Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, О семействах подмногообразий постоянной отрицательной кривизны в многомерном евклидовом пространстве, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:38:51

УДК 514

Ю. А. Аминов

**О семействах подмногообразий
постоянной отрицательной кривизны
в многомерном евклидовом пространстве**

В работе рассматривается семейство подмногообразий постоянной отрицательной кривизны K_0 размерности n в $(2n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{2n-1} , которое включается в ортогональную систему координат. При $n = 2$ такую систему координат рассматривал Л. Бианки. Вводится понятие многомерной системы координат Бианки. Основным результатом является

ТЕОРЕМА 1. Пусть в шаре радиуса ρ евклидова пространства E^{2n-1} задана регулярная система координат Бианки и $K_0 \leq -1$. Тогда

$$\rho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Библиография: 12 названий.

§ 1

Наименьшая размерность евклидова пространства, в которое возможно локальное изометрическое погружение n -мерного пространства постоянной отрицательной кривизны L^n в виде регулярного подмногообразия, равна $2n - 1$ (теорема Картана–Либеры). В работах Д. Д. Мура [1], К. Тененблат и Ч. Л. Тернг [2], Ф. Шавье [3], автора [4], [5] и др. рассматривались погружения одного пространства L^n в E^{2n-1} . Мы рассмотрим регулярное семейство таких подмногообразий в некоторой области евклидова пространства E^{2n-1} . Более того, предположим, что это семейство включается в ортогональную систему координат в E^{2n-1} в виде семейства координатных подмногообразий (точная формулировка дана ниже).

Заметим, что ортогональные системы координат часто являются наиболее удобными при рассмотрении геометрических вопросов в римановых пространствах. Их теории посвящена обширная литература, можно указать, например, классическую монографию Г. Дарбу [6]. В последнее время ортогональные системы координат строились в работах В. Е. Захарова [7] и И. М. Кричевера [8] методами обратной задачи рассеяния. Впервые идея построения была высказана В. Дрюма [9].

Укажем простой способ построения одного класса триортогональных систем координат в E^3 . В плоскости с координатами x, y рассмотрим регулярное семейство кривых, например задаваемое уравнением $F(x, y) = \text{const}$. Рассмотрим ортогональные траектории этого семейства. Вращая вокруг оси x , получаем два семейства поверхностей вращения, ортогональных друг другу.

Вместе с плоскостями, проходящими через ось x , получим триортогональное семейство поверхностей. Произвол в задании такого семейства – одна функция двух переменных – функция $F(x, y)$. Если эта функция задана, то нахождение триортогональной системы зависит от интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего ортогональные траектории семейства $F(x, y) = \text{const}$.

Более общий класс триортогональных систем строится с помощью резных поверхностей Монжа (из лекций А. Сыма).

Известно, что в общем случае триортогональная система координат в E^3 определяется с произволом 3 функции двух аргументов. Нахождение такой системы сводится к решению уравнения в частных производных третьего порядка относительно одной функции от координат x, y, z в пространстве. Поверхности уровня этой функции образуют однопараметрическое семейство поверхностей – семейство Лямэ, которое можно включить в триортогональную систему.

Особенно простой вид это уравнение имеет в том случае, когда поверхность из семейства задана в явном виде, т.е.

$$z = z(x, y, u),$$

где u – параметр, определяющий поверхность из семейства. Пусть p, q, r, s, t – классические обозначения производных функции z по аргументам x и y ,

$$T = \frac{\partial z / \partial u}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Тогда уравнение записывается так [10; с. 464]

$$[(1 + q^2)s - pqt] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + [pqr - (1 + p^2)s] \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

В [11] Л. Бианки рассмотрел 3-ортогональные системы координат в трехмерном евклидовом пространстве E^3 такие, что одно семейство координатных поверхностей состоит из поверхностей постоянной гауссовой кривизны K_0 . В том случае, когда $K_0 < 0$, он доказал, что метрика E^3 приводится к виду

$$ds^2 = \cos^2 \omega du_1^2 + \sin^2 \omega du_2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{-K_0}} \frac{\partial \omega}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2, \quad (1)$$

где 2ω – угол между асимптотическими линиями на поверхности $u_3 = \text{const}$.

