Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 7, 63–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:01:11

УДК 517.518.36+517.518.126

М. Г. Плотников

Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара

Рассматривается ряд свойств многомерных обобщенных интегралов. В двумерном случае доказывается непротиворечивость регулярного интеграла Перрона и одного обобщенного интеграла, решающего проблему восстановления коэффициентов двойных рядов Хаара из некоторого класса. Как следствие, получен ряд обобщений известной теоремы Скворцова. В частности, получен следующий результат. Если для некоторого $\rho \in (0, 1/2]$ двойной ряд Хаара всюду на единичном квадрате ρ -регулярно сходится к конечной функции, интегрируемой по Перрону в ρ -регулярном смысле, то данный ряд есть ряд Фурье–Перрона своей суммы.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Классическая теорема Дю Буа-Реймона (см. [1], [2; гл. 1]) утверждает, что тригонометрический ряд, всюду сходящийся к интегрируемой по Риману функции, является рядом Фурье этой функции. Этот результат обобщался на случай других интегралов и переносился на ряды по другим ортонормированным системам.

Здесь мы доказываем теоремы такого типа для двойных рядов Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \chi_{n,m}(x, y). \quad (1)$$

В этом направлении известны результаты В. А. Скворцова (см., например, [3; теорема 2], [4]; см. также [5; теорема 2]), из которых, в частности, следует, что если ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ сходится по прямоугольникам к конечной функции $s(x)$, интегрируемой в смысле нерегулярного интеграла Перрона (определение см. ниже), то данный ряд является рядом Фурье–Перрона функции $s(x)$.

Мы рассмотрим так называемую ρ -регулярную сходимость, которая обобщает сходимость по прямоугольникам и иногда называется *ограниченной сходимостью по прямоугольникам*. Кроме того, рассмотрим ρ -регулярный интеграл

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №05-01-00206), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант №НШ-4681.2006.1) и Программы поддержки молодых ученых (грант №МК-1214.2005.1).

Перрона, который шире нерегулярного интеграла Перрона. Основным результатом работы является обобщение приведенной выше теоремы В. А. Скворцова на случай ρ -регулярной сходимости и ρ -регулярного интеграла Перрона. Этот результат будет получен как следствие более общего факта, имеющего отношение к теории интеграла. А именно, в двумерном случае будет доказана непротиворечивость ρ -регулярного интеграла Перрона и $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла, построенного в [6] для восстановления коэффициентов рядов (1) из некоторого класса.

§ 2. Определения из теории рядов Хаара

Под мерой мы понимаем меру Лебега в $\mathbb{R}^2$. Расстояние между точками понимается в евклидовой метрике. Понятия открытости и замкнутости множества рассматриваются относительно топологии единичного квадрата $[0, 1]^2$; так, A° обозначает *внутренность* множества A в этой топологии. Под измеримостью множеств понимается принадлежность к σ -алгебре множеств, порожденной открытыми интервалами из $[0, 1]^2$.

Мы используем стандартное определение одномерных *функций Хаара* $\chi_n(x)$, при котором система Хаара полна в $C[0, 1]$ (см. [7], [8]), т.е. $\chi_1(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$, а при $n = 2^k + i$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}} \right), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}} \right), \\ 0 & \text{вне } \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}} \right]. \end{cases}$$

В точке 0 (точке 1) значение функции $\chi_n(x)$ равно ее пределу справа (слева), а в остальных точках отрезка $[0, 1]$ – среднему арифметическому правого и левого пределов.

Далее Q_d будет обозначать множество *двоично-рациональных* точек отрезка $[0, 1]$, т.е. точек вида $p/2^n$, где $n \geq 0$, $p = \overline{1, 2^n}$. Точки множества $I_d \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \setminus Q_d$ называются *двоично-иррациональными*.

Двумерным *двоичным интервалом* назовем замкнутый сегмент вида

$$\left[\frac{p_1}{2^{k_1}}, \frac{p_1+1}{2^{k_1}} \right] \times \left[\frac{p_2}{2^{k_2}}, \frac{p_2+1}{2^{k_2}} \right], \quad (2)$$

где $k_1, k_2 = 0, 1, \dots$, $p_i = 0, \dots, 2^{k_i} - 1$. Пару (k_1, k_2) будем называть *рангом* двоичного интервала (2). Если $k_1 = k_2 = n$, то такой двоичный интервал назовем *двоичным квадратом*, а его рангом будем считать число n . Данные понятия естественным образом обобщаются на M -мерный случай.

Последовательность одномерных двоичных интервалов $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$ назовем *основной* для точки $a \in [0, 1]$, если $a \in \Delta_k$ для всех $k = 0, 1, \dots$, причем ранг Δ_k

равен k и $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$. Если же $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in [0, 1]^2$, то двойную последовательность двумерных двоичных интервалов $\{\Delta_{k_1, k_2}\}$ назовем $(\mathbf{z})$ -последовательностью, если $\Delta_{k_1, k_2} = \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2}$, $\{\Delta_{k_i}\}$ – последовательность, основная для точки z_i . Для каждой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ существует ровно 2^s $(\mathbf{z})$ -последовательностей, где s – число Q_d -координат точки $\mathbf{z}$, отличных от нуля и единицы. Из $(\mathbf{z})$ -последовательности выделим подпоследовательность $\{\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{n,n}\}$, состоящую из двоичных квадратов, которую будем называть $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательностью.

Двумерная функция Хаара $\chi_{n,m}(z_1, z_2)$ равна $\chi_n(z_1)\chi_m(z_2)$. Прямоугольная частичная сумма ряда (1) с номером $\mathbf{m} = (N, M)$ в точке (x, y) есть выражение

$$S_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) = S_{N,M}(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{n,m} \chi_{n,m}(z_1, z_2).$$

Назовем параметром регулярности интервала Δ число $\text{reg}(\Delta)$, равное отношению длин минимальной и максимальной сторон интервала, и, аналогично, параметром регулярности вектора $\mathbf{m}$ – число $\text{reg}(\mathbf{m})$, равное отношению минимальной и максимальной его компонент. Интервал Δ с $\text{reg}(\Delta) \geq \rho$ будем называть ρ -регулярным. Ряд (1) сходится ρ -регулярно ($\rho \in (0, 1]$) к сумме $S(\mathbf{z})$ в точке $\mathbf{z}$, если $S_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ стремится к $S(\mathbf{z})$ при $\min\{N, M\} \rightarrow \infty$ и $\text{reg}(\mathbf{m}) \geq \rho$. Отбросив последнее условие, получим сходимость по прямоугольникам. При любом $\rho \in (0, 1]$ ρ -регулярная сходимость является более общей, чем сходимость по прямоугольникам.

§ 3. Определения и некоторые факты из теории интеграла

Пусть $\mathcal{B}$ – семейство всех замкнутых сегментов, лежащих в $[0, 1]^M$. Если $\rho \in (0, 1]$, то $\mathcal{B}_\rho$ будет обозначать семейство всех замкнутых сегментов $\Delta \subset [0, 1]^M$ с $\text{reg}(\Delta) \geq \rho$, а $\mathcal{B}_{\rho,d}$ – семейство двоичных интервалов $\Delta \subset [0, 1]^M$ с $\text{reg}(\Delta) \geq \rho$. Очевидно, $\mathcal{B}_{\rho,d} \subset \mathcal{B}_\rho \subset \mathcal{B}$.

Два множества называются *неперекрывающимися*, если их внутренности не пересекаются. Функция множества $\Phi(\Delta)$, определенная для всех $\Delta \in \mathcal{B}$, называется *супераддитивной* (обозначение $\Phi \in \overline{A}_{\mathcal{B}}$), если для любых $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p \in \mathcal{B}$ таких, что $\Delta = \bigcup_{j=1}^p \Delta_j$ и множества Δ_j попарно не перекрываются, выполнено условие $\sum_{i=1}^p \Phi(\Delta_i) \leq \Phi(\Delta)$. Функция $\Phi(\Delta)$ называется *субаддитивной* (обозначение $\Phi \in \underline{A}_{\mathcal{B}}$), если функция $-\Phi(\Delta)$ является супераддитивной. Функция $\Phi(\Delta)$ называется *аддитивной* (обозначение $\Phi \in A_{\mathcal{B}}$), если $\Phi \in \overline{A}_{\mathcal{B}} \cap \underline{A}_{\mathcal{B}}$. Эти понятия естественным образом переносятся и на случай функций, определенных лишь на подсемействах семейства $\mathcal{B}$.

Семейство $\mathcal{B}$ обладает тем свойством, что для любой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^M$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $\Delta \in \mathcal{B}$ диаметра меньшего, чем ε , содержащее точку $\mathbf{z}$. Производная функции множества $\Phi(\Delta)$ в точке $\mathbf{z}$ относительно семейства $\mathcal{B}$ (обозначение $D_{\mathcal{B}}\Phi(\mathbf{z})$) определяется равенством

$$D_{\mathcal{B}}\Phi(\mathbf{z}) = \lim_{\substack{\text{diam} \Delta \rightarrow 0 \\ \mathbf{z} \in \Delta, \Delta \in \mathcal{B}}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}.$$

Естественным образом определяются *верхняя производная* $\overline{D}_{\mathcal{B}}\Phi(\mathbf{z})$ и *нижняя производная* $\underline{D}_{\mathcal{B}}\Phi(\mathbf{z})$ функции $\Phi(\Delta)$ в точке $\mathbf{z}$ относительно семейства $\mathcal{B}$. Аналогично определяется производная функции $\Phi(\Delta)$ в точке $\mathbf{z}$ относительно любого из подсемейств $\mathcal{B}_\rho$ или $\mathcal{B}_{\rho,d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть на $[0, 1]^M$ задана почти всюду конечная функция $f(\mathbf{z})$. Функция $f(\mathbf{z})$ называется *интегрируемой по Перрону в нерегулярном смысле*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся функции интервала $F_1 \in \overline{A}_{\mathcal{B}}$ (*мажоранта*) и $F_2 \in \underline{A}_{\mathcal{B}}$ (*миноранта*) такие, что:

- 1) всюду на $[0, 1]^M$ выполнены соотношения

$$\underline{D}_{\mathcal{B}}F_1(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{z}) \geq \overline{D}_{\mathcal{B}}F_2(\mathbf{z}), \quad \underline{D}_{\mathcal{B}}F_1(\mathbf{z}) > -\infty, \quad \overline{D}_{\mathcal{B}}F_2(\mathbf{z}) < +\infty;$$

- 2) $F_1([0, 1]^M) - F_2([0, 1]^M) < \varepsilon$.

