. Пусть она зацепляется звеньями a_1, b_1 , а следующие звенья a_2, b_2 идут от ребер BA и BC к ребру AD . Тогда $\widehat{a_2b_2} < \widehat{ABC}$. Однако по лемме 4 имеем $\widehat{a_2b_2} = \sigma(B) - \pi$, откуда $\widehat{ABD} + \widehat{CBD} < \pi$.

ПРИМЕР 1 (тетраэдр с подходящей парой, не имеющий геодезических). Возьмем равнобедренный треугольник AOA' , в котором $AA' < AO = A'O$, и

проведем через O отрезок CC' , параллельный и равный AA' , причем $OC < OC'$, а также – луч, перпендикулярный CC' и идущий вне параллелограмма $AA'C'C$. Поскольку $\widehat{AOC} > \widehat{AOA'}$, на луче найдется точка $B \neq O$, для которой $\widehat{ABC} > \widehat{ABA'}$. Наконец, обозначим через D' точку пересечения прямой AB с серединным перпендикуляром к отрезку CC' .

Треугольники ABC , BCD' , $D'A'B$ и $D'A'C'$ составляют развертку тетраэдра $ABCD$ (точки A' , C' , D' переходят в вершины A , C , D). Легко проверить, что тетраэдр имеет единственную подходящую пару ребер AB , CD . Однако он не имеет ни одной геодезической. В самом деле, вершина B удовлетворяет условиям предложения 6, следовательно, нет геодезических, отличных от четырехугольных. Четырехугольная геодезическая, если она есть, соответствует паре ребер AB , CD ; на развертке она будет отрезком, параллельным и равным AA' и идущим по всем четырем граням-треугольникам. Здесь такого отрезка не существует.

Если же тетраэдр имеет две подходящие пары ребер, то ситуация иная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Тетраэдр с двумя подходящими парами всегда имеет геодезическую.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если тетраэдр $ABCD$ имеет в точности две подходящие пары $\{AB, CD\}$ и $\{AC, BD\}$, то ребра AD и BC различны (пусть $AD > BC$) и имеют общий серединный перпендикуляр. Без ограничения общности предположим, что $AB \leq AC$. Разворачиваем поверхность тетраэдра последовательно по ребрам CB , BD , DA . Вершины A , C , D при этом перейдут в вершины развертки A' , C' , D' . Развертка состоит из двух параллелограммов $ABD'C$ и $BA'C'D'$. Поскольку $BC < AD = A'D'$, то угол $\widehat{CD'C'}$ меньше π . Более того, оба угла $\widehat{CBD'}$ и $\widehat{C'BD'}$ острые, поскольку противоположные им стороны в соответствующих треугольниках CBD' и $C'BD'$ не являются наибольшими. Значит, $\widehat{CBC'} < \pi$, следовательно, четырехугольник $CBC'D'$ выпуклый и его диагонали CC' и BD' пересекаются. Поэтому существует отрезок с концами на сторонах AC и $A'C'$, параллельный и равный CC' и пересекающий BD' . Этот отрезок пройдет по всем треугольникам ABC , $BD'C$, $D'BA'$ и $D'A'C'$, следовательно, он представляет на развертке геодезическую.

Предложение 7 не может быть обобщено на большее число геодезических.

ПРИМЕР 2 (тетраэдр с двумя подходящими парами и единственной геодезической). Возьмем произвольный параллелограмм $ABD'C$ с условием $AC > AB > BC$. На его стороне CD' построим во внешнюю сторону параллелограмм $CD'B'A'$, в котором $CA' = CA$. Устремляя угол $\widehat{D'CA'}$ к π , добьемся выполнения следующих условий:

- (а) $\widehat{D'CA'} + \widehat{ACB} > \pi$;
- (б) $\widehat{B'CA'} < \widehat{BAC}$;
- (в) отрезки BB' и AC пересекаются;
- (г) продолжение отрезка AC за точку C пересекает отрезок $D'C'$, где $D'C'B'$ – треугольник, равный $D'CB$ и построенный на $D'B'$ во внешнюю сторону.