Мы рассмотрим в евклидовом пространстве E^{2n-1} семейство n -мерных подмногообразий F^n постоянной отрицательной кривизны K_0 , которое можно включить в $(2n - 1)$ -ортогональную систему координат. Кривизна K_0 может изменяться при изменении F^n . Пусть метрика E^{2n-1} записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2 du_i^2 + \sum_{\alpha=n+1}^{2n-1} H_\alpha^2 du_\alpha^2, \quad (2)$$

причем подмногообразия F^n : $u_{n+1} = \text{const}, \dots, u_{2n-1} = \text{const}$ имеют постоянную отрицательную кривизну K_0 и, кроме того, сумма первых n метрических коэффициентов равна 1:

$$\sum_{i=1}^n H_i^2 = 1. \quad (3)$$

Такую систему координат будем называть *системой Бианки* (в случае $n = 2$ условие (3) выполнено автоматически).

Заметим, что на каждом подмногообразии F^n с постоянной отрицательной кривизной можно ввести координаты кривизны, для которых условие (3) будет выполнено [11].

Рассмотрим вопросы локального и глобального существования систем Бианки. Под регулярностью системы координат будем понимать следующее условие: функции H_p не обращаются в нуль и принадлежат классу регулярности C^2 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть в шаре радиуса ρ евклидова пространства E^{2n-1} задана регулярная система координат Бианки и $K_0 \leq -1$. Тогда

$$\rho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Это означает, что радиус шара не может быть слишком большим. Существует пример системы Бианки в E^3 с постоянной кривизной $K_0 = -1$, в котором $\rho = 1/2$ (см. ниже). Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Системы координат Бианки локально существуют в евклидовых пространствах E^3 и E^5 .

§ 2

Пусть в шаре D радиуса ρ евклидова пространства E^{2n-1} существует указанная система ортогональных координат.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим систему уравнений – обобщение системы Лямэ, выражающих то обстоятельство, что тензор Римана евклидова пространства нулевой. Пусть индексы $i, j, k \leq n$ и индекс $m \geq n+1$. Эти уравнения будем называть *уравнениями Лямэ*. Для того чтобы их выписать, используем формулы для тензора Римана в ортогональных координатах из книги Л. П. Эйзенхарта [12]. Обозначим при $i \neq j$

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial u_i} \right) + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial u_j} \right) + \sum_{1 \leq k \leq n}^{(i,j)} \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} \frac{\partial H_j}{\partial u_k},$$

где (i, j) над знаком суммы обозначает пропуск этих индексов в сумме. Имеем одно из уравнений Лямэ

$$A_{ij} + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \frac{1}{H_m^2} \frac{\partial H_i}{\partial u_m} \frac{\partial H_j}{\partial u_m} = 0. \quad (4)$$

Так как кривизна подмногообразий F^n постоянна и равна K_0 , то $A_{ij} = -K_0 H_i H_j$ и уравнение (2) можно переписать в виде

$$-K_0 H_i H_j + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \frac{1}{H_m^2} \frac{\partial H_i}{\partial u_m} \frac{\partial H_j}{\partial u_m} = 0. \quad (5)$$

Воспользовавшись равенством (11), получим

$$p_2 \sum_{q=3}^n \cos^2 \gamma_k + p_2 \cos^2 \gamma_2 = p_2 = 0.$$

Аналогичное рассмотрение проводится для всех p_j . Таким образом, $\text{grad } \sigma$ ортогонален ко всем $\text{grad } \cos \gamma_j$. Из равенства (6) при $i = 1$ и $j = 2$ тогда следует, что

$$(\text{grad } \ln \sin \sigma, \text{grad } \ln \cos \sigma + \text{grad } \ln \cos \gamma_2) = (\text{grad } \ln \sin \sigma, \text{grad } \ln \cos \sigma) = K_0.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = -K_0,$$

где d/ds – дифференцирование по длине дуги линии, касательной к $\text{grad } \sigma$.

Рассмотрим $(n - 1)$ -мерное координатное подмногообразие с параметрами $u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}$, проходящее через точку O – центр шара D . Пусть Γ – кривая на этом подмногообразии, касающаяся $\text{grad } \sigma$ и проходящая через точку O . Кривая Γ не может быть замкнута, так как вдоль нее σ изменяется монотонно. Пусть направлению возрастания σ соответствует положительное направление изменения s . Продолжим кривую Γ в обоих направлениях. При этом либо кривая Γ выйдет на границу шара D (одним или двумя концами), либо бесконечно продолжается внутри D . В обоих этих случаях на кривой Γ найдутся точки P_1 и P_2 , расположенные на разных ветвях Γ , такие, что длины дуг P_1O и OP_2 не меньше ρ . Пусть L есть длина дуги этой кривой P_1P_2 . Имеем

$$2\rho \leq L \leq \int_{P_1P_2} \sqrt{-K_0} ds = \int_{P_1P_2} \frac{d\sigma}{ds} ds = \sigma(P_2) - \sigma(P_1) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Здесь интегрирование идет по кривой Γ . Мы использовали неравенства $0 < \sigma \leq \pi/2$, которые должны выполняться в силу регулярности каждого подмногообразия F^n – коэффициенты H_i в области D не обращаются в нуль. Теорема 1 доказана.

