Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Андреев, Квазивейлевские асимптотики спектра
в задаче Дирихле, *Матем. сб.*, 2006, том 197, но-
мер 2, 17–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:37:55

УДК 513.88

А. С. Андреев

Квазивейлевские асимптотики спектра в задаче Дирихле

В работе рассматривается спектральная задача типа Дирихле

$$\sum_{\alpha} D^{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha} u = \mu^{-1} p u, \\ a_{\alpha}(x) \geq c_0 > 0, \quad p(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m,$$

Ω – ограниченное множество. Описываются все естественные обобщения классической спектральной асимптотики Вейля. Основное свойство этих обобщений следующее: главный член асимптотики – аддитивная функция над множеством Ω .

Библиография: 6 названий.

Спектральная асимптотика задачи Дирихле изучена в основном для эллиптических и гипоеллиптических дифференциальных операторов (ДО). Спектр ДО, не удовлетворяющих условию гипоеллиптичности, исследован в меньшей степени [1]–[5]. В основном рассматривались ДО с постоянными коэффициентами (см. [1]–[4]).

В настоящей работе исследуется задача Дирихле на собственные значения следующего вида:

$$\sum_{\alpha} D^{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha} u_n = \mu_n^{-1} p u_n, \quad a_{\alpha}(x) \geq c > 0, \quad (0.1)$$

$p(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, Ω – ограниченное открытое множество. Функция $p(x)$ не предполагается знакоопределенной, что позволяет рассматривать как положительный, так и отрицательный спектры. В этой ситуации описываются все естественные обобщения классической спектральной асимптотики – формулы Вейля. Основное условие, принятое здесь для таких обобщений, состоит в следующем.

Функции распределения положительного и отрицательного спектров задачи (ФРС) $N_{\pm}(\mu, \Omega)$ асимптотически выражаются формулами

$$N_{\pm}(\mu, \Omega) \sim \int_{\Omega} \Psi_{\pm}(\mu, x) dx, \quad \mu \rightarrow +0. \quad (0.2)$$

Функции $\Psi_{\pm}(\mu, x)$ зависят от x (через коэффициенты $a_{\alpha}(x)$, $p(x)$), но не зависят от множества Ω . Таким образом, ФРС асимптотически аддитивны относительно Ω : если $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $N_{\pm}(\mu, \Omega) \sim N_{\pm}(\mu, \Omega_1) + N_{\pm}(\mu, \Omega_2)$ (в [5] указана задача, не обладающая последним свойством). Асимптотики вида (0.2) называются *квазивейлевскими*. Цель работы состоит в описании классов ДО, имеющих квазивейлевскую асимптотику спектра, и установлении вида функций $\Psi_{\pm}(\mu, x)$ в (0.2). Описываются классы ДО, для которых (0.2) равносильна формуле Вейля. Одновременно проводятся оценки остаточных членов асимптотик.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§ 1. Формулировки теорем

1.1. Основные обозначения. Введем следующие обозначения: $\mathbb{R}^m$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$; $\mathbb{E}^m$ – двойственное к $\mathbb{R}^m$ пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$; $\mathbb{E}_+^m = \{\xi \in \mathbb{E}^m : \xi_j > 0 \forall j\}$; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+^m = \{k \in \mathbb{E}^m : k_j \in \mathbb{N} \forall j\}$. Для множества $M \subset \mathbb{E}^m$ $M^{(j)}$ – его проекция на плоскость $\xi_j = 0$; $\xi^{(j)} = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m)$, т.е. $\xi = (\xi^{(j)}, \xi_j)$; $M^{(j_1 \dots j_s)}$ – проекция M на плоскость $\xi_{j_1} = \dots = \xi_{j_s} = 0$, $(j_1 \dots j_s) \subset (1 \dots m)$, $s < m$. Далее, ∂M – совокупность предельных точек M , $\bar{M} = M \cup (\partial M)$. Тот же смысл имеют обозначения $\partial \Xi$, $\bar{\Xi}$ для множества $\Xi \subset \mathbb{R}^m$. Через Q обозначается “открытый” куб в $\mathbb{R}^m$ с ребрами, параллельными осям координат: $Q_d = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < x_j < d \forall j\}$, $d > 0$. Всюду далее Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{mes}_m \{x \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(x, \partial \Omega) < \varepsilon\} \leq c(\Omega) \varepsilon. \quad (1.1)$$

Классы функций $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\bar{Q})$, $L_1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ определяются стандартным образом; $\|\cdot\|_\Omega$, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – норма и скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^{|\alpha|} / (\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m})$. Через C , c обозначаются различные оценочные постоянные. Как правило, они не нумеруются.

1.2. Пусть Λ – совокупность мультииндексов α : $\text{card } \Lambda = l_0$, $1 \leq l_0 < \infty$, $l = \max |\alpha|$, $\alpha \in \Lambda$. Классу мультииндексов Λ сопоставим символ – полином

$$\Lambda(\xi) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \xi^{2\alpha}, \quad \xi \in \mathbb{E}^m.$$

С символом $\Lambda(\xi)$ и $\lambda > 0$ свяжем следующие множества:

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \{\xi \in \mathbb{E}_+^m : \Lambda(\xi) < \lambda\}, \\ W(\lambda) &= \{\xi \in \mathbb{E}_+^m : \Lambda(\xi) < \lambda, \xi_j > 1 \forall j\}. \end{aligned}$$

Ограниченность множеств $V(\lambda)$, $W(\lambda)$ предварительно не предполагается. Далее,

$$\begin{aligned} v(\lambda) &= \text{mes}_m V(\lambda), & w(\lambda) &= \text{mes}_m W(\lambda), \\ w^{(j)}(\lambda) &= \text{mes}_{m-1} W^{(j)}(\lambda), & j &= 1, \dots, m, \\ r(\lambda) &= \sum_{j=1}^m w^{(j)}(\lambda), & g(\lambda) &= v(\lambda) - w(\lambda). \end{aligned}$$

Очевидно, $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\lambda_0 = \lambda_0(\Lambda)$, имеем

$$v(\lambda) \geq w(\lambda) \geq 1, \quad g(\lambda) \geq r(\lambda) \geq 1. \quad (1.2)$$

Всюду далее условие $\lambda \geq \lambda_0(\Lambda)$ предполагается выполненным.

