Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин, Функтор емкостей
в категории компактов, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 2, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:15:13

УДК 515.122.5+517.518.11

М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин**Функтор емкостей в категории компактов**

В работе изучаются пространства полунепрерывных сверху емкостей на компактах. Доказано, что функтор емкостей определяет монаду в категории компактов, содержащую монаду гиперпространств включения в качестве подмонады. Кроме того определена метризация пространства емкостей компактного метрического пространства. Доказана также открытость функтора емкостей.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Понятие емкости введено в математику Шоке (см. [1]), а в некоторых своих аспектах оно восходит к Винеру. Наряду со ставшими классическими приложениями емкостей в теории уравнений в частных производных, математической физике и геометрии в последнее время пространство емкостей интенсивно используется в математической экономике для моделирования поведения в условиях неопределенности (из многочисленных статей по этой тематике укажем, например, [2]–[5]), в теории нечетких множеств, страховании, финансах и т.п.

В работе [6] определены полунепрерывные сверху емкости и показано, что пространство полунепрерывных емкостей на компакте, наделенное слабой топологией, также является компактом. В [6] также доказана для емкостей теорема Колмогорова о существовании емкости на произведении компактов с заданными маргинальными емкостями. Фактически и формулировка, и доказательства этой теоремы используют функториальность конструкции пространства емкостей; в реферате статьи [6], помещенном в “Mathematical Reviews”, отмечено, что доказательство упомянутой теоремы может быть модифицировано *mutatis mutandis* в доказательство непрерывности функтора емкостей. Здесь непрерывность понимается в смысле общей теории функторов в категории компактов, развитой Е. В. Щепиным [7]: функтор непрерывен, если он сохраняет пределы обратных спектров.

В этой статье мы систематически изучаем функториальность пространств емкостей на компактах. Пространство емкостей содержит пространство вероятностных мер в качестве подпространства, и это включение функториально. Одним из основных результатов настоящей работы является теорема 6, утверждающая, что функтор емкостей определяет монаду в смысле Эйленберга–Мура на категории компактов. Это в определенном смысле углубляет параллель между емкостями и вероятностными мерами, поскольку наличие структуры монады для функтора вероятностных мер является хорошо известным фактом (см., например, [8], [9]). Следует подчеркнуть, однако, что монада вероятностных мер не является подмонадой монады емкостей. Естественное вложение функтора емкостей в функтор сохраняющих порядок функционалов (см. [10])

также не является вложением монады емкостей в монаду сохраняющих порядков функционалов.

В статье установлена тесная связь между монадой емкостей и монадой гиперпространств включения, определенной Т. Радуллом [11]; описано вложение второй монады в первую и получен класс монад, занимающих промежуточное положение и аппроксимирующих монаду емкостей.

Также в работе показано, что сходимость последовательности емкостей в метризуемом компакте выражается в терминах гиперпространств включения (теорема 4).

Еще один из основных результатов статьи – теорема 5 – является аналогом классического результата Дитора–Эйфлера [12], доказанного для функтора вероятностных мер; она утверждает открытость функтора емкостей. Отметим, что техника, использованная в [12], существенно использует линейность функционалов, соответствующих по теореме Риса вероятностным мерам. Поскольку емкостям соответствуют нелинейные функционалы (интегралы Шоке; см. ниже), доказательство теоремы открытости в этом случае существенно усложняется и требует развития другой техники.

По аналогии с метриками Леви–Прохорова (см. [13]) и Канторовича–Рубинштейна (см. [14]) на пространстве вероятностных мер компактного метрического пространства мы определяем метрики на пространстве емкостей компактного метрического пространства, индуцирующие его топологию.

Отметим, что топологии пространств вероятностных мер, гиперпространств включения и пространств функционалов, сохраняющих порядок, посвящены работы [7], [10], [15] и др. Топологические свойства пространств емкостей на метризуемых и неметризуемых компактах будут рассмотрены в последующих публикациях.

Материал изложен следующим образом. После параграфа, содержащего терминологию и обозначения, приведен обзор всех основных результатов. Доказательства (за небольшими исключениями, продиктованными логикой изложения) собраны в последнем параграфе.

§ 2. Терминология и обозначения

Компактом называем компактное хаусдорфово пространство, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $I = [0, 1]$, $C(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций на X с топологией поточечной сходимости, $C_+(X)$ – пространство неотрицательных непрерывных функций на X , наделенное $\sup$ -нормой.

Через $\exp X$ обозначаем пространство непустых замкнутых подмножеств компакта X , наделенное топологией Виеториса (см., например, [8]). По определению ее базу образуют семейства вида

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \\ = \{F \in \exp X \mid F \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n, F \cap U_k \neq \emptyset \text{ для } k = 1, 2, \dots, n\},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, U_2, \dots, U_n$ – открытые подмножества компакта X . Известно, что для компакта X пространство $\exp X$ также является компактом, поэтому имеет смысл рассматривать компакты $\exp^2 X = \exp(\exp X)$, $\exp^3 X = \exp(\exp^2 X)$ и т.д.

Если $A \subset X$, то через $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ обозначаем характеристическую функцию множества A : $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Запись $A \underset{\text{cl}}{\subset} B$ (соответственно $A \underset{\text{op}}{\subset} B$) означает, что A является замкнутым (соответственно открытым) подмножеством в B .

Кратко изложим основные понятия и факты из [6], используемые в дальнейшем. Действительнозначные функции $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ называем *комонотонными*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ имеет место $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$. Отметим, что в частности постоянная функция комонотонна любой функции.

Емкостью на компакте X называем функцию $c: \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow I$, для которой выполняются следующие три свойства (ниже F, G – замкнутые подмножества в X):

- (a) $c(\emptyset) = 0, c(X) = 1$;
- (b) если $F \subset G$, то $c(F) \leq c(G)$ (монотонность);
- (c) если $c(F) < a$, то существует такое открытое множество $U \supset F$, что для каждого $G \subset U$ выполнено $c(G) < a$ (полунепрерывность сверху).

Емкость c называем *выпуклой* (*convex*), если

- (d) для произвольных F, G выполнено $c(F \cup G) + c(F \cap G) \geq c(F) + c(G)$.

Аналогично, емкость c называем *вогнутой* (*concave*), если

- (e) для произвольных F, G имеем $c(F \cup G) + c(F \cap G) \leq c(F) + c(G)$.

Для произвольной емкости c на компакте X и произвольного множества $A \subset X$ называем *внутренней емкостью множества A* число

$$c_*(A) = \sup\{c(F) \mid F \underset{\text{cl}}{\subset} X, F \subset A\}.$$

Если множество A замкнуто, то, очевидно, $c_*(A) = c(A)$. *Внешней емкостью произвольного множества $A \subset X$* называем число

$$c^*(A) = \inf\{c_*(U) \mid U \underset{\text{op}}{\subset} X, U \supset A\}.$$

Множество A называем *измеримым относительно c* , если $c_*(A) = c^*(A)$. В частности, все открытые и все замкнутые множества измеримы. Для измеримого множества A обозначаем $c_*(A) = c^*(A) = c(A)$, т.е. продолжаем каждую емкость c на семейство всех измеримых относительно нее множеств.

Каждой емкости c соответствует *интеграл Шоке*, т.е. функционал I_c на $C_+(X)$, определенный для $\varphi \in C_+(X)$ равенством

$$I_c(\varphi) = \int \varphi(x) dc(x) = \int_0^{+\infty} c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geq a\}) da.$$

Для любых (не обязательно неотрицательных) непрерывных функций на X интеграл Шоке определяется формулой

$$\begin{aligned} I_c(\varphi) &= \int \varphi(x) dc(x) \\ &= \int_0^{+\infty} c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geq a\}) da - \int_{-\infty}^0 (1 - c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geq a\})) da. \end{aligned}$$

Интеграл Шоке $i = I_c$ обладает следующими пятью свойствами:

- (1) для каждой $\varphi \in C_+(X)$ выполнено $i(\varphi) \geq 0$ (неотрицательность);
- (2) $i(\text{const}_1) = 1$, где $\text{const}_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ – постоянная функция, равная a на всем X (нормированность);

- (3) $i(k\varphi) = ki(\varphi)$ для произвольных $\varphi \in C_+(X)$, $k \geq 0$ (положительная однородность);
- (4) для произвольных комонотонных $\varphi, \psi \in C_+(X)$ имеем $i(\varphi + \psi) = i(\varphi) + i(\psi)$ (комонотонная аддитивность);
- (5) для произвольных $\varphi, \psi \in C_+(X)$ из $\varphi \leq \psi$ (т.е. $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для всех $x \in X$) вытекает $i(\varphi) \leq i(\psi)$ (монотонность).

Интеграл Шоке i называем *выпуклым*, если i обладает дополнительным свойством

- (6) для произвольных $\varphi, \psi \in C_+(X)$ имеем $i(\varphi + \psi) \geq i(\varphi) + i(\psi)$.

Аналогично, интеграл называем *вогнутым*, если выполнено свойство

- (7) для произвольных $\varphi, \psi \in C_+(X)$ имеем $i(\varphi + \psi) \leq i(\varphi) + i(\psi)$.

Из свойств (1)–(5) вытекает, что $i(\varphi + \text{const}_a) = i(\varphi) + a$ для каждого $\varphi \in C_+(X)$, $a \geq 0$. Как следствие интеграл Шоке является нерастягивающим функционалом относительно метрики равномерной сходимости на $C_+(X)$.

Очевидно, что интеграл Шоке для произвольной емкости c можно определить с помощью той же формулы не только для непрерывной, но и для любой неотрицательной функции ψ на X , для которой все множества $\{x \in X \mid \psi(x) \geq a\}$, где $a \in \mathbb{R}$, измеримы относительно c . Для этого продолжения также имеют место свойства неотрицательности, нормированности, положительной однородности, комонотонной аддитивности, монотонности.

Каждый функционал $i: C_+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами (1)–(5) является интегралом Шоке для единственной емкости на X , определенной равенством

$$c(F) = \inf\{i(\varphi) \mid \varphi \in C_+(X), \varphi(x) \geq 1 \forall x \in F\}.$$

В частности выпуклые интегралы соответствуют выпуклым емкостям, а вогнутые – вогнутым.

§ 3. Основные результаты

3.1. Топология на множестве емкостей. Множество емкостей на компакте X обозначим через MX . Введем на множестве MX топологию, предбазу которой составляют множества вида

$$O_-(F, a) = \{c \in MX \mid c(F) < a\},$$

где $F \subset_{\text{cl}} X$, $a \in \mathbb{R}$, и

$$\begin{aligned} O_+(U, a) &= \{c \in MX \mid c(U) > a\} \\ &= \{c \in MX \mid \text{существует компакт } F \subset U, c(F) > a\}, \end{aligned}$$

где $U \subset X$, $a \in \mathbb{R}$.

Если множество $A \subset X$ замкнуто либо открыто и $a \in \mathbb{R}$, положим

$$A_a = \{c \in MX \mid c(A) \geq a\}, \quad A^a = \{c \in MX \mid c(A) \leq a\}.$$

Согласно определению топологии множества F_a для $F \subset_{\text{cl}} X$ и U^a для $U \subset_{\text{ор}} X$ являются замкнутыми в MX .

