Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Бринкхаус, В. М. Тихомиров, Двойственность и исчисление выпуклых объектов (теория и приложения), *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 2, 29–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:31:42

УДК 517

Я. Бринкхаус, В. М. Тихомиров**Двойственность и исчисление
выпуклых объектов (теория и приложения)**

В работе представлен новый подход к выпуклому исчислению, позволяющий с единой точки зрения изучить двойственность и исчисление различных выпуклых объектов. Подход основан на возможности сопоставить каждому выпуклому объекту (выпуклому множеству или выпуклой функции) некоторый выпуклый конус без потери информации об объекте. Из теоремы двойственности для конусов выводятся в качестве следствия теоремы двойственности и для остальных выпуклых объектов. В работе исчерпывается (с некоторой точно формулируемой точки зрения) тема “Формулы двойственности и исчисления выпуклых объектов”.

Библиография: 5 названий.

Цель настоящей работы – представить новый подход к выпуклому исчислению, позволяющий с единой точки зрения рассмотреть двойственность и исчисление различных выпуклых объектов. Он основан на возможности сопоставить с каждым выпуклым объектом (выпуклым множеством или выпуклой функцией) некоторый выпуклый конус без потери информации об объекте. С помощью общей конструкции определяется полный список двойственных операторов и бинарных операций над основными выпуклыми объектами (что приводит к определению трех новых операций над выпуклыми функциями и аффинными многообразиями). Из теоремы двойственности для конусов выводятся в качестве следствия теоремы двойственности и для остальных выпуклых объектов. Систематически используется то, что алгебраическая сумма и пересечение двух выпуклых множеств являются образом и прообразом декартова произведения этих множеств при соответствующих линейных операторах. С помощью двух формул исчисления полярного образа и прообраза конусов выводятся все формулы исчисления двойственных объектов, что приводит к исчерпывающему списку формул выпуклого исчисления. Во второй части работы даны приложения выпуклой двойственности и выпуклого исчисления к самым разнообразным областям математики.

В работе исчерпывается (с некоторой точно формулируемой точки зрения) тема “Формулы двойственности и исчисления выпуклых объектов”. Неполный список этих формул содержится в [1] и [2], а сама тема ведет начало с первой работы Г. Минковского [3] по выпуклому анализу множеств и первой работы В. Фенхеля [4] по выпуклому анализу функций, см. также фундаментальную книгу [5].

Теория

§ 1. Введение

Говорят, что векторное пространство X находится в двойственности с векторным пространством Y , если существует билинейная форма $d: Y \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $d(y, x) = \langle y, x \rangle$, такая, то для каждого $x \in X \setminus \{0_X\}$ найдется такой элемент $y = y(x)$, что $\langle y(x), x \rangle \neq 0$, и для каждого $y \in Y \setminus \{0_Y\}$ найдется такой элемент $x = x(y)$, что $\langle y, x(y) \rangle \neq 0$. В этом случае иногда будем писать так: $X \leftarrow d \rightarrow Y$. Двойственность порождает (слабые) топологии $\sigma(X, Y)$ в X и $\sigma(Y, X)$ в Y , базы которых составляют конечные пересечения множеств $\{U_{y,\alpha}\}_{y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}}$, $U_{y,\alpha} = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle < \alpha\}$, в X и множеств $\{U_{x,\beta}\}_{x \in X, \beta \in \mathbb{R}}$, $U_{x,\beta} = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle < \beta\}$, в Y . При этом X и Y становятся локально выпуклыми векторными пространствами, причем Y – пространством, дуальным к X (это соотношение будем записывать в форме $Y = X^d$), а X – пространством, дуальным к Y .

Множества $U_{y,\alpha}$ и $U_{x,\beta}$ называются открытыми полупространствами, $H_{y,\alpha} = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle \leq \alpha\}$ и $H_{x,\beta} = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle \leq \beta\}$ называются замкнутыми полупространствами, $\Gamma_{y,\alpha} = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle = \alpha\}$ и $\Gamma_{x,\beta} = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle = \beta\}$ называются гиперплоскостями, $\Gamma_{x,0} = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle = 0\}$ и $\Gamma_{y,0} = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle = 0\}$ – нуль-гиперплоскостями.

1.1. Выпуклые объекты. Пусть X и Y – векторные пространства в двойственности. В основной части настоящей работы рассматриваются конечномерные пространства: пространство векторов-столбцов $X = \mathbb{R}^n$ и двойственное ему пространство векторов-строк $Y = X' = (\mathbb{R}^n)' = (\mathbb{R}^n)^T$ (индекс T всегда будет обозначать транспонирование матриц, в частности векторов) с формой $\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, являющейся произведением $y \cdot x$ вектора-строки на вектор-столбец. Модули векторов $|x| = \sqrt{x^T \cdot x}$ и $|y| = \sqrt{y \cdot y^T}$ являются нормами, определяющими топологию в соответствующих пространствах.

Другая важная пара пространств в двойственности такова: X – нормированное пространство, $Y = X^*$ – его сопряженное, $d(x^*, x) = \langle x^*, x \rangle$ – действие линейного функционала $x^* \in X^*$ на элемент $x \in X$.

Далее исследуются два типа выпуклых объектов: выпуклые множества и выпуклые функции. Подмножество пространства X называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит весь отрезок, их соединяющий. Пустое множество считается выпуклым по определению. Совокупность $\{A\}$ всех выпуклых подмножеств векторного пространства X мы обозначаем $\text{Co}(X)$, а совокупность непустых выпуклых объектов мы называем совокупностью *регулярных* выпуклых множеств и обозначаем $\text{Co}(X)^r$. Различные классы выпуклых множеств определяются как подмножества X , которые вместе со своими двумя точками x_i , $i = 1, 2$, содержат все точки вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где пара чисел (α_1, α_2) принадлежит некоторому выпуклому множеству $\mathfrak{a} \subset (\mathbb{R}^2)^T$, содержащему отрезок $I = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$. Так описываются семейства

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(X) = \{O \subseteq X \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in O \ \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{a} \ \forall x_i \in O, i = 1, 2\}.$$

Если $(0, 0) \in \mathfrak{a}$, то каждое множество из $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}$ содержит начало координат по определению.

Линейные операторы приводят к двум операторам над выпуклыми множествами. Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ – два других векторных пространства в двойственности и $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный оператор. Тогда

– $\Lambda A \in \text{Co}(\tilde{X})$ означает *образ* $A \in \text{Co}(X)$ при действии оператора Λ , что определяет оператор

$$\Lambda: \text{Co}(X) \rightarrow \text{Co}(\tilde{X});$$

– $\Lambda^{-1} A \in \text{Co}(X)$ означает *прообраз* $A \in \text{Co}(\tilde{X})$ при действии оператора Λ , что определяет оператор

$$\Lambda^{-1}: \text{Co}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Co}(X).$$

Операторы образа и прообраза выпуклых множеств при линейном отображении $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ приводят к операторам $\Lambda: \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(X) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(\tilde{X})$ и $\Lambda^{-1}: \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}(X)$.

Важнейшими классами выпуклых множеств для нас являются:

- *выпуклые конусы* $\text{Cone}(X) = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}_+^2)^T}$, задаваемые первым ортантом (в частности, предполагается, что все выпуклые конусы содержат начало координат);
- *выпуклые множества* $\text{Co}(X) = \mathcal{O}_I$, задаваемые отрезком I .

Кроме того, будем рассматривать *подпространства* $\text{Lin}(X) = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}^2)^T}$; *аффинные многообразия* $\text{Aff}(X) = \mathcal{O}_J$, где $J = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$; *нуль-множества* $\text{Co}_0(X) = \mathcal{O}_{\Delta_+}$, где $\Delta_+ = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1\}$ – выпуклые множества, содержащие нуль; *симметричные множества* $\text{Co}_{\text{sym}}(X) = \mathcal{O}_{\square}$, где $\square = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 1\}$ – выпуклые множества, симметричные относительно начала координат; наконец, класс, не представимый в виде $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}$, а именно класс *шаров* $\text{Ball}(X)$, состоящих из таких симметричных множеств B , что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB = X$ (т.е. содержащих начало координат своей внутренней точкой) и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}B = \{0\}$ (т.е. являющихся ограниченными множествами). При этом имеют место такие вложения:

$$\begin{aligned} \text{Lin}(X) \subset \text{Aff}(X) \subset \text{Co}(X) \supset \text{Co}_0(X) \supset \text{Cone}(X) \supset \text{Lin}(X), \\ \text{Ball}(X) \subset \text{Co}_{\text{sym}}(X) \subset \text{Co}_0(X). \end{aligned}$$

При рассмотрении образов (прообразов) шаров при действии линейных операторов Λ будем предполагать, что Λ – сюръективный (соответственно инъективный) оператор.

Параллельно с выпуклыми множествами рассмотрим выпуклые функции. Функцию $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ – расширенная вещественная прямая, называют *выпуклой*, если ее *надграфик* (или *эпиграф*)

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq f(x)\}$$

является выпуклым множеством в $X \times \mathbb{R}$. Выпуклость эпиграфа эквивалентна выпуклости *строгого эпиграфа*

$$\text{sepi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha > f(x)\}.$$

Совокупность выпуклых функций на X обозначим через $\text{Co}^f(X)$. Выпуклую функцию называют *собственной*, если она не принимает значения $-\infty$ и не равна тождественно $+\infty$. *Эффективной областью* собственной выпуклой функции f на X называется множество $\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$.

Собственные выпуклые функции – это вещественные функции, определенные на непустых подмножествах X , являющихся их эффективными областями. Собственная выпуклая функция непрерывна в каждой внутренней точке эффективной области. Совокупность собственных выпуклых функций мы называем совокупностью *регулярных* выпуклых функций и обозначаем $\text{Co}^f(X)^r$.

Действия линейного оператора приводят к операторам и над функциями. Пусть $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный оператор. Тогда

- образ $\Lambda f \in \text{Co}^f(\tilde{X})$ функции $f \in \text{Co}^f(X)$ определяется как $(\Lambda f)(\tilde{x}) = \inf\{f(x) \mid \Lambda x = \tilde{x}\}$;
- прообраз $\Lambda^{-1}f \in \text{Co}^f(X)$ функции $f \in \text{Co}^f(\tilde{X})$ определяется равенством $(\Lambda^{-1}f)(x) = f(\Lambda x)$.

Несобственные выпуклые функции сами по себе не представляют интереса, но мы допускаем их к рассмотрению, так как они иногда возникают как образы и прообразы собственных выпуклых функций при линейных отображениях.

Важнейшими для нас классами выпуклых функций являются

- *сублинейные функции* $\text{Cone}^f(X)$ (их надграфики являются конусами);
- *выпуклые функции* $\text{Co}^f(X)$ (их надграфики, как было сказано, – выпуклые множества в $X \times \mathbb{R}$).

Кроме того, мы будем рассматривать *линейные функции* $\text{Lin}^f(X)$, их графики – гиперплоскости, проходящие через нуль; *аффинные функции* $\text{Aff}^f(X)$, их графики – гиперплоскости; *квазинормы* или *калибры* $\text{Co}_0^f(X)$ – сублинейные функции, принимающие значения в $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$; *полунормы* $\text{Co}_{\text{sym}}^f(X)$ – симметричные калибры и *нормы* $\text{Norm}(X)$.

Проясним суть параллелизма между рассматриваемыми классами выпуклых множеств и выпуклых функций. Выпуклую функцию называют *замкнутой*, если ее надграфик замкнут. Имеется биекция между замкнутыми калибрами и замкнутыми нуль-множествами: каждой замкнутой функции $d \in \text{Co}_0^f(X)$ соответствует множество $D = \{x \mid d(x) \leq 1\} \in \text{Co}_0(X)$ и наоборот, каждому замкнутому множеству $D \in \text{Co}_0(X)$ соответствует *функция Минковского* $(x \mapsto \mu D(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x/\rho \in D\}) \in \text{Co}_0^f(X)$. Эта биекция порождает биекцию замкнутых полунорм и замкнутых симметрических множеств, а также норм и замкнутых шаров. Для остальных пар функций и множеств параллелизм очевиден.

Имеют место такие вложения:

$$\begin{aligned} \text{Lin}^f(X) \subset \text{Aff}^f(X) \subset \text{Co}^f(X) \supset \text{Cone}^f(X) \supset \text{Co}_0^f(X) \supset \text{Lin}^f(X), \\ \text{Norm}(X) \subset \text{Co}_{\text{sym}}^f(X) \subset \text{Co}_0^f(X). \end{aligned}$$

Образы и прообразы выпуклых функций при линейных отображениях сохраняют описанные классы за одним исключением: нормы требуют дополнительного предположения о сюръективности (инъективности) линейного оператора при рассмотрении образов (прообразов) норм.

Элементы $\text{Lin}(X)$ будем обозначать буквой L , $\text{Aff}(X)$ – буквой M , $\text{Co}(X) – A$, $\text{Co}_0(X) – D$, $\text{Cone}(X) – C$; элементы $\text{Cone}^f(X) – p$, $\text{Co}^f(X) – f$, $\text{Norm}(X) – N$.

1.2. Пример. В этом пункте мы эвристически (т.е. наглядно и без детальных доказательств) на примере одного класса выпуклых множеств постараемся объяснить суть разрабатываемого в настоящей работе общего подхода к двойственности и исчислению выпуклых объектов.

В качестве класса выпуклых объектов мы выбираем $\text{Co}_0(X)$ – совокупность выпуклых множеств в X , содержащих нуль. Поясним на этом примере более подробно тезисы, сформулированные в самом начале работы. Наши действия таковы.

А) Каждому выпуклому объекту сопоставляется выпуклый конус. В рассматриваемом примере множеству $D \in \text{Co}_0(X)$ сопоставляется конус $c_{\text{co}}(D) = \text{cone}(D \times 1) = \{(\alpha x, \alpha) \mid x \in D, \alpha \geq 0\}$ (коническая оболочка множества D , “поднятого на единицу”). Такой оператор называют *оператором Хёрмандера*; мы будем обозначать его действие на множество D через $h(D)$.

В) *Общая конструкция, приводящая к списку бинарных операций.* На произведении $Z \times Z$, где Z – векторное пространство, определены два оператора: сумма “ $+_Z$ ” и прообраз диагонального оператора Δ_Z^{-1} : $+_Z(z_1, z_2) = z_1 + z_2$, $\Delta_Z(z) = (z, z)$, $\Delta_Z^{-1}(z_1, z_2) = z = z_1 = z_2$, если $z_1 = z_2$, и пустое множество, если $z_1 \neq z_2$. Сочетания $(\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})$ и $(+_X, +_{\mathbb{R}})$ следующим образом определяют четыре бинарные операции над $\text{Co}_0(X)$ (мы обозначаем это def).

$$\begin{aligned} 1) \quad & (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(D_1) \times h(D_2)) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})\{((\alpha_1 x_1, \alpha_1), (\alpha_2 x_2, \alpha_2)) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2, \alpha_1 = \alpha_2) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} h(D_1 \cap D_2). \end{aligned}$$

Мы получили первую бинарную операцию $(D_1, D_2) \mapsto D_1 \cap D_2$ – *пересечение*. Аналогично получаем остальные три.

$$\begin{aligned} 2) \quad & (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(D_1) \times h(D_2)) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})\{((\alpha_1 x_1, \alpha_1), (\alpha_2 x_2, \alpha_2)) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 = \alpha_2) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} h(D_1 \oplus D_2), \end{aligned}$$

где через $\oplus$ обозначена *алгебраическая сумма* множеств D_1 и D_2 : $D_1 \oplus D_2 = \{x = x_1 + x_2 \mid x_i \in D_i, i = 1, 2\}$. (Обычно эту операцию обозначают знаком “ $+$ ”, но мы даем другое обозначение, чтобы отделить его от символа суммирования функций.)

$$\begin{aligned} 3) \quad & (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(h(D_1) \times h(D_2)) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})\{((\alpha_1 x_1, \alpha_1), (\alpha_2 x_2, \alpha_2)) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2, \alpha_1 + \alpha_2) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} h(D_1 \otimes D_2), \end{aligned}$$

где через $\otimes$ обозначена так называемая *сумма Келли* множеств D_1 и D_2 : $D_1 \otimes D_2 = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha D_1 \cap (1 - \alpha) D_2$.

$$\begin{aligned}
4) \quad & (+_X, +_{\mathbb{R}})(h(D_1) \times h(D_2)) \\
& \stackrel{\text{def}}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}})\{((\alpha_1 x_1, \alpha_1), (\alpha_2 x_2, \alpha_2)) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 + \alpha_2) \mid x_i \in D_i, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} h(D_1 \text{ со } \cup D_2),
\end{aligned}$$

где через $\text{со } \cup$ обозначена *выпуклая оболочка объединения* множеств D_1 и D_2 : $D_1 \text{ со } \cup D_2 = \{x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \mid x_i \in D_i, i = 1, 2, 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все приведенные операции $(\cap, \oplus, \otimes, \text{со } \cup)$ известны и могут быть описаны непосредственно в самом пространстве X с помощью операторов $+_X$ и Δ_X^{-1} и оператора $\alpha_X(x_1, x_2) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $\alpha \in [0, 1]$. Так что

$$\begin{aligned}
D_1 \cap D_2 &= \Delta_X^{-1}(D_1 \times D_2), \quad D_1 \oplus D_2 = +_X(D_1 \times D_2), \\
D_1 \otimes D_2 &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(D_1 \times D_2), \\
D_1 \text{ со } \cup D_2 &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (+_X \circ \alpha_X)(D_1 \times D_2).
\end{aligned}$$

Последовательное применение изложенного метода приведет к некоторым новым операциям и даст полный (в некотором точном смысле) список всех бинарных операций над выпуклыми объектами.