§ 3

Перейдем к доказательству теоремы 2. Случай $n = 2$ рассмотрен Бианки [11]. Функция ω , входящая в выражение метрики (1), должна удовлетворять системе 4-х уравнений. Обозначим $R = 1/\sqrt{-K_0}$. Тогда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2^2} - \frac{\sin \omega \cos \omega}{R} = 0, \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} - \text{ctg } \omega \frac{\partial \omega}{\partial u_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} + \text{tg } \omega \frac{\partial \omega}{\partial u_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\sin \omega}{R} \right) - \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\cos \omega}{R} \right) + \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Условие совместности этой системы доказано Бианки. Решение зависит от 5 произвольных функций одного аргумента. Такая триортогональная система однозначно определяется, если заданы

- 1) псевдосферическая поверхность $u_3 = \text{const}$ (2 функции одного аргумента);
- 2) ортогональная траектория к семейству постоянной кривизны, т.е. координатная кривая с параметром u_3 (2 функции одного аргумента);
- 3) закон изменения кривизны $K_0(u_3)$ вдоль этой кривой (1 функция одного аргумента).

Бианки привел замечательный пример триортогональной системы, состоящей из семейства псевдосфер кривизны $K_0 = -1$ с общей осью вращения, семейства сфер с центрами на этой оси и радиуса 1 и семейства плоскостей, проходящих через эту ось. Таким образом, первое семейство имеет постоянную кривизну -1 , второе семейство имеет кривизну 0 и кривизна третьего семейства $+1$. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает псевдосферы по двум семействам конгруэнтных трактрис, полученных параллельным сдвигом вдоль оси вращения. Ребра возврата псевдосфер покрывают цилиндр радиуса 1. Этот цилиндр и ось составляют все особое множество триортогональной системы. Следовательно, шар, расположенный между осью и цилиндром, содержит регулярную триортогональную систему. Его радиус сколь угодно мало отличается от $1/2$.

Бианки также привел второй пример, но мы не будем его рассматривать.

Множество таких триортогональных систем может быть расширено с помощью преобразования Бэклунда, которое определяется откладыванием от каждой точки псевдосферической поверхности в ее касательной плоскости отрезка длины k , составляющего угол ω_1 с первым главным направлением.

Функция ω_1 должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega}{\partial u_2} = \frac{\cos \omega \sin \omega_1 + \sin \theta \sin \omega \cos \omega_1}{k}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = -\frac{\sin \omega \cos \omega_1 + \sin \theta \cos \omega \sin \omega_1}{k}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial u_3} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial u_3} = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{k \cos \omega_1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} + \frac{k \sin \omega_1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} \right), \end{cases}$$

где k – постоянная и $\cos \theta = k/R$.

Замечательным фактом является то, что в выражении ds^2 для новой системы координат функцию ω надо заменить на ω_1 и условием совместности системы для ω_1 является система (13).

§ 4

Перейдем теперь к случаю $n = 3$. Мы не будем выписывать всю систему, подобную системе Бианки (13), хотя ее и можно указать, но она имеет слишком громоздкий вид. Приведем пример метрики пространства E^5 , коэффициенты которой удовлетворяют соответствующей системе Лямэ и такой, что каждое из подмногообразий $u_4 = \text{const}$, $u_5 = \text{const}$ имеет постоянную отрицательную

кривизну -1 . Определим функцию $f(\sigma)$ некоторого параметра σ

$$f = \int \frac{d\sigma}{\cos \sigma}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Метрика 5-мерного риманова пространства*

$$\begin{aligned} ds^2 = & \sin^2 \sigma du_1^2 + \cos^2 \sigma (\cos^2 \gamma du_2^2 + \sin^2 \gamma du_3^2) \\ & + \left(\frac{\cos \sigma}{\sin \varphi} \right)^2 du_4^2 + \left(\frac{\cos \sigma}{\cos \varphi} \right)^2 du_5^2 \end{aligned} \quad (14)$$