Отождествим каждую емкость c с соответствующим интегралом Шоке I_c . Если $\varphi \in C_+(X)$, то для $I_c(\varphi)$ употребляем сокращенное обозначение $c(\varphi)$. Диагональное отображение $c \mapsto (c(\varphi))_{\varphi \in C_+(X)}$ задает вложение множества MX

в произведение $\mathbb{R}^{C_+(X)}$. Топологизируем MX индуцированной этим вложением топологией (*-слабой топологией). Предбазу этой топологии составляют множества вида

$$O_-(\varphi, a) = \{c \in MX \mid c(\varphi) < a\}, \quad O_+(\varphi, a) = \{c \in MX \mid c(\varphi) > a\},$$

где $\varphi \in C_+(X)$, $a \in \mathbb{R}$. Поскольку каждая вероятностная мера является интегралом Шоке, то пространство вероятностных мер PX со *-слабой топологией является подпространством пространства MX . Обозначим через M_cX подмножество вогнутых емкостей и через M^cX подмножество выпуклых емкостей. Нетрудно проверить, что множества M_cX и M^cX замкнуты в MX и $M_cX \cap M^cX = PX$.

ТЕОРЕМА 1. **-слабая топология совпадает с построенной выше топологией на MX .*

Подпространство $MX \subset \mathbb{R}^{C_+(X)}$ лежит в произведении $\prod_{\varphi \in C_+(X)} [0, \|\varphi\|] \subset \mathbb{R}^{C_+(X)}$, причем, как нетрудно показать, является в этом произведении замкнутым множеством. Поскольку тихоновское произведение компактов является компактом, отсюда вытекает, что для каждого компакта X пространство MX является компактом (см. [6]), поэтому имеет смысл рассматривать компакты $M^2X = M(MX)$, $M^3X = M(M^2X)$ и т.д.

Пусть (X, d) – метрический компакт. Приведем две конструкции метрик на пространстве MX , совместимые с введенной выше топологией.

3.2. Метризация пространства емкостей: использование замкнутых ε -окрестностей. Для произвольных замкнутого подмножества $F \subset X$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$O_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \text{ для некоторого } y \in F\},$$

$$\overline{O}_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \text{ для некоторого } y \in F\}.$$

Для произвольных емкостей c_1, c_2 на X обозначим

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_2(F), c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_1(F) \\ \text{для каждого } F \in \text{exp } X \}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция $\hat{d}$ является метрикой на MX , порождающей *-слабую топологию.*

3.3. Метризация пространства емкостей с помощью нерастягивающих функций. Обозначим через $\text{Lip}(X, d)$ множество всех нерастягивающих действительнозначных функций на метрическом компакте X . Для $c, c' \in MX$ положим

$$\hat{\hat{d}}(c, c') = \sup \{ |c(f) - c'(f)| \mid f \in \text{Lip}(X, d) \}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Функция $\hat{\hat{d}}$ является метрикой на пространстве MX , индуцирующей его топологию.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный результат можно доказать относительно непрерывных псевдометрик на любом компактном хаусдорфовом пространстве.

Определенная выше метризация пространства емкостей дает возможность определить пространство емкостей полного метрического (более общо, равномерного) пространства.

Введем сравнение емкостей, полагая $c_1 \leq c_2$, если выполнено одно из равносильных свойств:

- (i) для каждого замкнутого множества F имеем $c_1(F) \leq c_2(F)$;
- (ii) для каждой неотрицательной непрерывной функции φ имеем $c_1(\varphi) \leq c_2(\varphi)$.

3.4. Срезы емкостей и их сходимость. Напомним, что непустое замкнутое подмножество $\mathcal{A}$ в $\text{exp } X$ называется *гиперпространством включения* в X , если выполнено условие: для каждого $A \in \mathcal{A}$ и каждого $B \in \text{exp } \mathcal{A}$, $B \supset A$, имеем $B \in \mathcal{A}$. Множество GX всех гиперпространств включения в X замкнуто в $\text{exp}^2 X$, поэтому является компактом в индуцированной из $\text{exp}^2 X$ топологии.

Для произвольных емкости $c \in MX$ и $a \in I$ подмножество $S_a(c) = \{F \in \text{exp } X \mid c(F) \geq a\} \subset \text{exp } X$ замкнуто и, более того, является гиперпространством включения. Назовем семейство $S_a(c)$ *срезом емкости c на уровне a* . К сожалению, в общем случае отображение $S_a: MX \rightarrow GX$ не является непрерывным. Кроме того для фиксированной емкости c срез $S_a(c)$ зависит от a полунепрерывно снизу, но не полунепрерывно сверху.

Однако имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – метризуемый компакт. Если последовательность (c_n) в MX сходится к c_0 , то для каждого $a_0 \in I$ существует сходящаяся к a_0 последовательность (a_n) в I , для которой $S_{a_n}(c_n) \rightarrow S_{a_0}(c_0)$. Для сходимости $c_n \rightarrow c_0$ достаточно существования такой последовательности (a_n) для каждого a_0 из всюду плотного подмножества $\mathcal{J} \subset I$, содержащего 0, 1.

3.5. Функтор емкостей. Напомним, что категория компактов Comp состоит из объектов – компактных хаусдорфовых пространств и морфизмов – непрерывных отображений.

Естественное преобразование между функторами со значениями в некоторой топологической категории называем *естественным вложением*, если все его компоненты являются вложениями. Если существует естественное вложение функтора F в функтор G , то функтор F называем *подфунктором функтора G* . Подробно см. [8], [16].

Конструкция пространства емкостей продолжается до функтора в категории Comp . Именно, для отображения $f: X \rightarrow Y$ в Comp отображение $Mf: MX \rightarrow MY$ определяем формулой $Mf(c)(F) = c(f^{-1}(F))$, где $c \in MX$, $F \subset_{\text{cl}} Y$.

Непрерывность отображения Mf вытекает из формул

$$\begin{aligned}
 (Mf)^{-1}(O_-(F, a)) &= \{c \in MX \mid Mf(c)(F) < a\} = \{c \in MX \mid c(f^{-1}(F)) < a\} \\
 &= O_-(f^{-1}(F), a), \\
 (Mf)^{-1}(O_+(U, a)) &= \{c \in MX \mid Mf(c)(U) > a\} \\
 &= \{c \in MX \mid \exists \text{ компакт } F \subset U \text{ такой, что } Mf(c)(F) > a\} \\
 &= \{c \in MX \mid \exists \text{ компакт } F \subset U \text{ такой, что } c(f^{-1}(F)) > a\} \\
 &= O_+(f^{-1}(U), a).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что M сохраняет композиции отображений и тождественные отображения и, таким образом, является функтором в Comp .

Рассмотрим действие отображения Mf на связанный с емкостью c интеграл Шоке. Пусть $\varphi \in C_+(Y)$. Тогда

$$\begin{aligned} Mf(c)(\varphi) &= \int_0^{+\infty} Mf(c)(\{y \in Y \mid \varphi(y) \geq a\}) da \\ &= \int_0^{+\infty} c(f^{-1}(\{y \in Y \mid \varphi(y) \geq a\})) da \\ &= \int_0^{+\infty} c(\{x \in X \mid \varphi(f(x)) \geq a\}) da = c(\varphi \circ f). \end{aligned}$$

В [7] Щепин ввел понятие нормального функтора в категории компактов: функтор называется *нормальным*, если он сохраняет пустое множество, одноточечное множество, моно- и эпиморфизмы, вес, пересечения, прообразы и пределы обратных спектров. Называем функтор *слабо нормальным*, если он удовлетворяет всем свойствам из определения нормального функтора, кроме, быть может, свойства сохранения прообразов. В дальнейшем мы увидим, что функтор M содержит в качестве подфунктора функтор гиперпространств включения и поэтому не сохраняет прообразов. Однако M удовлетворяет остальным указанным выше свойствам и, следовательно, является слабо нормальным. При этом нетривиальной является только проверка свойства непрерывности.

Утверждение о непрерывности функтора M является обобщением аналога теоремы Колмогорова для емкостей, доказанного в [6]; как упоминалось выше, справедливость этого утверждения отмечена в реферате к этой статье в “Mathematical Reviews”. Однако результаты [17] позволяют вообще избежать необходимости доказывать непрерывность функтора M , поскольку в нашем случае она является следствием остальных свойств из определения слабой нормальности.

Назовем систему множеств $\{A_\alpha\}$ *убывающей*, если для каждой ее элементов A_α, A_β существует элемент $A_\gamma \subset A_\alpha \cap A_\beta$. Пересечение убывающей системы множеств назовем *убывающим пересечением*. Скажем, что функтор M в категории Comp *сохраняет убывающие пересечения*, если $F(\bigcap \{A_\alpha\}) = \bigcap \{F(A_\alpha)\}$ для любой убывающей системы замкнутых множеств. Согласно [17; теорема 1] для функтора в категории компактов, сохраняющего моно- и эпиморфизмы, свойства непрерывности и сохранения убывающих пересечений равносильны, поэтому требование сохранения пределов обратных спектров в определении (слабо) нормального функтора избыточно.

Напомним, что функтор $F: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ называется *открытым*, если он сохраняет класс открытых сюръективных отображений.

ТЕОРЕМА 5. *Функтор $M: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ является открытым.*

Очевидным образом получаем слабо нормальные подфункторы M_c и M^c вогнутых и выпуклых емкостей соответственно. Их пересечение – функтор P вероятностных мер – является нормальным подфунктором функтора M .

3.6. Двойственные емкости. Понятие двойственной емкости естественно возникает в приложениях (см., например, литературу, цитированную во введении). Здесь мы устанавливаем некоторые категорные свойства операции перехода к двойственной емкости.

Для произвольной емкости c на компакте X определим функцию

$$\tilde{c}: \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$$

равенством $\tilde{c}(F) = 1 - \sup\{c(G) \mid G \subset X \setminus F, G \underset{\text{cl}}{\subset} X\}$ для $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$. Используя соглашение о продолжении емкости на открытые множества, можно просто записать $\tilde{c}(F) = 1 - c(X \setminus F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция $\tilde{c}$ является емкостью на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (a), (b) из определения емкости очевидны. Докажем свойство полунепрерывности сверху. Зафиксируем $F \underset{\text{cl}}{\subset} X$ и $\varepsilon > 0$. По определению функции $\tilde{c}$ существует замкнутое множество G , не пересекающееся с F , для которого $c(G) > 1 - \tilde{c}(F) - \varepsilon$. Положим $OF = X \setminus G$. Для произвольного замкнутого множества $F' \subset OF$ имеем $G' \subset X \setminus F'$, следовательно, $\tilde{c}(F') \leq 1 - c(G) < \tilde{c}(F) + \varepsilon$, что и означает полунепрерывность функции $\tilde{c}$ сверху.