Нерегулярный интеграл Перрона функции $f(\mathbf{z})$ по любому сегменту $\Delta \in \mathcal{B}$ определяется формулой

$$(P) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

Пусть P обозначает класс функций, интегрируемых по Перрону в нерегулярном смысле. Заменяя в определении 1 семейство $\mathcal{B}$ на семейство $\mathcal{B}_\rho$ ($\mathcal{B}_{\rho,d}$), получим понятие ρ -регулярного интеграла Перрона (*двоичного ρ -регулярного интеграла Перрона*). Пусть P_ρ ($P_{\rho,d}$) обозначает класс соответствующих функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть C_1 и C_2 – классы интегрируемых в каком-то смысле функций. Скажем, что $C_1 \subset C_2$, если из $f \in C_1$ следует $f \in C_2$ и

$$(C_1) \int f = (C_2) \int f.$$

Равенство $C_1 = C_2$ означает, что $C_1 \subset C_2$ и $C_2 \subset C_1$. Если выполняется включение $C_1 \subset C_2$, будем говорить, что (C_2) -интеграл покрывает (C_1) -интеграл.

Несложно показать, что для всех $\rho \in (0, 1]$ выполнены включения

$$P \subset P_\rho \subset P_{\rho,d}. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть C_1 и C_2 – классы интегрируемых в каком-то смысле функций. Соответствующие интегралы называются *непротиворечивыми*, если

$$(C_1) \int f = (C_2) \int f \quad \text{для всех } f \in C_1 \cap C_2.$$

Далее $B(\mathbf{z}, r)$ обозначает шар радиуса r с центром в точке $\mathbf{z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть задано $\rho \in (0, 1]$. *Разбиением* сегмента $I_0 \in \mathcal{B}_\rho$ называется набор $P = \{(\mathbf{z}_j, I_j)\}_{j=1}^m$, где $\mathbf{z}_j \in I_0$, I_j – попарно неперекрывающиеся сегменты из $\mathcal{B}_\rho$, $\bigcup_{j=1}^m I_j = I_0$. Если же $\bigcup_{j=1}^m I_j$ строго лежит в I_0 , то

набор P называется *частичным разбиением* сегмента I_0 . Если задана функция $\delta(\mathbf{z}): I_0 \rightarrow (0; +\infty)$, то разбиение P (частичное разбиение P) называется $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -согласованным (или просто $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -разбиением), когда $\mathbf{z}_j \in I_j \subset B(\mathbf{z}_j, \delta(\mathbf{z}_j))$ и $\text{reg}(I_j) \geq \rho$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\rho \in (0, 1)$. Функция $f: [0, 1]^M \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Хенстоку в ρ -регулярном смысле, если существует действительное A и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta(\mathbf{z}) > 0$ такая, что для всех $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -разбиений $P = \{(\mathbf{z}_j; I_j)\}_{j=1}^m$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\mathbf{z}_j) |I_j| - A \right| < \varepsilon.$$

Число A назовем H_ρ -интегралом.

Класс функций, интегрируемых в указанном смысле, обозначим символом H_ρ . Заменив в определениях 4 и 5 $\mathcal{B}_\rho$ на $\mathcal{B}_{\rho,d}$, получим определение *двоичного ρ -регулярного интеграла Хенстока*. Класс соответствующих функций обозначим символом $H_{\rho,d}$. Очевидно, $H_\rho \subset H_{\rho,d}$.

Отметим ряд свойств $(H_{\rho,d})$ -интеграла, которые следуют из [9]. Число A из определения 5 определяется единственным образом. Далее, если функция $f(\mathbf{z})$ является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой на $[0, 1]^M$, то она является $(H_{\rho,d})$ -интегрируемой и на любом двоичном интервале из $[0, 1]^M$. Наконец, неопределенный $(H_{\rho,d})$ -интеграл, т.е. функция $F(\Delta) = (H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$, является функцией из класса $A_{\mathcal{B}_{\rho,d}}$.

Связь между интегралами Перрона и Хенстока выражена в следующем утверждении (см. [9; с. 19]).

ТЕОРЕМА А. $P_\rho = H_\rho$, $P_{\rho,d} = H_{\rho,d}$.

Отметим, что интегралы Хенстока могут быть определены лишь для всюду конечных функций, а интегралы Перрона – и для почти всюду конечных функций. Поэтому в утверждении теоремы А нужно считать классы интегрируемых функций состоящими лишь из всюду конечных функций. Однако значения интегралов Перрона и Хенстока не изменятся, если функцию изменить на множестве нулевой меры, так что можно считать, что все рассматриваемые функции всюду конечны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем нам понадобится интегрировать функции, которые не определены на множестве S меры нуль. В этом случае, рассматривая любой из перечисленных выше интегралов от этих функций, мы считаем эти функции доопределенными на множестве S любыми конечными значениями. При этом значения интегралов от этих функций не зависят от того, как именно мы доопределим эти функции конечными значениями на множестве S .

Дадим характеристику $(H_{\rho,d})$ -интегралу, т.е. найдем такие необходимые и достаточные условия на функцию множества $F(\Delta)$, чтобы та являлась неопределенным $(H_{\rho,d})$ -интегралом некоторой функции $f(\mathbf{z})$. Для многих обобщений

интеграла Лебега характеристика часто дается в терминах некоторой вариационной меры, порожденной функцией множества. До конца этого параграфа будем считать, что у нас выбрано и зафиксировано произвольное $\rho \in (0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $I_j \in \mathcal{B}_{\rho,d}$ ($j = 1, \dots, p$). Скажем, что частичное разбиение $P = \{(\mathbf{z}_j, I_j)\}_{j=1}^p$ связано с множеством $E \subset [0, 1]^M$, если $\mathbf{z}_j \in E$ для всех $j = 1, \dots, p$. Пусть заданы функции $F(\Delta): \mathcal{B}_{\rho,d} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\delta(\mathbf{z}): E \rightarrow (0, +\infty)$; тогда положим

$$\text{Var}^{\rho,d}(F, \delta, E) = \sup \sum_j |F(I_j)|,$$

где “супремум” берется по всем $(\delta(\mathbf{z}), \rho)$ -разбиениям, связанным с множеством E . Определим ρ -регулярную двоичную вариационную меру множества E , порожденную функцией F , равенством

$$V_F^{\rho,d}(E) = \inf_{\delta} \text{Var}^{\rho,d}(F, \delta, E).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Вариационная мера $V_F^{\rho,d}$ называется абсолютно непрерывной на множестве $E \subset [0, 1]^M$, если $V_F^{\rho,d}(C) = 0$ для всех множеств $C \subset E$ с $\text{mes } C = 0$.

Нам понадобятся результаты работы [10]. Там рассматривался двумерный случай, однако доказательства всех утверждений этой работы автоматически переносятся на случай произвольной конечной размерности. В [10] была доказана

ТЕОРЕМА В. Если $F(\Delta) = (H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$, то п.в. на $[0, 1]^M$ выполнено равенство $D_{\mathcal{B}_{\rho,d}} F(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$.

Из теоремы В и утверждений 2 и 3 из работы [11] вытекает

ТЕОРЕМА 1. Функция $F \in A_{\mathcal{B}_{\rho,d}}$ есть неопределенный $(H_{\rho,d})$ -интеграл от некоторой функции $f(\mathbf{z}): [0, 1]^M \rightarrow \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда F порождает абсолютно непрерывную на $[0, 1]^M$ вариационную меру $V_F^{\rho,d}$.

Теоремы такого рода называются теоремами о полной характеристике интеграла. Аналогичная теорема для интеграла Хенстока–Курцвейля была установлена в [12], а для ряда многомерных обобщенных интегралов – в работах [13]–[15] и др.

ЛЕММА 1. Пусть $f(\mathbf{z}) \in H_{\rho,d}$ и $F(\Delta) = (H_{\rho,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$. Тогда для любой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^M$ выполнено условие

$$\lim F(\Delta) = 0, \quad \mathbf{z} \in \Delta, \quad |\Delta| \rightarrow 0, \quad \Delta - \text{двоичный интервал с } \text{reg}(\Delta) \geq \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы сразу вытекает из известного свойства Хаке для многомерных интегралов хенстоковского типа (см. [16; теорема 3.3]).

§ 4. Об одном интеграле перроновского типа

В этом параграфе мы рассмотрим интегралы, помогающие решать проблемы восстановления коэффициентов рядов (1). Пусть Σ обозначает множество двумерных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, состоящих из нулей и единиц. Далее, пусть заданы точка $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ и любая $(\mathbf{z})$ -последовательность $\{\Delta_{k_1, k_2}\}$. Обозначим $\Delta_{k_j}^0 = \Delta_{k_j}$, $\Delta_{k_j}^1 = \Delta_{k_j-1} \setminus \Delta_{k_j}$. Тогда положим

$$\begin{aligned} \Delta_{k_1, k_2}^1 &= \Delta_{k_1}^0 \times \Delta_{k_2}^0, & \Delta_{k_1, k_2}^2 &= \Delta_{k_1}^0 \times \Delta_{k_2}^1, \\ \Delta_{k_1, k_2}^3 &= \Delta_{k_1}^1 \times \Delta_{k_2}^1, & \Delta_{k_1, k_2}^4 &= \Delta_{k_1}^1 \times \Delta_{k_2}^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, Δ_{k_1, k_2}^i есть двоичный интервал ранга (k_1, k_2) , а набор $\{\Delta_{k_1, k_2}^i : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ состоит из четырех попарно неперекрывающихся двоичных интервалов, составляющих в объединении двоичный интервал ранга $(k_1 - 1, k_2 - 1)$. Пусть выражение $|\sigma|$ обозначает $|\sigma_1| + |\sigma_2|$. Нам потребуется следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть заданы точка $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$, любая $(\mathbf{z})$ -последовательность $\{\Delta_{\mathbf{k}}\}$ и функция множества $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}_{1/2, d}}$. Тогда для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеет место неравенство

$$|\Phi(\Delta_{n, n}^i)| \leq \sum_{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma} |\Phi(\Delta_{n-\sigma_1, n-\sigma_2})|. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы имеют место соотношения

$$\Phi(\Delta_{n, n}^2) = (\Phi(\Delta_{n, n}^1) + \Phi(\Delta_{n, n}^2)) - \Phi(\Delta_{n, n}^1) = \Phi(\Delta_{n, n-1}) - \Phi(\Delta_{n, n}), \quad (6)$$

$$\Phi(\Delta_{n, n}^4) = (\Phi(\Delta_{n, n}^1) + \Phi(\Delta_{n, n}^4)) - \Phi(\Delta_{n, n}^1) = \Phi(\Delta_{n-1, n}) - \Phi(\Delta_{n, n}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta_{n, n}^3) &= (\Phi(\Delta_{n, n}^1) + \Phi(\Delta_{n, n}^2) + \Phi(\Delta_{n, n}^3) + \Phi(\Delta_{n, n}^4)) \\ &\quad - (\Phi(\Delta_{n, n}^1) + \Phi(\Delta_{n, n}^2)) - (\Phi(\Delta_{n, n}^1) + \Phi(\Delta_{n, n}^4)) + \Phi(\Delta_{n, n}^1) \\ &= \Phi(\Delta_{n-1, n-1}) - \Phi(\Delta_{n, n-1}) - \Phi(\Delta_{n-1, n}) + \Phi(\Delta_{n, n}). \end{aligned} \quad (8)$$

Из соотношения (6) следует выполнение неравенства (5) для квадрата $\Delta_{n, n}^2$, из (7) — для квадрата $\Delta_{n, n}^4$, а из (8) — для квадрата $\Delta_{n, n}^3$. Выполнение неравенства (5) для квадрата $\Delta_{n, n}^1$ очевидно. Лемма доказана.