Опишем коэффициенты $a_\alpha(x)$, $p(x)$ (см. (0.1)). Пусть Q – куб в $\mathbb{R}^m$. Функции $a_\alpha \in C^\infty(\bar{Q}) \forall \alpha \in \Lambda$, $p \in C^\infty(\bar{Q})$. При этом $\forall x \in \bar{Q}$

$$\begin{aligned} c_a &\leq a_\alpha(x) \leq c_a^*, & c_a &> 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda, \\ p(x) &\in \mathbb{R}, & |p(x)| &\leq c_p. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для $x \in \overline{Q}$, $\xi \in \mathbb{E}^m$, $\lambda \geq \lambda_0(\Lambda)$ обозначим

$$\begin{aligned} a(x, \xi) &= \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(x) \xi^{2\alpha}, & p_\pm(x) &= 2^{-1}(|p(x)| \pm p(x)), \\ V_\pm(\lambda, x) &= \{\xi \in \mathbb{E}_+^m : a(x, \xi) < \lambda p_\pm(x)\}, \\ W_\pm(\lambda, x) &= \{\xi \in \mathbb{E}_+^m : a(x, \xi) < \lambda p_\pm(x), \xi_j > 1 \forall j\}, \\ v_\pm(\lambda, x) &= \text{mes}_m V_\pm(\lambda, x), & w_\pm(\lambda, x) &= \text{mes}_m W_\pm(\lambda, x). \end{aligned}$$

1.3. Пусть множество $\Omega \subset Q$. Для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ введем следующие квадратичные формы (КФ):

$$\begin{aligned} I_a[u] &= \int_\Omega \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha |D^\alpha u|^2 dx, \\ I[u] &= \sum_{\alpha \in \Lambda} \|D^\alpha u\|_\Omega^2, \\ J_p[u] &= \int_\Omega p|u|^2 dx. \end{aligned}$$

Замыкание класса функций $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике $I_a[u]$ есть пространство функций, обозначаемое далее через $H_0^a(\Omega)$. При выполнении условий, изложенных в п. 1.4, КФ $J_p[u]$ в пространстве $H_0^a(\Omega)$ соответствует компактный (вполне непрерывный) оператор. Положительные (отрицательные) собственные значения оператора обозначим через $\mu_n^+(\mu_n^-)$: $\pm\mu_{n+1}^\pm \leq \pm\mu_n^\pm \forall n$. Нумерация производится с учетом кратности. ФРС оператора:

$$N_\pm(\mu, \Omega) = \text{card}\{\mu_n^\pm : \pm\mu_n^\pm > \mu\}, \quad \mu > 0.$$

Исследование асимптотики $N_\pm(\mu, \Omega)$ при $\mu \rightarrow +0$ называется *задачей класса Λ* . Эта задача представляет собой (0.1) в вариационной постановке. Далее используется также сочетание “задача, соответствующая КФ $I_a[u]$, $J_p[u]$ ” с указанием функций $a(x, \xi)$, $p(x)$ и множества Ω .

1.4. Дискретность спектра. Если в условиях п. 1.2 для любых a_α , $\alpha \in \Lambda$, p и Ω , $\Omega \subset Q$, выполняется $N_\pm(\mu, \Omega) < \infty \forall \mu > 0$, то по определению задача класса Λ имеет дискретный спектр.

ТЕОРЕМА 1. *Дискретность спектра задачи класса Λ равносильна условию*

$$w(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda > 0. \quad (1.4)$$

1.5. Квазивейлевские асимптотики спектра. Для мультииндексов $\alpha \in \Lambda$ введем последовательную нумерацию $\alpha = \alpha(i)$, $i = 1, \dots, l_0$. В пространстве $\mathbb{R}^{l_0+1}$ определим множество Π : $y \in \Pi$, если $c_a \leq y_i \leq c_a^*$, $i = 1, \dots, l_0$, $|y_{l_0+1}| \leq c_p$ (ср. (1.3)). Вектор-функция $y = \varphi(x)$: $y_i = a_{\alpha(i)}(x)$, $i = 1, \dots, l_0$, $y_{l_0+1} = p(x)$, отображает куб $\overline{Q}$ в параллелепипед Π .

Пусть для $\lambda > 0$, $y \in \Pi$ определены функции $\Phi_+(\lambda, y)$, $\Phi_-(\lambda, y)$:

$$0 \leq \Phi_\pm(\lambda, y) < \infty \quad \forall \lambda > 0, \forall y \in \Pi.$$

Положим $y = \varphi(x)$, $x \in \overline{Q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в условиях пп. 1.1, 1.2 (см. (1.1), (1.3)) для любых a_α , $\alpha \in \Lambda$, p и Ω , $\Omega \subset Q$, справедливо

$$N_\pm(\mu, \Omega) \sim \int_\Omega \Phi_\pm(\mu^{-1}, \varphi(x)) dx, \quad \mu \rightarrow +0, \quad (1.5)$$

то задача класса Λ имеет квазивейлевскую асимптотику спектра (ср. (0.2): $\Psi_\pm(\mu, x) = \Phi_\pm(\mu^{-1}, \varphi(x))$).

Выбор функций $\Phi_\pm(\mu^{-1}, \varphi(x))$ в (1.5) не единствен.

Будем считать выполненным (1.4).

ТЕОРЕМА 2. Квазивейлевская асимптотика спектра задачи класса Λ равносильна условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{r(\lambda)}{w(\lambda)} = 0. \quad (1.6)$$

Опишем все квазивейлевские асимптотики спектра.

ТЕОРЕМА 3. Пусть условие (1.6) выполнено. Тогда в (1.5) $\Phi_\pm(\mu^{-1}, \varphi(x)) = \pi^{-m} w_\pm(\mu^{-1}, x)$. Именно,

$$\left| N_\pm(\mu, \Omega) - \pi^{-m} \int_\Omega w_\pm(\mu^{-1}, x) dx \right| \leq C(a, p, \Omega) r^\chi(\mu^{-1}) w^{1-\chi}(\mu^{-1}), \quad (1.7)$$

$$\chi = 2m(m^2 + 3m + 4l)^{-1}, \quad 0 < \mu < \lambda_0^{-1}(\Lambda).$$

1.6. Вейлевские (классические) асимптотики спектра. Если (1.5) справедливо для $\Phi_\pm(\mu^{-1}, \varphi(x)) = \pi^{-m} v_\pm(\mu^{-1}, x)$, то по определению задача класса Λ имеет вейлевскую асимптотику спектра.