имеет нулевую кривизну, и каждое из подмногообразий $u_4 = \text{const}$, $u_5 = \text{const}$ имеет кривизну $K_0 = -1$, если функция f имеет вид

$$f = u_1 + u_4 + u_5,$$

функция $\gamma = \gamma(u_4, u_5)$ определяется из системы уравнений

$$\gamma_{u_4} = \text{ctg } \varphi, \quad \gamma_{u_5} = -\text{tg } \varphi, \quad (15)$$

а функция $\varphi = \varphi(u_4, u_5)$ определяется из уравнения

$$(\text{tg } \varphi)_{u_4} + (\text{ctg } \varphi)_{u_5} = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что уравнение (16) является условием совместности системы (15).

Заметим также, что $f_{u_4 u_5} = 0$.

Существует локальное решение φ уравнения (16) и, следовательно, системы (15), причем начальные условия можно задать так, чтобы в окрестности некоторой точки выполнялись неравенства $0 < \varphi < \pi/2$. Выбором начальных условий можно обеспечить регулярность метрики (14) в достаточно малой окрестности точки.

Рассмотрим систему уравнений Лямэ для системы Бианки в E^5 в том случае, когда $K_0 = -1$. Введем символы Дарбу

$$\beta_{pq} = \frac{1}{H_p} \frac{\partial H_q}{\partial u_p}, \quad p \neq q.$$

Система уравнений Лямэ состоит из уравнений двух видов:

$$\frac{\partial \beta_{pq}}{\partial u_p} + \frac{\partial \beta_{qp}}{\partial u_q} + \sum_{s=1}^{(p,q)} \beta_{sp} \beta_{sq} = 0, \quad (A)$$

$$\frac{\partial \beta_{pq}}{\partial u_r} = \beta_{pr} \beta_{rq}, \quad (B)$$

где индексы p, q, r различные и изменяются от 1 до $2n - 1$.

Запишем выражения всех символов Дарбу. Для этого воспользуемся равенствами $\sigma_{u_p} = \cos \sigma$, где $p = 1, 4, 5$. Найдем, например, символ β_{45}

$$\beta_{45} = \frac{\sin \varphi}{\sigma_{u_4}} \frac{\partial (\cos \sigma / \cos \varphi)}{\partial u_4} = \sin \varphi \left(-\frac{\sin \sigma}{\cos \varphi} + \frac{\varphi_{u_4} \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right).$$

В силу равенств (16) имеем

$$\varphi_{u_5} = \varphi_{u_4} \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Поэтому

$$\beta_{45} = \varphi_{u_5} - \sin \sigma \operatorname{tg} \varphi.$$

Аналогично можно вычислить и другие символы Дарбу. Выпишем их:

$$\begin{aligned} \beta_{2p} &= \beta_{3p} = 0, & p &= 1, \dots, 5, \\ \beta_{12} &= -\cos \sigma \cos \gamma, & \beta_{13} &= -\cos \sigma \sin \gamma, \\ \beta_{14} &= -\frac{\cos \sigma}{\sin \varphi}, & \beta_{15} &= -\frac{\cos \sigma}{\cos \varphi}, \\ \beta_{41} &= \cos \sigma \sin \varphi, \\ \beta_{42} &= -\sin \sigma \sin \varphi \cos \gamma - \sin \gamma \cos \varphi, \\ \beta_{43} &= -\sin \sigma \sin \varphi \sin \gamma + \cos \gamma \cos \varphi, \\ \beta_{45} &= \varphi_{u_5} - \sin \sigma \operatorname{tg} \varphi, \\ \beta_{51} &= \cos \sigma \cos \varphi, \\ \beta_{52} &= -\sin \sigma \cos \varphi \cos \gamma + \sin \gamma \sin \varphi, \\ \beta_{53} &= -\sin \sigma \cos \varphi \sin \gamma - \cos \gamma \sin \varphi, \\ \beta_{54} &= -\varphi_{u_4} - \sin \sigma \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (3) выполнено в силу выбора метрики. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \beta_{45}}{\partial u_4} + \frac{\partial \beta_{54}}{\partial u_5} + \beta_{14}\beta_{15} + \beta_{24}\beta_{25} + \beta_{34}\beta_{35} = 0. \quad (17)$$