Рассмотрим двумерный случай одного M -мерного обобщенного интеграла, введенного в [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть заданы $\rho \in (0, 1/2]$ и не более чем счетное множество $W \subset [0, 1]^2$. Пусть на квадрате $[0, 1]^2$ или по крайней мере в точках множества $(I_d)^2 \setminus W$ определена конечная функция $f(\mathbf{z})$.

Скажем, что функция $f(\mathbf{z})$ является $(P_d^{\rho, *})$ -интегрируемой на $[0, 1]^2$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся мажоранта $F_1 \in \overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_{\rho, d}}$ и миноранта $F_2 \in \underline{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_{\rho, d}}$ со следующими свойствами:

$$1) \quad \underline{D}_{\mathcal{B}_{\rho, d}} F_1(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{z}) \geq \overline{D}_{\mathcal{B}_{\rho, d}} F_2(\mathbf{z}) \text{ при } \mathbf{z} \in (I_d \times I_d) \setminus W;$$

- 2) если $\mathbf{z} \in (Q_d \times I_d) \setminus W$ (или $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$), то для любой $(\mathbf{z})$ -последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$ при $j = 1, 2$ выполнено условие

$$\lim_{\substack{\min \{k,l\} \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{k,l}) \geq 2\rho}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_{k,l}|}} (F_j(\Delta_{k,l}^1) - F_j(\Delta_{k,l}^4)) = 0 \quad (9)$$

$$\left(\lim_{\substack{\min \{k,l\} \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{k,l}) \geq 2\rho}} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_{k,l}|}} (F_j(\Delta_{k,l}^1) - F_j(\Delta_{k,l}^2)) = 0 \right); \quad (10)$$

- 3) для $j = 1, 2$, для каждой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ и каждой $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$ выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F_j(\Delta_n^1) - F_j(\Delta_n^2) + F_j(\Delta_n^3) - F_j(\Delta_n^4)] = 0; \quad (11)$$

- 4) $F_1([0, 1]^2) - F_2([0, 1]^2) < \varepsilon$.

$(P_d^{\rho,*})$ -интеграл от функции $f(\mathbf{z})$ по любому ρ -регулярному двоичному интервалу Δ определяется формулой

$$(P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

По аддитивности понятие $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла можно распространить на любой двоичный интервал.

Следующая теорема есть теорема 6 из [6], сформулированная для случая $M = 2$.

ТЕОРЕМА С. Пусть заданы $\rho \in (0, 1/2]$ и не более чем счетное множество W . Предположим, что ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$a_{n,m} \chi_{n,m}(\mathbf{z}) = o_{\mathbf{z}}(nm), \quad \min \{n, m\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}((n, m)) \geq 2\rho; \quad (12)$$

$$S_{N,M}(\mathbf{z}) = o_{\mathbf{z}}(NM), \quad \min \{N, M\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}((N, M)) \geq \rho. \quad (13)$$

Пусть этот ряд во всех точках множества $(I_d \times I_d) \setminus W$ сходится ρ -регулярно или по прямоугольникам к конечной функции $f(\mathbf{z})$, а во всех точках $\mathbf{z} \in [0, 1]^2 \setminus W$, имеющих ровно одну Q_d -координату, для частичных сумм этого ряда выполняется условие

$$S_{N,M}(\mathbf{z}) = o_{\mathbf{z}}(\sqrt{NM}), \quad \min \{N, M\} \rightarrow \infty, \quad \text{reg}((N, M)) \geq \rho. \quad (14)$$

Тогда функция $f(\mathbf{z})$ является $(P_d^{\rho,*})$ -интегрируемой, а ряд (1) является рядом Фурье функции $f(\mathbf{z})$ относительно $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла.

Следующий результат обобщает теоремы 1 из [17]–[19], а при $M = 2$ – и теорему 3 из [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы не более чем счетное множество W и функция $\Phi(\Delta) \in \bar{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$, причем в каждой точке $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ для функции Φ и для всех $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательностей $\{\Delta_n\}$ справедливо равенство (11).

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) если $\mathbf{z} \in (I_d \times I_d) \setminus W$, то для $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$, а также для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $n_l = n_l(\mathbf{z})$ выполнено соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \geq 0; \quad (15)$$

- 2) если $\mathbf{z} \in (Q_d \times I_d) \setminus W$ (или $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$), то для любой $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$ и для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел n_l , зависящей от $\mathbf{z}$ и $\{\Delta_n\}$, выполнено условие

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_{n_l}|}} (\Phi(\Delta_{n_l}^1) - \Phi(\Delta_{n_l}^4)) = 0 \quad (16)$$

$$\left(\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|\Delta_{n_l}|}} (\Phi(\Delta_{n_l}^1) - \Phi(\Delta_{n_l}^2)) = 0 \right). \quad (17)$$

Тогда $\Phi(I) \geq 0$ для любого двоичного интервала $I \in \mathcal{B}_{1/2,d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы не является верным и $\Phi(I_1) < 0$ для некоторого двоичного интервала $I_1 \in \mathcal{B}_{1/2,d}$. Так как $\Phi \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$, то, разбив интервал I_1 на конечное число двоичных квадратов, получим, что $\Phi(I_0) < 0$ для некоторого двоичного квадрата $I_0 \subset I_1$. Введем новую функцию $\tilde{\Phi}_0(\Delta) = \Phi(\Delta) + \varepsilon|\Delta|$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\tilde{\Phi}_0(I_0) < 0$. Очевидно, $\tilde{\Phi}_0 \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$. Пусть задана некоторая функция множества $\tilde{\Phi}$. Назовем двоичный интервал $I \subset I_0$ $\tilde{\Phi}$ -правильным, если $\tilde{\Phi}(I) < 0$. Следующая лемма была доказана в [6].

ЛЕММА А. Пусть для функции $\tilde{\Phi} \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$ в каждой точке $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ выполнено условие (11) и I – $\tilde{\Phi}$ -правильный двоичный квадрат. Тогда найдутся непекрывающиеся $\tilde{\Phi}$ -правильные двоичные квадраты I^1 и I^2 , лежащие в I .

Назовем $\tilde{\Phi}$ -цепью вложенный конечный или счетный набор $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{n_2}$ (n_2 может равняться ∞) $\tilde{\Phi}$ -правильных двоичных квадратов таких, что ранг квадрата Δ_n равен n . Скажем, что конечная цепь $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{n_2}$ связывает два двоичных квадрата, J_1 и J_2 , если $J_i = \Delta_{n_i}$ при $i = 1, 2$. Из доказательства леммы А в [6] следует, что квадраты I^1 и I^2 из данной леммы можно выбрать связывающимися $\tilde{\Phi}$ -цепью с квадратом I .

Следуя [6], назовем *типом* двоичного интервала (2) пару чисел (u_1, u_2) таких, что $u_i = p_i \pmod{2}$. Отметим, что если $\{\Delta_n\}$ является $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательностью для некоторой точки $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ и (i_1^n, i_2^n) – тип квадрата Δ_n , то $z_j \in Q_d$ тогда и только тогда, когда в последовательности i_j^n одно из чисел 0 или 1 встречается лишь конечное число раз.

Дальнейшее доказательство напоминает доказательство теоремы 3 из [6] и использует возможность реализации одного из двух логически возможных случаев.

Случай А. Для любого номера $k \in \{1, 2\}$, любого $u \in \{0, 1\}$ и любого правильного двоичного квадрата $I' \subset I_0$ существует Φ_0 -правильный двоичный квадрат $I'' \subset I'$, который можно связать Φ_0 -цепью с I' , причем в типе квадрата I'' на k -м месте стоит число u .

Случай В. Существуют $k_1 \in \{1, 2\}$, $u_1 \in \{0, 1\}$ и Φ_0 -правильный двоичный квадрат I' , который не связывается Φ_0 -цепью ни с одним Φ_0 -правильным двоичным квадратом $I'' \subset I'$, в типе которого на k_1 -м месте стоит число $u_1 + 1 \pmod{2}$.

Пусть имеет место случай А. Построим индукцией по n набор двоичных кубов I_s^j , $s = 0, 1, \dots$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, следующим образом. Пусть $I_0^0 = I_0$. Предположим, что мы построили искомый набор для $s \leq S$. Пользуясь условиями случая А, при каждом $j = 1, \dots, 2^S - 1$ для квадрата I_S^j построим Φ_0 -правильные двоичные квадраты $M_S^j \subset L_S^j \subset K_S^j \subset J_S^j \subset I_S^j$, любые два из которых связываются Φ_0 -цепью и такие, что в типе квадратов M_S^j (или L_S^j) на первом месте стоит 0 (или 1), а в типе квадратов K_S^j (или J_S^j) на втором месте стоит 0 (или 1). Пользуясь леммой А, найдем Φ_0 -правильные двоичные квадраты I_{S+1}^{2j} и I_{S+1}^{2j+1} , лежащие в квадрате M_S^j и соединяющиеся с ним Φ_0 -цепью. Таким образом, мы построили искомый набор при $s = S + 1$. По построению набор I_s^j обладает тем свойством, что множество

$$W_A = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^s-1} I_s^j$$

лежит во множестве $(I_d)^2$, причем к каждой точке $\mathbf{z} \in W_A$ стягивается бесконечная Φ_0 -цепь $\{\Delta_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (n_0 есть ранг квадрата I_0^0). Кроме того, множество W_A непусто и совершенно. Возьмем любую точку $\mathbf{z} \in W_A$ и $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность $\{\Delta_n\}$. Тогда для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_l

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{\Phi_0(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} - \varepsilon \leq 0 - \varepsilon = -\varepsilon < 0,$$

откуда согласно условию 1) теоремы 2 $W_A \subset W$. Но множество W не более чем счетно, а W_A – несчетно. Противоречие доказывает теорему в случае А.