Теперь мы можем приступить к построению для нуль-множеств двойственного объекта, а затем к теореме двойственности и формулам исчисления для двойственных объектов.

С) *Построение двойственного объекта.* Сначала определим двойственный объект для конуса. Пусть Z – векторное пространство в двойственности со своим сопряженным Z' и $C \subseteq Z$ – выпуклый конус. *Сопряженным конусом* называется конус C' в сопряженном пространстве:

$$C' = \{z' \in Z' \mid \langle z', z \rangle \geq 0 \ \forall z \in C\}.$$

Двойственный объект $D^{\mathcal{D}} \in \text{Co}_0(Z')$ для $D \in \text{Co}_0(Z)$ строится по правилу

$$\text{cl } c_{\text{co}}(D) = (c_{\text{co}}(D^{\mathcal{D}}))' = (h(D))',$$

где $\text{cl } S$ означает замыкание множества S . Элементарный подсчет показывает, что

$$(h(D))' = \text{cl } h(-D^{\circ}), \quad (\text{def})$$

где $D^{\circ} = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \leq 1 \ \forall x \in D\}$ – *поляр* множества D .

Поэтому двойственным объектом для $D^{\mathcal{D}}$ разумно считать $(-D^{\circ})$.

Д) *Теория двойственности для поляр.* Теория двойственности выпуклых объектов строится у нас на базе следующих соотношений для конусов.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ КОНУСОВ. Пусть X и Y – два конечномерных пространства в двойственности и C – конус из $\text{Cone}(X)$. Тогда

$$C'' = \text{cl } C. \quad (\text{D})$$

Относительной *внутренностью* $\text{ri } A$ выпуклого множества A называют внутренность A относительно его аффинной оболочки.

ФОРМУЛЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОБРАЗА И ПРООБРАЗА КОНУСОВ. Пусть X и Y – пара конечномерных векторных пространств в двойственности, $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ – другая пара конечномерных пространств в двойственности и

$$\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$$

– линейный оператор. Тогда верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} 1) (\Lambda C)' &= (\Lambda')^{-1} C' \quad \forall C \in \text{Cone}(X); \\ 2) (\Lambda^{-1} C')' &= \Lambda' C' \quad \forall C \in \text{Cone}(\tilde{X}), \text{ если } \text{ri}(C) \cap \Lambda X \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{Cal})$$

(Эти утверждения доказываются позже.) Отсюда немедленно следует

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЛЯР. Если $D \in \text{Co}_0(X)$, то $D^{\circ\circ} = \text{cl } D$.

Это утверждение можно доказать, используя теорему двойственности для конусов (D) и определение (def) через “конификацию” двойственного оператора для нуль-множеств. Действительно,

$$\text{cl } h(D) \stackrel{(D)}{=} (h(D))'' \stackrel{\text{def}}{=} ((h(D))')' \stackrel{(\text{def})}{=} \text{cl}(h(D^{\circ\circ})),$$

т.е. $D^{\circ\circ} = \text{cl } D$.

Тем самым, $D = \{x \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \quad \forall y \in D^{\circ}\}$ для любого замкнутого нуль-множества D . Таким образом, смысл теоремы двойственности для поляр состоит в эквивалентности геометрического и алгебраического описаний замкнутых нуль-множеств: *каждое замкнутое нуль-множество является решением системы неоднородных нестрогих линейных неравенств, где в правой части стоит ≤ 1 .*

ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОЛЯР.

$$\begin{aligned} 1) (\Lambda D)^{\circ} &= (\Lambda')^{-1} D^{\circ}; \\ 2) (\Lambda^{-1} D)^{\circ} &= \Lambda' D^{\circ}, \text{ если } \text{ri } D \cap \Lambda X \neq \emptyset; \\ 3) (D_1 \cap D_2)^{\circ} &= D_1^{\circ} \text{ co } \cup D_2^{\circ}, \text{ если } \text{ri } D_1 \cap \text{ri } D_2 \neq \emptyset; \\ 4) (D_1 \oplus D_2)^{\circ} &= D_1^{\circ} \otimes D_2^{\circ}; \\ 5) (D_1 \otimes D_2)^{\circ} &= D_1^{\circ} \oplus D_2^{\circ}, \text{ если } \text{ri } D_1 \cap \text{ri } D_2 \neq \emptyset; \\ 6) (D_1 \text{ co } \cup D_2)^{\circ} &= D_1^{\circ} \cap D_2^{\circ}. \end{aligned} \quad (\text{Cal})$$

Все эти формулы доказываются совершенно одинаково с помощью определения (def) через конификации, двойственности

$$(+)' = \Delta, \quad (\Delta^{-1})' = + \quad (*)$$

и формулы (Cal) исчисления образа и прообраза для конусов. Докажем формулу 3):

$$\begin{aligned} \text{cl } h(-(D_1 \cap D_2)^{\circ}) &\stackrel{\text{def}}{=} ((\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(D_1) \times h(D_2)))' \\ &\stackrel{(\text{Cal})}{=} ((\Delta_X^{-1})', (\Delta_{\mathbb{R}}^{-1})')((h(D_1))' \times (h(D_2))') \\ &\stackrel{\text{def}, (*)}{=} \text{cl}((+_X', +_{\mathbb{R}})(h(-D_1^{\circ}) \times (h(-D_2^{\circ}))) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}(h(-(D_1^{\circ} \text{ co } \cup D_2^{\circ}))). \end{aligned}$$

Все дальнейшее проходит по этой же схеме: сначала (§ 2) определяются бинарные операции прямым способом (как в замечании 1, с помощью операторов $+_X$, Δ_X^{-1} и α_X); § 3 посвящен “конификации” выпуклых объектов – каждому выпуклому объекту O сопоставляется некоторый конус $c(O)$ и с помощью этого конуса по единой методике еще раз определяются все бинарные операции; в § 4 строится теория двойственности выпуклых объектов; в § 5 доказываются все формулы выпуклого исчисления; наконец, в § 6 даются некоторые комментарии. Вторая часть статьи посвящена приложениям построенной теории к ряду проблем анализа и геометрии.

§ 2. Бинарные операции над выпуклыми объектами

Сосредоточим сначала свое внимание на двух парах классов объектов:

$$(\text{Co}(X), \text{Cone}(X)) \quad \text{и} \quad (\text{Co}^f(X), \text{Cone}^f(X)),$$

содержащих все остальные.

Рассмотрим следующие три оператора: один бинарный – из $X \times X$ в X , один “антибинарный” – из X в $X \times X$ и семейство операторов из $X \times X$ в себя. Это

– оператор сложения

$$+ = +_X : X \times X \rightarrow X, \quad +_X(x_1, x_2) = x_1 + x_2;$$

– диагональный оператор

$$\Delta = \Delta_X : X \rightarrow X \times X, \quad \Delta_X(x) = (x, x);$$

– оператор “ α -умножения”

$$\alpha_X : X \times X \rightarrow X \times X, \quad \alpha_X(x_1, x_2) = (\alpha x_1, (1 - \alpha)x_2),$$

где $\alpha \in [0, 1]$.

Приведенные определения основаны на следующих наблюдениях: алгебраическая сумма (соответственно пересечение) выпуклых множеств $A_i \in \text{Co}(X)$, $i = 1, 2$, – это образ (соответственно прообраз) декартова произведения $A_1 \times A_2$ при линейных отображениях $+_X$ (соответственно Δ_X). Эти бинарные операции двойственны друг другу в силу того, что $(+_X)' = \Delta_X$ и $(\Delta_X)' = +_X$; соотношения $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ (соответственно $x = \alpha x_1 = (1 - \alpha)x_2$) выражаются как $x \in (+_X \circ \alpha_X)(x_1, x_2)$ (соответственно $x \in (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(x_1, x_2)$). Эти отношения между x и $\alpha_X(x_1, x_2)$ двойственны друг другу.

С помощью введенных операций будут определены бинарные операции над всеми классами выпуклых объектов, о которых шла речь выше, включая четыре новых, для которых пока нет наименований, так что для их обозначения мы используем “карточную” символику ($\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$) и (на первых порах) карточные наименования (пик-, черв-, бубен- и трэф-операции). Приведем соответствующие формулы для описанных операторов (используя обозначение $\vee(r, s) = \max(r, s)$). Мы определяем бинарную операцию, лишь только если

оба выпуклых объекта являются *регулярными*. Но надо иметь в виду, что применение бинарной операции может и выводить из класса регулярности. Рассмотрение лишь регулярных выпуклых объектов делает все формулы точно определенными и все бинарные операции ассоциативными. Отметим, что некоторые операции можно ввести, не предполагая регулярности, но тогда, вообще говоря, нарушается ассоциативность. Вот список всех бинарных операций.

1) Операции над выпуклыми конусами $\text{Cone}(X)$:

- $\Delta_X^{-1}(C_1 \times C_2) = \{x \mid x \in C_i, i = 1, 2\}$ – пересечение $C_1 \cap C_2$;
- $+_X(C_1 \times C_2) = \{x = x_1 + x_2 \mid x_i \in C_i, i = 1, 2\}$ – алгебраическая сумма $C_1 \oplus C_2$ (напомним: мы пишем $\oplus$, чтобы отличить эту операцию от суммирования функций).

2) Операции над (непустыми) выпуклыми множествами $\text{Co}(X)^r$:

- пересечение $A_1 \cap A_2$:

$$\Delta_X^{-1}(A_1 \times A_2) = \{x \mid x \in A_i, i = 1, 2\};$$

- алгебраическая сумма $A_1 \oplus A_2$:

$$\times A_2) = \{x = x_1 + x_2 \mid x_i \in A_i, i = 1, 2\};$$

- сумма Келли $A_1 \otimes A_2$:

$$\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2) = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha A_1 \cap (1 - \alpha) A_2;$$

- выпуклая оболочка объединения $A_1 \text{ co } \cup A_2$:

$$\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (+_X \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2) = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2.$$

3) Операции над сублинейными функциями $\text{Cone}^f(X)^r$:

- максимум из функций $p_1 \vee p_2$:

$$\vee(p_1(x), p_2(x)) = \max(p_1(x), p_2(x));$$

- сумма Келли функций $p_1 \otimes p_2$:

$$\inf\{\vee(p_1(x_1), p_2(x_2)) \mid x = +_X(x_1, x_2)\} = \inf\{p_1(x_1) \vee p_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2\};$$

- сумма функций $p_1 + p_2$:

$$+_R(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x) + p_2(x);$$

- инфимальная конволюция функций $p_1 \oplus p_2$:

$$\inf\{+_R(p_1(x_1), p_2(x_2)) \mid x = +_X(x_1, x_2)\} = \inf\{p_1(x_1) + p_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2\}.$$

4) Операции над “собственными” выпуклыми функциями $\text{Co}^f(X)^r$:

- максимум из функций $f_1 \vee f_2$:

$$\vee(f_1(x_1), f_2(x_2)) = \max(f_1(x), f_2(x));$$

- сумма Келли функций $f_1 \otimes f_2$:

$$\inf\{\vee(f_1(x_1), f_2(x_2)) \mid x = +_X(x_1, x_2)\} = \inf\{f_1(x_1) \vee f_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2\};$$

– сумма функций $f_1 + f_2$:

$$+_{\mathbb{R}}(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x);$$

– инфимальная конволюция функций $f_1 \oplus f_2$:

$$\inf\{+_{\mathbb{R}}(f_1(x_1), f_2(x_2)) \mid x = +_X(x_1, x_2)\} = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2\};$$

– пик-максимум функций $f_1 \spadesuit f_2$ (или инверсная сумма надграфов):

$$\begin{aligned} & \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{(\vee \circ \alpha_{\mathbb{R}})(f_1(x_1), f_2(x_2)) \mid \Delta_X(x) = \alpha_X(x_1, x_2)\} \\ & = \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha f_1(x_1) \vee (1 - \alpha)f_2(x_2) \mid x = \alpha x_1 = (1 - \alpha)x_2\}; \end{aligned}$$

– черв-операция над функциями $f_1 \heartsuit f_2$:

$$\begin{aligned} & \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{(\vee \circ \alpha_{\mathbb{R}})(f_1(x_1), f_2(x_2)) \mid x = (+_X \circ \alpha)(x_1, x_2)\} \\ & = \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha f_1(x_1) \vee (1 - \alpha)f_2(x_1) \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\}; \end{aligned}$$

– бубен-сумма функций $f_1 \diamond f_2$:

$$\begin{aligned} & \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{(+_{\mathbb{R}} \circ \alpha_{\mathbb{R}})(f_1(x_1), f_2(x_2)) \mid \Delta_X(x) = \alpha_X(x_1, x_2)\} \\ & = \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha f_1(x_1) + (1 - \alpha)f_2(x_2) \mid x = \alpha x_1 = (1 - \alpha)x_2\}; \end{aligned}$$

– выпуклая оболочка минимума функций $(f_1 \text{ со } \wedge f_2)$:

$$\begin{aligned} & \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} \{(+_{\mathbb{R}} \circ \alpha_{\mathbb{R}})(f_1(x_1), f_2(x_1)); x = (+_X \circ \alpha_X)(x_1, x_2)\} \\ & = \inf_{0 \leq \alpha_{\mathbb{R}} \leq 1} \{\alpha f_1(x_1) + (1 - \alpha)f_2(x_2) \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\}. \end{aligned}$$

Операции $\diamond$, $\heartsuit$, возникающие естественным и стандартным образом, нам ранее не встречались.

Из четырех операций для выпуклых множеств в случае конусов две исчезают: $\cap = \otimes$ и $\oplus = \text{со } \cup$; из восьми операций для выпуклых функций в случае сублинейных функций исчезают четыре: $\vee = \spadesuit$, $\otimes = \heartsuit$, $+$ и $\oplus = \text{со } \wedge$.

В процессе продумывания темы об операциях над выпуклыми объектами возникли некоторые вопросы по поводу аффинных многообразий. Суть дела в том, что существуют две геометрии (в частности, на прямой, на плоскости, в n -мерном пространстве, в любом векторном пространстве): выпуклая геометрия и аффинная геометрия. Аффинные многообразия принадлежат обоим, а остальные объекты – только одной – выпуклой. Это обстоятельство дает возможность построить замкнутую теорию двойственности аффинных многообразий, рассматриваемых как объект аффинной геометрии. Все это привело к следующим операциям над аффинными многообразиями, не являющимися подпространствами (эти операции выстраиваются параллельно операциям над выпуклыми множествами, но при этом α_X рассматриваются для $\alpha \in \mathbb{R}$).