ТЕОРЕМА 4. Вейлевская асимптотика спектра задачи класса Λ равносильна условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{g(\lambda)}{v(\lambda)} = 0. \quad (1.8)$$

Имеет место оценка

$$\left| N_\pm(\mu, \Omega) - \pi^{-m} \int_\Omega v_\pm(\mu^{-1}, x) dx \right| \leq C(a, p, \Omega) g^\chi(\mu^{-1}) v^{1-\chi}(\mu^{-1}), \quad (1.9)$$

$$\chi = 2m(m^2 + 3m + 4l)^{-1}, \quad 0 < \mu < \lambda_0^{-1}(\Lambda).$$

1.7. Примеры. Будем указывать класс задачи Λ , функцию $a(x, \xi)$ и уравнение, определяющее собственные значения. Для краткости ограничимся установлением главного члена асимптотики спектра (а.с.), а также будем считать выполненным условие $\ln |p| \in L_1(\text{supp } p)$.

а) Пусть $m = 2$, $\Lambda = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$, $a(x, \xi) = a_0(x_1, x_2) \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} a_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} = \mu_n^{-1} p u_n.$$

В данном случае $v = O(\lambda^{1/2} \ln \lambda)$, $w = O(\lambda^{1/2} \ln \lambda)$, $r = O(\lambda^{1/2})$, $g = O(\lambda^{1/2})$,

$$N_\pm(\mu, \Omega) \sim 2^{-1} \pi^{-2} \left(\int_\Omega p_\pm^{1/2}(x) a_0^{-1/2}(x) dx \right) \mu^{-1/2} |\ln \mu|.$$

Квазивейлевская и вейлевская а.с. совпадают в главном члене. Оператор задачи не является гипоеллиптическим.

б) Пусть $m = 2$, $\Lambda = \{(1, 1)\}$, $a(x, \xi) = a_0(x_1, x_2)\xi_1^2\xi_2^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} a_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2} = \mu_n^{-1} p u_n.$$

Тогда $v = \infty$, $g = \infty$, $w = O(\lambda^{1/2} \ln \lambda)$, $r = O(\lambda^{1/2})$. Задача имеет квазивейлевскую а.с., совпадающую с а) в главном члене. Вейлевская а.с. в данном случае не имеет смысла.

в) Пусть $m = 2$, $\Lambda = \{(2, 2), (1, 0), (0, 1)\}$, $a(x, \xi) = a_0(x_1, x_2)\xi_1^4\xi_2^4 + \xi_1^2 + \xi_2^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} a_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} = \mu_n^{-1} p u_n.$$

Тогда $v = O(\lambda^{1/4} \ln \lambda)$, $w = O(\lambda^{1/4} \ln \lambda)$, $r = O(\lambda^{1/4})$, $g = O(\lambda^{1/4} \ln \lambda)$. Задача имеет квазивейлевскую а.с.:

$$N_{\pm}(\mu, \Omega) \sim 4^{-1} \pi^{-2} \left(\int_{\Omega} p_{\pm}^{1/4}(x) a_0^{-1/4}(x) dx \right) \mu^{-1/4} |\ln \mu|.$$

Главный член вейлевской асимптотики в 3 раза больше величины, приведенной выше. Вейлевская а.с. не имеет места.

г) Пусть $m = 2$, $\Lambda = \{2, 1\}$, $a(x, \xi) = a_0(x_1, x_2)\xi_1^4\xi_2^2$,

$$-\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} a_0 \frac{\partial^3 u_n}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \mu_n^{-1} p u_n.$$

Тогда $v = \infty$, $g = \infty$, $w = O(\lambda^{1/4})$, $r = O(\lambda^{1/4})$. Спектр задачи дискретен, но не имеет квазивейлевской асимптотики.

д) Пусть $m = 3$, $\Lambda = \{(1, 1, 1)\}$, $a(x, \xi) = a_0(x_1, x_2, x_3)\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2$,

$$-\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} a_0 \frac{\partial^3 u_n}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \mu_n^{-1} p u_n.$$

Тогда $v = \infty$, $g = \infty$, $w = O(\lambda^{1/2} \ln^2 \lambda)$, $r = O(\lambda^{1/2} \ln \lambda)$. Задача имеет квазивейлевскую а.с.:

$$N_{\pm}(\mu, \Omega) \sim 8^{-1} \pi^{-3} \left(\int_{\Omega} p_{\pm}^{1/2}(x) a_0^{-1/2}(x) dx \right) \mu^{-1/2} \ln^2 |\mu|.$$

Вейлевская а.с. не определена.

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. В дальнейшем достаточно рассматривать положительный спектр задачи. Переход к отрицательному спектру осуществляется путем замены КФ $J_p[u]$ на $J_{(-p)}[u]$. Величины $w_+(\lambda, x)$, $v_+(\lambda, x)$ заменяются при этом на $w_-(\lambda, x)$, $v_-(\lambda, x)$.

Приведем известные (см., например, [6]) утверждения спектральной теории операторов применительно к ФРС $N_+(\mu, \Omega)$.

а) Выделим в пространстве $H_0^a(\Omega)$ подпространства L_μ , $\mu > 0$: $\forall u \in L_\mu$, $u \neq 0$, справедливо $J_p[u] > \mu I_a[u]$. Тогда

$$N_+(\mu, \Omega) = \sup \dim L_\mu \quad \forall L_\mu. \quad (2.1)$$

б) Для любого $\mu > 0$ существует подпространство $\mathcal{L}_\mu \subset H_0^a(\Omega)$ такое, что

$$\begin{aligned} \dim(H_0^a(\Omega) \ominus \mathcal{L}_\mu) &= N_+(\mu, \Omega), \\ J_p[u] &\leq \mu I_a[u] \quad \forall u \in \mathcal{L}_\mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

в) Пусть подпространство $\mathcal{L}_\mu^* \subset H_0^a(\Omega)$, $\mu > 0$, причем $\forall u \in \mathcal{L}_\mu^*$ выполняется $J_p[u] \leq \mu I_a[u]$. Тогда

$$N_+(\mu, \Omega) \leq \dim(H_0^a(\Omega) \ominus \mathcal{L}_\mu^*). \quad (2.3)$$