Пусть имеет место случай В. Без ограничения общности считаем, что $k_1 = 1$, $u_1 = 0$. Пусть ранг квадрата I' равен n_1 . Рассмотрим любую бесконечную Φ_0 -цепь $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{\infty}$, начинающуюся с квадрата I' . По условию случая В в типе каждого квадрата из этой цепи на первом месте стоит нуль. Ясно, что в этом случае такая цепь стягивается к точке $\mathbf{z}_0 \in X$, где X есть левая четверть границы квадрата I' . Далее, пусть данная цепь дополнена до $(\mathbf{z}_0)$ -последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$. Тогда из условия случая В вытекает, что при $n \geq n_1 + 1$ двоичный куб $\Delta_{n-1,n} \setminus \Delta_{n,n}$ не является Φ_0 -правильным, т.е.

$$\Phi_0(\Delta_{n-1,n} \setminus \Delta_{n,n}) \geq 0. \quad (18)$$

На двоичных кубах $\Delta \subset \Delta'$ рассмотрим функцию

$$\Phi_2(\Delta) = \Phi_0(\Delta) + \Phi_1(\Delta), \quad \text{где } \Phi_1(\Delta) = \varepsilon_1 \text{mes}_1(\Delta \cap X).$$

Здесь $\text{mes}_1(\cdot)$ означает линейную меру множества, а $\varepsilon_1 > 0$ настолько мало, что $\Phi_2(\Delta') < 0$. Из геометрических соображений ясно, что функция Φ_1 аддитивна, следовательно, $\Phi_1, \Phi_2 \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$. Кроме того, для функций Φ_0 и Φ_1 выполнено условие (11), откуда следует, что и для функции Φ_2 выполняется это условие. Рассмотрим множество

$$W_B = \bigcap_{n=n_1}^{\infty} \bigcup_{J \subset \Delta'} J, \quad \text{где } J - \Phi_2\text{-правильный двоичный квадрат ранга } n.$$

К каждой точке множества $\mathbf{z} \in W_B$ стягивается Φ_2 -цепь $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{\infty}$. Поскольку $\Phi_0(\Delta) \leq \Phi_2(\Delta)$, то $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ — также Φ_0 -цепь. Как отмечалось выше, в этом случае $\mathbf{z} \in X$, откуда в силу произвольности $\mathbf{z} \in W_B$ $W_B \subset X$. Кроме того, функция Φ_2 удовлетворяет условию (11), поэтому в силу леммы А множество W_B содержит непустое совершенное подмножество. Так как $W_B \subset X$, а X есть левая часть границы двоичного квадрата, то, выкинув из множества W_B точки с двумя Q_d -координатами, получим несчетное множество $W'_B = W_B \cap (Q_d \times I_d)$.

Возьмем любую точку $\mathbf{z}_0 \in W'_B$ и покажем, что для нее не выполняется условие (16). К точке $\mathbf{z}_0$ стягивается Φ_2 -цепь $\{\Delta_n\}_{n=n_1}^{\infty}$. Пусть эта цепь дополнена до $(\mathbf{z}_0)$ -последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$. Поскольку $\Phi_2(\Delta) \geq \Phi_0(\Delta)$, то в силу (18) имеет место неравенство $\Phi_2(\Delta_{n-1,n} \setminus \Delta_{n,n}) \geq 0$, откуда с учетом неравенства $\Phi_2(\Delta_{n,n}) < 0$ получаем

$$\Phi_2(\Delta_n^1) - \Phi_2(\Delta_n^4) = \Phi_2(\Delta_{n,n}) - \Phi_2(\Delta_{n-1,n} \setminus \Delta_{n,n}) < 0. \quad (19)$$

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta_n^1) - \Phi(\Delta_n^4) &= [\Phi_2(\Delta_n^1) - \Phi_2(\Delta_n^4)] \\ &\quad - \varepsilon[|\Delta_n^1| - |\Delta_n^4|] - \varepsilon'[\text{mes}_1(\Delta_n^1 \cap X) - \text{mes}_1(\Delta_n^4 \cap X)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно (19) выражение в первых скобках в правой части (20) отрицательно. Выражение во вторых скобках, очевидно, равно нулю. Так как $\text{mes}_1(\Delta_n^1 \cap X) = 2^{-n}$, а $\text{mes}_1(\Delta_n^4 \cap X) = 0$, то выражение в третьих скобках равно 2^{-n} . Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}(\Phi(\Delta_n^1) - \Phi(\Delta_n^4)) \leq \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}(0 - 0 - \varepsilon'2^{-n}) = -\frac{\varepsilon'2^{-n}}{2^{-n}} = -\varepsilon' < 0,$$

т.е. в точке $\mathbf{z} \in W'_B$ не выполнено условие (16). Поэтому из условий теоремы в силу произвольности $\mathbf{z} \in W'_B$ вытекает, что $W'_B \subset W$. Но множество W не более чем счетно, а W'_B — несчетно. Противоречие доказывает теорему в случае В. Теорема доказана полностью.

Теорема 2 позволяет построить семейство интегралов перроновского типа, каждый из которых покрывает $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть множество $W \subset [0, 1]^2$ не более чем счетно, а в точках $\mathbf{z} \in (I_d)^2 \setminus W$ задана конечная функция $f(\mathbf{z})$. Пусть для каждой точки

$\mathbf{z} \in [0, 1]^2$ и каждой $(\mathbf{z})$ -последовательности задана возрастающая последовательность натуральных чисел n_l .

Скажем, что функция $f(\mathbf{z})$ является $(P(n_l))$ -интегрируемой на $[0, 1]^2$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся мажоранта $F_1 \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$ и миноранта $F_2 \in \underline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$ со следующими свойствами:

- 1) если $\mathbf{z} \in (I_d)^2 \setminus W$, то для $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$ и последовательности $n_l = n_l(\mathbf{z})$ выполнено равенство

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \geq f(\mathbf{z}) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|}; \quad (21)$$

- 2) если $\mathbf{z} \in (Q_d \times I_d) \setminus W$ (или $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$), то для любой $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$, для соответствующей последовательности n_l , а также функций F_1 и F_2 выполнено равенство (16) (или равенство (17)).
- 3) для каждой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^2$, для функций F_1 и F_2 и каждой $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$ выполнено равенство (11);
- 4) $F_1([0, 1]^2) - F_2([0, 1]^2) < \varepsilon$.

$(P(n_l))$ -интеграл от функции $f(\mathbf{z})$ по любому двоичному интервалу $\Delta \in \mathcal{B}_{1/2,d}$ определяется как

$$(P(n_l)) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

По аддитивности понятие $(P(n_l))$ -интеграла можно распространить на любой двоичный интервал.

В дальнейшем набор возрастающих последовательностей n_l из определения 9 будем называть *допустимым*.

ТЕОРЕМА 3. При любом допустимом наборе n_l и при любом $\rho \in (0, 1/2]$ $(P(n_l))$ -интеграл покрывает $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если при $\rho \in (0, 1/2]$ функции $F_1 \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{\rho,d}}$ и $F_2 \in \underline{A}_{\mathcal{B}_{\rho,d}}$ удовлетворяют определению $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла при некотором $\varepsilon > 0$, то они удовлетворяют и определению $(P(n_l))$ -интеграла при том же ε . Действительно, в этом случае $F_1 \in \overline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$, $F_2 \in \underline{A}_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$. Далее, из того, что $\underline{D}_{\mathcal{B}_{\rho,d}} F_1(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{z}) \geq \overline{D}_{\mathcal{B}_{\rho,d}} F_2(\mathbf{z})$, вытекает выполнение условия (21). Так как для функций F_1 и F_2 справедливы равенства (9) и (10), то для них справедливы равенства (16) и (17). Из указанных фактов вытекает справедливость теоремы.

Отметим, что определение $(P(n_l))$ -интеграла не дает ответа на вопрос, зависит ли значение $(P(n_l))$ -интеграла от выбора последовательностей n_l . Но если $f \in P_d^{\rho,*}$, то в силу теоремы 3 $f \in P(n_l)$ для любого допустимого набора n_l и

$$(P_d^{\rho,*}) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = (P(n_l)) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

§ 5. Непротиворечивость двух интегралов перроновского типа

В этом параграфе мы докажем непротиворечивость при всех $\rho \in (0, 1/2]$ $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла и $(H_{1/2,d})$ -интеграла. Мы используем семейство $(P(n_l))$ -интегралов, построенных в § 4. По теореме 3 $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл покрывается каждым интегралом из семейства $(P(n_l))$ -интегралов. Сейчас мы покажем, что семейство $(P(n_l))$ -интегралов покрывает в некотором смысле и $(H_{1/2,d})$ -интеграл.

ТЕОРЕМА 4. Пусть конечная функция $f(\mathbf{z})$ определена на $[0, 1]^2$, кроме, быть может, некоторого множества S меры нуль, на котором ее можно доопределить любыми конечными значениями (см. замечание 1). Если функция $f(\mathbf{z})$ является $(H_{1/2,d})$ -интегрируемой, то она является $(P(n_l))$ -интегрируемой для некоторого допустимого набора n_l , причем соответствующие интегралы совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$F(\Delta) = (H_{1/2,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

По теореме 1 вариационная мера $V_F^{1/2,d}$, порожденная функцией $F(\Delta)$, абсолютно непрерывна. Покажем, что $F(\Delta)$ – неопределенный $(P(n_l))$ -интеграл для некоторого допустимого набора n_l .

Рассмотрим всевозможные отрезки

$$\Lambda = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^2 : z_s = a \in Q_d\}. \quad (22)$$

Очевидно, имеется счетный набор таких отрезков, и мы можем их занумеровать, обозначив символами A_α , $\alpha = 1, 2, \dots$. Пусть $B_l = \bigcup_{\alpha=1}^l A_\alpha$. Очевидно, $B_l \subseteq B_{l+1}$ для всех l и

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} B_l = [0, 1]^2 \setminus (I_d)^2.$$

Все множества B_l имеют меру нуль. Воспользовавшись абсолютной непрерывностью вариационной меры $V_F^{1/2,d}$, индукционно построим последовательность $P_l = \{(\mathbf{z}_l^j, I_l^j)\}_{j=1}^{q_l}$ частичных разбиений квадрата $[0, 1]^2$, связанных с множествами B_l , а также числовую последовательность $\varepsilon_l > 0$. Потребуем, чтобы эти последовательности удовлетворяли следующим условиям:

- I) все I_l^j – двоичные квадраты;
- II) пусть s_l и t_l – минимальный и максимальный из рангов квадратов $\{I_l^j : j = 1, \dots, q_l\}$, тогда $t_{l+1} \geq s_{l+1} \geq t_l + 2$;
- III) последовательность $\varepsilon_l > 0$ такова, что $\varepsilon_1 = 1$, ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l$ сходится и

$$\sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha = o\left(\frac{1}{4^{t_l}}\right) \quad \text{при } l \rightarrow \infty; \quad (23)$$

- IV) пусть по последовательности $\varepsilon_l > 0$ выбраны функции $\delta_l(\mathbf{z}) : B_l \rightarrow (0, +\infty)$ так, как это делается в определении вариационной меры $V_F^{1/2,d}$ (см. определение 6), т.е. так, что для любого $(\delta_l(\mathbf{z}), 1/2)$ -согласованного разбиения

$P'_l = \{((\mathbf{z}_l^j)', (I_l^j)')\}_{j=1}^{q_l}$, связанного со множеством B_l , будет выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{q_l} |F((I_l^j)')| < \varepsilon_l; \quad (24)$$

тогда потребуем, чтобы для всякого $l = 1, 2, \dots$ разбиение P_l являлось $(\delta_l(\mathbf{z}), 1/2)$ -согласованным и связанным со множеством B_l ; в частности, разбиение P_l для всех l должно удовлетворять условию (24);

V) $B_l \subset (\bigcup_{j=1}^{q_l} I_l^j)^\circ$ для всех l ;

VI) любой отрезок Λ вида (22) с $a \notin \{0, 1\}$, лежащий в множестве B_l при некотором l , обладает тем свойством, что $\Lambda \cap (I_l^j)^\circ = \emptyset$ для всех $j = 1, \dots, q_l$ (т.е. Λ может пересекаться с I_l^j только по границе последнего).