Треугольники ABC , CBD' , $D'A'C$, $A'D'B'$ составляют развертку тетраэдра $ABCD$, имеющего две подходящие пары ребер $\{AB, CD\}$ и $\{AC, BD\}$. Покажем, что у него нет геодезических, отличных от четырехугольных. Действительно, любая такая геодезическая будет зацепляться за вершину C . Так как из трех пар плоских углов тетраэдра при этой вершине только пара $\widehat{BCA}$, $\widehat{D'CB}$ в сумме дает меньше π , то вершина зацепления геодезической лежит на ребре CB (доказывается это так же, как предложение 6). Звенья a_1 , b_1 выходят из этого ребра, пересекают ребра CA , CD соответственно, далее звенья a_2 , b_2 идут по грани ACD и пересекают ребро AD , затем звенья a_3 , b_3 пересекают ребра BA и BD соответственно. Для доказательства рассмотрим образы этих звеньев на развертке. Звенья a_2 , a_3 составляют отрезок, звенья b_2 , b_3 – другой отрезок, угол между ними равен углу $\widehat{BAC}$ (лемма 4). Применив теперь условие (6), получаем, что эти отрезки пересекают стороны $B'A'$ и $B'D'$ соответственно. Итак, a_3 , b_3 пересекают разные ребра, следовательно (предложение 4), геодезическая зацепляется звеньями a_4 , b_4 за вершину B' . Тогда на развертке звено b_4 пересечет ребро $B'C'$. Однако из свойства (г) следует, что прямая, содержащая звенья $b_1, \dots, b_4$, пересекает сторону $D'C'$, а не $B'C'$. Противоречие доказывает отсутствие геодезических, отличных от четырехугольных. Свойство (в) означает, что нет четырехугольной геодезической, соответствующей паре $\{AC, BD\}$. Остается только четырехугольная геодезическая, соответствующая $\{AB, CD\}$. Она существует согласно предложению 7.

§ 6. Сколько геодезических может быть у тетраэдра ?

Равногранный тетраэдр (имеющий три подходящие пары ребер) имеет бесконечно много неизоморфных геодезических. Тетраэдр с двумя подходящими парами имеет, как минимум, одну геодезическую (предложение 7 и пример 2), а с единственной подходящей парой – может не иметь геодезических вовсе (пример 1). Наконец, тетраэдр без подходящих пар никогда не имеет геодезических. В этой связи возникает естественный вопрос: сколько геодезических может быть у тетраэдра?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любого N существует тетраэдр, имеющий единственную подходящую пару ребер и не менее N неизоморфных геодезических.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем равногранный тетраэдр $ABCD$ и любую его геодезическую g , соответствующую паре ребер AB и CD . Развернем тетраэдр на плоскость вдоль этой геодезической (последовательно разворачиваем грани на плоскость в том порядке, как их пересекает геодезическая, пока не придем в ту же точку геодезической). Получаем цепь треугольников и отрезков, представляющий геодезическую g . Пусть этот отрезок начинается в точке M на ребре AB и заканчивается в точке M' на стороне развертки $A'B'$ (M и M' представляют одну точку тетраэдра аналогично с отрезками AB , $A'B'$, представляющими одно ребро). Пошевелим тетраэдр (т.е. заменим его тетраэдром, близким к данному) так, что пара AB , CD остается подходящей, а две другие пары перестают быть таковыми. Тогда отрезки AB и $A'B'$ остаются параллельными. Если шевеление достаточно мало, то отрезок MM' по-прежнему будет идти вдоль всех треугольников цепи, а значит, будет представлять геодезическую. Теперь берем N различных геодезических равногранного тетраэдра,

соответствующих паре ребер AB, CD , и делаем N соответствующих им разверток. Любое достаточно малое шевеление тетраэдра, при котором пара ребер AB, CD остается подходящей, сохраняет все эти N геодезических.