г) Пусть Ξ , Ξ_i , $i = 1, \dots, n$, – открытые множества,

$$\Xi_i \subset \Xi \subset Q \quad \forall i, \quad \Xi_i \cap \Xi_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n N_+(\mu, \Xi_i) \leq N_+(\mu, \Xi) \quad \forall \mu > 0. \quad (2.4)$$

2.2. Без ограничения общности в (1.3) можно считать $c_a = c_p = 1$. Соответствующие изменения в рассуждениях вносятся переходом от μ к $\mu' = c_p^{-1} c_a \mu$. Таким образом, $\forall x \in \overline{Q}$, $\xi \in \mathbb{E}^m$ имеем

$$\Lambda(\xi) \leq a(x, \xi) \leq c_a^* \Lambda(\xi), \quad |p(x)| \leq 1, \quad (2.5)$$

$$I[u] \leq I_a[u] \leq c_a^* I[u] \quad \forall u \in H_0^a(\Omega). \quad (2.6)$$

2.3. Пусть Q^* – куб, $Q^* \subset Q$. Если функция $u_0 \in C^\infty(\overline{Q}^*)$, $(D^\beta u_0)(x) = 0$, $x \in \partial Q^*$, $0 \leq |\beta| < l$, то $u_0 \in H_0^a(Q^*)$. Действительно, в силу (2.6) $\forall u \in C_0^\infty(Q^*)$ выполнено

$$I_a[u] \leq c_a^* I[u] \leq c_a^* c(\Lambda) I_l[u],$$

где

$$I_l[u] = \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{Q^*}^2 + \|u\|_{Q^*}^2.$$

Замыкание класса функций $C_0^\infty(Q^*)$ в метрике $I_l[u]$ есть класс Соболева $\mathring{W}_2^l(Q^*)$ (см., например, [6]). Таким образом, $\mathring{W}_2^l(Q^*) \subset H_0^a(Q^*)$. В соответствии с поставленными условиями $u_0 \in \mathring{W}_2^l(Q^*)$. Тем более $u_0 \in H_0^a(Q^*)$.

2.4. Из условия (1.4) следует ограниченность множества $W(\lambda) \forall \lambda > 0$. Действительно, пусть для какого-либо λ_1 существует последовательность точек $\{\xi(n)\} \subset W(\lambda_1)$ такая, что $|\xi(n)| \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Для какого-либо $d > 0$ положим $\eta_j(n) = \xi_j(n) + d$, $j = 1, \dots, m$, $M(n) = \{\xi : \xi_j(n) < \xi_j < \eta_j(n) \forall j\}$. При этом $\Lambda(\eta(n)) \leq (d+1)^{2l} \lambda_1$, $\eta(n) \in W((d+1)^{2l} \lambda_1)$. Тем более $M(n) \subset W((d+1)^{2l} \lambda_1) \forall n$. Очевидно, можно считать, что $M(n) \cap M(n') = \emptyset$, $n \neq n'$. Отсюда $w((d+1)^{2l} \lambda_1) = \infty$, что противоречит (1.4). Ограниченность множества $W(\lambda) \forall \lambda$, т.е. (1.4), равносильна также (см. (2.5)) следующим условиям: $\forall \xi$ такого, что $\xi_j \geq 1 \forall j$, справедливо

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi) &\rightarrow \infty, \quad |\xi| \rightarrow \infty; & \Lambda(\xi) &\geq m^{-1} |\xi|^2; \\ a(x, \xi) &\rightarrow \infty, \quad |\xi| \rightarrow \infty; & a(x, \xi) &\geq m^{-1} |\xi|^2, \quad x \in \overline{Q}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.5. В дополнение к основным введем следующие обозначения. Для $\lambda \geq \lambda_0(\Lambda)$, $x \in Q$, $d > 0$

$$\begin{aligned} W_+(\lambda, x | d) &= \{\xi : a(x, \xi) < \lambda p_+(x), \xi_j > d \forall j\}, \\ w_+(\lambda, x | d) &= \text{mes}_m W_+(\lambda, x | d), \\ w_+^{(j)}(\lambda, x | d) &= \text{mes}_{m-1} W_+^{(j)}(\lambda, x | d). \end{aligned}$$

Вообще, для $s < m$

$$w_+^{(j_1 \dots j_s)}(\lambda, x | d) = \text{mes}_{m-s} W_+^{(j_1 \dots j_s)}(\lambda, x | d).$$

Обозначим также

$$r_+(\lambda, x | d) = \sum_{j=1}^m w_+^{(j)}(\lambda, x | d).$$

Далее,

$$\begin{aligned} T_d &= \{\tau \in \mathbb{E}^m : 0 < \tau_j < d \forall j\}, \\ F_+(\lambda, x | d) &= \{\eta : \eta = \xi - \tau \forall \xi \in W_+(\lambda, x | d), \forall \tau \in T_d\}, \\ f_+(\lambda, x | d) &= \text{mes}_m F_+(\lambda, x | d), \\ f_+^{(j)}(\lambda, x | d) &= \text{mes}_{m-1} F_+^{(j)}(\lambda, x | d). \end{aligned}$$

В случае $d = 1$ в обозначениях d опускается. В ситуации $a(x, \xi) = \Lambda(\xi)$, $p(x) = 1$ в обозначениях также опускаются x и $(+)$: при $d = 1$ это означает, что $f_+(\lambda, x | d) = f(\lambda)$, $f_+^{(j)}(\lambda, x | d) = f^{(j)}(\lambda)$ и т.п.