ЛЕММА 3.1. *Для каждого открытого множества $U \subset X$ имеем*

$$\tilde{c}(U) = 1 - c(X \setminus U).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F = X \setminus U$. Для произвольного $G \underset{\text{cl}}{\subset} U$, имеем $G \subset X \setminus F$, откуда $\tilde{c}(G) \leq 1 - c(F)$, и, перейдя к супремуму, получаем $\tilde{c}(U) \leq 1 - c(F)$. С другой стороны, для произвольного $\varepsilon > 0$ согласно свойству полунепрерывности сверху существует окрестность $OF \supset F$, для которой

$$c(OF) = \sup\{c(F') \mid F' \underset{\text{cl}}{\subset} X, F' \subset OF\} < c(F) + \varepsilon.$$

Тогда $G' = X \setminus OF \subset U$ — замкнутое в X множество, следовательно, $\tilde{c}(U) \geq \tilde{c}(G') = 1 - c(OF) > 1 - c(F) - \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$, поэтому $\tilde{c}(U) \geq 1 - c(F)$. Объединяя эти два неравенства, получаем $\tilde{c}(U) = 1 - c(F)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для каждой емкости $c \in MX$ выполнено равенство $\tilde{\tilde{c}} = c$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Для каждого измеримого относительно емкости $c \in MX$ множества $A \subset X$ множество $X \setminus A$ измеримо относительно $\tilde{c}$, причем $\tilde{c}(X \setminus A) = 1 - (A)$.*

Назовем емкости c и $\tilde{c}$ двойственными друг к другу. Естественно называть самодвойственной емкость c , для которой $\tilde{c} = c$. Очевидно, что все вероятностные меры являются самодвойственными емкостями.

Зададим отображение $\varkappa X: MX \rightarrow MX$ равенством $\varkappa X(c) = \tilde{c}$, $c \in MX$.

ЛЕММА 3.4. *Отображение $\varkappa X$ непрерывно и является компонентой естественного изоморфизма $\varkappa: M \rightarrow M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} (\varkappa X)^{-1}(O_-(F, a)) &= O_+(X \setminus F, 1 - a) \quad \text{при } F \underset{\text{cl}}{\subset} X, \\ (\varkappa X)^{-1}(O_+(U, a)) &= O_-(X \setminus U, 1 - a) \quad \text{при } U \underset{\text{ор}}{\subset} X, \end{aligned}$$

то прообразы элементов предбазы топологии пространства MX открыты и, следовательно, отображение $\varkappa X$ непрерывно. То, что $\varkappa = (\varkappa X)$ — естественное преобразование, проверяется непосредственным вычислением. Поскольку $\varkappa X \circ \varkappa X = 1_X$, все компоненты $\varkappa$ являются гомеоморфизмами.

ЛЕММА 3.5. *Произвольная емкость $c \in MX$ выпукла тогда и только тогда, когда двойственная к ней емкость $\tilde{c} = \varkappa X(c)$ вогнута.*

Доказательство непосредственно вытекает из определения.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Ограничения отображений $\varkappa X$ на пространства $M_c X$ и $M^c X$ соответственно задают взаимно обратные естественные изоморфизмы функторов $M_c \rightarrow M^c$ и $M^c \rightarrow M_c$.*

3.7. Построение монады емкостей. Очевидно, что для замкнутого подмножества F компакта X при $0 \leq a < b \leq 1$ имеем

$$F_a = \{c \in MX \mid c(F) \geq a\} \supset F_b = \{c \in MX \mid c(F) \geq b\}.$$

Кроме того множество $F_a \subset MX$ замкнуто как дополнение к элементу предбазы пространства MX .

Определим отображения $\eta X: X \rightarrow MX$ и $\mu X: M^2 X \rightarrow MX$ формулами:

$$\eta X(x)(F) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \notin F, \end{cases} \quad \text{при } F \in \exp X \cup \{\emptyset\},$$

$$\mu X(\mathcal{C})(F) = \sup\{a \in I \mid \mathcal{C}(F_a) \geq a\} \quad \text{при } \mathcal{C} \in M^2 X.$$

Очевидно, что $\eta X(x)$ – емкость. Чтобы убедиться, что $\mu X(\mathcal{C}) \in MX$ при $\mathcal{C} \in M^2 X$, достаточно проверить только свойство (с) из определения емкости (то, что свойства (а), (b) выполнены, тривиально).

Из полунепрерывности сверху произвольной емкости c вытекает, что для убывающего пересечения замкнутых множеств $B = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$ имеем $c(B) = \inf\{c(B_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Следующая лемма является очевидной.

ЛЕММА 3.7. *Если $F = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ – убывающее пересечение замкнутых множеств и $a \in I$, то $F_a = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (F_\alpha)_a$.*

В частности, из этой леммы вытекает, что в действительности

$$\mu X(\mathcal{C}) = \sup\{a \in I \mid \mathcal{C}(F_a) \geq a\} = \max\{a \in I \mid \mathcal{C}(F_a) \geq a\}.$$

Допустим, что $\mu X(\mathcal{C})(F) < a$, т.е. существует $b < a$, для которого $\mathcal{C}(F_b) < a$. Поскольку пересечение всех замыканий окрестностей множества F является убывающим и равно F , то существует окрестность $U \supset F$, для которой $\mathcal{C}(Cl U_b) < a$. Тогда для всех замкнутых $G \subset U$ выполнено $\mathcal{C}(G_b) < a$, т.е. $\mu X(\mathcal{C})(G) < a$. Этим доказана полунепрерывность сверху функции $\mu X(\mathcal{C}): \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Монадой (см. [8], [16]) называем тройку $\mathbb{F}$, состоящую из функтора F в некоторой категории $\mathcal{C}$ и естественных преобразований $\eta: \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow F$ и $\mu: F^2 \rightarrow F$ таких, что для каждого объекта X категории $\mathcal{C}$ коммутируют диаграммы

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\eta FX} & F^2 X \\ F\eta X \downarrow & \searrow \mathbf{1}_{FX} & \downarrow \mu X \\ F^2 X & \xrightarrow{\mu X} & FX \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F^3 X & \xrightarrow{F\mu X} & F^2 X \\ \mu FX \downarrow & & \downarrow \mu X \\ F^2 X & \xrightarrow{\mu X} & FX \end{array}$$

Функтор F называем *функториальной частью монады* $\mathbb{F}$, а естественные преобразования η и μ – соответственно *единицей* и *умножением монады* (см., например, [16]).

ТЕОРЕМА 6. *Отображения ηX и μX являются непрерывными для каждого компакта X компонентами естественных преобразований $\eta: \mathbf{1}_{\text{Comp}} \rightarrow M$ и $\eta: M^2 \rightarrow M$, и тройка (M, η, μ) является монадой.*

Естественно называть полученную монаду $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ в категории Comp *монадой емкостей*.

3.8. Подфункторы функтора емкостей. Морфизмы и подмонады монады емкостей. Кроме упомянутых выше функторов M_c и M^c важным подфунктором функтора емкостей является функтор G гиперпространств включения, рассмотренный в [15]. Здесь мы рассматриваем взаимосвязи между монадами, порожденными функторами M , G , а также функтором вероятностных мер P .

Конструкция G продолжается до слабо нормального функтора гиперпространств включения G в категории компактов, если для непрерывного отображения компактов $f: X \rightarrow Y$ определить отображение $Gf: GX \rightarrow GY$ формулой

$$Gf(\mathcal{A}) = \{B \in \exp Y \mid f(A) \subset B \text{ для некоторого } A \in \mathcal{A}\}.$$

Монада $\mathbb{G}$, порожденная функтором G , описана в [11]. Умножение $\mu_G: G^2 X \rightarrow GX$ определено формулой $\mu_G X(\mathbf{A}) = \bigcup \{\bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathbf{A}\}$.

Естественное преобразование i , вкладывающее G в M , определяется формулой

$$iX(\mathcal{M})(F) = \begin{cases} 1, & F \in \mathcal{M}; \\ 0, & F \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

Морфизмом из монады $\mathbb{F}_1 = (F_1, \eta_1, \mu_1)$ в монаду $\mathbb{F}_2 = (F_2, \eta_2, \mu_2)$ в категории $\mathcal{C}$ (см. [16]) называем естественное преобразование $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ такое, что для каждого объекта X категории $\mathcal{C}$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & & F_1^2 X \\ \eta X \downarrow & \searrow \eta X & \xrightarrow{\varphi_{F_1 X}} F_2 F_1 X \xrightarrow{F_2 \varphi X} F_2^2 X \\ F_1 X & \xrightarrow{\varphi X} & F_2 X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_1^2 X & \xrightarrow{\varphi_{F_1 X}} & F_2 F_1 X \xrightarrow{F_2 \varphi X} F_2^2 X \\ \mu_1 X \downarrow & & \downarrow \mu_2 X \\ F_1 X & \xrightarrow{\varphi X} & F_2 X \end{array}$$

являются коммутативными. Очевидным образом определяются изоморфизмы и вложения монад и соответственно изоморфные монады и подмонады.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Естественное преобразование $\kappa: M \rightarrow M$ является изоморфизмом монады $\mathbb{M}$ в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что для произвольного компакта X диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & & M^2 X \\ \eta X \downarrow & \searrow \eta X & \xrightarrow{\kappa_{MX}} M^2 X \xrightarrow{M \kappa X} M^2 X \\ MX & \xrightarrow{\kappa X} & MX \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M^2 X & \xrightarrow{\kappa_{MX}} & M^2 X \xrightarrow{M \kappa X} M^2 X \\ \mu X \downarrow & & \downarrow \mu X \\ MX & \xrightarrow{\kappa X} & MX \end{array}$$

являются коммутативными.

Коммутативность первой из этих диаграмм очевидна, поскольку образ отображения ηX состоит из вероятностных мер Дирака, которые являются самодвойственными. Поскольку $\varkappa X$ – инволюция, коммутативность второй диаграммы равносильна равенству $\varkappa X \circ \mu X \circ M \varkappa X \circ \varkappa MX = \mu X$. Пусть $\mathcal{M} \in M^2 X$, $m = \mu X(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}' = \varkappa MX(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}'' = M \varkappa X(\mathcal{M}')$, $m' = \mu X(\mathcal{M}'')$, $m'' = \varkappa X(m')$.

Для замкнутого множества A неравенство $m''(A) \geq a$ по определению равносильно неравенству $m'(X \setminus A) \leq 1 - a$. Это в свою очередь означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеем $\mathcal{M}''((X \setminus A)_{1-a+\varepsilon}) \leq 1 - a$. Поскольку $\varkappa X$ – гомеоморфизм, емкость в левой части неравенства заменим равной ей емкостью и получим $\mathcal{M}'(A^{a-\varepsilon}) \leq 1 - a$ для каждого $\varepsilon > 0$. Переходя к двойственной емкости, имеем равносильное неравенство $\mathcal{M}(MX \setminus A^{a-\varepsilon}) = \mathcal{M}(O_+(A, a - \varepsilon)) \geq a$ для каждого $\varepsilon > 0$. Поскольку $\inf_{\varepsilon > 0} \mathcal{M}(O_+(A, a - \varepsilon)) = \mathcal{M}(A_a)$, последнее неравенство равносильно $\mathcal{M}(A_a) \geq a$, т.е. $m(A) \geq a$.

Следовательно, для любого замкнутого множества A неравенства $m''(A) \geq a$ и $m(A) \geq a$ равносильны и $m''(A) = m(A)$, что и требовалось доказать.