5) Операции над аффинными многообразиями $\text{Aff}(X)^r$:

– пересечение $M_1 \cap M_2$:

$$\Delta_X^{-1}(M_1 \times M_2) = \{x \mid x \in M_i, i = 1, 2\};$$

– алгебраическая сумма $M_1 \oplus M_2$:

$$+_X(M_1 \times M_2) = \{x = x_1 + x_2 \mid x_i \in M_i, i = 1, 2\};$$

– треф-пересечение $M_1 \clubsuit M_2$:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(M_1 \times M_2) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha M_1 \cap (1 - \alpha) M_2;$$

– аффинная оболочка объединения $M_1 \text{ aff } M_2$:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (+_X \circ \alpha_X)(M_1 \times M_2) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha M_1 + (1 - \alpha) M_2.$$

И снова мы видим, как естественным путем возникает не встречавшаяся нам раньше операция $\clubsuit$.

Посмотрим, как выглядит новая бинарная операция на аффинных многообразиях для двух гиперплоскостей. Имеем

$$\{x \in X \mid \langle y_1, x \rangle = 1\} \clubsuit \{x \in X \mid \langle y_2, x \rangle = 1\} = \{x \in X \mid \langle y_1 + y_2, x \rangle = 1\}.$$

§ 3. “Конификации” выпуклых объектов

В этом параграфе каждому выпуклому объекту в X (или определенному на X) сопоставляется выпуклый конус в пространствах X , $X \times \mathbb{R}$ или $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Эту операцию мы называем *конификацией* объекта, а пространство, содержащее конус, называем *пространством конификации*. Вот как выглядят конусы, строящиеся по основным выпуклым объектам и аффинным многообразиям.

- Если $C \in \text{Cone}(X)$, то $c(C) = c_{\text{cone}}(C) = C \subseteq X$.
- Если $A \in \text{Co}(X)$, то $c(A) = c_{\text{co}}(A) = \text{cone}(A \times 1) \subset X \times \mathbb{R}$ (где через $\text{cone}(S)$ обозначена коническая оболочка множества S). Такую операцию называют *операцией Хёрмандера*; мы будем обозначать ее также $h(A)$.
- Если $p \in \text{Cone}^f(X)$, то $c(p) = c_{\text{cone}^f}(p) = \text{sepi}_0(p) \subseteq X \times \mathbb{R}$ (где $\text{sepi}_0(p) = \text{sepi}(p) \cup \{0\}$).
- Если $f \in \text{Co}^f(X)$, то $c(f) = c_{\text{co}^f}(f) = h(\text{sepi}(f)) \subset X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Аффинные многообразия рассмотрим отдельно.

- Если $M \in \text{Aff}(X)$, то $c(M) = c_{\text{aff}}(M) = \text{span}(M \times 1) \subseteq X \times \mathbb{R}$.

Подчеркнем, что это преобразование отличается от преобразования, которое было бы сделано, если бы мы рассматривали аффинное многообразие как выпуклый объект.

Далее мы даем стандартные и естественные определения введенных выше прямым путем бинарных операций, основываясь на конификациях и на исчислении конусов под действием линейных операций.

Поясним сначала, как образ выпуклого объекта может быть определен подобным образом. Пусть $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный оператор. Для каждого рассматриваемого класса объектов $\mathcal{O}(X)$ (множеств или функций) и для каждого объекта $O \in \mathcal{O}(X)$ после построения конификации $c(O)$ находим образ $\Lambda(c(O))$. После элементарной выкладки приходим к формуле $\Lambda(c(O)) = c(\Lambda(O))$ для некоторого объекта $\Lambda(O) \in \mathcal{O}(\tilde{X})$. Его мы и называем образом O при операции Λ . Ясно, что это определение согласуется с прямым определением образа

(множества или функции), данным ранее. Тем же путем определяется и прообраз выпуклого объекта: надо использовать формулу $\Lambda^{-1}(c(O)) = c(\Lambda^{-1}(O))$ для всех $O \in \mathcal{O}(\tilde{X})$, где $\Lambda^{-1}(O) \in \mathcal{O}(X)$. Этот объект ранее был определен прямым путем.

Аналогичным образом можно с помощью конификации (для выпуклых множеств – это оператор Хёрмандера) дать определение декартова произведения $A_1 \times A_2$ и $\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha_X(A_1 \times A_2)$ для $A_i \in \text{Co}(X)$, $i = 1, 2$. Элементарные подсчеты приводят к формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}(h(A_1) \times h(A_2)) &= h(A_1 \times A_2), \\ +_{\mathbb{R}}(h(A_1) \times h(A_2)) &= h\left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha_X(A_1 \times A_2)\right). \end{aligned} \quad (\Omega)$$

В дальнейшем мы пишем (Ω) , когда хотим отметить, что использовался один из операторов Δ_X^{-1} или $+_X$.

Вернемся к бинарным операциям. Бинарные операции, введенные нами выше (суммы множеств и функций, пересечения, максимум для функций, суммы Келли для множеств и функций и т.п.), могут быть также получены с помощью двух операций $+$ и Δ^{-1} и операции конификации выпуклых объектов и “аффинофикации” аффинных многообразий. Эта возможность приводит к стандартному и естественному определению всех бинарных операций. Конус $c_{\text{cone}}(C)$ расположен в том же пространстве X , конусы $c_{\text{co}}(A)$, $c_{\text{cone}^f}(p)$ и $c_{\text{aff}}(M)$ – в $X \times \mathbb{R}$, конус $c_{\text{co}^f}(f)$ – в $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В декартовом произведении двух конусов типа $c_{\text{cone}}(C)$ определены два оператора Δ^{-1} и $+$; в декартовом произведении двух конусов типа $c_{\text{co}}(A)$, $c_{\text{co}^f}(p)$ или $c_{\text{aff}}(M)$ определены четыре оператора $(\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})$, $(+_X, +_{\mathbb{R}})$; в декартовом произведении двух конусов типа $c_{\text{co}^f}(f)$ определены восемь операторов $(\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(+_X, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})$, $(\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})$, $(+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})$, $(\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})$, $(+_X, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})$. Мы будем эти операторы обозначать буквой Ω с двумя индексами: первый означает номер одного из четырех наших основных выпуклых объектов – $\text{Cone}(X)$, $\text{Co}(X)$, $\text{Cone}^f(X)$, $\text{Co}^f(X)$, второй номер характеризует один из перечисленных операторов: $\Omega_{11} = \Delta_X^{-1}, \dots, \Omega_{48} = (+_X, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})$. В заключение приводятся еще четыре операции для аффинных многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие формулы.*

- 1) Если $C_i \in \text{Cone}(X)$, $i = 1, 2$, то
 - (a) $\Omega_{11}(c_{\text{cone}}(C_1) \times c_{\text{cone}}(C_2)) = c_{\text{cone}}(C_1 \cap C_2)$,
 - (b) $\Omega_{12}(c_{\text{cone}}(C_1) \times c_{\text{cone}}(C_2)) = c_{\text{cone}}(C_1 \oplus C_2)$.
- 2) Если $A_i \in \text{Co}(X)^r$, $i = 1, 2$, то
 - (a) $\Omega_{21}(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) = c_{\text{co}}(A_1 \cap A_2)$,
 - (b) $\Omega_{22}(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) = c_{\text{co}}(A_1 \oplus A_2)$,
 - (c) $\Omega_{23}(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) = c_{\text{co}}(A_1 \otimes A_2)$,
 - (d) $\Omega_{24}(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) = c_{\text{co}}(A_1 \text{ co } \cup A_2)$.
- 3) Если $p_i \in \text{Cone}^f(X)^r$, $i = 1, 2$, то
 - (a) $\Omega_{31}(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) = c_{\text{cone}^f}(p_1 \vee p_2)$,
 - (b) $\Omega_{32}(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) = c_{\text{cone}^f}(p_1 \otimes p_2)$,

- (c) $\Omega_{33}(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) = c_{\text{cone}^f}(p_1 + p_2)$,
 (d) $\Omega_{34}(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) = c_{\text{cone}^f}(p_1 \oplus p_2)$.
- 4) Если $f_i \in \text{Co}^f(X)^r$, $i = 1, 2$, то
- (a) $\Omega_{41}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \vee f_2)$,
 (b) $\Omega_{42}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \otimes f_2)$,
 (c) $\Omega_{43}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 + f_2)$,
 (d) $\Omega_{44}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \oplus f_2)$,
 (e) $\Omega_{45}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \spadesuit f_2)$,
 (f) $\Omega_{46}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \heartsuit f_2)$,
 (g) $\Omega_{47}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \diamond f_2)$,
 (h) $\Omega_{48}(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) = c_{\text{co}^f}(f_1 \text{ co } \wedge f_2)$.
- 5) Если $M_i \in \text{Aff}(X)^r$, $i = 1, 2$, то
- (a) $\Omega_{51}(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) = c_{\text{aff}}(M_1 \cap M_2)$,
 (b) $\Omega_{52}(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) = c_{\text{aff}}(M_1 \oplus M_2)$,
 (c) $\Omega_{53}(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) = c_{\text{aff}}(M_1 \clubsuit M_2)$, за исключением ситуации, когда существует $y \in Y$, для которого $\langle y, x_1 \rangle = -\langle y, x_2 \rangle = 1$ для всех $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$, и при этом $\text{Cone}(M_1) \cap \text{Cone}(-M_2) \neq \{0\}$,
 (d) $\Omega_{54}(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) = c_{\text{aff}}(M_1 \text{ aff } \cup M_2)$.

Каждая из этих формул (и ее доказательство) иллюстрирует применяемый нами метод: конификация, применение теоремы двойственности и формул исчисления для конусов и “деконификация”. К примеру, возьмем “пик-максимум” двух функций $f_i \in \text{Co}^f(X)^r$, $i = 1, 2$. Применив к декартову произведению конификаций f_i оператор $\Omega_{45} = (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})$, после “деконификации” приходим к операции $f_1 \spadesuit f_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символ (C) означает, что была произведена конификация; (Ω) означает, что был применен оператор Ω .

1) Конусы:

- (a) $\Omega_{11} \leftrightarrow \cap$:

$$\Delta_X^{-1}(c_{\text{cone}}(C_1) \times c_{\text{cone}}(C_2)) \stackrel{(C)}{=} \Delta_X^{-1}(C_1 \times C_2) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}}(\Delta_X^{-1}(C_1 \times C_2));$$
- (b) $\Omega_{12} \leftrightarrow \oplus$:

$$+_X(c_{\text{cone}}(C_1) \times c_{\text{cone}}(C_2)) \stackrel{(C)}{=} +_X(C_1 \times C_2) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}}(+_X(C_1 \times C_2)).$$

2) Выпуклые множества:

- (a) $\Omega_{21} \leftrightarrow \cap$:

$$(\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(A_1) \times h(A_2))$$

$$\stackrel{(\Omega)}{=} h(\Delta_X^{-1}(A_1 \times A_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{co}}(\Delta_X^{-1}(A_1 \times A_2));$$
- (b) $\Omega_{22} \leftrightarrow \oplus$:

$$(+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(A_1) \times h(A_2))$$

$$\stackrel{(\Omega)}{=} h(+_X(A_1 \times A_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{co}}(+_X(A_1 \times A_2));$$

(c) $\Omega_{23} \leftrightarrow \otimes$:

$$\begin{aligned} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) &\stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(h(A_1) \times h(A_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2)\right) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{co}}\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2)\right); \end{aligned}$$

(d) $\Omega_{24} \leftrightarrow \text{co} \cup$:

$$\begin{aligned} (+_X, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{co}}(A_1) \times c_{\text{co}}(A_2)) &\stackrel{(C)}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}})(h(A_1) \times h(A_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (+_X \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2)\right) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{co}}\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (+_X \circ \alpha_X)(A_1 \times A_2)\right). \end{aligned}$$

3) Сублинейные функции:

(a) $\Omega_{31} \leftrightarrow \cap$:

$$\begin{aligned} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) &\stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{sepi}_0(p_1) \times \text{sepi}_0(p_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} \{(x, \rho) \mid x = x_i, \rho = \rho_i, \rho_i > p_i(x_i), i = 1, 2\} \cup \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sepi}_0(p_1 \vee p_2) \\ &\stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}^f}(p_1 \vee p_2); \end{aligned}$$

(b) $\Omega_{32} \leftrightarrow \otimes$:

$$\begin{aligned} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) &\stackrel{(C)}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{sepi}_0(p_1) \times \text{sepi}_0(p_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} \{(x, \rho) \mid x = x_1 + x_2, \rho = \rho_i, \rho_i > p_i(x_i), i = 1, 2\} \cup \{0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{sepi}_0(p_1 \otimes p_2) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}^f}(p_1 \otimes p_2); \end{aligned}$$

(c) $\Omega_{33} \leftrightarrow +$:

$$\begin{aligned} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) &\stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(\text{sepi}_0(p_1) \times \text{sepi}_0(p_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} \{(x, \rho) \mid x = x_i, \rho = \rho_1 + \rho_2, \rho_i > p_i(x_i), i = 1, 2\} \cup \{0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{sepi}_0(p_1 + p_2) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}^f}(p_1 + p_2); \end{aligned}$$

(d) $\Omega_{34} \leftrightarrow \oplus$:

$$\begin{aligned} (+_X, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cone}^f}(p_1) \times c_{\text{cone}^f}(p_2)) &\stackrel{(C)}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}})(\text{sepi}_0(p_1) \times \text{sepi}_0(p_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} \{(x, \rho) \mid x = x_1 + x_2, \rho = \rho_1 + \rho_2, \rho_i > p_i(x_i), i = 1, 2\} \cup \{0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{sepi}_0(p_1 \oplus p_2) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cone}^f}(p_1 \oplus p_2). \end{aligned}$$

4) Выпуклые функции:

(a) $\Omega_{41} \leftrightarrow \vee$:

$$\begin{aligned} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{co}^f}(f_1) \times c_{\text{co}^f}(f_2)) &\stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} h((\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)) \\ &\stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = x_i, \rho = \rho_i, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \vee f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{co}^f}(f_1 \vee f_2); \end{aligned}$$

(b) $\Omega_{42} \leftrightarrow \otimes$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h((+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = x_1 + x_2, \rho = \rho_i, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \otimes f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \otimes f_2);
 \end{aligned}$$

 (c) $\Omega_{43} \leftrightarrow +$:

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h((\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = x_i, \rho = \rho_1 + \rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 + f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 + f_2);
 \end{aligned}$$

 (d) $\Omega_{44} \leftrightarrow \oplus$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h((+_X, +_{\mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = x_1 + x_2, \rho_1 + \rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \oplus f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \oplus f_2);
 \end{aligned}$$

 в следующих четырех формулах $0 \leq \alpha \leq 1$:

 (e) $\Omega_{45} \leftrightarrow \spadesuit$:

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} ((\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}) \circ \alpha_{X \times \mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)\right) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = \alpha x_1 = (1 - \alpha)x_2, \rho = \alpha \rho_1 = (1 - \alpha)\rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \spadesuit f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \spadesuit f_2);
 \end{aligned}$$

 (f) $\Omega_{46} \leftrightarrow \heartsuit$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}, +_{\mathbb{R}})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} ((+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}) \circ \alpha_{X \times \mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)\right) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \rho = \alpha \rho_1 = (1 - \alpha)\rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \heartsuit f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \heartsuit f_2);
 \end{aligned}$$

 (g) $\Omega_{47} \leftrightarrow \diamond$:

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} ((\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}}) \circ \alpha_{X \times \mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)\right) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = \alpha x_1 = (1 - \alpha)x_1, \rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \diamond f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \diamond f_2);
 \end{aligned}$$