Для $d > 0$

$$\begin{aligned} Z(\lambda | d) &= \{\xi : \xi \in W(\lambda), \text{dist}(\xi, \partial W(\lambda)) < d\}, \\ z(\lambda | d) &= \text{mes}_m Z(\lambda | d), \\ z(\lambda) &= z(\lambda | 1). \end{aligned}$$

Для множества M , $M \subset \mathbb{E}^m$,

$$\begin{aligned} K(M) &= \text{card}\{k : k \in \mathbb{Z}_+^m \cap M\}, \\ K^{(j)}(M^{(j)}) &= \text{card}\{k^{(j)} : k^{(j)} \in \mathbb{Z}_+^{m-1} \cap M^{(j)}\}. \end{aligned}$$

Отметим неравенства, очевидным образом следующие из (2.5): $\forall x \in Q$, $\forall d \geq 1$

$$w_+(\lambda, x | d) \leq w_+(\lambda, x) \leq w(\lambda), \quad (2.8)$$

$$r_+(\lambda, x | d) \leq r_+(\lambda, x) \leq r(\lambda), \quad (2.9)$$

$$f_+(\lambda, x | d) \leq f_+(\lambda, x) \leq f(\lambda), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} w_+(\lambda, x | d) &\geq w_+(\lambda, x) - (d-1)r_+(\lambda, x) \\ &\geq w_+(\lambda, x) - (d-1)r(\lambda). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.6. Установим следующие неравенства:

$$w^{(j)}(\lambda) \leq c(\Lambda)(w(\lambda) + 1) \quad \forall j, \quad (2.12)$$

$$w^{(j_1 \dots j_{s-1} j_s)}(\lambda) \leq c(\Lambda)(w^{(j_1 \dots j_{s-1})}(\lambda) + 1), \quad (2.13)$$

$$(j_1 \dots j_{s-1} j_s) \subset (1 \dots m), \quad s < m, \quad (2.14)$$

$$r(\lambda) \leq c(\Lambda)(w(\lambda) + 1), \quad (2.14)$$

$$f(\lambda) \leq w(\lambda) + c(\Lambda)(r(\lambda) + 1), \quad (2.15)$$

$$f^{(j)}(\lambda) \leq c(\Lambda)(w^{(j)}(\lambda) + 1) \quad \forall j, \quad (2.16)$$

$$r_+(\lambda, x) \leq c(a)(w_+(\lambda, x) + 1), \quad (2.17)$$

$$f_+(\lambda, x) \leq w_+(\lambda, x) + c(a)(r_+(\lambda, x) + 1). \quad (2.18)$$

Докажем (2.12). Обозначим $U^{(j)}(\lambda) = \{\xi^{(j)} : \xi = (\xi^{(j)}, 2) \in W(\lambda)\}$. Оценим величину $\text{mes}_{m-1} U^{(j)}(\lambda)$. Введем переменные $\eta_i = \xi_i - 1 \quad \forall i \neq j$. Если $\xi \in W(\lambda)$, то $\eta^{(j)} \in \mathbb{E}_+^{m-1}$. При этом полином $\Lambda(\xi) = \Lambda_j(\eta^{(j)}, \xi_j)$, где

$$\Lambda_j(\eta^{(j)}, \xi_j) = \sum_{|\gamma^{(j)}| \leq 2l} c_{\gamma^{(j)}}(\xi_j)(\eta^{(j)})^{\gamma^{(j)}}, \quad c_{\gamma^{(j)}}(\xi_j) \geq 0.$$

При $\eta^{(j)} \in \mathbb{E}_+^{m-1}$, $|\eta^{(j)}| \rightarrow \infty$, $\xi_j \geq 1$ справедливо $\Lambda_j(\eta^{(j)}, \xi_j) \rightarrow \infty$ (см. (2.7)). Поэтому для некоторого $\omega = \omega(\Lambda)$, $N = N(\Lambda)$ выполняется

$$\Lambda_j(\eta^{(j)}, 2) \leq \Lambda_j(2^\omega \eta^{(j)}, 1) \quad \forall \eta^{(j)}, \quad \eta^{(j)} \in \mathbb{E}_+^{m-1}, \quad |\eta^{(j)}| \geq N.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{mes}_{m-1} U^{(j)}(\lambda) &\geq \text{mes}_{m-1} \{\eta^{(j)} : \eta^{(j)} \in \mathbb{E}_+^{m-1}, \Lambda_j(2^\omega \eta^{(j)}, 1) < \lambda\} - N^{m-1} \\ &= 2^{-\omega(m-1)} w^{(j)}(\lambda) - N^{m-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, $w(\lambda) \geq \text{mes}_{m-1} U^{(j)}(\lambda)$, что приводит к (2.12).

Доказательство (2.13) повторяет предыдущее с переходом к соответствующим множествам в пространстве $\mathbb{E}^{m-s+1}$; (2.14) следует из (2.12).

Докажем (2.15). Заметим, что

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= w(\lambda) + \sum_j w^{(j)}(\lambda) + \sum_{j_1 j_2} w^{(j_1 j_2)}(\lambda) + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{m-1}} w^{(j_1 \dots j_{m-1})}(\lambda) + 1, \\ (j_1 \dots j_s) &\subset (1 \dots m), \quad 1 \leq s < m. \end{aligned}$$

Для слагаемых $w^{(j_1 \dots j_s)}(\lambda)$, $2 \leq s < m$, последовательно применяем (2.13). Это приводит к (2.15). Доказательство (2.16) отличается лишь упрощениями.

Заменим в рассуждениях $\Lambda(\xi)$ на $a(x, \xi)$, λ на $p_+(x)\lambda$, $W(\lambda)$ на $W_+(\lambda, x)$. При этом доказательство (2.17), (2.18) повторяет доказательство (2.14), (2.15).

С учетом (1.2) из (2.14)–(2.18), (2.9) следуют оценки

$$r(\lambda) \leq C(\Lambda)w(\lambda), \quad (2.19)$$

$$f_+(\lambda, x) \leq w_+(\lambda, x) + C(a)r(\lambda), \quad (2.20)$$

$$f^{(j)}(\lambda) \leq C(\Lambda)r(\lambda) \quad \forall j. \quad (2.21)$$

2.7. Установим свойства непрерывности и порядок роста величин $w_+(\lambda, x)$, $w(\lambda)$, $r(\lambda)$, $z(\lambda | d)$.

а) Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} w_+((1+\varepsilon)\lambda, x) &\leq (1+c(a)\varepsilon)w_+(\lambda, x) + C(a), \\ \varepsilon &\in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(a), \quad 0 < \varepsilon_0 < 2^{-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Предварительно заметим, что в силу (2.11), (2.17)

$$w_+((1+\varepsilon)\lambda, x) \leq w_+((1+\varepsilon)\lambda, x | d) + c(a)(d-1)(w_+((1+\varepsilon)\lambda, x) + 1) \quad \forall d \geq 1. \quad (2.23)$$

Положим

$$d = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad \eta = d^{-1}\xi.$$

При $|\xi| \geq N(a)$, $\xi \in W_+((1+\varepsilon)\lambda, x | d)$ имеем $\eta \in W_+(\lambda, x)$. Отсюда

$$w_+((1+\varepsilon)\lambda, x | d) \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{m/2} w_+(\lambda, x) + N^m \leq (1+c(m)\varepsilon)w_+(\lambda, x) + c(a). \quad (2.24)$$

Так как $\varepsilon < 2^{-1}$, то $d-1 \leq 4\varepsilon$. В силу (2.23), (2.24)

$$w_+((1+\varepsilon)\lambda, x) \leq (1+c(m)\varepsilon)w_+(\lambda, x) + 4c(a)\varepsilon w_+((1+\varepsilon)\lambda, x) + C(a).$$

Отсюда следует (2.22) при условии $4c(a)\varepsilon < 2^{-1}$ ($\varepsilon_0 = \min\{8^{-1}c^{-1}(a), 2^{-1}\}$).

б) Справедливы неравенства

$$w(t\lambda) \leq c(\Lambda)t^{m/2}w(\lambda), \quad t \geq 1, \quad (2.25)$$

$$r(t\lambda) \leq c(\Lambda)t^{(m-1)/2}r(\lambda), \quad t \geq 1. \quad (2.26)$$

Заметим, что в силу (2.7) $w(t\lambda) \leq c(m)(t\lambda)^{m/2} \forall \lambda$. Оценим $w(t\lambda)$ для $\lambda \geq 2\Lambda(0)$. Если $\xi \in W(t\lambda | (2t)^{1/2})$, $\eta = (2t)^{-1/2}\xi$, то $\eta \in W(2^{-1}\lambda + \Lambda(0))$. Тем более $\eta \in W(\lambda)$. Отсюда (ср. (2.11))

$$w(t\lambda) \leq (2t)^{m/2}w(\lambda) + (w(t\lambda) - w(t\lambda | (2t)^{1/2})) \leq (2t)^{m/2}w(\lambda) + (2t)^{1/2}r(t\lambda).$$

Повторим рассуждения для величины $r(t\lambda)$:

$$r(t\lambda) \leq (2t)^{(m-1)/2}r(\lambda) + (2t)^{1/2}r_{(1)}(t\lambda),$$

$$r_{(1)}(t\lambda) = \sum_{j_1 j_2} w^{(j_1 j_2)}(t\lambda), \quad (j_1 j_2) \subset (1 \dots m).$$

Тогда $w(t\lambda) \leq (2t)^{m/2}(w(\lambda) + r(\lambda)) + 2tr_{(1)}(t\lambda)$. Далее процедура оценки применяется к $r_{(1)}(t\lambda)$ и т.д. С учетом (2.19), (2.13) это приводит к (2.25), (2.26).

в) Справедливы неравенства

$$w(t\lambda) \leq c(\Lambda)t^{m/(2l)}w(\lambda), \quad t \in (0, 1), \quad (2.27)$$

$$r(t\lambda) \leq c(\Lambda)t^{(m-1)/(2l)}r(\lambda), \quad t \in (0, 1). \quad (2.28)$$

Обозначим через M_+ объединение кубов $\bar{S}(k)$, $k \in W_+(\lambda, x)$,

$$M_+^* = W_+(\lambda, x) \setminus M_+.$$

Если $\xi \in M_+^*$, то $\text{dist}(\xi, \partial W_+(\lambda, x)) \leq m^{1/2}$. Тогда (ср. (2.32))

$$\text{mes}_m M_+^* \leq c(a)r_+(\lambda, x).$$

Очевидно, $\text{mes}_m M_+ = K(W_+(\lambda, x))$. Отсюда следует (2.34).

в) Справедливы неравенства

$$K^{(j)}(W_+^{(j)}(\lambda, x)) \leq w^{(j)}(\lambda, x) \quad \forall j, \quad (2.35)$$

$$K^{(j)}(\overline{W^{(j)}}(\lambda)) \leq c(\Lambda)r(\lambda) \quad \forall j. \quad (2.36)$$

Действительно, если $k^{(j)} \in W_+^{(j)}(\lambda, x)$, то $(m-1)$ -мерный куб

$$S^{(j)}(k^{(j)}, 1) \subset W_+^{(j)}(\lambda, x).$$

Отсюда следует (2.35). Далее (ср. (2.33))

$$K^{(j)}(\overline{W^{(j)}}(\lambda)) \leq f^{(j)}(\lambda),$$

(2.36) следует теперь из (2.21).

г) Справедливо неравенство

$$K(\overline{Z}(\lambda|d)) \leq c(\Lambda)dr(\lambda) \quad \forall d \geq 1. \quad (2.37)$$

Пусть $k \in \overline{Z}(\lambda|d)$. Если $k_j > 1 \forall j$, то куб $S(k) \subset \overline{Z}(\lambda|d + m^{1/2})$. Если $k_j = 1$ для какого-либо j , то $k \in \overline{W^{(j)}}(\lambda)$. Отсюда

$$K(\overline{Z}(\lambda|d)) \leq z(\lambda|d + m^{1/2}) + \sum_{j=1}^{(j)} K^{(j)}(\overline{W^{(j)}}(\lambda)).$$

Оценка (2.37) следует теперь из (2.32), (2.36).

§ 3. Оценки спектра модельных задач

В данном параграфе $Q = Q_\pi$, в (1.3) $c_a = c_p = 1$, $w(\lambda) < \infty$ (см. пп. 2.2, 2.4). Используются обозначения п. 2.5, а также следующие:

$$\|\cdot\|_{Q_{\pi q}} = \|\cdot\|_{\pi q}, \quad (\cdot, \cdot)_{Q_{\pi q}} = (\cdot, \cdot)_{\pi q}, \quad 0 < q \leq 1,$$

$$e_k(x) = (2\pi^{-1})^{m/2} \prod_{j=1}^m \sin(k_j x_j), \quad k \in \mathbb{Z}_+^m.$$