После подстановки символов Дарбу уравнение (17) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_4}(\varphi_{u_5} - \sin \sigma \operatorname{tg} \varphi) + \frac{\partial}{\partial u_5}(-\varphi_{u_4} - \sin \sigma \operatorname{ctg} \varphi) + \frac{\cos^2 \sigma}{\cos \varphi \sin \varphi} = 0.$$

Это уравнение выполнено в силу уравнения (16).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \beta_{14}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{41}}{\partial u_4} + \beta_{21}\beta_{24} + \beta_{31}\beta_{34} + \beta_{51}\beta_{54} = 0. \quad (18)$$

После подстановки коэффициентов Дарбу получим

$$\frac{\sin \sigma \cos \sigma}{\sin \varphi} - \sin \sigma \cos \sigma \sin \varphi + \cos \sigma \cos \varphi \varphi_{u_4} - \cos \sigma \cos \varphi (\varphi_{u_4} + \sin \sigma \operatorname{ctg} \varphi) = 0.$$

Это уравнение выполнено, так как $\sigma_{u_1} = \cos \sigma$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \beta_{24}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{42}}{\partial u_4} + \beta_{12}\beta_{14} + \beta_{32}\beta_{34} + \beta_{52}\beta_{54} = 0. \quad (19)$$

Подставив символы Дарбу, получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial u_4}(\sin \sigma \sin \varphi \cos \gamma + \sin \gamma \cos \varphi) + \frac{\cos^2 \sigma \cos \gamma}{\sin \varphi} \\ & - (-\sin \sigma \cos \varphi \cos \gamma + \sin \gamma \sin \varphi)(\varphi_{u_4} + \sin \sigma \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \end{aligned}$$

После дифференцирования первого слагаемого в левой части видим, что члены, содержащие φ_{u_4} , взаимно уничтожаются. Далее, воспользуемся равенством

$$\gamma_{u_4} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

После умножения на $\sin \varphi$ получим

$$\begin{aligned} & -\cos^2 \sigma \sin^2 \varphi \cos \gamma + \sin \sigma \sin \varphi \cos \varphi \sin \gamma - \cos \gamma \cos^2 \varphi \\ & + \cos^2 \sigma \cos \gamma + \sin^2 \sigma \cos^2 \varphi \cos \gamma - \sin \sigma \sin \gamma \sin \varphi \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что левая часть действительно равна нулю. Итак, уравнение (19) выполнено.

Уравнения группы (A), в которых $p = 2$ или 3 , $q = 4$ или 5 , доказываются аналогично.

Заметим, что в силу вида метрики (14) и уравнений (15) имеют место следующие соотношения:

$$|\operatorname{grad} \sigma| = 1, \quad (\operatorname{grad} \sigma, \operatorname{grad} \gamma) = 0, \quad |\operatorname{grad} \gamma| = \frac{1}{\cos \sigma}. \quad (20)$$

Например, проверим второе равенство:

$$(\operatorname{grad} \sigma, \operatorname{grad} \gamma) = \frac{\sigma_{u_4} \gamma_{u_4}}{H_4^2} + \frac{\sigma_{u_5} \gamma_{u_5}}{H_5^2} = \frac{\sigma_{u_4} \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_{u_4}^2} \sin^2 \varphi - \frac{\sigma_{u_5} \operatorname{tg} \varphi}{\sigma_{u_5}^2} \cos^2 \varphi = 0.$$

Аналогично доказываются два других равенства.

Рассмотрим теперь три уравнения группы (A), в которых $p, q \leq 3$. Выпишем, например, одно из них при $p = 1, q = 2$:

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} + \beta_{41} \beta_{42} + \beta_{51} \beta_{52} = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$-\frac{\partial \cos \sigma \cos \gamma}{\partial u_1} + (\operatorname{grad} H_1, \operatorname{grad} H_2) = 0.$$

Аналогичные уравнения получим при $p = 1, q = 3$ и $p = 2, q = 3$. Подставив выражения для H_i , получим три уравнения:

$$\begin{aligned} & \sin \sigma \cos \sigma \cos \gamma + (\operatorname{grad} \sin \sigma, \operatorname{grad}(\cos \sigma \cos \gamma)) = 0, \\ & \sin \sigma \cos \sigma \sin \gamma + (\operatorname{grad} \sin \sigma, \operatorname{grad}(\cos \sigma \sin \gamma)) = 0, \\ & \cos^2 \sigma \cos \gamma \sin \gamma + (\operatorname{grad}(\cos \sigma \cos \gamma), \operatorname{grad}(\cos \sigma \sin \gamma)) = 0. \end{aligned}$$

С помощью соотношений (20) легко убедиться, что эти уравнения выполнены. Итак, все уравнения группы (A) выполнены.