Из построения сразу вытекает

ЛЕММА 3. Пусть последовательность разбиений $P_l = \{(\mathbf{z}_l^j, I_l^j)\}_{j=1}^{q_l}$ удовлетворяет условиям II), V) и VI). Тогда для любой точки $\mathbf{z} \in [0, 1]^2 \setminus (I_d)^2$ и любой $(\mathbf{z})$ -последовательности существует натуральное l_0 , обладающее следующим свойством: для любого $l \geq l_0$ найдется $j = j(l)$ такое, что двоичный квадрат I_l^j из разбиения P_l принадлежит этой последовательности. Таким образом, существует бесконечно много квадратов I_l^j , принадлежащих этой последовательности.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $E \subset [0, 1]^2$ – измеримое множество положительной меры. Введем функцию

$$T_E(\Delta) = \frac{\text{mes}(\Delta \cap E)}{\text{mes } E},$$

определенную для любого измеримого множества $\Delta \subset [0, 1]^2$. Очевидно, при фиксированном E функция $T_E(\Delta)$ счетно-аддитивна на классе измеримых множеств. Если же рассматривать функцию $T_E(\Delta)$ лишь для $\Delta \in \mathcal{B}_{1/2,d}$, то $T_E(\Delta) \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$. Очевидно, для всех измеримых множеств E и Δ

$$0 \leq T_E(\Delta) \leq 1. \quad (25)$$

Построим мажоранты и миноранты из определения $(P(n_l))$ -интеграла для функции $f(\mathbf{z})$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное l_1 настолько большим, что $\sum_{l=l_1}^{\infty} \varepsilon_l < \varepsilon/32$. Разобьем каждый двоичный квадрат I_l^j на четыре неперекрывающихся двоичных квадрата $\{I_l^{j,k}\}_{k=1}^4$ вдвое меньшего линейного размера. Пусть

$$A_{jl} = \max_{k=1, \dots, 4} F(I_l^{j,k}), \quad B_{jl} = \min_{k=1, \dots, 4} F(I_l^{j,k}).$$

Рассмотрим функции множеств

$$U(\Delta) = \sum_{l=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) T_{I_l^{j,k}}(\Delta), \quad (26)$$

$$V(\Delta) = \sum_{l=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (F(I_l^{j,k}) - B_{jl}) T_{I_l^{j,k}}(\Delta). \quad (27)$$

Докажем, что функции U и V определены корректно, т.е. ряды в правых частях формул (26), (27) сходятся (причем абсолютно, так как все слагаемые неотрицательны). Покажем это на примере функции U . Из определения A_{jl} и из (25) получаем

$$0 \leq (A_{jl} - F(I_l^{j,k}))T_{I_l^{j,k}}(\Delta) \leq A_{jl} - F(I_l^{j,k}) = F(I_l^{j,k_0(j,l)}) - F(I_l^{j,k}).$$

По лемме 2, примененной к функции F и к двоичным квадратам $I_l^{j,k_0(j,l)}$ и $I_l^{j,k}$, выражение, стоящее в правой части последней формулы, не превосходит суммы модулей значений функции F на не более чем восьми $1/2$ -регулярных двоичных интервалах из основной для точки $\mathbf{z}_l^j$ последовательности. Объединив все такие двоичные интервалы для всех $k = 1, \dots, 4$ и $j = 1, \dots, q_l$, получим объединение не более чем $4 \cdot 8 = 32$ частичных разбиений квадрата $[0, 1]^2$, связанных с множествами B_l и являющихся $(\delta_l(\mathbf{z}), 1/2)$ -согласованными. Применяя (24), получаем

$$\sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) < 32\varepsilon_l, \quad (28)$$

откуда

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k}))T_{I_l^{j,k}}(\Delta) \leq \sum_{l=l_1}^{\infty} 32\varepsilon_l < \varepsilon.$$

Таким образом, ряд в правой части формулы (26) сходится, и для всех измеримых множеств Δ выполнено неравенство

$$0 \leq U(\Delta) < \varepsilon. \quad (29)$$

Аналогично, для всех измеримых множеств Δ выполнено неравенство

$$0 \leq V(\Delta) < \varepsilon. \quad (30)$$

Заметим, что функции U и V конечно-аддитивны на классе измеримых множеств, в частности

$$U(\Delta), V(\Delta) \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}. \quad (31)$$

В условиях доказательства теоремы докажем ряд утверждений.

ЛЕММА 4. 1) Если Δ_1 и Δ_2 – неперекрывающиеся двоичные квадраты, то $T_{\Delta_2}(\Delta_1) = 0$;

2) если Δ_2 – двоичный квадрат, то для любого набора $\{\Delta^i : i = 1, \dots, 2k\}$ попарно неперекрывающихся двоичных квадратов одного ранга, лежащих в Δ_2 , выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} T_{\Delta_2}(\Delta^i) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение части 1) леммы сразу вытекает из определения функции T . Для доказательства части 2) получим с учетом того, что

$\Delta^i \subset \Delta_2$ для всех $i = 1, \dots, 2k$,

$$T_{\Delta_2}(\Delta^i) = \frac{\text{mes}(\Delta^i \cap \Delta_2)}{\text{mes } \Delta_2} = \frac{\text{mes } \Delta^i}{\text{mes } \Delta_2},$$

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} T_{\Delta_2}(\Delta^i) = \frac{1}{\text{mes } \Delta_2} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i-1} \text{mes } \Delta^i = 0,$$

что и доказывает часть 2) леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $W \subset [0, 1]^2$ – некоторое счетное множество, $\mathbf{z} \in (Q_d \times I_d) \setminus W$ (или $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$), а $\{\Delta_n\}$ – любая из $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательностей. Тогда существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $n_l = n_l(\mathbf{z}, \{\Delta_n\})$, что для этой последовательности и для функций $F(\Delta) + U(\Delta)$, $F(\Delta) - V(\Delta)$ выполнено равенство (16) (или равенство (17)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$, и рассмотрим функцию $F + U$ (остальные случаи доказываются аналогично). По лемме 3 существует последовательность двоичных квадратов $\{I_l^{j(l)}\}_{l \geq l_1}$ (каждый из квадратов $I_l^{j(l)}$ берется из разбиения P_l), любой из которых принадлежит $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательности $\{\Delta_n\}$. Положим $n_l = (\text{ранг квадрата } I_l^{j(l)}) + 1$. Тогда $I_l^{j(l)} = \Delta_{n_l-1}$. Зафиксируем $l > \max\{l_0, l_1\}$. Двоичные квадраты $\Delta^s \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{n_l, n_l}^s$ ($s = 1, 2$, нумерация квадратов соответствует условиям (4)) лежат в квадрате $I_l^{j(l)}$. Запишем разность, фигурирующую в формуле (17), для функции $\Phi = F + U$:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} (F(\Delta^s) + U(\Delta^s)) \\ &= \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \left(F(\Delta^s) + \sum_{\alpha=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) T_{I_\alpha^{j,k}}(\Delta^s) \right) \\ &= \sum_{\alpha=l_1}^{l-1} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}} \\ & \quad + \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \left(F(\Delta^s) + (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_l^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_l^{j,k}} \right) \\ & \quad + \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}}. \quad (32) \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть (32). Если для некоторых α, j, k, s квадраты $I_\alpha^{j,k}$ и Δ^s не перекрываются, то согласно части 1) леммы 4

$$\frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}} = 0.$$

Поэтому достаточно рассмотреть α, j, k и s такие, что квадраты $I_\alpha^{j,k}$ и Δ^s перекрываются.

Пусть $\alpha \leq l - 1$ и квадрат $I_\alpha^{j,k}$ перекрывается с квадратом Δ^s . Тогда по построению (см. условие II)) квадрат $I_\alpha^{j,k}$ покрывает квадрат $I_l^{j(l)}$, а значит, и оба квадрата Δ^s ($s = 1, 2$). Отсюда в силу части 2) леммы 4 получаем, что первое из трех слагаемых в правой части (32) равно нулю.

Пусть $\alpha = l$ и двоичные квадраты $I_l^{j,k}$ и Δ^s перекрываются. Тогда $j = j(l)$, $I_l^{j(l)} = \bigcup_{k=1}^4 I_l^{j,k}$ и каждый из квадратов Δ^s совпадает с квадратом $I_l^{j,k(s)}$ для некоторого $k(s)$. Тогда

$$\frac{\text{mes}(I_l^{j,k(s)} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_l^{j,k}} = 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \left(F(\Delta^s) + (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_l^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_l^{j,k}} \right) \\ &= \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} (F(\Delta^s) + (A_{jl} - F(I_l^{j,k(s)}))) \\ &= \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} (F(\Delta^s) + (A_{jl} - F(\Delta^s))) = \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} A_{jl} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (32) равно нулю.