3.1. Пусть a_α , $\alpha \in \Lambda$, – коэффициенты, p постоянные; $a_\alpha(x) = a_\alpha(x^{(0)})$ для $x^{(0)} \in Q_\pi$, $p(x) = p(x^{(0)}) \forall x \in Q_\pi$. ФРС соответствующей задачи обозначим через $N_+^{(0)}(\mu, \Omega)$, $\Omega \subset Q_\pi$.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие оценки:*

$$N_+^{(0)}(\mu, Q_\pi) \leq f_+(\mu^{-1}, x^{(0)}), \quad (3.1)$$

$$N_+^{(0)}(\mu, Q_\pi) \geq w_+(\mu^{-1}, x^{(0)}) - c(a)r_+(\mu^{-1}, x^{(0)}). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $u \in H_0^a(Q_\pi)$ обозначим $c_k = (u, e_k)_\pi$, $k \in \mathbb{Z}_+^m$. При этом

$$I_a[u] = \sum_k a(x^{(0)}, k) |c_k|^2, \quad J_p[u] = p(x^{(0)}) \sum_k |c_k|^2.$$

Если $\mathcal{L}_\mu^* = \{u \in H_0^a(Q_\pi) : c_k = 0 \forall k \in \overline{F}_+(\mu^{-1}, x^{(0)})\}$, то $J_p[u] \leq \mu I_a[u] \forall u \in \mathcal{L}_\mu^*$. Оценка (3.1) следует теперь из (2.3), (2.33).

Пусть L_μ – следующее подпространство: $u \in L_\mu$, если

$$u = \sum_k c_k e_k, \quad k \in W_+(\mu^{-1}, x^{(0)}),$$

$$(D^\beta u)(x) = 0 \quad \forall x \in \partial Q_\pi, \quad \forall \beta, \quad 0 \leq |\beta| < l.$$

При этом $L_\mu \subset H_0^a(Q_\pi)$ (см. п. 2.3),

$$\dim L_\mu \geq K(W_+(\mu^{-1}, x^{(0)})) - l \sum_{j=1}^m K^{(j)}(W_+^{(j)}(\mu^{-1}, x^{(0)})),$$

$$J_p[u] > \mu I_a[u] \quad \forall u \in L_\mu, \quad u \neq 0.$$

Оценка (3.2) следует из (2.1) с учетом (2.34), (2.35).

ЛЕММА 2. Пусть $0 < q \leq 1$, точка $x^{(0)} \in Q_{\pi q}$. Тогда

$$N_+^{(0)}(\mu, Q_{\pi q}) \leq q^m w_+(\mu^{-1}, x^{(0)}) + c(a) q^m r(\mu^{-1}), \quad (3.3)$$

$$N_+^{(0)}(\mu, Q_{\pi q}) \geq q^m w_+(\mu^{-1}, x^{(0)}) - c(a) q^{m-1} r(\mu^{-1}). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a^{(q)}(x^{(0)}, \xi) = a(x^{(0)}, q^{-1}\xi)$,

$$I_a^{(q)}[u] = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(x^{(0)}) q^{-2|\alpha|} \|D^\alpha u\|_\pi^2,$$

$$J_p^{(q)}[u] = p(x^{(0)}) \|u\|_\pi^2, \quad u \in H_0^a(Q_\pi),$$

$N_+^{(q)}(\mu, Q_\pi)$ – ФРС задачи, соответствующей введенным КФ.

Далее, $w_{+(q)}(\lambda, x^{(0)})$, $r_{+(q)}(\lambda, x^{(0)})$, $f_{+(q)}(\lambda, x^{(0)})$ – величины, определенные аналогично $w_+(\lambda, x^{(0)})$, $r_+(\lambda, x^{(0)})$, $f_+(\lambda, x^{(0)})$ с заменой $a(x^{(0)}, \xi)$ на $a^{(q)}(x^{(0)}, \xi)$. При этом (см. (2.11), (2.9), (2.20))

$$w_{+(q)}(\lambda, x^{(0)}) = q^m w_+(\lambda, x^{(0)} | q^{-1}) \geq q^m w_+(\lambda, x^{(0)}) - q^{m-1} r(\lambda),$$

$$r_{+(q)}(\lambda, x^{(0)}) = q^{m-1} r_+(\lambda, x^{(0)} | q^{-1}) \leq q^{m-1} r_+(\lambda, x^{(0)}) \leq q^{m-1} r(\lambda), \quad (3.5)$$

$$f_{+(q)}(\lambda, x^{(0)}) = q^m f_+(\lambda, x^{(0)} | q^{-1}) \leq q^m f_+(\lambda, x^{(0)}) \leq q^m (w_+(\lambda, x^{(0)}) + c(a)r(\lambda)).$$

Замена переменных $x' = q^{-1}x$: $Q_{\pi q} \rightarrow Q_{\pi}$ приводит к равенству $N_+^{(0)}(\mu, Q_{\pi q}) = N_+^{(q)}(\mu, Q_{\pi})$. Для оценки $N_+^{(q)}(\mu, Q_{\pi})$ используем (3.1), (3.2) с заменой величин w_+ , r_+ , f_+ на $w_{+(q)}$, $r_{+(q)}$, $f_{+(q)}$. С учетом (3.5) это приводит к (3.3), (3.4).

3.2. Рассмотрим случай переменных коэффициентов $a_{\alpha}(x)$, $p(x)$. Заметим, что $\forall x$, $x^{(0)} \in Q_{\pi q}$

$$\begin{aligned} |a_{\alpha}(x) - a_{\alpha}(x^{(0)})| &\leq C(a)q \quad \forall \alpha \in \Lambda, \\ |p(x) - p(x^{(0)})| &\leq C(p)q. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$c_0 = c_0(a, p) = \max\{C(a), C(p)\},$$

$$q < (12c_0)^{-1}, \quad \delta \in (6c_0q, 2^{-1}), \quad \omega = 3c_0q\delta^{-1}.$$

а) Если $p(x) \geq \delta \quad \forall x \in Q_{\pi q}$, то

$$N_+(\mu, Q_{\pi q}) \leq \pi^{-m}(1 + c(a)\omega) \int_{Q_{\pi q}} w_+(\mu^{-1}, x) dx + c(a)q^m r(\mu^{-1}), \quad (3.7)$$

$$N_+(\mu, Q_{\pi q}) \geq \pi^{-m}(1 - c(a)\omega) \int_{Q_{\pi q}} w_+(\mu^{-1}, x) dx - c(a)q^{m-1}r(\mu^{-1}). \quad (3.8)$$