Рассмотрим теперь уравнения группы (Б). Если индексы p, q и $r \leq 3$, то в обеих частях уравнений получим 0. Если первый индекс равен 2 или 3, то тоже в обеих частях уравнения 0. Символы Дарбу не зависят от u_2 и u_3 . Поэтому, когда $r = 2, 3$, то в обеих частях уравнения имеем 0. Подробнее рассмотрим случаи $p = 1, 4, 5$ и $r = 1, 4, 5$. Проверим уравнение

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_4} = \beta_{14} \beta_{42}.$$

Подставив выражения символов Дарбу, получим

$$-\frac{\partial \cos \sigma \cos \gamma}{\partial u_4} = \frac{\cos \sigma}{\sin \varphi} (\sin \sigma \sin \varphi \cos \gamma + \sin \gamma \cos \varphi).$$

Используя равенства (15), получаем в левой части

$$\sin \sigma \cos \sigma \cos \gamma + \cos \sigma \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi,$$

что совпадает с выражением в правой части. Аналогично проверяется уравнение в том случае, когда $p = 1, q = 3, r = 4, 5$. Далее, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \beta_{14}}{\partial u_5} = \beta_{15} \beta_{54}.$$

Учитывая равенство $\varphi_{u_4} = \varphi_{u_5} \operatorname{ctg}^2 \varphi$, имеем

$$-\frac{\partial(\cos \sigma / \sin \varphi)}{\partial u_5} = \frac{\cos \sigma}{\cos \varphi} (\varphi_{u_4} + \sin \sigma \operatorname{ctg} \varphi).$$

Это равенство следует из (16). Пусть теперь $p = 4, 5, r = 1$. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial \beta_{42}}{\partial u_1} = \beta_{41} \beta_{12},$$

которое переписывается в виде

$$-\frac{\partial}{\partial u_1} (\sin \sigma \sin \varphi \cos \gamma + \sin \gamma \cos \varphi) = -\cos^2 \sigma \sin \varphi \cos \gamma.$$

Так как γ и φ не зависят от u_1 и $\sigma_{u_1} = \cos \sigma$, то в левой части уравнения получим $-\cos^2 \sigma \sin \varphi \cos \gamma$, что совпадает с выражением в правой части. Подобным образом проверяется и уравнение

$$\frac{\partial \beta_{4q}}{\partial u_5} = \beta_{45} \beta_{5q},$$

где $q = 2, 3$. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial \beta_{45}}{\partial u_1} = \beta_{41} \beta_{15}.$$

Подставим выражения символов Дарбу

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\varphi_{u_5} - \sin \sigma \operatorname{tg} \varphi) = -\cos^2 \sigma \operatorname{tg} \varphi.$$

Функция φ не зависит от u_1 , поэтому в левой части получим $-\cos^2 \sigma \operatorname{tg} \varphi$, что совпадает с выражением в правой части. Случай $p = 5, q = 4, r = 1$ рассматривается аналогично. Итак, все уравнения группы (Б) выполнены.

Кривизна метрики $ds_1^2 = \sin^2 \sigma du_1^2 + \cos^2 \sigma (\cos^2 \gamma du_2^2 + \sin^2 \gamma du_3^2)$ равна -1 , так как $\sigma_{u_1} = \cos \sigma$ и γ не зависит от u_1 , что легко проверяется вычислениями. Теорема 3 доказана.

Риманово пространство с метрикой (14) плоское, поэтому локально изометрично евклидову пространству E^5 . Существует изометрическое отображение окрестности точки этого пространства на некоторую окрестность точки в E^5 . В этой окрестности точки в E^5 будут введены ортогональные координаты $u_1, \dots, u_5$, в которых метрика E^5 приобретает вид (14). Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 5