Итак, неравногранный тетраэдр может иметь сколь угодно много неизоморфных геодезических. Оказывается, однако, их число всегда конечно.

ТЕОРЕМА 3. *Тетраэдр, имеющий бесконечно много геодезических, равногранный.*

Теорема является прямым следствием нескольких утверждений, устанавливающих верхние оценки на число звеньев геодезических и на число самих геодезических у неравногранных тетраэдров. Пусть

$$\delta = \max_{P \in \{A, B, C, D\}} |\sigma(P) - \pi|$$

– наибольшее отклонение от π суммы плоских углов при вершинах тетраэдра. Ясно, что $\delta = 0$ для равногранных тетраэдров и только для них. Введем также следующие обозначения: d – длина наибольшего ребра тетраэдра, h – длина кратчайшей из его апофем (высот граней).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если неравногранный тетраэдр имеет геодезическую типа (n, m) , то*

$$m + n < \frac{3d}{4h \sin(\delta/2)} + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть значение δ достигается в вершине D . Предположим, что $\sigma(D) > \pi$, противоположный случай рассматривается так же. Итак, $\delta = \sigma(D) - \pi$. Любая геодезическая g типа (n, m) , $m \geq 1$, зацепляется за вершину D звеньями a_1, b_1 (предложение 4). Последовательно обозначив через a_j, b_j , $j \leq 2n + 2m$, остальные пары звеньев, будем разворачивать тетраэдр на плоскость относительно ребер, пересекаемых этими звеньями. Звенья $a_2, \dots, a_{2n+2m-1}$ при этом выстроятся в отрезок a , звенья $b_2, \dots, b_{2n+2m-1}$, которые по предложению 5 пересекают ту же последовательность ребер, выстроятся в отрезок b . Угол между этими отрезками равен δ (лемма 4). Развертка представляет собой цепь из $2n + 2m - 2$ треугольников, отрезки a и b проходят вдоль всех треугольников. Возьмем произвольную тройку последовательных треугольников в цепи. Отрезок a не может пересечь четыре их стороны, выходящие из одной вершины. Доказательство согласно теореме 1 достаточно провести для правильного тетраэдра. В этом случае утверждение очевидно: два из данных четырех отрезков будут лежать на одной прямой. Итак, a пересечет две стороны, не имеющие общих вершин. Поэтому расстояние между точками пересечения не меньше, чем наименьшая высота этих треугольников (доказательство будет легким упражнением для читателя). Таким образом, длина пересечения отрезка a с каждой тройкой последовательных треугольников не меньше h . Поскольку цепь состоит из $2n + 2m - 2$ треугольников, имеем

$$a \geq \left[\frac{2n + 2m - 2}{3} \right] h \geq \left(\frac{2n + 2m - 4}{3} \right) h.$$

Для b оценка такая же. Продолжив отрезки a и b до их пересечения, получим две стороны треугольника. Их длины превосходят $\left(\frac{2n + 2m - 4}{3} \right) h$, угол

между ними равен δ , а третья сторона меньше d , поскольку ее концы лежат на одном ребре тетраэдра (предложение 5). Следовательно,

$$\frac{d}{2 \sin(\delta/2)} > \left(\frac{2n + 2m - 4}{3} \right) h,$$

откуда

$$n + m < \frac{3d}{4h \sin(\delta/2)} + 2.$$

Из предложения 9 и следствия 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. Число звеньев любой геодезической тетраэдра не превосходит $\frac{3d}{h \sin(\delta/2)} + 8$.