Пусть $h: I \rightarrow I$ – произвольная возрастающая биекция. Для каждого компакта X зададим отображение $s_h X: MX \rightarrow MX$ формулой $s_h X(c)(F) = h(c(F))$, где $c \in MX$ и $F \subset X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Набор отображений $s_h = (s_h X)$ является изоморфизмом монады $\mathbb{M}$ в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства продолжим h до возрастающей биекции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив $h(a) = a$ при $a \notin I$.

Непрерывность отображения $s_h X$ вытекает из открытости прообразов элементов предбазы пространства MX . Пусть $a \in \mathbb{R}$, $F \subset_{cl} X$, $U \subset_{op} X$. Тогда

$$s_h^{-1}(O_-(F, a)) = O_-(F, h^{-1}(a)), \quad s_h^{-1}(O_+(U, a)) = O_+(U, h^{-1}(a)).$$

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение компактов, c – емкость на X и F – замкнутое подмножество компакта Y . Тогда

$$s_h Y \circ Mf(c)(F) = h(Mf(c))(F) = h(c(f^{-1}(F))) = Mf \circ s_h X(c)(F),$$

т.е. s_h является естественным преобразованием функтора M в себя. Поскольку $s_h X \circ s_{h^{-1}} X = s_{h^{-1}} X \circ s_h X = \mathbf{1}_{MX}$, все компоненты s_h являются гомеоморфизмами.

Покажем, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & & M^2 X \xrightarrow{s_h MX} M^2 X \xrightarrow{M s_h X} M^2 X \\ \eta X \downarrow & \searrow \eta X & \downarrow \mu X \\ MX & \xrightarrow{s_h X} MX & MX \xrightarrow{s_h X} MX \end{array}$$

являются коммутативными.

Поскольку для каждой точки $x \in X$ емкость $\eta X(x)$ принимает на замкнутых подмножествах X только значения 0 и 1 и $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, получаем, что емкости вида $\eta X(x)$ инвариантны относительно отображения $s_h X$. Из этого следует коммутативность первой из этих диаграмм.

Для проверки коммутативности второй диаграммы выберем произвольные емкость $\mathcal{M} \in M^2 X$, замкнутое множество $F \subset Y$ и число $a \in \mathbb{R}$. Положим

$\mathcal{M}' = s_h MX(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}'' = Ms_h X(\mathcal{M}')$, $m = \mu X(\mathcal{M})$, $m' = s_h X(m)$, $m'' = \mu X(\mathcal{M}'')$. Неравенство $m''(F) \geq a$ равносильно неравенству $\mathcal{M}''(\{c \in MX \mid c(F) \geq a\}) \geq a$, т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'(\{c \in MX \mid s_h X(c)(F) \geq a\}) &= s_h MX(\mathcal{M})(\{c \in MX \mid h(c(F)) \geq a\}) \\ &= h(\mathcal{M}(\{c \in MX \mid c(F) \geq h^{-1}(a)\})) \geq a, \end{aligned}$$

что в свою очередь равносильно неравенству

$$\mathcal{M}(\{c \in MX \mid c(F) \geq h^{-1}(a)\}) \geq h^{-1}(a).$$

По определению отображения μX это означает, что $\mu X(\mathcal{M})(F) \geq h^{-1}(a)$, или $s_h X(\mu X(\mathcal{M}))(F) = m'(F) \geq a$. Итак, значения емкостей m' и m'' совпадают.

Несмотря на элементарность, это утверждение несет глубокую информацию о монаде емкостей, а именно о ее стабильности относительно “согласованных изменений шкалы”. В определенном смысле можно говорить, что для емкостей существенны только близость и сравнение значений, но не их численные величины.

Оставляем читателю несложную проверку того, что в действительности построенное выше вложение функтора G в функтор M является вложением монад $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{M}$ и, следовательно, монада гиперпространств включения является подмонадой монады емкостей.

Возникает естественное предположение, что подфункторы $M_c \subset M$ и $M^c \subset M$ также порождают подмонады монады емкостей. Поскольку очевидно, что $\eta X(X) \subset M_c X \cap M^c X \subset MX$, остается проверить, что для умножения истинно включение $\mu X(M_c(M_c X)) \subset M_c X$ (соответственно $\mu X(M^c(M^c X)) \subset M^c X$), т.е. для каждой $\mathcal{C} \in M_c(M_c X)$ и $c = \mu X(\mathcal{C})$ неравенство $c(A \cap B) + c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$ выполнено для любых замкнутых $A, B \subset X$.

Приведенный ниже пример опровергает это предположение. Как обычно, через δ_x обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x , т.е. функция на $\text{exr } X \cup \{\emptyset\}$, определенная для замкнутого множества F равенствами $\delta_x(F) = 1$ при $x \in F$ и $\delta_x(F) = 0$ при $x \notin F$.

Поскольку каждая вероятностная мера (см. [8]) на X одновременно является выпуклой и вогнутой емкостью, т.е. $PX \subset M_c X \cap M^c X$, мера

$$\mathcal{C} = 0.2\delta_{0.1\delta_x + 0.1\delta_y + 0.8\delta_t} + 0.2\delta_{0.1\delta_x + 0.1\delta_z + 0.8\delta_t} + 0.2\delta_{0.1\delta_y + 0.1\delta_z + 0.8\delta_t} + 0.4\delta_{\delta_t}$$

принадлежит пространству $P(PX) \subset M^c(M^c X) \cap M_c(M_c X)$ для $X = \{x, y, z, t\}$. Положим $c = \mu X(\mathcal{C})$, $A = \{x, y\}$, $B = \{x, z\}$. Тогда $c(A) = 0.2$, поскольку $\mathcal{C}(A_{0.2}) = 0.2$, а при $\alpha > 0.2$ имеем $\mathcal{C}(A_\alpha) = 0 < 0.2$. Аналогично, $c(B) = 0.2$, $c(A \cap B) = 0.1$, $c(A \cup B) = 0.2$, следовательно, неравенство $c(A \cap B) + c(A \cup B) \geq c(A) + c(B)$ не выполнено, и емкость c не является выпуклой. Одновременно для $C = \{z, t\}$, $D = \{y, t\}$ получаем $c(C) = c(D) = c(C \cap D) = 0.8$, $c(C \cup D) = 0.9$, следовательно, не выполнено условие $c(C \cap D) + c(C \cup D) \leq c(C) + c(D)$ вогнутости емкости c .

Функтор P также образует монаду $\mathbb{P}$ вероятностных мер (см. [8]). Несмотря на то, что P – подфунктор функтора M , доказанный выше для пространства $X = \{x, y, z, t\}$ факт $\mu X(P^2 X) \not\subset PX$ исключает возможность того, что включения $PX \hookrightarrow MX$ образуют вложение монад.

В свою очередь функтор M является подфунктором введенного Т. Радупом [10] функтора O сохраняющих порядок функционалов. Для компакта X множество OX состоит из всех функционалов $\nu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) для произвольных $\varphi \in C(X)$ и $a \in \mathbb{R}$ имеем $\nu(\varphi + \text{const}_a) = \nu(\varphi) + a$ (слабая аддитивность);
- 2) из $\varphi \leq \psi$ для $\varphi, \psi \in C(X)$ следует $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$ (сохранение порядка);
- 3) $\nu(\text{const}_1) = 1$ (нормированность).

В [10] показано, что все элементы OX являются непрерывными функционалами и множество OX со $*$ -слабой топологией является компактом. Для непрерывного отображения компактов $f: X \rightarrow Y$ отображение $Of: OX \rightarrow OY$ определяется формулой $Of(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f)$, аналогичной формуле для отображения $Mf: MX \rightarrow MY$. Поскольку каждый интеграл Шоке является нормированным сохраняющим порядок слабо аддитивным функционалом, включения $MX \hookrightarrow OX$ образуют естественное вложение функторов. Получаем цепочку $P \hookrightarrow M_c, M^c \hookrightarrow M \hookrightarrow O$. Функтор O является функториальной частью монады $\mathbb{O}$ (см. [10]), содержащей монаду вероятностных мер $\mathbb{P}$ в качестве подмонады. Из этого следует, что включения $MX \hookrightarrow OX$ не вкладывают монаду $\mathbb{M}$ в монаду $\mathbb{O}$.

3.9. Мультисрезы и приближение монады емкостей. Построим класс монад, занимающих промежуточное положение между монадами гиперпространств включения и емкостей и определенным образом аппроксимирующих последнюю. Для произвольного конечного подмножества K множества $(0, 1]$ положим

$$G_K X = \{(A_k)_{k \in K} \mid A_k \in GX, A_k \supset A_{k'} \text{ при } k, k' \in K, k \leq k'\}.$$

Поскольку $G_K X$ – замкнутое подмножество компакта $(GX)^K$, оно является компактом в индуцированной топологии. Продолжим конструкцию G_K до функтора в категории компактов, определив для непрерывного отображения компактов $f: X \rightarrow Y$ отображение $G_K f: G_K X \rightarrow G_K Y$ как ограничение декартова произведения $f^K: X^K \rightarrow Y^K$.

Для компакта X , точки $x \in X$ и элемента $A = (A_k)_{k \in K} \in G_K(G_K X)$ положим

$$\begin{aligned} \eta_K X(x) &= (\eta_G X(x))_{k \in K} = (\eta_G X(x), \eta_G X(x), \dots, \eta_G X(x)), \\ \mu_K X(A) &= (A_k)_{k \in K}, \quad A_k = \bigcup \left\{ \bigcap \{B_k \mid B \in F\} \mid F \in A_k \right\}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, семейство $A_k \in GX$ для каждого $k \in K$ состоит из замкнутых подмножеств $F \subseteq X$, удовлетворяющих условию: существует множество

$F \in A_k$ такое, что для каждого $B = (B_l)_{l \in K} \in F$ имеем $F \in B_k$. Поскольку $A_k = \mu_{GX} \circ G \text{pr}_k \circ \text{Pr}_k(A)$, где $\text{pr}_k: (GX)^K \rightarrow GX$, $\text{Pr}_k: (G(G_K X))^K \rightarrow G(G_K X)$ – проекции на сомножители с индексом $k \in K$, получаем непрерывность отображения $\mu_K: G_K(G_K X) \rightarrow G_K X$. Непрерывность отображения $\eta_K: X \rightarrow G_K X$ очевидна.

Определим отображение “мультисреза” $S_K X: MX \rightarrow G_K X$ формулой

$$S_K X(c) = (S_k(c))_{k \in K},$$

т.е. $(S_K X(c))_k = \{F \subseteq X \mid c(F) \geq k\}$ при $k \in K, c \in MX$. Это отображение является сюръективным, поскольку для него существует правое обратное $i_K: G_K X \rightarrow MX$, заданное следующим образом:

$$i_K((A_k)_{k \in K})(F) = \begin{cases} 1, & \text{если } F = X; \\ \max\{k \in K \mid F \in A_k\}, & \text{если } F \in A_{\min K}, F \neq X; \\ 0, & \text{если } F \notin A_{\min K}. \end{cases}$$

Отметим, что в общем случае отображение $S_K X: MX \rightarrow G_K X$ не является непрерывным.

ТЕОРЕМА 7. *Тройка $\mathbb{G}_K = (G_K, \eta_K, \mu_K)$ является монадой в категории компактов.*

Набор отображений i_K является вложением монад $\mathbb{G}_K \rightarrow \mathbb{M}$.