В этом параграфе рассмотрим условие (3):

$$\sum_i^n H_i^2 = 1.$$

На каждом подмногообразии F^n можно ввести координаты кривизны, для которых это условие выполнено. Но может оказаться, что эти координаты не совпадают с координатами $u^1, \dots, u^n$. Если мы имеем $(2n-1)$ -ортогональную систему координат в E^{2n-1} , то по обобщенной теореме Дюпена координатные линии с параметрами $u^1, \dots, u^n$ являются линиями кривизны на каждом подмногообразии F^n . Из рассмотрения уравнений Кодацци F^n следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{H_i}{\sin \sigma_i} \right) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

причем $\sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i = 1$. Поэтому можно записать для каждого $i \leq n$

$$H_i = \sin \sigma_i \psi_i(u^i, u^{n+1}, \dots, u^{2n-1}),$$

где ψ_i – функции указанных аргументов. Если эти функции не зависят от $u^{n+1}, \dots, u^{2n-1}$, то изменением параметра u_i можно добиться, чтобы $H_i = \sin \sigma_i$, и, следовательно, условие (3) будет выполнено одновременно на всех поверхностях семейства.

Ниже мы рассмотрим случай $n = 3$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если условие $\sum_{i=1}^3 H_i^2 = 1$ выполнено на двух координатных линиях с параметрами u^4 и u^5 , выходящих из одной точки, то оно будет выполнено в соответствующем координатном прямоугольнике на двумерной поверхности с параметрами u^4, u^5 .*

Обозначим через H следующий трехмерный вектор:

$$H = (H_1, H_2, H_3).$$

При фиксированных координатах $u^i = u_0^i$, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим двумерную поверхность Φ^2 в E^3 с радиусом-вектором $H(u_0^1, u_0^2, u_0^3, u^4, u^5)$. На этой поверхности u^4, u^5 являются криволинейными координатами. Для простоты радиус-вектор поверхности Φ^2 обозначим через $H(u^4, u^5)$.

ЛЕММА 1. *Поверхность Φ^2 регулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим, что в некоторой точке векторное произведение

$$[H_{u^4} H_{u^5}] = 0.$$

Тогда все миноры вида

$$J_{ij} = \begin{vmatrix} H_{iu^4} & H_{iu^5} \\ H_{ju^4} & H_{ju^5} \end{vmatrix} = 0.$$

В силу уравнения (6) ни один из $\text{grad } H_i$ не обращается в нуль. Можем записать в рассматриваемой точке

$$\text{grad } H_1 + \nu \text{grad } H_2 = 0, \quad \text{grad } H_1 + \mu \text{grad } H_3 = 0,$$

причем в силу (6) коэффициенты ν и μ положительны. Тогда имеем

$$\nu \operatorname{grad} H_2 - \mu \operatorname{grad} H_3 = 0.$$

С помощью (6) получим

$$\frac{\mu}{\nu} |\operatorname{grad} H_3|^2 = K_0 H_2 H_3.$$

Слева число положительное, а справа отрицательное, что приводит нас к противоречию. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть вектор $P = \{P_i\}$ имеет компоненты

$$P_i = \frac{H_{iu_4} H_{iu_5}}{H_i}.$$

Тогда имеет место уравнение

$$(H_{u_4} H_{u_5} P) = 0, \quad (21)$$

здесь круглые скобки обозначают смешанное произведение векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$a_i = \frac{\partial \ln H_i}{\partial u_4}, \quad b_i = \frac{\partial \ln H_i}{\partial u_5}.$$

Имеем систему уравнений для вектора $(1/H_4^2, 1/H_5^2, 1)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{H_4^2} a_1 a_2 + \frac{1}{H_5^2} b_1 b_2 - K_0 = 0, \\ \frac{1}{H_4^2} a_1 a_3 + \frac{1}{H_5^2} b_1 b_3 - K_0 = 0, \\ \frac{1}{H_4^2} a_3 a_2 + \frac{1}{H_5^2} b_3 b_2 - K_0 = 0. \end{cases}$$

Так как решение должно быть ненулевым, то определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 & b_1 b_2 & 1 \\ a_1 a_3 & b_1 b_3 & 1 \\ a_2 a_3 & b_2 b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по третьему столбцу, после преобразований приводим это уравнение к виду

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя выражения для a_i и b_i , получаем уравнение

$$(H_{u_4} H_{u_5} P) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Имеет место уравнение*

$$H_{u^4 u^5} = \frac{\partial \ln H_4}{\partial u_5} H_{u^4} + \frac{\partial \ln H_5}{\partial u^4} H_{u^5}. \quad (22)$$

Действительно, в такой векторной форме записываются три уравнения

$$\frac{\partial \beta_{4i}}{\partial u^5} = \beta_{45} \beta_{5i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Обозначим $H^2 = U$.