Рассмотрим третье слагаемое в правой части (32). Так как

$$\frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}} \leq 1,$$

то, используя (28), получим, что для любого измеримого множества Δ имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}} \\ &\leq \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) < 32 \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

Применяя (33), оценим третье слагаемое в правой части (32):

$$\left| \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} \sum_{k=1}^4 (A_{j\alpha} - F(I_\alpha^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_\alpha^{j,k} \cap \Delta^s)}{\text{mes } I_\alpha^{j,k}} \right| \leq 64 \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha.$$

Учитывая оценки трех слагаемых в правой части (32), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} (F(\Delta^s) + U(\Delta^s)) \right| \leq 0 + 0 + 64 \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha \\ & \stackrel{\text{из (23)}}{=} 64 o(4^{-tl}) = o(|\Delta^s|) = o(\sqrt{|\Delta^s|}) = o(\sqrt{|\Delta_{n_l}|}) \quad \text{при } l \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 6. *Функции $U(\Delta)$ и $V(\Delta)$ являются равномерно непрерывными как функции двоичного квадрата. Это означает, что справедливы соотношения*

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} U(\Delta) = 0, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} V(\Delta) = 0, \quad (34)$$

где Δ – двоичный квадрат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для функции $U(\Delta)$ (для функции $V(\Delta)$ все аналогично). Выберем произвольное $\varepsilon' > 0$. Пусть натуральные $l_2 > l_1$ и $n_0 > t_{l_2}$ настолько велики, что

$$32 \sum_{\alpha=l_2+1}^{\infty} \varepsilon_{\alpha} < \varepsilon', \quad (35)$$

$$2^{t_{l_2}-n_0} 32 \sum_{l=l_1}^{l_2} \varepsilon_l < \varepsilon'. \quad (36)$$

Возьмем любой двоичный квадрат Δ ранга большего чем n_0 . Тогда

$$\begin{aligned} U(\Delta) &= \sum_{l=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) T_{I_l^{j,k}}(\Delta) \\ &= \sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_l^{j,k} \cap \Delta)}{\text{mes } I_l^{j,k}} \\ &\quad + \sum_{l=l_2+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) T_{I_l^{j,k}}(\Delta). \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим оба слагаемых в правой части (37). Отметим, что при фиксированном $l \leq l_2$ двоичный квадрат Δ , имеющий ранг $n_0 > t_{l_2}$, перекрывается не более чем с одним из квадратов $I_l^{j,k}$, $j = 1, \dots, q_l$, $k = 1, \dots, 4$. Тогда для такого квадрата $I_l^{j,k}$ и для квадрата Δ выполнены соотношения

$$\frac{\text{mes}(I_l^{j,k} \cap \Delta)}{\text{mes } I_l^{j,k}} = \frac{\text{mes } \Delta}{\text{mes } I_l^{j,k}} \leq \frac{2^{-n_0}}{2^{-t_{l_2}}} = 2^{t_{l_2}-n_0},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) \frac{\text{mes}(I_l^{j,k} \cap \Delta)}{\text{mes } I_l^{j,k}} &\leq 2^{t_{l_2}-n_0} \sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) \\ &\stackrel{\text{из (28)}}{\leq} 2^{t_{l_2}-n_0} 32 \sum_{l=l_1}^{l_2} \varepsilon_l \stackrel{\text{из (36)}}{<} \varepsilon', \end{aligned} \quad (38)$$

и мы получили оценку первого слагаемого правой части (37). Второе слагаемое оценивается при помощи (33) и (35):

$$\sum_{l=l_2+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} \sum_{k=1}^4 (A_{jl} - F(I_l^{j,k})) T_{I_l^{j,k}}(\Delta) \leq 32 \sum_{\alpha=l_2+1}^{\infty} \varepsilon_{\alpha} < \varepsilon'. \quad (39)$$

Объединяя (37), (38) и (39), получаем неравенство $0 \leq U(\Delta) < 2\varepsilon'$, которое доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы 4. Из соотношений (34) и лемм 1, 2 вытекает, что функции $U(\Delta)$, $V(\Delta)$ и $F(\Delta)$ удовлетворяют условию (11). Функции $F(\Delta) + U(\Delta)$ и $F(\Delta) - V(\Delta)$ уже обладают рядом свойств мажоранты и миноранты для $(P(n_l))$ -интеграла: для них выполняются условия (11), (16) и (17). Остается добиться выполнения равенства (21). Для этого мы “исправим” данные функции, добиваясь, чтобы они продолжали удовлетворять условиям (11), (16) и (17).

Рассмотрим еще раз функцию

$$F(\Delta) = (H_{1/2,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

По теореме A п.в. на $[0, 1]^2$ справедливо равенство

$$D_{\mathcal{B}_{1/2,d}} F(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}). \quad (40)$$

Пусть K – множество точек из $(I_d)^2$, для которых не выполняется равенство (40). Рассмотрим построенную в начале доказательства теоремы последовательность разбиений $P_l = \{(\mathbf{z}_l^j, I_l^j)\}_{j=1}^{q_l}$. Пусть C_l обозначает $\bigcup_{j=1}^{q_l} I_l^j$. Пусть $\tilde{K}$ обозначает множество точек $\mathbf{z} \in K$, принадлежащих C_l для бесконечного множества значений l . Рассмотрим множества

$$K_l = \left\{ \mathbf{z} \in K : \mathbf{z} \notin \bigcup_{n \geq l} C_n \right\}.$$

Очевидно,

$$K_l \subseteq K_{l+1} \quad \text{для всех } l, \quad K = \tilde{K} \cup \left(\bigcup_l K_l \right).$$

Рассмотрим выбранные в ходе доказательства теоремы $\varepsilon > 0$ и последовательность $\varepsilon_l > 0$. Пусть натуральное l_3 настолько велико, что $\sum_{l=l_3}^{\infty} \varepsilon_l < \varepsilon$. Для всех $l \geq l_3$ индукционно построим функции $\tilde{\delta}_l(\mathbf{z}) > 0$, определенные на множестве K , и систему двоичных квадратов $\{J_l^i\}$, $l = l_3, l_3 + 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, обладающие следующими свойствами.

Во-первых, пусть функция $\tilde{\delta}_l(\mathbf{z})$ такова, что для любого $(\tilde{\delta}_l(\mathbf{z}), 1/2)$ -согласованного разбиения $P_l = \{(\mathbf{z}_l^i, J_l^i)\}_{i=1}^N$, связанного с множеством K_l , выполнено неравенство (24). Это возможно, так как вариационная мера $V_F^{1/2,d}$ абсолютно непрерывна и $\text{mes } K_l = 0$ для всех l . Далее, при всех l для каждой точки $\mathbf{z} \in K_l$ отметим двоичный квадрат $\Delta(l, \mathbf{z})$, для которого выполнены включения $\mathbf{z} \in \Delta(l, \mathbf{z}) \subset B(\mathbf{z}, \tilde{\delta}_l(\mathbf{z}))$. Потребуем, чтобы $\Delta(l, \mathbf{z}) \cap C_l = \emptyset$. Это возможно, так как множество C_l замкнуто и $K_l \cap C_l = \emptyset$. Потребуем также, чтобы при $\mathbf{z} \in K_{l-1}$ квадрат $\Delta(l, \mathbf{z})$ строго лежал в одном из квадратов вида J_{l-1}^i . Выкинув из набора $\{\Delta(l, \mathbf{z})\}$ двоичные квадраты, лежащие в других двоичных квадратах из этого набора, получим для заданного l набор $\{J_l^i\}$.

Отметим, что для любого $l \geq l_3$ квадраты J_l^i , $i = 1, 2, \dots$, попарно не перекрываются и их объединение покрывает множество K_l . Далее, для любого $l \geq l_3$ и любого натурального N система квадратов $\{J_l^i\}_{i=1}^N$ образует $(\tilde{\delta}_l(\mathbf{z}), 1/2)$ -согласованное разбиение, связанное с множеством K_l . Это означает, в частности, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^N |F(J_l^i)| < \varepsilon_l, \quad \text{откуда} \quad \sum_i |F(J_l^i)| \leq \varepsilon_l.$$

Кроме того, для любого $l \geq l_3$ множество $\bigcup_i J_l^i$ не пересекается с множеством $\bigcup_{j=1}^{q_l} I_l^j$, построенным в начале теоремы. Далее,

(*) любая точка $\mathbf{z} \in K_{l_0}$ покрыта бесконечным числом квадратов $J_l^{i(l)}$, $l \geq l_0$.

Построим функцию множества $\gamma_1(\Delta)$ по формуле

$$\gamma_1(\Delta) = \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} |F(I_l^j)| T_{I_l^j}(\Delta) + \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta), \quad (41)$$

где, как и ранее, $T_E(\Delta) = \text{mes}(E \cap \Delta) / \text{mes } E$. Отметим, что ряды в правой части (41) знакоположительные и

$$\begin{aligned} & \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} |F(I_l^j)| T_{J_l^i}(\Delta) + \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) \\ & \leq \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} |F(I_l^j)| + \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| \leq 2 \sum_{l=l_3}^{\infty} \varepsilon_l < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. эти ряды сходятся, функция γ_1 определена корректно и для любого измеримого множества Δ выполнено условие

$$0 \leq \gamma_1(\Delta) < 2\varepsilon. \quad (42)$$

Отметим также, что функция γ_1 конечно-аддитивна на классе измеримых множеств, в частности,

$$\gamma_1(\Delta) \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}. \quad (43)$$

В рамках доказательства теоремы докажем следующие леммы.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathbf{z} \in K$, а $\{\Delta_n\}$ — $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность. Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_l такая, что для функций $F(\Delta) \pm \gamma_1(\Delta)$ выполнены неравенства

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(F + \gamma_1)(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \geq 0 \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{(F - \gamma_1)(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем левое неравенство в формуле (44) (правое доказывается аналогично). Зафиксируем точку $\mathbf{z} \in K$. Возможны два случая.

Пусть $\mathbf{z} \in \tilde{K}$. Тогда для всех $l > \max\{l_1, l_3\}$ $\mathbf{z} \in I_l^{j(\mathbf{z}, l)}$ при некотором $j(\mathbf{z}, l)$. Положим $\Delta_{n_l} = I_l^{j(\mathbf{z}, l)}$. Зафиксируем произвольное $l > l_3$. Имеем

$$(F + \gamma_1)(\Delta_{n_l}) = (F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) + |F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)})|T_{I_l^{j(\mathbf{z}, l)}}(I_l^{j(\mathbf{z}, l)})) + \sum_{I_\alpha^j \neq I_l^{j(\mathbf{z}, l)}} |F(I_\alpha^j)|T_{I_\alpha^j}(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) + \sum_{\alpha=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_\alpha^i)|T_{J_\alpha^i}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}). \quad (45)$$

Рассмотрим правую часть (45). Так как по определению функции $T_E(\Delta)$ справедливо равенство

$$T_{I_l^{j(\mathbf{z}, l)}}(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) = 1,$$

то

$$F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) + |F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)})|T_{I_l^{j(\mathbf{z}, l)}}(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) = F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)}) + |F(I_l^{j(\mathbf{z}, l)})| \geq 0.$$

Из определения функции $T_E(\Delta)$ вытекает, что второе и третье слагаемые также неотрицательны. Следовательно, выполнено неравенство $(F + \gamma_1)(\Delta_{n_l}) \geq 0$, и для таких точек $\mathbf{z}$ получаем утверждение леммы.