При $K = \{1\}$ получаем монаду $\mathbb{G} = (G, \eta_G, \mu_G)$ и описанное выше вложение $i: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{M}$.

Если для конечных подмножеств $K, K' \subset (0, 1]$ имеем $K \subset K'$, то существует естественное вложение $i_K^{K'}: G_K \rightarrow G_{K'}$. Его компоненты определим формулами $i_K^{K'}((A_k)_{k \in K}) = (B_{k'})_{k' \in K'}$, где $(A_k)_{k \in K} \in G_K X$, а для каждого индекса $k' \in K'$ элемент $B_{k'}$ равен A_{k_0} , где $k_0 = \min\{k \in K \mid k \geq k'\}$, если этот минимум существует, и $B_{k'} = \{X\}$ в противном случае. Из равенства $i_K X = i_{K'} X \circ i_K^{K'} X$ и инъективности всех отображений вида $i_{K'} X$ следует, что $i_K^{K'}$ является морфизмом монад $\mathbb{G}_K \rightarrow \mathbb{G}_{K'}$.

Для конечного подмножества $K \subset (0, 1]$ упорядочим его элементы по возрастанию как $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ и назовем *мелкостью подмножества K* число

$$\delta(K) = \max\{k_1, k_2 - k_1, k_3 - k_2, \dots, k_n - k_{n-1}, 1 - k_n\}.$$

Нетрудно убедиться, что для произвольных емкости c на X и замкнутого подмножества $F \subset X$ емкость $c' = i_K \circ S_K X(c)$ удовлетворяет неравенству $c(F) - \delta(K) \leq c'(F) \leq c(F)$. Следовательно, любую емкость можно как угодно точно приблизить ее “мультисрезами” с точностью не хуже мелкости подмножества K .

§ 4. Доказательства

4.1. Доказательство теоремы 1. Для произвольных функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и $a < b$ определим функцию $S_a^b f$ с помощью равенства:

$$S_a^b f(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq a; \\ \frac{f(x) - a}{b - a}, & a < f(x) < b; \\ 1, & f(x) \geq b. \end{cases}$$

Пусть $c_0 \in O_{-}(F, a)$, $F \subset_{\text{cl}} X$. Тогда существует $\varphi \in C_+(X)$, для которой $\varphi|_F \equiv 1$, $c_0(\varphi) < a$ (т.е. $c_0 \in O_{-}(\varphi, a)$), и для каждой емкости $c \in O_{-}(\varphi, a)$ выполнено $c(F) < a$ (т.е. $c \in O_{-}(F, a)$).

Аналогично для $c_0 \in O_{+}(U, a)$, $U \subset_{\text{ор}} X$, существует такое $F \subset U$, $F \subset_{\text{cl}} X$, что $c(F) > a$. Выберем окрестность $OF \supset F$, для которой $\text{Cl } OF \subset U$, и функцию $\varphi \in C_+(X)$, для которой $\varphi|_F \equiv 1$, $\varphi|_{X \setminus OF} \equiv 0$. Тогда $c_0 \in O_{+}(\varphi, a)$ и из $c \in O_{+}(\varphi, a)$ вытекает $c(\text{Cl } OF) > a$, следовательно, $c \in O_{+}(U, a)$. Таким образом, все множества вида $O_{-}(F, a)$, где $F \subset_{\text{cl}} X$, и $O_{+}(U, a)$, где $U \subset_{\text{ор}} X$, открыты в слабой топологии, поэтому и топология, для которой эти множества образуют предбазу, содержится в *-слабой.

Теперь пусть $c \in O_{-}(\varphi, a)$, т.е. $c(\varphi) < a$. Из свойства положительной однородности вытекает, что без ограничения общности можем считать, что $\varphi \leq 1$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $c(\varphi) + 2/n < a$.

Функцию $\varphi: X \rightarrow I$ можно изобразить в виде суммы комонотонных “ступенек”:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} S_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(x).$$

На основании комонотонной аддитивности получаем

$$c(\varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c(S_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi)$$

для любой емкости $c \in MX$.

Положим $A_k = \{x \in X \mid \varphi(x) \geq (k-1)/n\}$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда, учитывая предыдущее изображение функции φ и ее интеграла, имеем

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{A_k}(x) \leq \varphi(x) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{A_k}(x) + \frac{1}{n}.$$

Множество $O_- = \bigcap_{k=1}^n O_-(A_k, c_0(A_k) + 1/n)$ открыто в MX и содержит c_0 . Если $c \in O_-$, то $c(A_k) < c_0(A_k) + 1/n$, откуда

$$\begin{aligned} c(\varphi) &\leq c\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{A_k} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c(A_k) + \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(c_0(A_k) + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c_0(A_k) + \frac{2}{n} \leq c_0(\varphi) + \frac{2}{n} < a, \end{aligned}$$

т.е. окрестность O_- емкости c_0 содержится в $O_-(\varphi, a)$. Следовательно, множество $O_-(\varphi, a)$ является открытым.

Пусть $c \in O_+(\varphi, a)$, т.е. $c(\varphi) > a$. Снова предположим, что $\varphi \leq 1$. Выберем такое $n \in \mathbb{N}$, что $c(\varphi) - 2/n > a$.

Положим $B_k = \{x \in X \mid \varphi(x) > (k-1)/n\}$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Опять же, опираясь на “ступенчатое” разбиение функции φ , получаем, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{B_k}(x) \geq \varphi(x), \quad \varphi(x) + \frac{1}{n} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{B_k}(x).$$

Положим $O_+ = \bigcap_{k=1}^n O_+(B_k, c_0(B_k) - 1/n) \subset MX$. Это множество является открытой окрестностью емкости c_0 . Если $c \in O_+$, то

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c(B_k) \geq c(\varphi), \quad c(\varphi) + \frac{1}{n} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c(B_k).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} c(\varphi) &\geq c\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \chi_{B_k} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c(B_k) - \frac{1}{n} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(c_0(B_k) - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} c_0(B_k) - \frac{2}{n} \geq c_0(\varphi) - \frac{2}{n} > a \end{aligned}$$

и окрестность O_+ емкости c_0 содержится в $O_+(\varphi, a)$. Следовательно, множество $O_+(\varphi, a)$ открыто.

Этим доказано, что топологии, определенные двумя упомянутыми выше способами, совпадают.

4.2. Доказательство теоремы 2. Неотрицательность, симметричность и невырожденность функции $\hat{d}$ тривиальны. Неравенство треугольника для $\hat{d}$ вытекает из включения $\overline{O}_{\varepsilon+\varepsilon'}(F) \supset \overline{O}_\varepsilon(\overline{O}_{\varepsilon'}(F))$.

Поскольку MX – компакт, остается доказать, что центр c_0 произвольного замкнутого шара $\overline{B}_\varepsilon(c_0)$ относительно $\hat{d}$ является внутренним в нем относительно $*$ -слабой топологии, откуда будет вытекать непрерывность $\hat{d}$.

Из покрытия метрического компакта X шарами радиуса $\varepsilon/3$ выберем конечное подпокрытие $B_1, B_2, \dots, B_n$. Для любых $I_1, I_2 \subset \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $\bigcup_{i \in I_1} \text{Cl } B_i \cap \bigcup_{i \in I_2} \text{Cl } B_i = \emptyset$, выберем непрерывную функцию φ_{I_1, I_2} , равную 1 на $\bigcup_{i \in I_1} \text{Cl } B_i$ и 0 на $\bigcup_{i \in I_2} \text{Cl } B_i$. Множество U емкостей c , для которых $|c(\varphi_{I_1, I_2}) - c_0(\varphi_{I_1, I_2})| < \varepsilon$ для всех построенных функций φ_{I_1, I_2} , открыто в MX и содержит c_0 . Выберем $c \in U$ и для произвольного непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ положим

$$I_1 = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid B_i \cap F \neq \emptyset\},$$

$$I_2 = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid B_i \cap (X \setminus O_\varepsilon(F)) \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{i \in I_1} \text{Cl } B_i \cap \bigcup_{i \in I_2} \text{Cl } B_i = \emptyset,$$

следовательно, $c(\varphi_{I_1, I_2}) < c_0(\varphi_{I_1, I_2}) + \varepsilon$. Однако $\varphi_{I_1, I_2}(F) \subset \{1\}$, поэтому $c(F) \leq c(\varphi_{I_1, I_2})$. Кроме того $\varphi_{I_1, I_2}(X \setminus \overline{O}_\varepsilon(F)) \subset \{0\}$, следовательно, $c_0(F) \geq c_0(\varphi_{I_1, I_2})$. Отсюда $c(F) < c_0(F) + \varepsilon$ и, аналогично, $c_0(F) < c(F) + \varepsilon$ для каждого непустого замкнутого множества $F \subset X$. Таким образом, $\hat{d}(c_0, c) \leq \varepsilon$, и $U \subset \overline{B}_\varepsilon(c_0)$.

4.3. Доказательство теоремы 3. Очевидно, что $\hat{d}(c, c) = 0$ для каждого $c \in MX$.

Пусть $c, c' \in MX$, $c \neq c'$. Существует $A \in \text{exr } X$ такое, что $c(A) < c'(A)$ либо $c(A) > c'(A)$. Допустим для определенности, что выполнено первое неравенство. Из полунепрерывности сверху емкости c вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что $c(B) < c'(A)$ для всех $B \in \text{exr } X$, $B \subset \overline{O}_\delta(A)$.

Определим функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $f(x) = \max\{\delta - d(x, A), 0\}$, $x \in X$. Легко убедиться, что $f \in \text{Lip}(X, d)$. Тогда

$$\hat{d}(c, c') \geq c'(f) - c(f) \geq \delta c'(A) - \delta c(\overline{O}_\delta(A)) > 0.$$

Очевидно, что $\hat{d}(c, c') = \hat{d}(c', c)$.

Для проверки неравенства треугольника предположим, что $c, c', c'' \in MX$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in \text{Lip}(X, d)$ такая, что

$$\hat{d}(c, c') \leq |c(f) - c'(f)| + \varepsilon \leq |c(f) - c''(f)| + |c''(f) - c'(f)| + \varepsilon \leq \hat{d}(c, c'') + \hat{d}(c'', c') + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство треугольника.

Покажем, что метрика $\hat{d}$ непрерывна. Пусть $c_i \rightarrow c$, $c'_i \rightarrow c'$ при $i \rightarrow \infty$. Покажем, что $\hat{d}(c_i, c'_i) \rightarrow \hat{d}(c, c')$ при $i \rightarrow \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in \text{Lip}(X, d)$ такая, что

$$\hat{d}(c, c') < |c(f_\varepsilon) - c'(f_\varepsilon)| + \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i(f_\varepsilon) = c(f_\varepsilon), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c'_i(f_\varepsilon) = c'(f_\varepsilon)$$

и, таким образом, существует $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $i > N_1$ имеем

$$\hat{d}(c_i, c'_i) \geq |c_i(f_\varepsilon) - c'_i(f_\varepsilon)| > d(c, c') - \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{d}(c_i, c'_i) \geq \hat{d}(c, c') - \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{d}(c_i, c'_i) \geq \hat{d}(c, c')$.