(h) $\Omega_{48} \leftrightarrow \text{co} \cup$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{cof}}(f_1) \times c_{\text{cof}}(f_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}})(h(\text{sepi } f_1) \times h(\text{sepi } f_2)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h\left(\bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} ((+_X, +_{\mathbb{R}}) \circ \alpha_{X \times \mathbb{R}})(\text{sepi } f_1 \times \text{sepi } f_2)\right) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} h(\{(x, \rho) \mid x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2, \rho_i > f_i(x_i), i = 1, 2\}) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} h(\text{sepi}(f_1 \text{ co } \cup f_2)) \stackrel{(C)}{=} c_{\text{cof}}(f_1 \text{ co } \cup f_2).
 \end{aligned}$$

5) Аффинные многообразия:

(a) $\Omega_{51} \leftrightarrow \cap$:

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{span}(M_1 \times 1) \times \text{span}(M_2 \times 1)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} \text{span}(\Delta_X^{-1}(M_1 \times M_2) \times 1) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}((M_1 \cap M_2) \times 1) = c_{\text{aff}}(M_1 \cap M_2);
 \end{aligned}$$

(b) $\Omega_{52} \leftrightarrow \oplus$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{span}(M_1 \times 1) \times \text{span}(M_2 \times 1)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} \text{span}(+_X(M_1 \times M_2) \times 1) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}((M_1 \oplus M_2) \times 1) = c_{\text{aff}}(M_1 \oplus M_2);
 \end{aligned}$$

(c) $\Omega_{53} \leftrightarrow \clubsuit$:

$$\begin{aligned}
 & (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) \stackrel{(C)}{=} (\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(\text{span}(M_1 \times 1) \times \text{span}(M_2 \times 1)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} \text{span}\left(\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\Delta_X^{-1} \circ \alpha_X)(M_1 \times M_2)\right) \times 1\right) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}((M_1 \clubsuit M_2) \times 1) = c_{\text{aff}}(M_1 \clubsuit M_2);
 \end{aligned}$$

(d) $\Omega_{54} \leftrightarrow \text{aff} \cup$:

$$\begin{aligned}
 & (+_X, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{aff}}(M_1) \times c_{\text{aff}}(M_2)) \stackrel{(C)}{=} (+_X, +_{\mathbb{R}})(\text{span}(M_1 \times 1) \times \text{span}(M_2 \times 1)) \\
 & \stackrel{(\Omega)}{=} \text{span}\left(\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (+_X \circ \alpha_X)(M_1 \times M_2)\right) \times 1\right) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}((M_1 \text{ aff } \cup M_2) \times 1) = c_{\text{aff}}(M_1 \text{ aff } \cup M_2).
 \end{aligned}$$

Это предложение может рассматриваться как *определение* всех бинарных операций выпуклых объектов. Из этих определений сразу становится ясно, что все операции состоятельны и ассоциативны. В § 6 будет объяснено, как этот подход может быть расширен на произвольные выпуклые объекты с использованием того факта, что левые части формул в предложении определены без каких-либо дополнительных допущений.

§ 4. Теория двойственности выпуклых объектов

4.1. Двойственность конусов. Для выпуклых объектов справедлив основополагающий *принцип двойственности*, согласно которому каждый (замкнутый) выпуклый объект допускает помимо геометрического описания, фактически приведенного нами выше, алгебраическое описание. Согласно геометрическому описанию подпространство – это множество, которое вместе с двумя различными ненулевыми точками содержит прямую или плоскость, содер-

жащую нуль и эти точки; аффинное многообразие – это множество, которое вместе с двумя различными точками содержит всю прямую, через них проходящую; выпуклое множество содержит вместе с двумя точками отрезок, их соединяющий, и т.д. Все эти объекты имеют двойственное описание: замкнутое подпространство является пересечением всех замкнутых гиперплоскостей, его содержащих и проходящих через нуль; замкнутое аффинное многообразие – пересечение всех замкнутых гиперплоскостей, его содержащих, выпуклое замкнутое множество есть пересечение всех замкнутых полупространств, его содержащих, и т.п. Все эти двойственности мы собираемся вывести из двойственности для конусов.

Выпуклые конусы – весьма простые образования: они вместе с каждой ненулевой точкой содержат целый луч (полупрямую с начальной точкой в начале координат) и с каждым двумя лучами содержат угол между ними (для совпадающих (противоположных) лучей угол вырождается в луч (прямую)). Выпуклые замкнутые конусы имеют такое двойственное описание: они являются пересечением замкнутых полупространств, ограниченных замкнутыми гиперплоскостями, проходящими через начало координат. Иначе двойственность алгебраического и геометрического подходов на примере конусов может быть сформулирована так: *выпуклые замкнутые конусы – это множества совместности нестрогих однородных линейных неравенств*. Это значит, что каждый выпуклый замкнутый конус C в X представим в виде $C = \{x \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall y \in S\}$, где S – некоторое подмножество Y . Единственной максимальной возможностью для S является конус $C' = \{y \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}$. Сформулированный выше эвристический принцип двойственности для конусов имеет следующее точное выражение: *если конус C замкнут, то $C = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall y \in C'\}$* . Это означает, что $C = C''$.

При рассмотрении двойственности идентифицируем двойственное пространство Y с пространством X' линейных функционалов на X и будем обозначать через x' элементы этого пространства. Оператор двойственности для конусов тогда определится так: *сопряженный конус* для $C \in \text{Cone}(X)$ – это $C' = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}$. Этим определяется двойственный оператор $': \text{Cone}(X) \rightarrow \text{Cone}(X')$.

Пусть $\text{cl } S$ означает замыкание множества S . Отметим несколько фактов, которыми будем пользоваться в дальнейшем: сопряженный конус замкнут, конус и его замыкание имеют один и тот же сопряженный конус, операция сопряжения меняет порядок вложения конусов.

ТЕОРЕМА 1 (теорема двойственности для конусов). *Пусть $C \in \text{Cone}(X)$. Тогда $C'' = \text{cl } C$.*

Иначе говоря, каждый выпуклый замкнутый конус C является решением системы однородных линейных нестрогих неравенств $\langle x', x \rangle \geq 0$, $x' \in C'$. В частности, $C' \neq \{0\}$, если $C \neq X$.

Мы (в конечномерном случае) выведем эту теорему из такого простого факта: *если непустое множество $A \in \text{Co}(X)$ замкнуто, то для каждой точки $a \in X$ вне A существует единственная точка p в A , ближайшая (в евклидовой метрике) к точке a* . Тогда гиперплоскость в X , проходящая через p

и перпендикулярная $a - p$, строго отделяет a от A . (Конечномерные теоремы отделимости и следствия из них подробно освещены в [1].)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения сопряженного конуса имеем $C \subseteq C''$ и $C' = (\text{cl } C)'$; значит, для доказательства теоремы достаточно обосновать включение $C'' \subseteq C$ в предположении, что C – замкнутый конус. Каждая точка a вне C может быть строго отделена от C гиперплоскостью, значит, она не принадлежит C'' .

4.2. Двойственность выпуклых объектов. Для каждого класса выпуклых объектов мы будем сводить с помощью конификации вопросы определения двойственного оператора и доказательства некоего свойства двойственности к аналогичной проблеме для конусов. В частности, все следующие хорошо известные двойственные операторы возникают прямым и естественным образом:

1) *опорная функция*

$$(x' \mapsto sA(x') = \sup\{\langle x', x \rangle \mid x \in A\}) \in \text{Cone}^f(X')^r$$

выпуклого множества $A \in \text{Co}(X)^r$;

2) *субдифференциал*

$$\partial p = \{x' \mid \langle x', x \rangle \leq p(x) \ \forall x \in X\} \in \text{Co}(X')^r$$

сублинейной функции $p \in \text{Cone}^f(X)^r$;

3) *сопряженная функция*

$$(x' \mapsto f^*(x') = \sup_{x \in X} (\langle x', x \rangle - f(x))) \in \text{Co}^f(X')^r$$

выпуклой функции $f \in \text{Co}^f(X)^r$;

4) *аннулятор*

$$L^\perp = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle = 0 \ \forall x \in L\} \in \text{Lin}(X')$$

подпространства $L \in \text{Lin}(X)$;

5) *поляра*

$$D^\circ = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \leq 1 \ \forall x \in D\} \in \text{Co}_0(X')$$

нуль-множества $D \in \text{Co}_0(X)$;

6) *двойственная норма*

$$(x' \mapsto N^*(x') = \sup\{\langle x', x \rangle \mid N(x) = 1\}) \in \text{Norm}(X')$$

нормы $N \in \text{Norm}(X)$;

7) *двойственный калибр*

$$(x' \mapsto d^{\mathcal{D}}(x') = \sup\{\langle x', x \rangle \mid d(x) = 1\}) \in \text{Co}_0^f(X')^r$$

калибра $d \in \text{Co}_0^f(X)^r$;

8) *двойственное аффинное многообразие*

$$M^\bullet = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle = 1 \ \forall x \in M\} \in \text{Aff}(X')^r$$

аффинного многообразия $M \in \text{Aff}(X)^r$.

Отметим, что для каждой выпуклой функции $f \in \text{Co}^f(X)$ замыкание ее надграфика является надграфиком некоторой выпуклой функции, называемой *замыканием* f и обозначаемой $\text{cl}(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место следующие формулы:*

- 1) если $C \in \text{Cone}(X)$, то $(c_{\text{cone}}(C))' = c_{\text{cone}}(C')$;
- 2) если $A \in \text{Co}(X)^r$, то $(c_{\text{co}}(A))' = \text{cl}(c_{\text{cone}^f}(s(-A)))$;
- 3) если $p \in \text{Cone}^f(X)^r$, то $(c_{\text{cone}^f}(p))' = \text{cl}(c_{\text{co}}(-\partial p))$;
- 4) если $f \in \text{Co}(X)^r$, то $(c_{\text{co}^f}(f))' = \sigma_{23} \text{cl}(c_{\text{co}^f}(f^*(-\cdot)))$, где σ_{23} есть перестановка последних двух координат $X' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- 5) если $L \in \text{Lin}(X)$, то $(c_{\text{co}}(L))' = c_{\text{co}}(L^\perp)$;
- 6) если $D \in \text{Co}_0(X)$, то $(c_{\text{co}}(D))' = \text{cl}(c_{\text{co}}(-D^\circ))$;
- 7) если $N \in \text{Norm}(X)$, то $(c_{\text{cone}^f}(N))' = c_{\text{cone}^f}(N^*)$;
- 8) если $d \in \text{Cone}_0^f(X)^r$, то $(c_{\text{cone}^f}(d))' = \text{cl}(c_{\text{cone}^f}(d^\mathcal{D}(-\cdot)))$;
- 9) если $M \in \text{Aff}(X)^r$, то $(c_{\text{aff}}(M))' = c_{\text{aff}}((-M)^\bullet)$.

Отметим, что двойственные операторы для выпуклых множеств, сублинейных функций, выпуклых функций, нуль-множеств, калибров и аффинных многообразий приводят к симметричным объектам (объектам, умноженным на минус единицу). Этого бы не было, если бы конус, сопряженный к C , был определен неравенством “ $\leq$ ”, т.е. $C' = \{x' \mid \langle x', x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C\}$, но мы определили сопряженный конус неравенством “ $\geq$ ” и следуем этому определению. Заметим еще, что все двойственные операторы сохраняют регулярность.

Поясним теперь основную идею этого предложения и его доказательства. Для каждого рассматриваемого класса выпуклых объектов $\mathcal{O}(X)$ (множеств или функций) и каждого объекта из $O \in \mathcal{O}(X)^r$ мы, построив конификацию $c(O)$, далее вычисляем сопряженный конус $c(O)'$. Это приводит к формуле

$$(c(O))' = \text{cl}(c^\mathcal{D}(O^\mathcal{D}))$$

для некоторого регулярного выпуклого объекта $O^\mathcal{D} \in \mathcal{O}^\mathcal{D}(X')^r$. Этот класс зависит только от класса $\mathcal{O}(X)$, но не от выбора объекта O из этого класса. При этом $c^\mathcal{D}$ означает операцию конификации объектов из $\mathcal{O}^\mathcal{D}(X')$. Объект $O^\mathcal{D}$ назовем двойственным к O и класс $\mathcal{O}^\mathcal{D}(X')$ – двойственным к $\mathcal{O}(X)$.

Далее мы применяем этот подход для обобщений, используя то, что левые части формул определены и для нерегулярных элементов.

Следующие обозначения используются при вычислении сопряженных конусов $(c(O))'$: $A' = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \geq 0 \ \forall x \in A\}$ и $A^\perp = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle = 0 \ \forall x \in A\}$ для любого $A \in \text{Co}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $(c_{\text{cone}}(C))' = C' = c_{\text{cone}}(C')$.

2) $(c_{\text{co}}(A))' = (\text{cone}(A \times 1))' = (A \times 1)'$, и это множество составляют пары $(x', \rho) \in X' \times \mathbb{R}$ такие, что $\langle x', x \rangle + \rho \geq 0 \ \forall x \in A$; эти пары составляют надграфик $s(-A)$, который есть не что иное, как замыкание $\text{sepi}(s(-A)) \cup \{0\} = c_{\text{cone}^f}(s(-A))$.

3) $(c_{\text{cone}^f}(p))' = (\text{sepi}(p) \cup \{0\})' = (\text{epi}(p))'$, и так как это множество содержится в $(0 \times \mathbb{R}_+)' = X' \times \mathbb{R}_+$, но не содержится в $X' \times 0$ (что содержит при взятии сопряженного конуса множество $\text{cl}(\text{epi}(p)) \supseteq 0 \times \mathbb{R}$, в противоречие с тем, что

p – собственная функция). В итоге получится, что конус $(\text{epi}(p))'$ совпадает с $\text{cl}(h(A))$, где $A \in \text{Co}(X')$ есть множество $x' \in X'$ таких, что $\langle x', x \rangle + \rho \geq 0$ для всех $(x, \rho) \in \text{epi}(p)$, а это не что иное, как $-\partial p$; таким образом, $\text{cl}(h(A))$ равен $\text{cl}(c_{\text{co}}(-\partial p))$.

4) $(c_{\text{co}^f}(f))' = (h(\text{sepi}(f)))' = (\mathbb{R}_+(\text{epi}(f) \times 1))' = (\text{epi}(f) \times 1)'$, и это множество (так как $\text{epi}(f)$ инвариантен относительно сдвигов на векторы из $0 \times \mathbb{R}_+$ и так как $(\text{epi}(f) \times 1)'$ не содержится в $X' \times 0 \times \mathbb{R}$) имеет вид $\sigma_{23} \text{cl}(h(A \times 1))$, где $A \in \text{Co}(X' \times \mathbb{R})$ есть множество пар $(x', \sigma) \in X' \times \mathbb{R}$ таких, что $\langle x', x \rangle + \rho + \sigma \geq 0$ для всех $(x, \rho) \in \text{epi}(f)$; это множество A равно $\text{epi}(f^*(-\cdot))$; значит, $\sigma_{23} \text{cl}(h(A \times 1))$ есть не что иное, как $\sigma_{23} \text{cl}(c_{\text{co}^f}(f^*(-\cdot)))$.

5) $(c_{\text{co}}(L))' = L' = L^\perp = c_{\text{cone}}(L^\perp)$.

6) $(c_{\text{co}^f}(D))' = (D \times 1)'$, а это множество (так как $0 \in D$, $(D \times 1)' \subseteq (0 \times 1)' = X \times \mathbb{R}_+$ и $(D \times 1)' \not\subseteq X \times 0$) имеет вид $\text{cl}(h(E))$, где $E \in \text{Co}_0(X')$ есть множество $x' \in X'$ таких, что $\langle x', x \rangle + 1 \geq 0$ для всех $x \in D$; значит, $E = (-D)^\circ$ и при этом $(D \times 1)' = \text{cl}((c_{\text{co}^f}(-D^\circ)))$.