Предложение 9 позволяет оценить общее число различных геодезических у неравностороннего тетраэдра. Обозначим через $r \in \{0, 1, 2\}$ число подходящих пар у тетраэдра. Пусть также $\psi(x)$ – количество различных неупорядоченных пар натуральных чисел (n, m) таких, что $\text{НОД}(n, m) = 1$ и $n + m \leq x$, $x \in \mathbb{R}$. Имеет место оценка

$$\psi(x) \leq \frac{3x^2}{2\pi^2} + O(x \ln x),$$

где $O(y) \leq Cy$ при $y \rightarrow +\infty$ [13; гл. 34, § 2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Общее число неизоморфных геодезических тетраэдра не превосходит $2r\psi\left(\frac{3d}{4h \sin(\delta/2)} + 2\right)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Число геодезических не превосходит $\frac{27rd^2}{4\pi^2 h^2 \delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\delta}\right)$ при $\delta \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой пары взаимно простых чисел n, m при $n \neq m$ на тетраэдре существуют две обобщенные геодезические типа (n, m) , соответствующие данной подходящей паре ребер, для пар $(1, 0)$ и $(1, 1)$ – по одной геодезической. Поэтому в силу предложения 9 для одной подходящей пары число геодезических не превосходит $2\left(\psi\left(\frac{3d}{4h \sin(\delta/2)} + 2\right) - 1\right) + 2$. Умножив это число на r , получаем требуемую оценку.

Итак, число различных геодезических неравностороннего тетраэдра может быть сколь угодно большим, но всегда конечно.

ГИПОТЕЗА 1. Для любого натурального N существует тетраэдр, имеющий ровно N неизоморфных геодезических.

Идея возможного доказательства достаточно проста: берем тетраэдр с подходящей парой $\{AB, CD\}$, имеющий более N геодезических (предложение 8), и непрерывно деформируем его, приводя к тетраэдру без геодезических (пример 1), при этом пара $\{AB, CD\}$ все время остается подходящей. Остается показать (автору не удалось этого сделать), что деформация может быть выбрана так, что число геодезических меняется непрерывно, т.е. увеличивается или уменьшается не более чем на единицу в процессе деформации.

Автор благодарен В. М. Тихомирову за постановку задачи и полезные обсуждения, а также рецензенту за ряд ценных замечаний, касающихся вводной части работы и библиографии.

Список литературы

- [1] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, “Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей”, *УМН*, **2**:1 (1947), 166–217.
- [2] J. Franks, “Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms”, *Invent. Math.*, **108**:2 (1992), 403–418.
- [3] V. Bangert, “On the existence of closed geodesics on two-spheres”, *Internat. J. Math.*, **4**:1 (1993), 1–10.
- [4] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, ОГИЗ, М., Л., 1948; англ. пер.: A. D. Alexandrov, *Selected works. Part II. Intrinsic geometry of convex surfaces*, ed. S. S. Kutateladze, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [5] А. В. Погорелов, “Квази-геодезические линии на выпуклой поверхности”, *Матем. сб.*, **25(62)** (1949), 275–306.
- [6] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer, New York, 1978.
- [7] Г. А. Гальперин, “О теореме Люстерника–Шнирельмана для многогранников”, *УМН*, **46**:6 (1991), 207–208; англ. пер.: G. A. Gal’perin, “On the Lyusternik–Shnirel’man theorem for polyhedra”, *Russian Math. Surveys*, **46**:6 (1991), 219–220.
- [8] G. A. Galperin, “Convex polyhedra without simple closed geodesics”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **8**:1 (2003), 45–58.
- [9] A. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “Extreme networks”, *Acta Appl. Math.*, **66**:3 (2001), 251–317.
- [10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003.
- [11] A. V. Zorich, “Geodesics on flat surfaces”, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, vol. III: Invited lectures (Madrid, Spain, 2006), EMS Publ. House, Zürich, 2006, 121–146.
- [12] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, М., 1989.
- [13] А. А. Бухштаб, *Теория чисел*, Просвещение, М., 1966.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimir_protasov@yahoo.com

Поступила в редакцию
 16.01.2006 и 05.07.2006