Покажем, что существует $N_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $i > N_2$ имеем

$$\hat{d}(c_i, c) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \hat{d}(c'_i, c') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x_0 \in X$. Предположим, что $\hat{d}(c_i, c) = |c_i(f_i) - c(f_i)|$ для некоторых $f_i \in \text{Lip}(X, d)$, удовлетворяющих условию $f_i(x_0) = c_0$. Мы можем предполагать константу c_0 такой, что $f_i \geq 0$ для каждого i .

Из теоремы Арцела–Асколи вытекает, что множество

$$\{f \in \text{Lip}(X, d) \mid f(x_0) = c_0\}$$

компактно, поэтому, не уменьшая общности, можно предполагать, что $f_i \rightarrow f_0 \in \text{Lip}(X, d)$. Поэтому существует $N'_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $f_i < f_0 + \varepsilon/4$ для каждого $i > N'_2$. Тогда $c_i(f_i) < c_i(f_0) + \varepsilon/6$.

Поскольку $c_i(f_0) \rightarrow c(f_0)$ при $i \rightarrow \infty$, существует $N''_2 \geq N'_2$ такое, что для каждого $i > N''_2$ имеем $c_i(f_0) < c(f_0) + \varepsilon/6$.

Существует $N_2 \geq N''_2$ такое, что для каждого $i > N_2$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{d}(c_i, c) &= |c_i(f_i) - c(f_i)| \leq |c_i(f_i) - c_i(f_0)| + |c_i(f_0) - c(f_0)| + |c(f_0) - c(f_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что для каждого $i > N_2$ имеем $\hat{d}(c'_i, c') < \varepsilon/2$. Тогда для каждого $i > N_2$ имеем

$$\hat{d}(c_i, c'_i) \leq \hat{d}(c_i, c) + \hat{d}(c, c'_i) + \hat{d}(c'_i, c') < \hat{d}(c, c') + \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{d}(c_i, c'_i) \leq \hat{d}(c, c')$. С учетом доказанного выше имеем $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{d}(c_i, c'_i) = \hat{d}(c, c')$.

4.4. Доказательство теоремы 4. В этом и последующих утверждениях данного параграфа считаем фиксированной метрику d , порождающую топологию на X . Топология Виеториса на $\text{exp } X$ порождена метрикой Хаусдорфа d_H (см. [8]), определенной формулой

$$d_H(F, G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid F \subset \overline{O}_\varepsilon(G), G \subset \overline{O}_\varepsilon(F)\}.$$

Для $F \in \text{exp } X$, $\mathcal{A} \subset \text{exp } X$ обозначим $d_H(F, \mathcal{A}) = \inf\{d_H(F, G) \mid G \in \mathcal{A}\}$. Соответственно по d_H строится метрика Хаусдорфа $\bar{d}_H$, задающая топологию на $\text{exp}^2 X$. Ограничение $\bar{d}_H$ на $GX \subset \text{exp}^2 X$ имеет вид:

$$\bar{d}_H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \overline{O}_\varepsilon(F) \in \mathcal{B} \ \forall F \in \mathcal{A}, \overline{O}_\varepsilon(G) \in \mathcal{A} \ \forall G \in \mathcal{B}\}$$

(см., например, [9]).

Поскольку $(c_n) \rightarrow c_0$, то $\delta_n = \hat{d}(c_n, c_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $a_0 \in I$, тогда последовательности $a_n = \max\{a_0 - \delta_n, 0\}$ и $b_n = \max\{a_0 - 2\delta_n, 0\}$ сходятся в I к a_0 . По определению метрики $\hat{d}$ для каждого $F \in S_{a_0}(c_0)$ выполнено $\overline{O}_{\delta_n}(F) \in S_{a_n}(c_n)$, следовательно, $d_H(F, S_{a_n}(c_n)) \leq \delta_n$. Аналогично, для $G \in S_{a_n}(c_n)$ выполнено $\overline{O}_{\delta_n}(G) \in S_{b_n}(c_0)$ и $d_H(G, S_{b_n}(c_0)) \leq \delta_n$.

Поскольку $\delta_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow a_0 - 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\bigcap_{a < a_0} S_a(c_0) = S_{a_0}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq n_0$ выполнено $\delta_n < \varepsilon/2$ и $d_H(H, S_{a_0}(c_0)) < \varepsilon/2$ для каждого $H \in S_{b_n}(c_0)$. Тогда при $n \geq n_0$ для каждого $F \in S_{a_0}(c_0)$ выполнено $d_H(F, S_{a_n}(c_n)) \leq \varepsilon/2$ и для каждого $G \in S_{a_n}(c_n)$ выполнено $d_H(G, S_{a_0}(c_0)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Таким образом, $\bar{d}_H(S_{a_n}(c_n), S_{a_0}(c_0)) \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Следовательно, $S_{a_n}(c_n)$ сходится в X к $S_{a_0}(c_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть, наоборот, для каждого $a_0 \in \mathcal{J}$ существует сходящаяся в I к a_0 последовательность a_n , для которой $S_{a_n}(c_n) \rightarrow S_{a_0}(c_0)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и разделим I на отрезки длины меньше $\varepsilon/4$ точками $a_0^{(k)} \in \mathcal{J}$, $k = 0, 1, \dots, m$, $a_0^{(0)} = 0$, $a_0^{(m)} = 1$. Согласно предположению существуют последовательности $(a_n^{(k)})$, сходящиеся соответственно к $a_0^{(k)}$, для которых срезы $S_{a_n^{(k)}}(c_n)$ сходятся к $S_{a_0^{(k)}}(c_0)$. В частности можем считать, что $a_n^{(0)} \equiv 0$. Следовательно, существует n_0 такое, что при $n \geq n_0$ имеем

$$|a_n^{(k)} - a_0^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \bar{d}_H(S_{a_n^{(k)}}(c_n), S_{a_0^{(k)}}(c_0)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Как следствие $a_n^{(k+1)} - a_n^{(k)} < 3\varepsilon/4$. Следовательно, для каждого $a \in I$ существует $a_n^{(k)} \leq a$, для которого $a - a_n^{(k)} < 3\varepsilon/4$.

Если $c_n(F) = a$, то $F \in S_a(c_n)$ и $F \in S_{a_n^{(k)}}(c_n)$, следовательно,

$$\bar{O}_{\varepsilon/4}(F) \in S_{a_0^{(k)}}(c_0), \quad c_0(\bar{O}_{\varepsilon/4}(F)) \geq a_0^{(k)} > a_n^{(k)} - \frac{\varepsilon}{4} > a - \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = a - \varepsilon,$$

откуда $c_0(\bar{O}_{\varepsilon}(F)) > a - \varepsilon$, $c_0(\bar{O}_{\varepsilon}(F)) + \varepsilon \geq c_n(F)$.

Пусть теперь $c_0(F) = a$. Аналогично

$$\bar{O}_{\varepsilon/4}(F) \in S_{a_n^{(k)}}(c_n), \quad c_n(\bar{O}_{\varepsilon/4}(F)) \geq a_n^{(k)} > a - \frac{\varepsilon}{4},$$

откуда $c_n(\bar{O}_{\varepsilon}(F)) + \varepsilon \geq c_0(F)$.

Итак, при $n \geq n_0$ выполнено $\hat{d}(c_n, c_0) < \varepsilon$. Таким образом, $c_n \rightarrow c_0$ при $n \rightarrow \infty$.

4.5. Вспомогательные утверждения. Доказательству теоремы 5 предположим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – компакт, и пусть последовательность $(\mathcal{B}_n)$ сходится в GX к $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{A}_0 \in GX$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$. Тогда существует такая сходящаяся к $\mathcal{A}_0$ последовательность $(\mathcal{A}_n)$, что для каждого n имеем $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{B}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве GX операция пересечения непрерывна (см. [9]), поэтому последовательность $(\mathcal{A}_n)$, где $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}_0$, является искомой.

ЛЕММА 4.2. Пусть в GX , где X – компакт, последовательности $(\mathcal{A}_n)$, $(\mathcal{C}_n)$, $(\mathcal{D}_n)$ сходятся соответственно к $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{D}_0$, причем $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{C}_n$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{D}_n$ (откуда $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{C}_0$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}_0$). Тогда для каждого $\mathcal{B}_0 \in GX$ такого, что $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{C}_0$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}_0$, существует сходящаяся к $\mathcal{B}_0$ последовательность $(\mathcal{B}_n)$ такая, что $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{C}_n$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{D}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в пространстве GX операции пересечения и объединения непрерывны (см. [9]), последовательность $(\mathcal{B}_n)$, $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cup (\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n)$ является искомой.

ЛЕММА 4.3. Пусть X – компакт, множество $\mathcal{J}$ всюду плотно в I , $0 \in \mathcal{J}$, и каждому $j \in \mathcal{J}$ поставлено в соответствие семейство $\mathcal{A}^{(j)} \in GX$ так, что $\mathcal{A}^{(j)} \supset \mathcal{A}^{(j')}$ при $j < j'$, $\mathcal{A}_0 = \exp X$. Существует единственная емкость $c = \theta_{\mathcal{J}}((\mathcal{A}^{(j)})_{j \in \mathcal{J}})$, удовлетворяющая свойствам: если $c(F) > j$, то $F \in \mathcal{A}^{(j)}$; если $c(F) < j$, то $F \notin \mathcal{A}^{(j)}$. Операция $\theta_{\mathcal{J}}$ является неубывающей, т.е. для всякого другого набора $(\mathcal{B}^{(j)})_{j \in \mathcal{J}}$ с теми же свойствами, для которого $\mathcal{A}^{(j)} \subset \mathcal{B}^{(j)}$ для всех $j \in \mathcal{J}$, имеем $\theta_{\mathcal{J}}((\mathcal{A}^{(j)})_{j \in \mathcal{J}}) \leq \theta_{\mathcal{J}}((\mathcal{B}^{(j)})_{j \in \mathcal{J}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если такая емкость c существует, то она должна удовлетворять равенству $c(F) = \sup\{j \in \mathcal{J} \mid F \in \mathcal{A}^{(j)}\}$. Проверка того, что эта формула действительно определяет емкость, совершенно прямолинейна. Из формулы вытекает также, что операция $\theta_{\mathcal{J}}$ является неубывающей.

ЛЕММА 4.4. Пусть X – метризуемый компакт, $c_n \rightarrow c_0$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве MX , $c'_0 \in MX$, $c'_0 \leq c_0$. Тогда в пространстве MX существует сходящаяся к c'_0 последовательность (c'_n) , для которой $c'_n \leq c_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{J}$ – множество всех двоично-рациональных чисел из промежутка $[0, 1]$.