7) $(c_{\text{cone}^f}(N))' = (\text{sepi}(N) \cup \{0\})' = (\text{epi}(N))' = (\{x \mid N(x) = 1\} \times 1)'$, и это множество есть множество пар $(x', \rho) \in X' \times \mathbb{R}$ таких, что $\langle x', x \rangle + \rho \geq 0$; это множество равно $\text{epi}(N^*) = c_{\text{cone}^f}(N^*)$.

8) Случай с Cone_0^f совершенно аналогичен случаю норм.

9) $(c_{\text{aff}}(M))' = (\text{span}(M \times 1))' = (M \times 1)^\perp$, и это множество составляют пары $(x', \rho) \in X' \times \mathbb{R}$ такие, что $\langle x', x \rangle + \rho = 0 \ \forall x \in M$; эти пары составляют подпространство $\text{span}((-M)^\bullet \times 1)$, которое есть не что иное, как замыкание $c_{\text{aff}}((-M)^\bullet)$.

ТЕОРЕМА 2 (теорема двойственности для выпуклых объектов). *Имеют место следующие формулы:*

- 1) если $C \in \text{Cone}(X)$, то $C'' = \text{cl}(C)$;
- 2) если $A \in \text{Co}(X)^r$, то $\partial s(A) = \text{cl}(A)$;
- 3) если $p \in \text{Cone}^f(X)^r$, то $s\partial p = \text{cl}(p)$;
- 4) если $f \in \text{Co}^f(X)^r$, то $f^{**} = \text{cl}(f)$;
- 5) если $L \in \text{Lin}(X)$, то $L^{\perp\perp} = L$;
- 6) если $D \in \text{Co}_0(X)$, то $D^{\circ\circ} = \text{cl}(D)$;
- 7) если $N \in \text{Norm}(X)$, то $N^{**} = N$;
- 8) если $d \in \text{Cone}_0^f(X)^r$, то $d^{\mathcal{D}\mathcal{D}} = \text{cl}(d)$;
- 9) если $M \in \text{Aff}(X)^r$, то $M^{\bullet\bullet} = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все формулы являются автоматическими следствиями теоремы двойственности для конусов, которая была доказана выше, и предложения 2. Приведем лишь один пример, в котором первое равенство – теорема двойственности (см. (D)), а два других следуют из определения:

$$\text{cl}(c_{\text{co}}(A)) \stackrel{(D)}{=} (c_{\text{co}}(A))'' \stackrel{\text{def}}{=} (c_{\text{cone}^f}(s(-A)))' \stackrel{\text{def}}{=} c_{\text{co}}(-\partial(s(-A)))$$

и, значит, $-\partial s(-A) = \text{cl}(A)$. Заменив A на $-A$, получаем искомую формулу.

Теоремы двойственности для основных выпуклых объектов означают следующее:

- 1) замкнутый выпуклый конус – это решение нестрогих линейных однородных неравенств;
- 2) замкнутое выпуклое множество – это решение нестрогих неоднородных линейных неравенств;
- 3) замкнутая собственная сублинейная функция есть верхняя грань линейных функций;
- 4) замкнутая собственная выпуклая функция есть верхняя грань аффинных функций.

Из теорем двойственности для выпуклых объектов вытекают такие теоремы существования: $C' \neq \{0\}$, если $C \neq X$; sA – собственная функция (в частности, $\text{dom } sA \neq \emptyset$), если $A \notin \{\emptyset, X\}$; $\partial p \neq \emptyset$, если p – собственная функция; f^* – собственная функция, если f – собственная функция; $L^\perp \neq \{0\}$, если $L \neq X$; $D^\circ \neq \{0\}$, если $D \neq X$; $0 \notin M^\bullet \neq \{0\}$, если $0 \notin M \neq \emptyset$.

§ 5. Исчисление двойственных операторов выпуклых объектов

5.1. Исчисление конусов. *Относительная внутренность* $\text{ri}(A)$ выпуклого множества A – это внутренность A как подмножества аффинной оболочки A (т.е. наименьшего аффинного подпространства, содержащего A).

ТЕОРЕМА 3 (исчисление конусов: линейные операторы). *Пусть X и Y – пара конечномерных векторных пространств в двойственности, $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ – другая пара конечномерных векторных пространств в двойственности и $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный оператор. Тогда верны следующие формулы:*

- 1) $(\Lambda C)' = (\Lambda')^{-1}C' \quad \forall C \in \text{Cone}(X)$;
- 2) $(\Lambda^{-1}C)' = \Lambda'C' \quad \forall C \in \text{Cone}(\tilde{X})$, если $\text{ri}(C) \cap \Lambda X \neq \emptyset$.

Из этой теоремы будут выведены правила исчисления двойственных операторов для сумм и пересечений конусов.

СЛЕДСТВИЕ 1 (исчисление конусов: бинарные операции). *Верны следующие формулы:*

- 1) $(C_1 \cap C_2)' = C'_1 + C'_2$, если $\text{ri } C_1 \cap \text{ri } C_2 \neq \emptyset$;
- 2) $(C_1 + C_2)' = C'_1 \cap C'_2$.

В сочетании с теоремой двойственности это приводит к таким (безусловным) формулам $\text{ClCone}(X)$ – совокупность замкнутых конусов в X).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Верны следующие формулы:*

- 1) $(\Lambda^{-1}C)' = \text{cl}(\Lambda'C') \quad \forall C \in \text{ClCone}(\tilde{X})$;
- 2) $(C_1 \cap C_2)' = \text{cl}(C'_1 + C'_2) \quad \forall C_i \in \text{ClCone}(X), i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1) Пусть $x' \in (\Lambda C)'$. Это означает, что для каждого $x \in C$ выполнено неравенство $\langle x', \Lambda x \rangle \geq 0$ и, значит, $\langle \Lambda' x', x \rangle \geq 0$. Так как $x \in C$ произвольно, получаем, что $x' \in (\Lambda')^{-1}C'$.

Пусть $x' \in (\Lambda')^{-1}C'$. Тогда $\Lambda' x' \in C'$, следовательно, для каждого $x \in C$ получаем $\langle \Lambda' x', x \rangle \geq 0$, тем самым, $\langle x', \Lambda x \rangle \geq 0$. Так как $x \in C$ произвольно, получаем $x' \in (\Lambda C)'$.

2) Пусть $x' \in \Lambda' C'$. Выберем $\tilde{x}' \in C'$ так, что $x' = \Lambda' \tilde{x}'$. Тогда для любого $x \in \Lambda^{-1} C$ получаем $\langle x', x \rangle = \langle \Lambda' \tilde{x}', x \rangle = \langle \tilde{x}', \Lambda x \rangle \geq 0$. Так как $x \in \Lambda^{-1} C$ произвольно, получаем $x' \in (\Lambda^{-1} C)'$.

Пусть $x' \in (\Lambda^{-1} C)'$. Тогда

$$\Lambda x \in C \Rightarrow \langle x', x \rangle \geq 0. \quad (**)$$

В частности, для каждого $\bar{x} \in \ker \Lambda$ получаем (в силу равенства $\ker \Lambda = -\ker \Lambda$), что $\langle x', \bar{x} \rangle = 0$. Это доказывает включение $x' \in (\ker \Lambda)^\perp$.

Определим линейный функционал $\varphi: \Lambda X \rightarrow \mathbb{R}$ соотношением $\varphi(\Lambda x) = \langle x', x \rangle$ $\forall x \in X$. Этот функционал корректно определен, так как $x' \in (\ker \Lambda)^\perp$. Тогда в силу $(**)$ φ есть элемент сопряженного конуса $\Lambda X \cap C'$, рассматриваемого как конус в пространстве ΛX . Для завершения доказательства достаточно показать, что функционал $\varphi: \Lambda X \rightarrow \mathbb{R}$ может быть расширен до линейного функционала $\psi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$, являющегося элементом C' . Действительно, для каждого $x \in X$

$$\langle \Lambda' \psi, x \rangle = \langle \psi, \Lambda x \rangle = \varphi(\Lambda x) = \langle x', x \rangle,$$

так что $\Lambda' \psi = x'$, $x' \in \Lambda' C'$, что и требовалось доказать.

Для доказательства существования требуемых вложений следует снова применить строгую теорему отделимости, согласно которой точка вне замкнутого выпуклого множества может быть строго отделена от него. Взяв точку, противоположную точке из $\text{ri}(C) \cap \Lambda X$, строго отделим ее от множества $\text{cl}(C + \{z \in \Lambda X \mid \varphi(z) \geq 0\})$. Полученная в итоге гиперплоскость является ядром функционала $Y \rightarrow \mathbb{R}$, представляющего элемент C' , а его ограничение на ΛX есть требуемый с точностью до множителя элемент φ .

Выведем первое следствие, используя формулы $(\Delta_X)' = +_{X'}$ и $(+_X)' = \Delta_{X'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. 1) Из условий имеем

$$\text{ri}(C_1 \times C_2) \cap (\Delta_X)^{-1}(X \times X) \neq \emptyset,$$

значит, из второго утверждения теоремы 3 и определений получим

$$(C_1 \cap C_2)' = (\Delta_X^{-1}(C_1 \times C_2))' = (\Delta_X)'(C_1 \times C_2)' = (+_{X'})'(C_1' \times C_2') = C_1' + C_2'.$$

2) Первое утверждение дает

$$(C_1 + C_2)' = (+_X(C_1 \times C_2))' = ((+_X)')^{-1}(C_1 \times C_2)' = (\Delta_{X'}^{-1})(C_1' \times C_2') = C_1' \cap C_2'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. По теореме двойственности имеем:

$$1) (\Lambda^{-1} C)' \stackrel{(D)}{=} (\Lambda^{-1}(C''))' \stackrel{(\text{Cal})}{=} (\Lambda' C')'' \stackrel{(D)}{=} \text{cl}(\Lambda' C').$$

$$2) (C_1 \cap C_2)' \stackrel{(D)}{=} (C_1'' \cap C_2'')' \stackrel{(\text{Cal})}{=} (C_1' + C_2')'' \stackrel{(D)}{=} \text{cl}(C_1' + C_2').$$

5.2. Исчисление выпуклых объектов. Формулы исчисления двойственных операторов выпуклых объектов следуют из формул исчисления для конусов, получаемых с помощью оператора конификации.

ТЕОРЕМА 4 (теорема об исчислении выпуклых объектов). Для регулярных выпуклых объектов имеют место следующие формулы.

1) Конусы:

- (a) $(\Lambda C)' = (\Lambda')^{-1}C'$;
- (b) $(\Lambda^{-1}C)' = \Lambda'C'$, если $\text{ri } C \cap \Lambda X \neq \emptyset$;
- (c) $(C_1 \cap C_2)' = C'_1 + C'_2$, если $\text{ri } C_1 \cap \text{ri } C_2 \neq \emptyset$;
- (d) $(C_1 + C_2)' = C'_1 \cap C'_2$.

2) Выпуклые множества:

- (a) $s(\Lambda A) = (\Lambda')^{-1}sA$;
- (b) $s(\Lambda^{-1}A) = \Lambda'sA$, если $\text{ri } A \cap \Lambda X \neq \emptyset$;
- (c) $s(A_1 \cap A_2) = sA_1 \oplus sA_2$, если $\text{ri } A_1 \cap \text{ri } A_2 \neq \emptyset$;
- (d) $s(A_1 \oplus A_2) = sA_1 + sA_2$;
- (e) $s(A_1 \otimes A_2) = sA_1 \otimes sA_2$, если $\text{ri } A_1 \cap \text{ri } A_2 \neq \emptyset$;
- (f) $s(A_1 \text{ co } \cup A_2) = sA_1 \vee sA_2$.

3) Сублинейные функции:

- (a) $\partial(\Lambda p) = (\Lambda')^{-1}\partial p$;
- (b) $\partial(\Lambda^{-1}p) = \Lambda'\partial p$, если $\text{ri}(\text{dom } p) \cap \Lambda X \neq \emptyset$;
- (c) $\partial(p_1 \vee p_2) = \partial p_1 \text{ co } \cup \partial p_2$, если $\text{ri}(\text{dom } p_1) \cap \text{ri}(\text{dom } p_2) \neq \emptyset$;
- (d) $\partial(p_1 \otimes p_2) = \partial p_1 \otimes \partial p_2$;
- (e) $\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 \oplus \partial p_2$, если $\text{ri}(\text{dom } p_1) \cap \text{ri}(\text{dom } p_2) \neq \emptyset$;
- (f) $\partial(p_1 \oplus p_2) = \partial p_1 \cap \partial p_2$.

4) Выпуклые функции:

- (a) $(\Lambda f)^* = (\Lambda')^{-1}f^*$;
- (b) $(\Lambda^{-1}f)^* = \Lambda'f^*$, если $\text{ri}(\text{dom } f) \cap \Lambda X \neq \emptyset$;
- (c) $(f_1 \vee f_2)^* = f_1^* \text{ co } \wedge f_2^*$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- (d) $(f_1 \otimes f_2)^* = f_1^* \diamond f_2^*$;
- (e) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- (f) $(f_1 \oplus f_2)^* = f_1^* + f_2^*$;
- (g) $(f_1 \spadesuit f_2)^* = f_1^* \heartsuit f_2^*$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- (h) $(f_1 \heartsuit f_2)^* = f_1^* \spadesuit f_2^*$;
- (i) $(f_1 \diamond f_2)^* = f_1^* \otimes f_2^*$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- (j) $(f_1 \text{ co } \wedge f_2)^* = f_1^* \vee f_2^*$.

5) Линейные подпространства:

- (a) $(\Lambda L)^\perp = (\Lambda')^{-1}L^\perp$;
- (b) $(\Lambda^{-1}L)^\perp = \Lambda'L^\perp$;
- (c) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;
- (d) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$.

6) Выпуклые нуль-множества:

- (a) $(\Lambda D)^\circ = (\Lambda')^{-1}D^\circ$;
- (b) $(\Lambda^{-1}D)^\circ = \Lambda'D^\circ$, если $\text{ri } D \cap \Lambda X \neq \emptyset$;

- (c) $(D_1 \cap D_2)^\circ = D_1^\circ \text{ co } \cup D_2^\circ$, если $\text{ri } D_1 \cap \text{ri } D_2 \neq \emptyset$;
- (d) $(D_1 \oplus D_2)^\circ = D_1^\circ \otimes D_2^\circ$;
- (e) $(D_1 \otimes D_2)^\circ = D_1^\circ \oplus D_2^\circ$, если $\text{ri } D_1 \cap \text{ri } D_2 \neq \emptyset$;
- (f) $(D_1 \text{ co } \cup D_2)^\circ = D_1^\circ \cap D_2^\circ$.

7) Нормы:

- (a) $(\Lambda N)^* = (\Lambda')^{-1} N^*$;
- (b) $(\Lambda^{-1} N)^* = \Lambda' N^*$;
- (c) $(N_1 \vee N_2)^* = N_1^* \oplus N_2^*$;
- (d) $(N_1 \otimes N_2)^* = N_1^* + N_2^*$;
- (e) $(N_1 + N_2)^* = N_1^* \otimes N_2^*$;
- (f) $(N_1 \oplus N_2)^* = N_1^* \vee N_2^*$.

8) Аффинные многообразия:

- (a) $(\Lambda M)^\bullet = (\Lambda')^{-1} M^\bullet$;
- (b) $(\Lambda^{-1} M)' = \Lambda' M^\bullet$, если $M \cap \Lambda X \neq \emptyset$;
- (c) $(M_1 \cap M_2)^\bullet = M_1^\bullet \text{ aff } \cup M_2^\bullet$, если $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$;
- (d) $(M_1 \oplus M_2)^\bullet = M_1^\bullet \clubsuit M_2^\bullet$;
- (e) $(M_1 \clubsuit M_2)^\bullet = M_1^\bullet \oplus M_2^\bullet$, если $M_1 \clubsuit M_2 \neq \emptyset$; исключается такая “плохая” ситуация: существует элемент $y \in Y$, для которого $\langle y, x_1 \rangle = -\langle y, x_2 \rangle = 1$ для всех $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$, и, кроме того, $\text{Cone}(M_1) \cap \text{Cone}(-M_2) \neq \{0\}$;
- (f) $(M_1 \text{ aff } \cup M_2)^\bullet = M_1^\bullet \cap M_2^\bullet$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В литературе встречаются иные формулы исчисления:

- 1) $s(A_1 \cap A_2) = sA_1 \text{ co } \wedge sA_2$, если $\text{ri } A_1 \cap \text{ri } A_2 \neq \emptyset$;
- 2) $\partial(p_1 \text{ co } \wedge p_2) = \partial p_1 \cap \partial p_2$.