ЛЕММА 4. *Функция U удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^4 \partial u^5} = A \frac{\partial U}{\partial u^4} + B \frac{\partial U}{\partial u^5}, \quad (23)$$

где коэффициенты A и B являются регулярными функциями координат класса C^1 .

Умножим правую и левую части уравнения (22) скалярно на $2H$. Получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^4 \partial u^5} - 2(H_{u^4}, H_{u^5}) = \frac{\partial \ln H_4}{\partial u^5} \frac{\partial U}{\partial u^4} + \frac{\partial \ln H_5}{\partial u^4} \frac{\partial U}{\partial u^5}.$$

Воспользуемся леммами 1 и 2. Заметим, что векторы H_{u^4} и H_{u^5} линейно независимы. Поэтому найдутся такие числовые функции α и β , что $P = \alpha H_{u^4} + \beta H_{u^5}$ или в координатной записи

$$\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial u^4} \frac{\partial H_i}{\partial u^5} = \alpha \frac{\partial H_i}{\partial u^4} + \beta \frac{\partial H_i}{\partial u^5}. \quad (24)$$

Умножим правую и левую части этих уравнений на $2H_i$ и суммируем по i от 1 до 3. Получим равенство

$$2(H_{u^4}, H_{u^5}) = \alpha \frac{\partial U}{\partial u^4} + \beta \frac{\partial U}{\partial u^5}.$$

Таким образом, функция U удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^4 \partial u^5} = \left(\frac{\partial \ln H_4}{\partial u^5} - \alpha \right) \frac{\partial U}{\partial u^4} + \left(\frac{\partial \ln H_5}{\partial u^4} - \beta \right) \frac{\partial U}{\partial u^5}.$$

Заметим, что функции α и β регулярны. Действительно, для них с помощью (24) легко получить следующие представления:

$$\alpha = -\frac{(PH_{u^5}[H_{u^4}H_{u^5}])}{W^2}, \quad \beta = \frac{(PH_{u^4}[H_{u^4}H_{u^5}])}{W^2},$$

где $W = |[H_{u^4}H_{u^5}]|$. Согласно лемме 1 имеем $W \neq 0$. Следовательно, коэффициенты уравнения (23) – A и B являются регулярными функциями в рассматриваемой окрестности точки. Если функция U постоянна на двух координатных линиях с параметрами u^4 и u^5 , выходящих из одной точки, то согласно теореме единственности решения линейного дифференциального уравнения функция U постоянна и в соответствующем координатном прямоугольнике. Теорема 4 доказана.

Остается открытым

ВОПРОС. Можно ли получить оценку сверху для радиуса шара в E^{2n-1} , содержащего регулярное семейство n -мерных подмногообразий с кривизной $K \leq -1$ (без условия включения в ортогональную систему координат)?

Список литературы

- [1] J. D. Moore, "Isometric immersions of space forms in space forms", *Pacific J. Math.*, **40**:1 (1972), 157–167.
- [2] K. Tenenblat, C. L. Terng, "Bäcklund's theorem for n -dimensional submanifolds of R^{2n-1} ", *Ann. of Math. (2)*, **111** (1980), 477–490.
- [3] Xavier F., "A nonimmersion theorem for hyperbolic manifolds", *Comment. Math. Helv.*, **60** (1985), 280–283.
- [4] Ю. А. Аминов, "О погружении областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство", *Докл. АН СССР*, **236**:3 (1977), 521–524.
- [5] Ю. А. Аминов, *Геометрия подмногообразий*, Наукова думка, Киев, 2002.
- [6] G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.
- [7] V. E. Zakharov, "Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equations", *Duke Math. J.*, **94**:1 (1998), 103–139.
- [8] И. М. Кричевер, "Алгебро-геометрические n -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности", *Функц. анализ и его прилож.*, **31**:1 (1997), 32–50.
- [9] В. Дрюма, "О геометрии ОДУ второго порядка и ее приложениях", *Труды Всесоюзной конференции "Нелинейные явления" ("Nonlinear Phenomena")*, ред. К. В. Фролов, Наука, М., 1991, 41–47.
- [10] A. R. Forsyth, *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1912.
- [11] L. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1910.
- [12] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.

Ю. А. Аминов (Yu. A. Aminov)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков;

Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences,
Warsaw

E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию

11.01.2005