Поскольку $c_n \rightarrow c_0$, согласно теореме 4 существуют последовательности $(a_n^{(0)})$, $(a_n^{(1)})$, сходящиеся соответственно к 0 и 1, для которых срезы $S_{a_n^{(0)}}(c_n)$ и $S_{a_n^{(1)}}(c_n)$ сходятся соответственно к $S_0(c_0)$ и $S_1(c_0)$. Без ограничения общности можно считать, что $a_n^{(0)} = 0 < a_n^{(1)}$ для всех n . Далее, если $(a_n^{(j)})$ уже построены для всех $j = k/(2^m)$, $0 \leq k \leq 2^m$, так, что $a_n^{(j)} < a_n^{(j')}$, $a_n^{(j')} - a_n^{(j)} < 2(j' - j)$ при $j < j'$, и $j = (2l+1)/(2^{m+1})$, то согласно теореме 4 существует последовательность $(a_n^{(j)})$, сходящаяся к j , для которой срезы $S_{a_n^{(j)}}(c_n)$ сходятся к $S_j(c_0)$. Подправив конечное количество ее членов, можно гарантировать, что

$$a_n^{(l/(2^m))} < a_n^{(j)} = a_n^{((2l+1)/(2^{m+1}))} < a_n^{((l+1)/(2^m)} , \\ a_n^{((2l+1)/(2^{m+1}))} - a_n^{(l/(2^m))} < \frac{1}{2^m} , \quad a_n^{((l+1)/(2^m)} - a_n^{((2l+1)/(2^{m+1}))} < \frac{1}{2^m} .$$

Так индуктивно определим $(a_n^{(j)})$ для всех $j \in \mathcal{J}$, причем $a_n^{(j)} < a_n^{(j')}$, $a_n^{(j')} - a_n^{(j)} < 2(j' - j)$ при $j < j'$.

Обозначим

$$S_{a_n^{(j)}}(c_n) = \mathcal{B}_n^{(j)}, \quad S_j(c_0) = \mathcal{B}_0^{(j)}, \quad S_j(c'_0) = \mathcal{A}_0^{(j)}.$$

Тогда $\mathcal{B}_n^{(j)} \rightarrow \mathcal{B}_0^{(j)}$, $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{B}_n^{(0)} = \mathcal{B}_0^{(0)} = \mathcal{A}_0^{(0)} = \exp X$, $\mathcal{B}_n^{(j)} \supset \mathcal{B}_n^{(j')}$, $\mathcal{B}_0^{(j)} \supset \mathcal{B}_0^{(j')}$, $\mathcal{A}_0^{(j)} \supset \mathcal{A}_0^{(j')}$ при $j < j'$.

Положим $\mathcal{A}_n^{(0)} = \exp X$. Согласно лемме 4.1 существует сходящаяся к $\mathcal{A}_0^{(1)}$ последовательность $\mathcal{A}_n^{(1)}$ в GX , для которой $\mathcal{A}_n^{(1)} \subset \mathcal{B}_n^{(1)}$. Если последовательности $\mathcal{A}_n^{(j)} \rightarrow \mathcal{A}_0^{(j)}$ уже построены для всех $j = k/(2^m)$, $0 \leq k \leq 2^m$, причем $\mathcal{A}_n^{(j)} \supset \mathcal{A}_n^{(j')}$ при $j < j'$, и $j = (2l+1)/(2^{m+1})$, то согласно лемме 4.2 существует сходящаяся к $\mathcal{A}_0^{(j)}$ последовательность $(\mathcal{A}_n^{(j)})$, удовлетворяющая условиям

$$\mathcal{A}_n^{(l/(2^m))} \supset \mathcal{A}_n^{(j)} = \mathcal{A}_n^{((2l+1)/(2^{m+1}))} \supset \mathcal{A}_n^{((l+1)/(2^m)} , \quad \mathcal{A}_n^{(j)} \subset \mathcal{B}_n^{(j)} .$$

Множество

$$\mathcal{J}_n = \{a_n^{(j)} \mid j \in \mathcal{J}\} \cup [a_n^{(1)}, 1]$$

по построению всюду плотно в I , и набор $(\mathcal{C}_n^{(j)})_{j \in \mathcal{J}_n}$, определенный равенствами $\mathcal{C}_n^{(a_n^{(j)})} = \mathcal{A}_n^{(j)}$, $\mathcal{C}_n^{(j)} = \mathcal{A}_n^{(1)} \cap S_j(c_n)$ при $a_n^{(1)} < j \leq 1$, удовлетворяет условию леммы 4.3. Тогда последовательность емкостей $c'_n = \theta_{\mathcal{J}_n}((\mathcal{C}_n^{(j)})_{j \in \mathcal{J}_n})$ согласно теореме 4 сходится к c'_0 , и согласно лемме 4.3 имеем $c'_n \leq c_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть X – метризуемый компакт, и в GX последовательности c'_n и c''_n сходятся соответственно к c'_0 и c''_0 , $c'_n \leq c''_n$. Для каждой емкости c_0 , $c'_0 \leq c_0 \leq c''_0$, существует сходящаяся к c_0 последовательность c_n , для которой $c'_n \leq c_n \leq c''_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.4 существует сходящаяся к c_0 последовательность c'''_n , для которой $c'''_n \leq c''_n$. Поскольку для произвольных емкостей c_1, c_2 формула $c(F) = \max\{c_1(F), c_2(F)\}$ определяет емкость $c = \sup\{c_1, c_2\}$, непрерывно зависящую от c_1, c_2 , последовательность $c_n = \sup\{c'_n, c'''_n\}$ является искомой.

ЛЕММА 4.6. Пусть X – компакт, “ $\leq$ ” = $\{(c_1, c_2) \in (MX)^2 \mid c_1 \leq c_2\}$. Отображение $[\dots, \dots]: “\leq” \rightarrow \exp MX$, ставящее каждой паре (c_1, c_2) , для которой $c_1 \leq c_2$, в соответствие множество $[c_1, c_2] = \{c \in MX \mid c_1 \leq c \leq c_2\}$, является непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для метризуемого компакта X утверждение вытекает из предыдущего следствия. Неметризуемый компакт X разложим в спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, \mathcal{A}\}$ из метризуемых компактов и воспользуемся тем, что:

1) отношение сравнения “ $\leq$ ” является замкнутым подмножеством произведения $(MX) \times (MX)$;

2) $c_1 \leq c_2$ для $c_1, c_2 \in MX$ тогда и только тогда, когда для каждой сквозной проекции $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ имеем $p_\alpha(c_1) \leq p_\alpha(c_2)$.

4.6. Доказательство теоремы 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – открытое сюръективное непрерывное отображение. Для доказательства открытости отображения $Mf: MX \rightarrow MY$ достаточно показать (см., например, [8]), что отображение $(Mf)^{-1}: MY \rightarrow \exp MX$, определенное формулой $(Mf)^{-1}(c_0) = \{c \in MX \mid Mf(c) = c_0\}$, является непрерывным. Определим для $c_0 \in MY$ функции $c_0^\#, c_0^*: \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$c_0^\#(F) = c_0(Y \setminus f(X \setminus F)), \quad c_0^*(F) = c_0(f(F)).$$

Поскольку $c_0^*(F) = Mf(c_0)(F)$ для каждого замкнутого множества $F \subset X$, то c_0^* – емкость и отображение $c_0 \mapsto c_0^*$ непрерывно. Из открытости отображения f вытекает замкнутость множества $Y \setminus f(X \setminus F) \subset Y$ для каждого замкнутого множества $F \subset X$, следовательно, функция $c_0^\#: \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$ корректно определена. Несложно удостовериться, что $c_0^\#$ – емкость на X . Если $F \subset X$, то $c_0^\# \in O_{-cl}(F, a)$ тогда и только тогда, когда $c_0(Y \setminus f(Y \setminus F)) < a$, т.е. $c_0 \in O_{-}(Y \setminus f(Y \setminus F), a)$. Аналогично для $U \subset X$ имеем $c_0^\# \in O_{+op}(U, a)$, если существует $F \subset X$, $F \subset U$, для которого $c_0^\#(F) > a$. Это равносильно неравенству $c_0(Y \setminus f(X \setminus U)) > a$, т.е. принадлежности $c_0 \in O_{+}(Y \setminus f(X \setminus U), a)$. Следовательно, отображение $c_0 \mapsto c_0^\#$ непрерывно. Принимая во внимание, что $(Mf)^{-1}(c_0) = [c_0^\#, c_0^*]$, получаем, что согласно лемме 4.6 множество $(Mf)^{-1}(c_0)$ непрерывно зависит от c_0 .

4.7. Доказательство теоремы 6. Непрерывность отображения ηX тривиальна.

Докажем непрерывность отображения μX . Пусть $\mathcal{C} \in (\mu X)^{-1}(O_-(F, a))$ для $F \subset X$. Это значит, что $\mathcal{C}(F_a) < a$, т.е. $\mathcal{C} \in O_{-cl}(F_a, a)$. С другой стороны, для каждой $\mathcal{C}' \in O_-(F_a, a)$ имеем также $\mathcal{C}'(F_a) < a$, т.е. прообраз $(\mu X)^{-1}(O_-(F, a)) = O_-(F_a, a)$ такого элемента предбазы является открытым множеством.

Пусть $\mathcal{C} \in (\mu X)^{-1}(O_+(U, a))$ для $U \subset X$. Тогда существует $F \subset U$, $F \subset_{cl} X$, для которого $\mathcal{C}(F_{a'}) > a$ для некоторого $a' > a$. Тем более $\mathcal{C}(O_+(U, a)) > a$, т.е. $\mathcal{C} \in O_+(O_+(U, a), a)$. Пусть $\mathcal{C}' \in O_+(O_+(U, a), a)$, что равносильно неравенству $\mathcal{C}'(O_+(U, a)) > a$, следовательно, существует замкнутое множество $\mathcal{F} \subset O_+(U, a)$, для которого $\mathcal{C}'(\mathcal{F}) > a$. Множество $O_+(U, a)$ является объединением открытых множеств $O_+(U', a')$ для всех $a' > a$, $U' \subset_{ор} X$, $Cl U' \subset U$, следовательно, компактное множество $\mathcal{F}$ лежит в объединении их конечного числа:

$$\mathcal{F} \subset O_+(U'_1, a'_1) \cup O_+(U'_2, a'_2) \cup \dots \cup O_+(U'_k, a'_k).$$

Тогда для $a' = \min\{a'_1, a'_2, \dots, a'_k\}$, $U' = U'_1 \cup U'_2 \cup \dots \cup U'_k$ выполнено $\mathcal{F} \subset O_+(U', a') \subset (Cl U')_{a'}$, откуда $\mathcal{C}'((Cl U')_{a'}) > a$. Поскольку $Cl U' \subset U$, имеем $\mu X(\mathcal{C}')(U) > a$ и $\mathcal{C}' \in (\mu X)^{-1}(O_+(U, a))$. Итак, множество $(\mu X)^{-1}(O_+(U, a)) = O_+(O_+(U, a), a)$ открыто, что завершает доказательство непрерывности отображения μX .

Тот факт, что $\eta = (\eta X)_{X \in \text{Ob Comp}}$ и $\mu = (\mu X)_{X \in \text{Ob Comp}}$ – естественные преобразования соответственно из $\mathbf{1}_{\text{Comp}}$ в M и из M^2 в M , получается проверкой коммутативности соответствующих диаграмм.