Объяснение этого в том, что, как было сказано ранее, бинарные операции $\oplus$ и $\text{co } \wedge$, определенные для выпуклых функций, совпадают для функций сублинейных: таким образом, эти формулы – не что иное, как формулы 2(c) и 3(f) теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все формулы являются автоматическими следствиями формул для конусов в комбинации с конификациями выпуклых объектов и формул предложения 1. Для примера проведем доказательства двух случаев с выпуклыми множествами:

$$\begin{aligned}
 \text{cl}(c_{\text{cone}}(s(\Lambda A))) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}((c_{\text{co}}(-\Lambda A))') \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}((\Lambda c_{\text{co}}(-A))') \\
 &\stackrel{(\text{Cal})}{=} \text{cl}((\Lambda')^{-1}((c_{\text{co}}(-A))')) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}((\Lambda')^{-1}(c_{\text{cone}}(sA))) \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}(c_{\text{cone}}(\Lambda')^{-1}sA),
 \end{aligned}$$

следовательно, $s(\Lambda A) = (\Lambda')^{-1}(sA)$;

$$\begin{aligned}
 \text{cl}(c_{\text{cone}}^f(s(A_1 \otimes A_2))) &\stackrel{\text{def}}{=} (c_{\text{co}}(-A_1 \otimes -A_2))' \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} ((\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})(c_{\text{co}}(-A_1) \times c_{\text{co}}(-A_2)))' \\
 &\stackrel{(\text{Cal})}{=} (+_{X'}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})((c_{\text{co}}(-A_1) \times c_{\text{co}}(-A_2))') \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} (+_{X'}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})((c_{\text{co}}(-A_1))' \times (c_{\text{co}}(-A_2))') \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} (+_{X'}, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})(\text{cl}(c_{\text{cone}}^f(sA_1)) \times \text{cl}(c_{\text{cone}}^f(sA_2))) \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}(c_{\text{cone}}^f(sA_1 \otimes sA_2))
 \end{aligned}$$

и, значит, $s(A_1 \otimes A_2) = sA_1 \otimes sA_2$.

5.3. Конечнопорожденные объекты. Для каждого класса выпуклых объектов можно определить подкласс конечнопорожденных выпуклых объектов. Дадим определение двух таких подклассов. Конус $C \in \text{Cone}(X)$, являющийся конической оболочкой конечного числа лучей, называется *полиэдральным конусом*. Алгебраическая сумма полиэдрального конуса и выпуклой оболочки конечного числа точек называется *полиэдром*. Теореме двойственности для этих объектов можно сформулировать так:

- полиэдральный конус есть решение конечного числа нестрогих однородных линейных неравенств и наоборот;
- полиэдр есть решение конечного числа нестрогих линейных неравенств и наоборот (теорема Вейля).

Бинарные операции сохраняют полиэдральность, все полиэдральные конусы и все полиэдры замкнуты и, значит, все формулы двойственности и исчислений верны без дополнительных условий.

§ 6. Комментарии

6.1. Стандартная конификация аффинных многообразий. Если рассмотреть стандартную конификацию аффинных многообразий

$$h(M) = \text{cone}(M \times 1), \quad M \in \text{Aff}(X)$$

(коническую оболочку вместо линейной $\text{span}(M \times 1)$), получится иная теория двойственности, при которой двойственный оператор – это оператор полярности:

$$M \mapsto M^\circ = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \leq 1 \ \forall x \in M\}.$$

6.2. Резюме. Подход, связанный с конификацией, дает возможность определить бинарные операции и операторы двойственности для всех введенных вначале выпуклых объектов, включая нерегулярные, и все формулы исчисления могут быть обобщены, чтобы включить нерегулярные объекты. Вот краткое пояснение сути дела.

Для каждого класса выпуклых объектов (множеств или функций) $\mathcal{O}(X)$ определяется конификация $c(O)$, $O \in \mathcal{O}(X)$; при этом можно вычислить $(c(O))'$,

а результат может быть описан как замыкание конификации выпуклого объекта $O^{\mathcal{D}}$ из некоторого класса. Тогда $O^{\mathcal{D}}$ трактуется как двойственный объект для O . Мы видели, что бинарные операции можно определять для регулярных объектов O_i , $i = 1, 2$, как

$$c(O_1 \odot O_2) = \Omega(c(O_1) \times c(O_2))$$

с помощью оператора Ω , являющегося произведением операторов $+$ и Δ^{-1} . При этом можно вычислить $\Omega(c(O_1) \times c(O_2))$ также и для нерегулярных объектов O_i , $i = 1, 2$, и при этом результат является конификацией некоторого выпуклого объекта, который можно определить как $O_1 \odot O_2$. Аналогичным путем можно расширить правила исчисления всех выпуклых объектов.

К примеру, четыре операции над аффинными многообразиями можно определить и над подпространствами. Но если мы ограничим эти операции на подпространства, две операции исчезают: $\cap = \clubsuit$, $\oplus = \text{aff } \cup$.

Дополнение. Бывает удобно расширить двойственные операторы и бинарные операции еще дальше. Для этого требуется снабдить множество $\text{Cone}(Z)$ конусов конечномерного пространства Z метрикой Бляшке $\tilde{d}$ (точнее, некоторым обобщением метрики Бляшке, определенной на множестве ограниченных выпуклых конечномерных множеств): полагаем

$$\tilde{d}(C_1, C_2) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \forall x_1 \in C_1 \setminus \{0\} \exists x_2 \in C_2 \setminus \{0\} \arccos \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1||x_2|} \leq \varepsilon \right\}$$

для всех $C_i \in \text{Cone}(Z)$, $i = 1, 2$, и затем пишем

$$d(C_1, C_2) = \max(\tilde{d}(C_1, C_2), \tilde{d}(C_2, C_1))$$

для всех $C_i \in \text{Cone}(Z)$, $i = 1, 2$.

А теперь дадим эскиз обещанного обобщения конструкций на произвольные выпуклые объекты $\mathcal{O}(X)$. Пусть Z – пространство конификации (т.е. X , $X \times \mathbb{R}$ или $X \times \mathbb{R}^2$). Включим $\mathcal{O}(X)$ в $\text{Cone}(Z)$ с помощью оператора конификации c и обозначим через cls его замыкание. Назовем это *пополнением* $\mathcal{O}(X)$ и соответствующий класс пополненных множеств обозначим $\mathcal{O}(X)^c$. Двойственные операторы и бинарные операции расширяются по непрерывности.

Отметим, что в случае выпуклых множеств пополнение множеств приводит к присоединению рецессивных элементов.

6.3. Исчисление функции Минковского и индикаторного оператора. Кроме двойственных операторов в выпуклом анализе рассматривают и ряд других. Рассмотрим следующие четыре оператора.

1) Два оператора, связывающие нуль-множества и калибры. Один оператор – из $\text{Co}_0^f(X)$ в $\text{Co}_0(X)$, задаваемый соотношением $d \mapsto \{x \in X \mid d(x) \leq 1\}$, и оператор Минковского из $\text{Cl Co}_0(X)$ в $\text{Co}_0^f(X)$ (через $\text{Cl Co}_0(X)$ обозначен класс замкнутых нуль-множеств), задаваемый формулой $D \mapsto \mu(D)$, где $\mu D(x) = \inf\{\rho > 0 \mid x/\rho \in D\}$.

2) И еще два оператора – один, связывающий выпуклые функции и выпуклые множества специального вида: $\text{Co}^f(X) \rightarrow \text{Co}(X \times \mathbb{R})$, задаваемый соотношением $f \mapsto \text{epi}(f)$, и другой, связывающий выпуклые множества и выпуклые

функции специального вида: *индикаторный оператор* $\text{Co}(X) \rightarrow \text{Co}^f(X)$, задаваемый соотношением $A \mapsto \delta(A)$, где $\delta(A)(x) = 0$ для $x \in A$ и $\delta(A)(x) = +\infty$ в остальных случаях.

Эти четыре оператора сохраняют образы и прообразы при линейных отображениях, двойственные объекты и бинарные операции. Это дает возможность получить список формул исчисления этих операторов.

6.4. Субдифференциалы выпуклых функций. Здесь мы рассмотрим выпуклый аналог производной гладкой функции – *субдифференциал* собственной выпуклой функции. Для каждой функции $f \in \text{Co}^f(X)^r$ и точки $\hat{x} \in \text{dom } f$ *локализацией* f в точке $\hat{x}$ назовем сублинейную функцию $p_{\hat{x}}$ на X , для которой имеет место равенство $\text{sep}(p_{\hat{x}}) = \text{cone}(\text{sep } f - (\hat{x}, f(\hat{x})))$. Эта же функция называется *производной по направлению* f в точке $\hat{x}$. Назовем f *регулярной* в точке $\hat{x}$, если ее локализация $p_{\hat{x}}$ собствена. *Субдифференциал* собственной функции $f \in \text{Co}^f(X)^r$, регулярной в точке $\hat{x} \in \text{dom } f$, – это субдифференциал ее локализации: $\partial f(\hat{x}) = \partial(p_{\hat{x}})$, т.е.

$$(\partial f)(\hat{x}) = \{x' \in X' \mid f(\hat{x}) + \langle x', h \rangle \leq f(\hat{x} + h) \forall h \in X\}.$$

Элементы этого множества называются *субградиентами* f в $\hat{x}$.

Это определение субдифференциала дает возможность приложить все результаты для субдифференциалов сублинейных функций к исчислению субдифференциалов собственных выпуклых функций в точке.

ТЕОРЕМА 5 (исчисление субдифференциалов выпуклых функций в точке). *Следующие формулы имеют место для субдифференциалов выпуклых функций в регулярной точке $\hat{x}$ (сама точка $\hat{x}$ в формулах опущена; в первых двух формулах $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный оператор):*

- 1) $\partial(\Lambda f) = (\Lambda')^{-1} \partial f$ для любых собственных выпуклых функций f на X ;
- 2) $\partial(\Lambda^{-1} f) = \Lambda'(\partial f)$, если $\text{ri}(\text{dom}(f)) \cap (\hat{x} + \Lambda X) \neq \emptyset$ для любых собственных выпуклых функций f на $\tilde{X}$;
- 3) $\partial(f_1 \vee f_2) = \partial f_1 \text{ co } \cup \partial f_2$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- 4) $\partial(f_1 \otimes f_2) = \partial f_1 \otimes \partial f_2$;
- 5) $\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 \oplus \partial f_2$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- 6) $\partial(f_1 \oplus f_2) = \partial f_1 \cap \partial f_2$;
- 7) $\partial(f_1 \spadesuit f_2) = \partial f_1 \text{ co } \cup \partial f_2$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- 8) $\partial(f_1 \heartsuit f_2) = \partial f_1 \otimes \partial f_2$;
- 9) $\partial(f_1 \diamond f_2) = \partial f_1 \oplus \partial f_2$, если $\text{ri}(\text{dom } f_1) \cap \text{ri}(\text{dom } f_2) \neq \emptyset$;
- 10) $\partial(f_1 \text{ co } \wedge f_2) = \partial f_1 \cap \partial f_2$.

Формулу $\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 \oplus \partial f_2$ называют *формулой Моро–Рокафеллара*, а $\partial(f_1 \vee f_2)(\hat{x}) = \partial f_1 \text{ co } \cup \partial f_2$ – *формулой Дубовицкого–Миллутина*; формулы $\partial(f_1 \spadesuit f_2) = \partial f_1 \text{ co } \cup \partial f_2$ и $\partial(f_1 \diamond f_2) = \partial f_1 \oplus \partial f_2$ являются, по-видимому, новыми, остальные формулы следуют просто из определений.

6.5. Бесконечномерный случай. Большинство результатов этой работы верны и в бесконечномерном случае для пространств в двойственности и, в частности, для банаховых пространств в двойственности со своим сопряженным. Мы видели, что все формулы фактически разделяются на два класса: одни доказываются без всяких допущений, другие же – при некоторых предположениях “общности положения”.

Пусть X и Y – пространства в двойственности с $d(x, y) = \langle y, x \rangle$ и C – выпуклый конус в X . Конус $C^\circ = \{y \mid \langle y, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C\}$ называется *полярным конусом* к C , а оператор $D_{\text{Cone}(X)}(C) = C^\circ$, сопоставляющий конусу C его полярный конус, назовем *оператором двойственности для конусов* в X . Аналогично определяются полярный конус для конуса в пространстве Y и оператор двойственности для конусов в Y : $\tilde{C} \in \text{Cone}(Y) \Rightarrow \tilde{C}^\circ = \{x \mid \langle y, x \rangle \leq 0 \ \forall y \in \tilde{C}\}$, $D_{\text{Cone}(Y)}(\tilde{C}) = \tilde{C}^\circ$. Конус $(-C)^\circ$ называют *сопряженным конусом* для C и обозначают C' .

ТЕОРЕМА 1' (теорема двойственности для конусов). Пусть X и Y – пространства в двойственности и $C \subset X$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$D_{\text{Cone}(Y)}(D_{\text{Cone}(X)}(C)) = \text{cl } C. \quad (\text{D})$$

ДВЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ КОНУСОВ (ср. с теоремой 3). Пусть X, Y и $\tilde{X}, \tilde{Y}$ – пространства в двойственности ($X \leftarrow d \rightarrow Y, \tilde{X} \leftarrow d \rightarrow \tilde{Y}$), $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный непрерывный оператор ($\Lambda \in \mathcal{L}(X, \tilde{X})$) и $C \in \text{Cone}(X)$. Тогда имеет место равенство

$$D_{\text{Cone}(\tilde{X})}(\Lambda C) = (\Lambda')^{-1} D_{\text{Cone}(X)}(C). \quad (\text{C1})$$

Пусть $X \leftarrow d \rightarrow Y, \tilde{X} \leftarrow d \rightarrow \tilde{Y}, \Lambda \in \mathcal{L}(X, \tilde{X}), \text{int } \tilde{C} \neq \emptyset$ и при этом выполнено условие $\Lambda X \cap \text{int } \tilde{C} \neq \emptyset$. Тогда имеет место равенство

$$D_{\text{Cone}(X)}(\Lambda^{-1} \tilde{C}) = \Lambda' D_{\text{Cone}(\tilde{X})}(\tilde{C}), \quad (\text{C2})$$

в котором $\Lambda C = \{\tilde{x} = \Lambda x \mid x \in C\}$ – образ C , $\Lambda^{-1} \tilde{C} = \{x \in X \mid \Lambda x \in \tilde{C}\}$ – прообраз $\tilde{C}$, а $\Lambda' \in \mathcal{L}(\tilde{Y}, Y)$ – сопряженный оператор, определяемый равенством $\langle y, \Lambda x \rangle = \langle \Lambda' y, x \rangle \ \forall x \in X, y \in Y$.

Предварительные сведения.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ОТДЕЛИМОСТИ (см. [1; с. 38, 39]). Пусть X – пространство в двойственности с Y , A и B – выпуклые подмножества X , причем A имеет непустую внутренность и $\text{int } A \cap B = \emptyset$. Тогда найдется такой элемент $y \in Y$, что $\inf_{x \in A} \langle y, x \rangle \geq \sup_{x \in B} \langle y, x \rangle$.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ОТДЕЛИМОСТИ. Пусть X – пространство в двойственности с Y , $A \in \text{ClCo}(X)$ и $\xi \notin A$. Тогда найдется такой элемент $y \in Y$, что $\inf_{x \in A} \langle y, x \rangle > \langle y, \xi \rangle$.