Во втором случае $\mathbf{z} \in K_{l_4}$ для некоторого натурального l_4 . Тогда согласно (*) для всех $l > \max\{l_1, l_3, l_4\}$ $\mathbf{z} \in J_l^{i(\mathbf{z}, l)}$ при некотором $i(\mathbf{z}, l)$. Положим $\Delta_{n_l} = J_l^{i(\mathbf{z}, l)}$. Тогда

$$(F + \gamma_1)(\Delta_{n_l}) = (F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) + |F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)})|T_{J_l^{i(\mathbf{z}, l)}}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)})) + \sum_{J_\alpha^i \neq J_l^{i(\mathbf{z}, l)}} |F(J_\alpha^i)|T_{J_\alpha^i}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) + \sum_{\alpha=l_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_l} |F(I_\alpha^j)|T_{I_\alpha^j}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}). \quad (46)$$

Рассмотрим правую часть (46). Так как $T_{J_l^{i(\mathbf{z}, l)}}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) = 1$, то

$$F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) + |F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)})|T_{J_l^{i(\mathbf{z}, l)}}(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) = F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)}) + |F(J_l^{i(\mathbf{z}, l)})| \geq 0,$$

т.е. первое слагаемое в правой части (46) неотрицательно. Из определения функции $T_E(\Delta)$ вытекает, что второе и третье слагаемые также неотрицательны. Следовательно, $(F + \gamma_1)(\Delta_{n_l}) \geq 0$, и для таких точек $\mathbf{z}$ получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathbf{z} \in (Q_d \times I_d)$ (или $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d)$), а $\{\Delta_n\}$ – любая $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность. Тогда для последовательности n_l , выбранной в лемме 5, для последовательности $\{\Delta_n\}$ и функции γ_1 выполняется равенство (16) (или равенство (17)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d) \setminus W$ (второй случай доказывается аналогично). Зафиксируем точку $\mathbf{z} \in (I_d \times Q_d)$ и $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность $\{\Delta_n\}$. По лемме 3 существует последовательность двоичных квадратов $\{I_l^{j(l)}\}_{l \geq l_1}$ (каждый из квадратов $I_l^{j(l)}$ берется из разбиения P_l), любой из которых принадлежит последовательности $\{\Delta_n\}$. Положим, как и в лемме 5, $n_l = (\text{ранг квадрата } I_l^{j(l)}) + 1$. Тогда $I_l^{j(l)} = \Delta_{n_l-1}$. Двоичные квадраты

$\Delta^s \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{n_l}^s$, $s = 1, 2$, лежат в квадрате $I_l^{j(l)}$. Рассмотрим выражение под знаком суммы в формуле (16) для функции $\gamma_1(\Delta)$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \gamma_1(\Delta^s) \\
 &= \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \sum_{\alpha=l_3}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} |F(I_\alpha^j)| T_{I_\alpha^j}(\Delta^s) + \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \sum_{\alpha=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_\alpha^i)| T_{J_\alpha^i}(\Delta^s) \\
 &= \sum_{\alpha=l_3}^l \sum_{j=1}^{q_\alpha} |F(I_\alpha^j)| \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} T_{I_\alpha^j}(\Delta^s) + \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} \sum_{\alpha=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_\alpha} |F(I_\alpha^j)| T_{I_\alpha^j}(\Delta^s) \\
 & \quad + \sum_{\alpha=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_\alpha^i)| \sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} T_{J_\alpha^i}(\Delta^s). \tag{47}
 \end{aligned}$$

Оценим три слагаемых в правой части (47). При $\alpha \leq l$ и любом $j = 1, \dots, q_\alpha$ имеем $\bigcup_{s=1,2} \Delta^s \subset I_\alpha^j$. Согласно части 2) леммы 4

$$\sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} T_{I_\alpha^j}(\Delta^s) = 0,$$

откуда первое слагаемое в правой части (47) равно нулю. Дословно повторяя рассуждения леммы 5, можно показать, что второе слагаемое есть $o(1/4^{l_l}) = o(|\Delta^s|)$. Для оценки третьего слагаемого в правой части (47) заметим, что любой двоичный квадрат J_α^i не лежит ни в одном двоичном квадрате Δ^s , так как по построению $J_\alpha^i \cap C_l = \emptyset$, а $\Delta^s \subset C_l$. Тогда либо эти двоичные квадраты не перекрываются, либо $\bigcup_{s=1,2} \Delta^s \subseteq J_\alpha^i$. Как показано в лемме 4, в обоих случаях

$$\sum_{s=1,2} (-1)^{s-1} T_{J_\alpha^i}(\Delta^s) = 0,$$

откуда следует, что третье слагаемое в правой части (47) равно нулю. Таким образом, правая, а значит, и левая часть (47) есть $o(|\Delta^s|) = o(\sqrt{|\Delta^s|})$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 9. *Функция $\gamma_1(\Delta)$ является равномерно непрерывной как функция двоичного квадрата, т.е. имеет место равенство*

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \gamma_1(\Delta) = 0, \quad \text{где } \Delta - \text{двоичный квадрат.} \tag{48}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию γ_1 , определенную формулой (41). Дословно повторяя рассуждения из леммы 6, можно доказать, что первое слагаемое в правой части (41) равномерно непрерывно. Для оценки второго слагаемого в (41) выберем произвольное $\varepsilon' > 0$. Пусть натуральное $l_5 > l_3$ настолько велико, что

$$\sum_{\alpha=l_5+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha < \varepsilon'. \tag{49}$$

Выберем натуральное i_0 настолько большим, что для всех $l = l_3, \dots, l_5$ имеет место неравенство

$$\sum_{i > i_0} |F(J_l^i)| < \frac{\varepsilon'}{l_5 - l_3 + 1}. \quad (50)$$

Возьмем натуральное n_0 таким, что

$$2^{t-n_0} \sum_{l=l_3}^{l_5} \varepsilon_l < \varepsilon', \quad (51)$$

где t – максимальный из рангов квадратов J_l^i при $l = l_3, \dots, l_5$ и $i \leq i_0$.

Рассмотрим произвольный двоичный квадрат Δ ранга большего, чем n_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) &= \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i \leq i_0} |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) \\ &+ \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i > i_0} |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) + \sum_{l=l_5+1}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta). \end{aligned} \quad (52)$$

Оценим все три слагаемых в правой части (52). Отметим, что при $l \leq l_5$ и фиксированном i двоичный квадрат Δ перекрывается не более чем с одним из квадратов J_l^i . Тогда для такого квадрата J_l^i и квадрата Δ выполнено соотношение

$$T_{J_l^i}(\Delta) = \frac{\text{mes}(J_l^i \cap \Delta)}{\text{mes } J_l^i} = \frac{\text{mes } \Delta}{\text{mes } J_l^i} \leq \frac{2^{-n_0}}{2^{-t}} = 2^{t-n_0},$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i \leq i_0} |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) \leq 2^{t-n_0} \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i \leq i_0} |F(J_l^i)| \\ &\leq 2^{t-n_0} \sum_{l=l_3}^{l_5} \varepsilon_l \stackrel{\text{по (51)}}{<} \varepsilon'. \end{aligned} \quad (53)$$

Второе слагаемое из (52) оценивается так:

$$0 \leq \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i > i_0} |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) \leq \sum_{l=l_3}^{l_5} \sum_{i > i_0} |F(J_l^i)| \stackrel{\text{по (50)}}{<} \varepsilon'. \quad (54)$$

Оценим третье слагаемое в (52):

$$0 \leq \sum_{l=l_5+1}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) \leq \sum_{l=l_5+1}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| < \sum_{l=l_5+1}^{\infty} \varepsilon_l \stackrel{\text{по (49)}}{<} \varepsilon'. \quad (55)$$

Объединяя выражения (52)–(55), получаем

$$0 \leq \sum_{l=l_3}^{\infty} \sum_i |F(J_l^i)| T_{J_l^i}(\Delta) < 3\varepsilon',$$

что доказывает лемму.

Следующая лемма обобщает известный результат о производных функций (см. [20; гл. 8, § 2]).

ЛЕММА 10. Пусть $E \subset [0, 1]^2$ – множество нулевой меры. Тогда для произвольного $\varepsilon'' > 0$ существует функция множества $\gamma_2(\Delta) \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$, для которой выполнены следующие условия:

- 1) $0 \leq \gamma_2(\Delta) < \varepsilon''$ для любого измеримого множества Δ ;
- 2) $D_{\mathcal{B}_{1,d}}\gamma_2(\mathbf{z}) = +\infty$ для любой точки $\mathbf{z} \in E$;
- 3) для любого $\beta > 0$ $\gamma_2(\Delta) = o(|\Delta|^{1-\beta})$ при $|\Delta| \rightarrow 0$, Δ – двоичный квадрат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим открытые множества G_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что $G_k \supset E$ и $\text{mes } G_k < \varepsilon''/2^k$. Положим $\gamma_2(\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}(\Delta \cap G_k)$. Очевидно, что для функции γ_2 выполнено условие 1). Кроме того, $\gamma_2 \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$.

Зафиксируем точку $\mathbf{z} \in E$. Возьмем любую $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность $\{\Delta_n\}$ и произвольное натуральное K . Тогда для достаточно больших n выполнены включения $\Delta_n \subset G_k$ при $k = 1, \dots, K$. Отсюда $\gamma_2(\Delta_n) \geq K|\Delta_n|$, следовательно, $\gamma_2(\Delta_n)/|\Delta_n| \geq K$. Значит, $D_{\mathcal{B}_{1,d}}\gamma_2(\mathbf{z}) \geq K$. В силу произвольности K справедливо равенство $D_{\mathcal{B}_{s,1,d}}\gamma_2(\mathbf{z}) = +\infty$, т.е. выполнено условие 2).

Возьмем произвольные $\beta > 0$ и двоичный квадрат Δ_n ранга n . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_2(\Delta_n) &= \sum_{k=1}^{2n} \text{mes}(\Delta_n \cap G_k) + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \text{mes}(\Delta_n \cap G_k) \\ &\leq 2n \text{mes } \Delta_n + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \text{mes } G_k \\ &< \frac{2n}{4^n} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon''}{2^k} = \frac{2n + \varepsilon''}{4^n} = o(|\Delta_n|^{1-\beta}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда следует условие 3). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. Применив лемму 10, построим функцию $\gamma_2(\Delta)$, взяв в качестве множества E множество точек, для которых не выполняется условие (40), а в качестве ε'' – уже выбранное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функции $F_1(\Delta) = (F + U + \gamma_1 + \gamma_2)(\Delta)$ и $F_2(\Delta) = (F - V - \gamma_1 - \gamma_2)(\Delta)$. Покажем, что эти функции есть соответственно мажоранта и миноранта из определения $(P(n_l))$ -интеграла.