Чтобы доказать, что (M, η, μ) – монада, осталось обосновать для произвольного компакта X коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} MX & \xrightarrow{\eta MX} & M^2 X \\ M\eta X \downarrow & \searrow 1_{MX} & \downarrow \mu X \\ M^2 X & \xrightarrow{\mu X} & MX \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M^3 X & \xrightarrow{M\mu X} & M^2 X \\ \mu MX \downarrow & & \downarrow \mu X \\ M^2 X & \xrightarrow{\mu X} & MX \end{array}$$

Рассмотрим первую из них. Выберем $c \in MX$, $F \in \text{exp } X$. Емкости $\mathcal{C}_1 = \eta MX(c)$ и $\mathcal{C}_2 = M\eta X(c)$ определяются равенствами

$$\mathcal{C}_1(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1, & \text{если } c \in \mathcal{F}; \\ 0, & \text{если } c \notin \mathcal{F}, \end{cases} \quad \mathcal{C}_2(\mathcal{F}) = c(\{x \in X \mid \eta X(x) \in \mathcal{F}\}).$$

Тогда для произвольного $a \in (0, 1]$ имеем

$$\mathcal{C}_1(F_a) = \begin{cases} 1, & c(F) \geq a; \\ 0, & c(F) < a, \end{cases} \quad \mathcal{C}_2(F_a) = c(\{x \mid x \in F\}) = c(F).$$

Нетрудно видеть, что каждое из неравенств $\mathcal{C}_1(F_a) \geq a$ и $\mathcal{C}_2(F_a) \geq a$ выполнено, если и только если $c(F) \geq a$. Следовательно, $\mu X(\mathcal{C}_1)(F) = \mu X(\mathcal{C}_2)(F) = c(F)$, т.е. первая диаграмма коммутрует.

Теперь предположим, что $\mathbf{C} \in M^3 X$, $F \in \text{exp } X$. Обозначим $M\mu X(\mathbf{C}) = \mathcal{C}_1$, $\mu MX(\mathbf{C}) = \mathcal{C}_2$, $\mu X(\mathcal{C}_1) = c_1$, $\mu X(\mathcal{C}_2) = c_2$.

Учтем, что

$$\mu X^{-1}(F_a) = \{\mathcal{C} \in M^2 \mid \mu X(\mathcal{C})(F) \geq a\} = \{\mathcal{C} \in M^2 X \mid \mathcal{C}(F_a) \geq a\} = (F_a)_a.$$

Тогда равенство $c_1(F) = a_1$ означает, что

$$\begin{cases} M\mu X(\mathbf{C})(F_{a_1}) \geq a_1, \\ \forall b > a_1 \quad M\mu X(\mathbf{C})(F_b) < b \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{C}(\mu X^{-1}(F_{a_1})) \geq a_1, \\ \forall b > a_1 \quad \mathbf{C}(\mu X^{-1}(F_b)) < b. \end{cases}$$

Следовательно, $c_1(F) = a_1$, если

$$\begin{cases} \mathbf{C}((F_{a_1})_{a_1}) \geq a_1, \\ \forall b > a_1 \quad \mathbf{C}((F_b)_b) < b. \end{cases}$$

Сравним: $c_2(F) = a_2$, если

$$\begin{cases} \mu MX(\mathbf{C})(F_{a_2}) \geq a_2, \\ \forall b > a_2 \quad \mu MX(\mathbf{C})(F_b) < b \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{C}((F_{a_2})_{a_2}) \geq a_2, \\ \forall b > a_2 \quad \mathbf{C}((F_b)_b) < b. \end{cases}$$

Следовательно, $a_1 = a_2$, что завершает доказательство теоремы.

4.8. Доказательство теоремы 7. Непосредственная проверка коммутативности четырех соответствующих диаграмм не представляет трудности, однако отложим доказательство, поскольку данное утверждение будет получено как “побочный продукт” при дальнейшем изложении.

ЛЕММА 4.7. *Отображение $i_K: G_K X \rightarrow MX$ является вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространства $G_K X$ и MX являются компактными, достаточно показать инъективность и непрерывность отображения i_K . Если элементы $A = (A_k)_{k \in K}$ и $B = (B_k)_{k \in K}$ пространства $G_K X$ различны, то для некоторого $k \in K$ существует замкнутое множество $F \in A_k \setminus B_k$ либо $F \in B_k \setminus A_k$. В первом случае $i_K(A)(F) \geq k$, $i_K(B)(F) < k$, во втором – $i_K(A)(F) < k$, $i_K(B)(F) \geq k$. Отсюда $i_K(A) \neq i_K(B)$.

Для доказательства непрерывности рассмотрим прообразы элементов стандартной предбазы пространства MX . Пусть $A = (A_k)_{k \in K} \in i_K^{-1}(O_-(F, a))$, где $F \subset_{cl} X$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда неравенство $i_K(A)(F) < a$ равносильно

$$F \notin \bigcup_{k \in K, k \geq a} A_k \cup \{X\}.$$

Используя стандартную базу топологии Виеториса на пространстве $\exp^2 X$, содержащем GKX , запишем этот факт в виде $A_k \in \langle \langle X, X \setminus F \rangle \rangle$ при $k \geq a$. Отметим, что множество V всех наборов $B = (B_k)_{k \in K} \in G_K X$, удовлетворяющих условиям $B_k \in \langle \langle X, X \setminus F \rangle \rangle$ при всех $k \geq a$, открыто в $G_K X$ согласно определениям топологии произведения и индуцированной топологии. Кроме того из $B = (B_k)_{k \in K} \in V$ вытекает $i_K(B)(F) < a$, т.е. $A \in V \subset i_K^{-1}(O_-(F, a))$. Следовательно, все точки множества $i_K^{-1}(O_-(F, a))$ являются внутренними, поэтому это множество открыто.

Теперь предположим, что $A = (A_k)_{k \in K} \in i_K^{-1}(O_+(U, a))$, где $U \subset_{op} X$, $a \in \mathbb{R}$.

Тогда существует компакт $F \subset U$, для которого $i_K(A)(F) > a$, т.е. имеем $F \in A_k$ для по крайней мере одного уровня $k \in K$, $k > a$. Итак, существует индекс $k \in K$, $k > a$, для которого $A_k \in \langle \exp X, \langle U \rangle \rangle$ при $k \geq a$. Множество W всех наборов $B = (B_k)_{k \in K} \in G_K X$, удовлетворяющих условиям

$B_k \in \langle \exp X, \langle U \rangle \rangle$ при по крайней мере одном $k \geq a$, открыто в $G_K X$ согласно определениям топологии произведения и индуцированной топологии. Кроме того из $B = (B_k)_{k \in K} \in W$ вытекает существование индекса $k > a$, $k \in K$, тако-го, что B_k содержит компакт $F \subset U$, что влечет $i_K(B)(U) > a$. Таким образом, $A \in W \subset i_K^{-1}(O_+(U, a))$ и прообраз $i_K^{-1}(O_+(U, a))$ также открыт.

ЛЕММА 4.8. *Набор отображений $i_K = (i_K X)$, где X пробегает класс всех компактов, является естественным преобразованием $G_K \rightarrow M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение компак-тов, $A = (A_k)_{k \in K} \in G_K X$. Сравним емкости $c_1 = Mf \circ i_K X(A)$ и $c_2 = i_K Y \circ G_K f(A)$. Неравенство $c_1(F) \geq a$ для произвольных множества $F \subset X$ и числа $a \in \mathbb{R}$ равносильно неравенству $i_K X(A)(f^{-1}(F)) \geq a$, т.е. $f^{-1}(F) \in A_k$ для некоторого $k \geq a$. Принимая во внимание, что A_k является гиперпрост-ранством включения, получаем равносильную принадлежность $F \in Gf(A_k)$, т.е. $i_K Y \circ G_K f(A)(F) = c_2(F) \geq k$. Итак, имеем равенство $Mf \circ i_K X(A) = i_K Y \circ G_K f(A)$ для любого $A \in G_K X$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 4.9. *Для каждого компакта X диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} X & & G_K^2 X \xrightarrow{i_K G_K X} MG_K X \xrightarrow{M i_K X} M^2 X \\ \eta_K X \downarrow & \searrow \eta X & \downarrow \mu_K X \\ G_K X & \xrightarrow{i_K X} & MX \\ & & \downarrow \mu X \\ & & G_K X \xrightarrow{i_K X} MX \end{array}$$

являются коммутативными.

Из этих двух лемм и того, что компоненты естественного преобразования i_K являются инъективными отображениями, поэтому сократимы слева, следует, что тройка $\mathbb{G}_K = (G_K, \eta_K, \mu_K)$ является монадой в категории компактов, а так-же тот факт, что набор отображений i_K является вложением монад $\mathbb{G}_K \rightarrow \mathbb{M}$. Это завершает доказательство теоремы 7.

Список литературы

- [1] G. Choquet, “Theory of capacities”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **5** (1953–1954), 131–295.
- [2] D. Schmeidler, “Subjective probability and expected utility without additivity”, *Econometrica*, **57**:3 (1989), 571–587.
- [3] J. Eichberger, D. Kelsey, “Non-additive beliefs and strategic equilibria”, *Games Econom. Behav.*, **30**:2 (2000), 183–215.
- [4] L. G. Epstein, T. Wang, “‘Beliefs about beliefs’ without probabilities”, *Econometrica*, **64**:6 (1996), 1343–1373.
- [5] I. Gilboa, D. Schmeidler, “Updating ambiguous beliefs”, *J. Econom. Theory*, **59**:1 (1993), 33–49.
- [6] L. Zhou, “Integral representation of continuous comonotonically additive functionals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:5 (1998), 1811–1822.
- [7] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62; англ. пер.: E. V. Shchepin, “Functors and uncountable powers of compacta”, *Russian Math. Surveys*, **36**:3 (1981), 1–71.

- [8] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология: основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [9] A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*, Math. Stud. Monogr. Ser., **5**, VNTL, L'viv, 1999.
- [10] T. Radul, "On the functor of order-preserving functionals", *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **39**:3 (1998), 609–615.
- [11] Т. Н. Радул, "Монада гиперпространств включения и ее алгебры", *Укр. матем. журн.*, **42**:6 (1990), 806–811; англ. пер.: Т. N. Radul, "The monad of inclusion hyperspaces and its algebras", *Ukrainian Math. J.*, **42**:6 (1990), 712–716.
- [12] S. Z. Ditor, L. Q. Eifler, "Some open mapping theorems for measures", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 287–293.
- [13] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney–Toronto, 1968.
- [14] Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, "Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах", *Докл. АН СССР*, **115**:6 (1957), 1058–1061.
- [15] Е. В. Моисеев, "О пространствах замкнутых гиперпространств включения", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, №3, 54–57; англ. пер.: E. V. Moiseev, "On spaces of closed growth and inclusion hyperspaces", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:3 (1988), 48–51.
- [16] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] О. Р. Nykyforchyn, "On continuity, openness, and bicommutativity of functors in the category of compacta", *Methods Funct. Anal. Topology*, **4**:4 (1998), 82–85.

М. М. Заричный (M. M. Zarichnyi)

Львовский национальный университет

им. И. Франко, Украина;

Institute of mathematics, Rzeszów University, Poland

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Поступила в редакцию

23.01.2006 и 21.08.2007

О. Р. Никифорчин (O. R. Nykyforchyn)

Прикарпатский национальный университет

им. В. Стефаника, г. Ивано-Франковск, Украина

E-mail: nick@pu.if.ua