Действительно, надо взять выпуклую окрестность ξ , не пересекающуюся с A , и, применив первую теорему отделимости, отделить их друг от друга.

Пусть $X \leftarrow d \rightarrow Y$ – пространства в двойственности и L – подпространство X . Множество $L^\perp = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle = 0 \ \forall x \in L\}$ называется *аннулятором* L .

ЛЕММА О НЕТРИВИАЛЬНОСТИ АННУЛЯТОРА. *Аннулятор собственного замкнутого подпространства пространства в двойственности нетривиален (т.е. содержит ненулевые элементы).*

Таким элементом будет функционал, отделяющий подпространство от точки, ему не принадлежащей.

ЛЕММА ОБ АННУЛЯТОРЕ ЯДРА СЮРЪЕКТИВНОГО ОПЕРАТОРА. *Пусть*

$$X \leftarrow d \rightarrow Y \quad \text{и} \quad \tilde{X} \leftarrow d \rightarrow \tilde{Y}$$

– два пространства в двойственности и $\Lambda: X \rightarrow \tilde{X}$ – линейный непрерывный сюръективный оператор. Тогда $(\text{Ker } \Lambda)^\perp = \text{Im } \Lambda'$, где Λ' – оператор, сопряженный Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $y = \Lambda' \tilde{y}$, $x \in \text{Ker } \Lambda$, то $\langle y, x \rangle = \langle \Lambda' \tilde{y}, x \rangle = \langle \tilde{y}, \Lambda x \rangle = 0$. Значит, $y \in (\text{Ker } \Lambda)^\perp$, т.е. $(\text{Ker } \Lambda)^\perp \subset \text{Im } \Lambda'$. Если же $y \in (\text{Ker } \Lambda)^\perp$, то рассмотрим такое подпространство в $\mathbb{R} \times \tilde{X}$:

$$L = \{(\alpha, \tilde{x}) \mid \alpha = \langle y, x \rangle, \tilde{x} = \Lambda x, x \in X\}.$$

Оно не совпадает с $\mathbb{R} \times \tilde{X}$ (так как ему не принадлежит вектор $(1, 0)$) и, очевидно, замкнуто. По лемме о нетривиальности аннулятора найдется вектор $(\beta, \tilde{y})$, не равный нулю и такой, что $\beta \langle y, x \rangle + \langle \tilde{y}, \Lambda x \rangle = 0 \ \forall x \in X$. Из сюръективности Λ следует, что $\beta \neq 0$ и, значит, $y = \Lambda'(-\tilde{y}/\beta)$, т.е. $\text{Im } \Lambda' \supset (\text{Ker } \Lambda)^\perp$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1'. Будем доказывать теорему в следующей эквивалентной форме:

$$C^{\circ\circ} = C \quad \Leftrightarrow \quad C \subset \text{ClCone}(X).$$

1) Если $C = C^{\circ\circ}$, то по определению $C = \bigcap_{y \in C^\circ} H_{(y,0)}$, т.е. C является пересечением замкнутых полупространств $H_{(y,0)} = \{x \in X \mid \langle y, x \rangle \leq 0\}$. Пересечение выпуклых и замкнутых множеств выпукло и замкнуто, значит, $C \in \text{ClCone}(X)$.

2) Пусть $C \in \text{ClCone}(X)$. Тогда если $x \in C$, а $y \in C^\circ$, то по определению поляры $\langle y, x \rangle \leq 0$, т.е. $C \subseteq C^{\circ\circ}$. Допустим, что $\tilde{x} \in C^{\circ\circ} \setminus C$. В силу выпуклости и замкнутости C по второй теореме отделимости существует элемент $\tilde{y} \in Y$ такой, что $\langle \tilde{y}, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in C$ (снова по определению поляры $\tilde{y} \in C^\circ$), но $\langle \tilde{y}, \tilde{x} \rangle > 0$, т.е. (в силу определения биполяры) $\tilde{x} \notin C^{\circ\circ}$. Получили противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (C1) ИСЧИСЛЕНИЯ КОНУСОВ. 1) Пусть $\tilde{y} \in (\Lambda')^{-1}C^\circ$. Тогда $\Lambda' \tilde{y} \in C^\circ$, следовательно, для каждого $x \in C$ получаем $\langle \Lambda' \tilde{y}, x \rangle \leq 0$, тем самым, $\langle \tilde{y}, \Lambda x \rangle \leq 0$. Так как $x \in C$ произвольно, получаем, что $\tilde{y} \in (\Lambda C)^\circ$.

2) Пусть $\tilde{y} \in (\Lambda C)^\circ$. Это по определению поляры означает, что для каждого $x \in C$ выполнено неравенство $\langle \tilde{y}, \Lambda x \rangle \leq 0$. Следовательно, по определению сопряженного оператора $\langle \Lambda' \tilde{y}, x \rangle \leq 0$. Так как $x \in C$ произвольно, получаем, что $\Lambda' \tilde{y} \in C^\circ$, т.е. $\tilde{y} \in (\Lambda')^{-1}C^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (C2) ИСЧИСЛЕНИЯ КОНУСОВ. 1) Пусть $y \in \Lambda' \tilde{C}^\circ$ и $\Lambda x \in \tilde{C}$. Тогда из определений следует, что существует такой элемент $\tilde{y} \in \tilde{C}^\circ$, что $y = \Lambda' \tilde{y}$. Производя тождественные преобразования и пользуясь определением поляры, получаем $\langle y, x \rangle = \langle \Lambda' \tilde{y}, x \rangle = \langle \tilde{y}, \Lambda x \rangle \leq 0$. Это означает, что $((\Lambda')^{-1} \tilde{C})^\circ \subset \Lambda' \tilde{C}^\circ$.

2) Пусть $y \in (\Lambda^{-1} \tilde{C})^\circ$. Если $\Lambda x = 0$, то $x \in \Lambda^{-1} \tilde{C}$ и, значит, $\langle y, x \rangle \leq 0$, а ввиду того, что $\Lambda(-x) = 0$, получаем, что след y на ΛX принадлежит аннулятору ядра Λ . В силу условия теоремы и леммы об аннуляторе ядра это означает, что найдется элемент $\tilde{\eta} \in (C \cap \Lambda X)'$ такой, что $y = \Lambda' \tilde{\eta}$. Производя тождественные преобразования и пользуясь определением поляры, получаем, что если $\Lambda x = \tilde{x}$, то $\langle y, x \rangle = \langle \Lambda' \tilde{\eta}, x \rangle = \langle \tilde{\eta}, \Lambda x \rangle = \langle \tilde{\eta}, \tilde{x} \rangle \leq 0$. Остается отделить по первой теореме отделимости Кег η гиперплоскостью, опорной к C , причем так, чтобы линейный функционал $\tilde{y}$, ядром которого будет отделяющая гиперплоскость, продолжал бы η . Тогда получится, что $y = \Lambda' \tilde{y}$, $\tilde{y} \in \tilde{C}^\circ$.

Двойственный оператор. Из определений выводятся следующие формулы:

- (a) $L \in \text{Lin}(X) \Rightarrow L^\circ = L^\perp$;
- (b) $A \in \text{Co}(X) \Rightarrow h(A)^\circ = \text{epi } sA$;
- (c) $B \in \text{Co}_0(X) \Rightarrow \text{epi } sB = h(B^\circ)$;
- (d) $p \in \text{Cone}^f(X) \Rightarrow (\text{epi } p)^\circ = \text{epi } s(\partial p)$;
- (e) $\text{epi } s(\partial n) = h(\partial n^*)$;
- (f) $f \in \text{Co}^f(X) \Rightarrow (h(\text{epi } f))^\circ = \text{epi } h(\text{epi } f^*)$.

Остается провести описанную выше процедуру построения двойственного оператора по отношению ко всем восьми классам выпуклых объектов: все импликации, кроме одной, которая состоит в применении одной (или двух) формул из (a)–(f), следуют из определений (в пп. 1)–8), рассматриваемых далее, через $\mathcal{X}(X)$ обозначается “пространство конификаций”, а именно X , $X \times \mathbb{R}$ или $X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- 1) $L \in \text{Lin}(X) \Rightarrow c_{\text{Lin}(X)}(L) = L$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(L) \stackrel{(a)}{=} L^\perp = c_{\text{Cone}(X^d)}(L^\perp) \Rightarrow D_{\text{Lin}(X)}(L) = L^\perp$;
- 2) $C \in \text{Cone}(X) \Rightarrow c_{\text{Cone}(X)}(C) = C$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(C) = C^\circ = c_{\text{Cone}(X^d)}(C^\circ) \Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(C) = C^\circ$;
- 3) $B \in \text{Co}_0(X) \Rightarrow c_{\text{Co}_0(X)}(B) = h(B)$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(\mathcal{X}(X))}(h(B)) \stackrel{(b),(c)}{=} \text{epi } sB = c_{\text{Cone}(\mathcal{X}(X)^d)}(\text{epi } sB) = h(B^\circ)$
 $\Rightarrow D_{\text{Co}_0(X)}(B) = B^\circ$;
- 4) $A \in \text{Co}(X) \Rightarrow c_{\text{Co}(X)}(A) = h(A)$
 $\Rightarrow D_{\text{Co}(X)}(h(A)) \stackrel{(b)}{=} \text{epi } sA = c_{\text{Cone}(\mathcal{X}(X)^d)}(\text{epi } sA) \Rightarrow D_{\text{Co}(X)}(A) = sA$;
- 5) $l_y = \langle \cdot, y \rangle \in \text{Lin}^f(X) \Rightarrow c_{\text{Lin}^f(X)}(l) = \text{epi } l_y$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(\text{epi } l_y) \stackrel{(d)}{=} \text{epi } \partial l_y = c_{\text{Cone}(\mathcal{X}(X)^d)}(\text{epi } \partial l_y)$
 $\Rightarrow D_{\text{Lin}^f(X)}(l_y) = y$;

- 6) $p \in \text{Cone}^f(X) \Rightarrow c_{\text{Cone}^f(X)}(p) = \text{epi } p$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(\text{epi } p) \stackrel{(d)}{=} \text{epi } s \partial p = c_{\text{Cone}(\mathcal{X}(X)^d)}(\partial p)$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}^f(X)}(p) = \partial p;$
- 7) $n \in \text{Co}_0^f(X) \Rightarrow c_{\text{Co}_0^f(X)}(n) = \text{epi } n$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}(\text{epi } n) \stackrel{(d)}{=} \text{epi } s \partial n \stackrel{(e)}{=} h(n^*) \Rightarrow D_{\text{Co}_0^f(X)}(n) = n^*;$
- 8) $f \in \text{Co}^f(X) \Rightarrow c_{\text{Co}^f(X)}(f) = h(\text{epi } f)$
 $\Rightarrow D_{\text{Cone}(X)}h(\text{epi } f) \stackrel{(e)}{=} h(\text{epi } f^*) \Rightarrow D_{\text{Co}^f(X)}(f) = f^*.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1 (бесконечномерный случай). Выводы формул предложения 1 стандартны и просты. Ограничимся одним примером (см. формулу 1(b) предложения 1). В выкладке и далее через Ω обозначается либо $\alpha = +_X \vee \Delta_X^{-1}$, либо пара (α, β) , где $\alpha = +_X \vee \Delta_X^{-1}$, а $\beta = +_{\mathbb{R}} \vee \Delta_{\mathbb{R}}^{-1}$, $\odot_{\Omega}$ – бинарная операция, соответствующая Ω :

$$\begin{aligned} c_{\text{Cone}(X)}(C_1 \odot_{+X} C_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega(c_{\text{Cone}(X)}(C_1) \times c_{\text{Cone}(X)}(C_2)) \\ &= \Omega(C_1 \times C_2) = C_1 \oplus C_2 = c_{\text{Cone}(X)}(C_1 \oplus C_2) \Rightarrow \odot_{+X} = \oplus. \end{aligned}$$

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ИСЧИСЛЕНИЯ.

$$\begin{aligned} &D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}(c_{\mathcal{O}(X)}(O_1) \odot_{\Omega} c_{\mathcal{O}(X)}(O_2)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}(\Omega(c_{\mathcal{O}(X)}(O_1) \times c_{\mathcal{O}(X)}(O_2))) \\ &\stackrel{(D)}{=} \Omega^{\mathcal{D}}(D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}c_{\mathcal{O}(X)}(O_1) \times D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}c_{\mathcal{O}(X)}(O_2)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}c_{\mathcal{O}(X)}(O_1)) \odot_{\Omega^{\mathcal{D}}} (D_{\text{Cone } \mathcal{X}(X)}c_{\mathcal{O}(X)}(O_2)) \\ &\Rightarrow D(O_1 \odot_{\Omega} O_2) = DO_1 \odot_{\Omega^{\mathcal{D}}} DO_2. \end{aligned}$$

К выводу формул теоремы 4. Эти выводы совершенно стандартны и просты. Ограничимся двумя примерами (см. теорему 4, формулы 1(c) и 6(e)):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) &= \text{Cone}(X) \\ &\Rightarrow (C_1 \oplus C_2)' = (C_1 \odot_{+X} C_2)' = C_1' \odot_{\Delta_X^{-1}} C_2' = C_1' \cap C_2'; \\ \mathcal{O}(X) &= \text{Co}_0(X) \\ &\Rightarrow (B_1 \otimes B_2)^{\circ} = (B_1 \odot_{(\Delta_X^{-1}, +_{\mathbb{R}})} B_2)^{\circ} \cong B_1^{\circ} \odot_{(+X, \Delta_{\mathbb{R}}^{-1})} B_2^{\circ} = B_1^{\circ} + B_2^{\circ}. \end{aligned}$$

Приложения

§ 7. Двойственность и исчисление подпространств и теория линейных уравнений

В силу того что конечномерные подпространства замкнуты, формулы (D) в конечномерном случае верны всегда без дополнительных предположений. В бесконечномерном случае в качестве подпространства далее фигурирует образ разности единичного и компактного оператора (т.е. оператора, переводящего единичный шар в компактное множество). Нетрудно доказывается его замкнутость.

ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. 1) Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $A: X \rightarrow Y$ – линейный оператор. Для разрешимости уравнения $Ax = b$ (для заданного $b \in Y$) необходимо и достаточно, чтобы $b \in (\ker A')^\perp$; если $X = Y = \mathbb{R}^n$, то условиям разрешимости можно придать форму альтернативы: либо уравнение $Ax = y$ разрешимо при любых y , либо однородное уравнение $Ax = 0$ имеет ненулевое решение.

2) Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ – банахово пространство, $\Lambda: X \rightarrow X$ – компактный оператор, $A = I - \Lambda$, где I – единичный оператор. Для разрешимости уравнения $Ax = b$ необходимо и достаточно, чтобы $b \in (\ker A^*)^\perp$ (где A^* – сопряженный оператор); более того, имеет место альтернатива (Фредгольма): либо уравнение $Ax = b$ разрешимо при любом $b \in X$, либо однородное уравнение $Ax = 0$ имеет ненулевое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем ((D) означает двойственность, (Cal) – исчисление):

$$AX \stackrel{(D)}{=} (AX)^{\perp\perp} \stackrel{\text{Id}}{=} ((AX)^\perp)^\perp \stackrel{(\text{Cal})}{=} ((A')^{-1}X^\perp)^\perp \stackrel{(\text{Cal})}{=} ((A')^{-1}(0))^\perp \stackrel{\text{def}}{=} (\ker A')^\perp. \quad (***)$$

Вторую часть утверждения 1) докажем сразу в бесконечномерном случае.

2) Ввиду замкнутости AX первое утверждение получается аналогично (***) (с заменой A' на A^*).

Второе утверждение теоремы можно сформулировать так:

$$AX = X \Leftrightarrow \ker A = \{0\}.$$

Докажем его.