В силу аддитивности функций F, U, V, γ_1 и γ_2 (см., в частности, (31) и (43)) $F_1, F_2 \in A_{\mathcal{B}_{1/2,d}}$. Далее, пусть $\mathbf{z} \in (I_d)^2$ и $\{\Delta_n\}$ – $(\mathbf{z}, \square)$ -последовательность. Пусть для точки $\mathbf{z}$ выполнено равенство (40). Тогда, используя неотрицательность функций U, γ_1 и γ_2 , для любой последовательности n_l получим

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{U(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma_2(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \\ &\geq f(\mathbf{z}) + 0 + 0 + 0 = f(\mathbf{z}). \end{aligned} \tag{56}$$

Если же для точки $\mathbf{z}$ не выполняется равенство (40), то, используя неравенства (44), условие 2) леммы 10 и неотрицательность функции $U(\Delta)$, получим,

что для выбранной в ходе доказательства теоремы последовательности n_l

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(F+U)(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\gamma_2(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \\ &\geq 0 + 0 + \infty = +\infty \geq f(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (57)$$

Из (56) и (57) вытекает, что для всех $\mathbf{z} \in (I_d)^2$ существует последовательность $n_l = n_l(\mathbf{z})$, для которой выполнено неравенство

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_1(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|} \geq f(\mathbf{z}). \quad (58)$$

Аналогично, для всех $\mathbf{z} \in (I_d)^2$ и той же последовательности n_l выполнено неравенство

$$f(\mathbf{z}) \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_2(\Delta_{n_l})}{|\Delta_{n_l}|}. \quad (59)$$

Формулы (58), (59) означают выполнение свойства 1) из определения $(P(n_l))$ -интеграла.

В силу лемм 5 и 9 функции $F+U$, $F-V$ и γ_1 удовлетворяют условиям (16) и (17) для некоторого допустимого набора n_l . В силу леммы 10 функция γ_2 удовлетворяет этим же условиям для любого набора n_l . Следовательно, формулы (16) и (17), т.е. свойство 2) из определения $(P(n_l))$ -интеграла, выполнены и для функций F_1 и F_2 .

Из утверждений лемм 1, 2 и 10, а также из (34), (48) следует, что для функций F , U , V , γ_1 и γ_2 справедливо равенство (11). Значит, оно имеет место и для функций F_1 и F_2 . Таким образом, свойство 3) из определения $(P(n_l))$ -интеграла выполнено. Наконец, в силу (29), (30), (42) и (56) для любого двоичного интервала Δ имеют место неравенства

$$F_1(\Delta) - F_2(\Delta) = U(\Delta) + V(\Delta) + 2\gamma_1(\Delta) + 2\gamma_2(\Delta) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + 6\varepsilon + 2\varepsilon = 12\varepsilon,$$

откуда следует выполнение свойства 4) из определения $(P(n_l))$ -интеграла. Значит, функция $f(\mathbf{z})$ является $(P(n_l))$ -интегрируемой. Заметив, что

$$\begin{aligned} (P(n_l)) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} &= \inf_{F_1} F_1(\Delta) \leq \inf_{U, \gamma_1, \gamma_2} (F+U+\gamma_1+\gamma_2)(\Delta) \\ &= F(\Delta) = (H_{1/2,d}) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = F(\Delta) \\ &= \sup_{V, \gamma_1, \gamma_2} (F-V-\gamma_1-\gamma_2)(\Delta) \leq \sup_{F_2} F_2(\Delta) \\ &= (P(n_l)) \int_{\Delta} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \end{aligned}$$

получим, что $(P(n_l))$ -интеграл и $(H_{1/2,d})$ -интеграл от функции $f(\mathbf{z})$ совпадают. Теорема доказана.

Отметим, что для $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$ выполнено включение $P_{\rho_1} \subset P_{\rho_2}$, причем оно строгое (см. [16]). Из этого факта, из включения (3) и теоремы A следует, что при $\rho \in (0, 1/2]$ справедливы включения

$$P_{\rho} \subset P_{1/2} \subset P_{1/2,d} = H_{1/2,d}. \quad (60)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\rho \in (0, 1/2]$. Тогда непротиворечивыми будут являться $(H_{1/2,d})$ -интеграл и $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл, а также ρ -регулярный интеграл Перрона и $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(\mathbf{z})$ является одновременно $(P_d^{\rho,*})$ - и $(H_{1/2,d})$ -интегрируемой. По теореме 4 $(H_{1/2,d})$ -интеграл от функции $f(\mathbf{z})$ совпадает с $(P(n_l))$ -интегралом от этой же функции для некоторого допустимого набора n_l . С другой стороны, по теореме 3 при любом допустимом наборе n_l $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл и $(P(n_l))$ -интеграл от функции $f(\mathbf{z})$ совпадают. Тогда $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл и $(H_{1/2,d})$ -интеграл от данной функции $f(\mathbf{z})$ совпадают. Непротиворечивость $(H_{1/2,d})$ - и $(P_d^{\rho,*})$ -интегралов доказана. Из этого факта и из (60) вытекает непротиворечивость ρ -регулярного интеграла Перрона и $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла.

§ 6. Теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара

Здесь представлены результаты, относящиеся к теории единственности двойных рядов Хаара.

ТЕОРЕМА 6. Пусть заданы $\rho \in (0, 1/2]$ и не более чем счетное множество $W \subset [0, 1]^2$. Предположим, что ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ удовлетворяет одному из условий (12) или (13). Пусть во всех точках множества $(I_d)^2 \setminus W$ данный ряд сходится ρ -регулярно или по прямоугольникам к конечной функции $f(\mathbf{z})$, интегрируемой либо по Перрону в ρ -регулярном смысле, либо в смысле $(H_{1/2,d})$ -интеграла, а во всех точках $\mathbf{z} \in [0, 1]^2 \setminus W$, имеющих ровно одну Q_d -координату, для данного ряда выполняется условие (14). Тогда ряд (1) является рядом Фурье-Перрона (Фурье-Хенстока) функции $f(\mathbf{z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия теоремы. По теореме C функция $f(\mathbf{z})$ является $(P_d^{\rho,*})$ -интегрируемой и для всех n, m верно равенство

$$a_{n,m} = (P_d^{\rho,*}) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) \chi_{n,m}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (61)$$

Пусть функция $f(\mathbf{z})$, а значит, и функция $f(\mathbf{z}) \chi_{n,m}(\mathbf{z})$ являются также и $(H_{1/2,d})$ -интегрируемыми. По теореме 5

$$(P_d^{\rho,*}) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) \chi_{n,m}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = (H_{1/2,d}) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) \chi_{n,m}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (62)$$

Из равенств (61), (62) получаем

$$a_{n,m} = (H_{1/2,d}) \int_{[0,1]^2} f(\mathbf{z}) \chi_{n,m}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (63)$$

откуда для функций $f \in H_{1/2,d}$ следует утверждение теоремы. Для функций $f \in P_\rho$ утверждение теоремы следует из (60) и (63).

Из теоремы 6 вытекает

ТЕОРЕМА 7. Пусть при $\rho \in (0, 1/2]$ ряд (1) всюду на $[0, 1]^2$ сходится по прямоугольникам или ρ -регулярно к конечной функции $f(\mathbf{z})$, интегрируемой либо по Перрону в ρ -регулярном смысле, либо в смысле $(H_{1/2,d})$ -интеграла. Тогда данный ряд есть ряд Фурье–Перрона (Фурье–Хенстока) функции $f(\mathbf{z})$.

Список литературы

- [1] P. du Bois-Reymond, “Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum (a_p \cos px + b_p \sin px)$ die Werthe $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha)$, $a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha$, $b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$, haben, jedesmal, wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind”, *Munch. Abh.*, **XII**:1 (1876), 117–166.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II, Pergamon Press, Oxford–London–New York–Paris–Frankfurt, 1964.
- [3] В. А. Скворцов, “О множествах единственности для многомерных рядов Хаара”, *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 789–798; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “Uniqueness sets for multiple Haar series”, *Math. Notes*, **14**:6 (1973), 1011–1016.
- [4] В. А. Скворцов, “Об одной теореме единственности для многомерного ряда Хаара”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **23**:3 (1988), 293–296; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “On a uniqueness theorem for a multidimensional Haar series”, *Soviet J. Contemporary Math. Anal.*, **23**:3 (1988), 104–108.
- [5] В. А. Скворцов, А. А. Талалян, “Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113; англ. пер.: V. A. Skvortsov, A. A. Talalyan, “Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series”, *Math. Notes*, **46**:2 (1989), 646–653.
- [6] М. Г. Плотников, “Вопросы единственности для кратных рядов Хаара”, *Матем. сб.*, **196**:2 (2005), 97–116; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Uniqueness for multiple Haar series”, *Sb. Math.*, **196**:2 (2005), 243–261.
- [7] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
- [8] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд. 2, Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [9] K. M. Ostaszewski, “Henstock integration in the plane”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **63**:353 (1986).
- [10] Л. В. Линьков, “Эквивалентность различных определений двоичного регулярного интеграла на плоскости”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2000, № 5, 50–53; англ. пер.: L. V. Lin'kov, “Equivalence of two definitions of a double regular integral on the plane”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **55**:5 (2000), 28–31.
- [11] L. Di Piazza, “Variational measures in the theory of the integration in $\mathbb{R}^m$ ”, *Czechoslovak Math. J.*, **51**:1 (2001), 95–110.
- [12] B. Bongiorno, L. Di Piazza, V. Skvortsov, “A new full descriptive characterization of Denjoy–Perron integral”, *Real Anal. Exchange*, **21**:2 (1995), 656–663.
- [13] Z. Buczolich, W. F. Pfeffer, “Variations of additive functions”, *Czechoslovak Math. J.*, **47**:3 (1997), 525–555.
- [14] W. F. Pfeffer, “A descriptive definition of a variational integral and applications”, *Indiana Univ. Math. J.*, **40**:1 (1991), 259–270.

- [15] W. F. Pfeffer, “Comparing variations of charges”, *Indiana Univ. Math. J.*, **45**:3 (1996), 643–654.
- [16] C.-A. Faure, J. Mawhin, “The Hake’s property for some integrals over multidimensional intervals”, *Real Anal. Exchange*, **20**:2 (1995), 622–630.
- [17] В. А. Скворцов, “Некоторое обобщение интеграла Перрона”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, **24**:4 (1969), 48–51.
- [18] М. Г. Плотников, “О восстановлении коэффициентов двумерных рядов Хаара”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2005, № 2, 45–53; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Reconstruction of coefficients of the bivariate Haar series”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **49**:2 (2005), 42–50.
- [19] М. Г. Плотников, “О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 23–28; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “The uniqueness of everywhere convergent multiple Haar series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:1 (2001), 24–29.
- [20] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Лань, СПб., 1999; англ. пер. 1-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.

М. Г. Плотников (M. G. Plotnikov)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия

E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступила в редакцию

26.01.2006 и 03.04.2007