($\Leftarrow$) Пусть $\ker A = \{0\}$, но $AX \neq X$. Выберем по индукции последовательность $y_k \in X$, $k \geq 0$, единичных векторов так, что $y_0 \notin AX$ и $y_{k+1} = Ay_k$, $k \geq 0$. Тогда ясно, что $y_k \in A^k X \setminus A^{k+1} X$, $k \geq 0$, и мы получаем последовательность замкнутых подпространств $X \supset AX \supset A^2 X \supset \dots$. В конечномерном пространстве это немедленно приводит к противоречию. В бесконечномерном случае воспользуемся таким почти очевидным утверждением (называемым иногда леммой Ф. Рисса; его мы докажем чуть позже): если $\bar{L}$ – собственное замкнутое подпространство банахова пространства $\bar{X}$, то найдутся единичные векторы, находящиеся от $\bar{L}$ на расстоянии сколь угодно близко к единице. Используем лемму Рисса для выбора в подпространстве $A^n X$ элемента x_n , $\|x_n\| = 1$, на расстоянии $\geq 1/2$ от $A^{n+1} X$. Пусть $m > n$. Тогда (это снова нетрудно показать)

$$z = x_n - Ax_n + Ax_m \in A^{n+1} X$$

и

$$\|\Lambda x_m - \Lambda x_n\|_X = \|z - x_m\|_X \geq 1/2,$$

что невозможно из-за компактности Λ .

($\Rightarrow$) Пусть $AX = X$. Тогда в силу двойственности $(A^*)^{-1}(0) = \{0\}$, т.е. $\ker A^* = \{0\}$. Из этого следует, что $A^* X^* = X^*$ (это было доказано выше, надо только заменить A на A^*). По двойственности отсюда следует, что $\ker A = \{0\}$.

Альтернатива Фредгольма была доказана им в 1900 г. для интегральных уравнений, в общей форме она была получена Ф. Риссом в 1913 г.

§ 8. Двойственность и исчисление конусов и теория линейных неравенств

ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ – конечномерные пространства со стандартными базисами и со стандартной двойственностью $\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i$, $A: X \rightarrow Y$ – линейный оператор и $b \in Y$.

1) Для того чтобы система $Ax = b$, $x \geq 0$, имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in Y$ такого, что $A'y \geq 0$, выполнялось неравенство $\langle y, b \rangle \geq 0$.

2) Неравенство $Ax \leq b$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle y, b \rangle \geq 0$ для всех y таких, что $y \geq 0$ и $A'y = 0$.

3) Неравенства $Ax \leq b$, $x \geq 0$, разрешимы тогда и только тогда, когда $\langle y, b \rangle \geq 0$ для всех y таких, что $y \geq 0$ и $A'y \geq 0$.

Утверждение 1) было доказано Г. Минковским (1896 г.) и Ю. Фаркашем (1901 г.), 2) – Фань Цзы (Ки Фанем) (1956 г.), 3) – Д. Гейлом (1966 г.).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Разрешимость системы $Ax = b$, $x \geq 0$, означает, что $b \in A\mathbb{R}_+^n$. Конус $A\mathbb{R}_+^n$ полиэдральный, следовательно,

$$A\mathbb{R}_+^n \stackrel{(D)}{=} ((A\mathbb{R}_+^n)')' \stackrel{(Cal)}{=} ((A')^{-1}\mathbb{R}_+^m)',$$

откуда следует 1).

2) Разрешимость неравенства $Ax \leq b$ означает, что $b \in A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m$. Сумма двух полиэдральных конусов в конечномерном пространстве, как нетрудно понять, – полиэдральный конус, значит, $A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m$ – полиэдральный конус и тогда

$$A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m \stackrel{(D)}{=} ((A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m)')' \stackrel{(Cal)}{=} ((A')^{-1}\{0\} \cap \mathbb{R}_+^m)',$$

откуда следует 2).

3) Разрешимость системы $Ax \leq b$, $x \geq 0$, означает, что $b \in A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m$. Но $A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m$ – полиэдральный конус в $\mathbb{R}^m$, следовательно,

$$A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m \stackrel{(D)}{=} ((A\mathbb{R}_+^n + \mathbb{R}_+^m)')' \stackrel{(Cal)}{=} ((A')^{-1}\mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_+^m)',$$

что равносильно 3).

§ 9. Двойственность поляр и выпуклая конечномерная геометрия

Пусть B и C – множества из $Co_0(X)$, $L \in \text{Lin}(X)$. Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} d_L(C, B) &= \inf\{\varepsilon \mid C \subset \varepsilon B + L\}, & d^L(C, B) &= \sup\{\varepsilon \mid C \supset \varepsilon B \cap L\}, \\ d_n(C, B) &= \inf\{d_L(C, B) \mid \dim L \leq n\}, & d^n(C, B) &= \inf\{d^L(C, B) \mid \dim L \leq n\}. \end{aligned}$$

Если B – единичный шар нормированного пространства, то величина $d_L(C, B)$ – это не что иное, как *уклонение C от L* , а величины $d_n(C, B)$ и $d^n(C, B)$ называются *поперечниками по Колмогорову и Гельфанду* соответственно. Имеет место

ТЕОРЕМА О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ПО КОЛМОГОРОВУ И ГЕЛЬФАНДУ. Если C и B – выпуклые центрально-симметричные тела в конечномерном пространстве, то

$$d_L(C, B) = (d^{L^\perp}(B^\circ, C^\circ))^{-1}, \quad (i)$$

$$d_n(C, B) = (d^n(B^\circ, C^\circ))^{-1}. \quad (ii)$$

Действительно, соотношение $B_1 \subseteq B_2$ (для $B_i \in \text{ClCo}_0(X)$, $i = 1, 2$) имеет место тогда и только тогда, когда $B_1^\circ \supseteq B_2^\circ$. Поэтому соотношение (i) (и тем самым (ii)) сразу следует из формул для исчисления поляр

$$C \subseteq \varepsilon B + L \quad \Rightarrow \quad C^\circ \supseteq (\varepsilon^{-1} B^\circ) \cap L^\perp.$$

§ 10. Исчисление субдифференциалов и принцип Лагранжа для выпуклых задач

Для выпуклой задачи на минимум без ограничений из определений следует такой результат.

Если f – собственная выпуклая функция и $\hat{x}$ – регулярная точка, то необходимым и достаточным условием того, что элемент $\hat{x}$ доставляет (абсолютный) минимум f , является включение $0 \in \partial f(\hat{x})$.

Его принято называть теоремой Ферма.

Этот результат является аналогом теоремы Ферма для гладких задач без ограничений.

Рассмотрим теперь выпуклую задачу с ограничениями.

ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ. Пусть в задаче

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad x \in A, \quad (P)$$

пространство X конечномерно (или, более общо, линейное выпуклое пространство), функции $f_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $0 \leq i \leq m$, выпуклы и непрерывны в точке $\hat{x} \in A$, где A – выпуклое подмножество X . Тогда если $\hat{x}$ – решение задачи (P), то найдется набор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$ множителей Лагранжа такой, что а) $\lambda \geq 0$, б) $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $1 \leq i \leq m$, и в) выполнен принцип минимума для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$:

$$\min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}(\hat{x}, \lambda).$$

Этот результат мы называем принципом Лагранжа для выпуклых задач или теоремой Каруша–Куна–Таккера. Это – аналог правила множителей Лагранжа для выпуклого случая. Этот результат был доказан Г. Куном и А. Таккером в 1948 году. Ранее (в 1939 г.) его доказал в своей неопубликованной диссертации У. Каруш.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{x}$ – решение (P) (не ограничивая общности, можно считать, что $f_0(\hat{x}) = 0$). Тогда $\hat{x}$ является решением и такой задачи без ограничений:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x) + \delta A(x) = g(x) + \delta A(x),$$

где (напомним) $\delta A(x) = 0$, если $x \in A$, и $\delta A(x) = \infty$, если $x \notin A$. По теореме Ферма $0 \in \partial f(\hat{x})$, а по формуле Моро–Рокафеллара найдется элемент $x' \in X'$ такой, что $x' \in \partial g(\hat{x})$, $-x' \in \partial \delta A(\hat{x})$. Элемент x' представляется по формуле Дубовицкого–Милютина в виде

$$x' = \sum_{i=0}^m \lambda_i x'_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad x'_i \in \partial f_i(\hat{x}), \quad 0 \leq i \leq m, \quad \lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Остается положить $\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$, и мы приходим к принципу Лагранжа.

ПРИМЕР (задача о расстоянии). Рассмотрим задачу о расстоянии от элемента x до замкнутого подпространства в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$:

$$\|x - \xi\|_X \rightarrow \min, \quad \xi \in L \quad (L \in \text{Lin}(X)).$$

Пусть BX^* – единичный шар сопряженного пространства. Если $\hat{\xi}$ – решение этой задачи, то оно является абсолютным минимумом в задаче

$$f(\xi) = \|x - \xi\|_X + \delta L(\xi) \rightarrow \min$$

без ограничений. Тогда из теоремы Ферма и формулы Дубовицкого–Милютина получаем, что $\hat{\xi}$ – решение тогда и только тогда, когда

$$0 \in \partial f(\hat{\xi}) = \partial \|x - \cdot\|_X(\hat{\xi}) + \partial \delta L(\hat{\xi}).$$

Но

$$\partial \|x - \cdot\|_X(\hat{\xi}) = \{x^* \in BX^* \mid \langle x^*, x - \hat{\xi} \rangle = -\|x - \hat{\xi}\|_X\},$$

а $\partial \delta L(\hat{\xi}) = L^\perp$. В итоге приходим к такому критерию элемента наилучшего приближения в задаче о расстоянии: *существует $x^* \in BX^* \cap L^\perp$ такой, что $\langle x^*, x \rangle = \|x - \hat{\xi}\|$.*

§ 11. Двойственность и исчисление сопряженных функций и двойственность выпуклых задач

Начнем с общей схемы построения двойственной задачи к данной (для простоты – в конечномерном пространстве). Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $X' = (\mathbb{R}^n)'$ – сопряженное пространство, $f \in \text{Cone}^f(X)^r$. Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (\bar{P})$$

Включим ее в семейство задач, зависящих от некоторого параметра $y \in Y$ (где $Y = \mathbb{R}^m$), рассмотрев собственную функцию

$$F: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

такую, что $F(x, 0) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Семейство задач

$$F(x, y) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\bar{P}_y)$$

назовем *возмущением задачи* $(\bar{P})$, а выпуклую функцию $S: Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, сопоставляющую y значение $S(y)$ задачи $(\bar{P}_y)$, назовем *S-функцией семейства* $(\bar{P}_y)$.

Найдем функцию, сопряженную с S (при этом мы расширяем определение оператора сопряжения на произвольные функции, принимающие значения в $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, с помощью той же формулы). Имеем

$$S^*(y') = \sup_{y \in Y} (\langle y', y \rangle - \inf_{x \in X} F(x, y)) = \sup_{x \in X, y \in Y} (\langle 0, x \rangle + \langle y', y \rangle - F(x, y)),$$

где выражение справа – сопряженная функция к F в точке $(0, y')$.

Двойственной задачей к $(\bar{P})$ (относительно заданного возмущения) назовем задачу

$$-F^*(0, y') \rightarrow \max, \quad y' \in Y'. \quad (\bar{P}^*)$$

(Исходную задачу $(\bar{P})$ называют *прямой*.)

Если предположить, что $S \in \text{ClCo}^f(X)^r$, то в силу теоремы двойственности для функций “значения” прямой и двойственной задач совпадают.

Применим эту конструкцию к задаче *линейного программирования в нормальной форме*:

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0, \quad (i^*)$$

где, как обычно, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in (\mathbb{R}^n)'$, A – матрица размера $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и неравенство между векторами понимается покоординатно.

Возмущение задачи (i^*) запишется в виде

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min, \quad -Ax + b \leq y, \quad x \geq 0. \quad (ii^*)$$

Тогда

$$-F^*(0, y') = -\sup_{x \geq 0} (y' \cdot (-Ax + b) - \langle c, x \rangle) = \inf_{x \geq 0} (-y' \cdot b + (y' A + c) \cdot x).$$

Множество тех y' , где эта функция равна $-\infty$, можно отбросить, так как нас интересует ее верхняя грань. Таким образом, $y' A \geq -c$ и в этом случае $-F^*(0, y') = -y' \cdot b$. Если сделать замену $\xi = -y'$, то двойственная к (i^*) задача запишется в виде

$$\langle \xi, b \rangle \rightarrow \max, \quad \xi A \leq c, \quad \xi \geq 0. \quad (i^{**})$$

Эпиграф S -функции возмущения (ii^*) задачи (i^*) – полиэдр, следовательно, он замкнут, т.е. сама S -функция замкнута и по теореме двойственности $S = S^{**}$. В частности, если S – собственная функция, то $S(b) = S^{**}(b)$. Это приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. Для прямой и двойственной задач линейного программирования имеет место альтернатива: либо $|S(b)| = \infty$, либо $|S(b)| < \infty$.

В первом случае либо значение задачи (i^*) равно $-\infty$, либо множество допустимых элементов пусто. Во втором случае решения обеих задач существуют, их значения равны и критерием решений для допустимых элементов $\bar{x}$ и $\bar{\xi}$ является равенство $\langle \bar{x}, c \rangle = \langle \bar{\xi}, b \rangle$.

Также автоматически выписываются задачи, двойственные к задачам линейного программирования, записанным в других формах, скажем, к задаче $\langle c, x \rangle \rightarrow \max, Ax \geq b$. В качестве следствия получится доказательство известной леммы Фаркаша: если неравенство $y_0 \cdot x \leq 0$ является следствием неравенств $y_i \cdot x \leq 0, 1 \leq i \leq N$, то найдутся неотрицательные числа $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$, такие, что $y_0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ (задача о расстоянии). Отметим еще теорему двойственности в задаче о расстоянии, которую мы обсуждали выше.

Пусть X – нормированное пространство, L – его собственное замкнутое подпространство, $x \in X \setminus L$. Функция расстояния (в частности, $x \mapsto d_L(x, X)$) непрерывна и, в частности, замкнута. Следовательно,

$$d_L(x, X) \stackrel{\text{def}}{=} (\|\cdot\| \oplus \delta L)(x) \stackrel{(D)}{=} ((\|\cdot\| \oplus \delta L)^*)(x) = (\delta BX^* \cap L^\perp)^*(x),$$

т.е.

$$d_L(x, X) \stackrel{(\text{Cal})}{=} \sup\{\langle x^*, x \rangle \mid x^* \in BX^* \cap L^\perp\}.$$

В этом и состоит теорема двойственности для задачи о расстоянии.

В частности, пусть L – собственное замкнутое подпространство банахова пространства X . Тогда, во-первых, в силу того, что из $L \neq X$ следует, что $L^\perp \neq X^\perp \Rightarrow L^\perp \neq \{0\}$ (это утверждение называется леммой об аннуляторе: собственное замкнутое подпространство имеет нетривиальный аннулятор). А во-вторых, из теоремы двойственности получаем, что

$$\sup_{x \in BX} d_L(x, X) = \sup_{x^* \in BX^* \cap L^\perp} \|x^*\|_{X^*} = 1.$$

В этом состоит лемма Ф. Рисса, о которой упоминалось выше: если L – собственное замкнутое подпространство банахова пространства X , то найдутся единичные векторы, находящиеся от L на расстоянии сколь угодно близко к единице.

Число примеров приложения двойственности и исчисления выпуклых объектов исключительно велико.

Список литературы

- [1] Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, М., 2003; [англ. пер.: G.G. Magaril-Ilyayev, V.M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.](#)

- [2] J. Brinkhuis, V. Tikhomirov, *Optimization: insights and applications*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005.
- [3] Н. Minkowski, *Theorie der konvexe Körper*, Gesammelte Abhandlungen, **2**, Teubner, Leipzig, 1910.
- [4] W. Fenchel, “On conjugate convex functions”, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 73–77.
- [5] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970; пер. с англ.: Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

Я. Бринкхаус (J. Brinkhuis)

Erasmus University, Rotterdam

E-mail: brinkhuis@few.eur.nl

Поступила в редакцию

20.01.2006

В. М. Тихомиров (V. M. Tikhomirov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tikh@tikhomir.mccme.ru