б) Если условие п. а) не выполнено, то

$$N_+(\mu, Q_{\pi q}) \leq c(a)q^m(\delta^{m/(2l)}w(\mu^{-1}) + \delta^{(m-1)/(2l)}r(\mu^{-1})). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие п. а). Для какой-либо точки $x^{(0)} \in Q_{\pi q}$ обозначим

$$J_p^{(0)}[u] = p(x^{(0)})\|u\|_{\pi q}^2, \quad I_a^{(0)}[u] = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_{\alpha}(x^{(0)})\|D^{\alpha}u\|_{\pi q}, \quad u \in H_0^a(Q_{\pi q}),$$

$N_+^{(0)}(\mu, Q_{\pi q})$ – соответствующая ФРС (ср. п. 3.1). В силу (3.6)

$$\begin{aligned} (1 - c_0q)a_{\alpha}(x^{(0)}) &\leq a_{\alpha}(x) \leq (1 + c_0q)a_{\alpha}(x^{(0)}), \\ (1 - c_0q\delta^{-1})p(x^{(0)}) &\leq p(x) \leq (1 + c_0q\delta^{-1})p(x^{(0)}) \end{aligned}$$

$\forall x \in Q_{\pi q}$, $\forall \alpha$. Отсюда $\forall u \in H_0^a(Q_{\pi q})$

$$(1 - \omega) \frac{J_p^{(0)}[u]}{I_a^{(0)}[u]} \leq \frac{J_p[u]}{I_a[u]} \leq (1 + \omega) \frac{J_p^{(0)}[u]}{I_a^{(0)}[u]}.$$

В соответствии с (2.1)

$$N_+^{(0)}((1 - \omega)^{-1}\mu, Q_{\pi q}) \leq N_+(\mu, Q_{\pi q}) \leq N_+^{(0)}((1 + \omega)^{-1}\mu, Q_{\pi q}).$$

Для величин $N_+^{(0)}((1 \pm \omega)^{-1}\mu, Q_{\pi q})$ используем (3.3), (3.4) с учетом (2.22), (2.26). Тогда

$$\begin{aligned} (1 - c\omega)q^m w_+(\mu^{-1}, x^{(0)}) - cq^{m-1}r(\mu^{-1}) \\ \leq N_+(\mu, Q_{\pi q}) \leq (1 + c\omega)q^m w_+(\mu^{-1}, x^{(0)}) + cq^{m-1}r(\mu^{-1}), \quad c = c(a). \end{aligned}$$

Оценки (3.7), (3.8) получаются отсюда интегрированием по $x^{(0)} \in Q_{\pi q}$.

Пусть условие п. а) не выполнено. В силу (3.6) $p(x) \leq \delta + c_0 q < 2\delta \forall x \in Q_{\pi q}$. Тогда с учетом (2.6)

$$\frac{J_p[u]}{I_a[u]} \leq \frac{2\delta \|u\|_{\pi q}^2}{I[u]} \quad \forall u \in H_0^a(Q_{\pi q}). \quad (3.10)$$

Если $N_+^{(0,1)}(\mu, Q_{\pi q})$ – ФРС задачи, соответствующей КФ $I[u]$, $\|u\|_{\pi q}^2$, то в силу (2.1), (3.10) $N_+(\mu, Q_{\pi q}) \leq N_+^{(0,1)}((2\delta)^{-1}\mu, Q_{\pi q})$. Последнюю величину оценим в соответствии с (3.3) (с заменой $w_+(\lambda, x^{(0)})$ на $w(\lambda)$) и используем (2.27), (2.28). Это приводит к (3.9).

3.3. Положим $q = \mathcal{N}^{-1}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$. Куб $\overline{Q}_\pi$ представим в виде объединения конгруэнтных кубов $\overline{Q}_{\pi q}^{(\nu)} = \{x : x = x^{(0)} + \pi q \nu \mid x^{(0)} \in \overline{Q}_{\pi q}\}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_i = 0, \dots, \mathcal{N} - 1 \forall i$. Множество указанных ν обозначим через $E = E(\mathcal{N})$.

ЛЕММА 4. Пусть условие (1.6) выполнено. Тогда для $\chi = 2m(m^2 + 3m + 4l)^{-1}$

$$N_+(\mu, Q_\pi) \leq \pi^{-m} \int_{Q_\pi} w_+(\mu^{-1}, x) dx + c(a) w^{1-\chi}(\mu^{-1}) r^\chi(\mu^{-1}). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $B(t\lambda) = \mathbb{E}_+^m \setminus \overline{W}(t\lambda)$, $W(t\lambda | q^{-1}) = \overline{W}(t\lambda) \setminus \overline{Z}(t\lambda | q^{-1})$, $\lambda \geq \lambda_0(\Lambda)$, $t > 2$, $q = \mathcal{N}^{-1}$ (см. выше). Очевидно,

$$\text{dist}(W(t\lambda | q^{-1}), B(t\lambda)) \geq q^{-1}.$$

Отметим следующее: для функции $\Theta(k, h) = \prod_{j=1}^m (1 + |k_j - h_j|^2)^{-1}$, $k, h \in \mathbb{Z}_+^m$,

$$\begin{aligned} \sum_{h \in B} \Theta(k, h) &\leq c(m)q \quad \forall k \in W, \\ \sum_{k \in W} \Theta(k, h) &\leq c(m)q \quad \forall h \in B, \\ W &= W(t\lambda | q^{-1}), \quad B = B(t\lambda). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пусть функция $u \in H_0^a(Q_\pi)$, причем

$$c_k = (u, e_k)_\pi = 0 \quad \forall k \in \overline{Z}(t\lambda | q^{-1}). \quad (3.13)$$

Тогда $u = u_w + u_b$,

$$u_w = \sum_{k \in W} c_k e_k, \quad u_b = \sum_{h \in B} c_h e_h. \quad (3.14)$$

Слагаемое u_w подчиним следующим условиям:

$$(D^\beta u_w)(x) = 0 \quad \forall x \in \partial Q_{\pi q}^{(\nu)}, \quad \forall \nu \in E(\mathcal{N}), \quad (3.15)$$

$0 \leq |\beta| < l$. При этом $u_w \in H_0^a(Q_{\pi q}^{(\nu)}) \forall \nu \in E(\mathcal{N})$, $u_b \in H_0^a(Q_\pi)$ (см. п. 2.3). Общее число условий (3.13), (3.15) не превышает величины (см. (2.36), (2.37))

$$(\mathcal{N} + 1)l \sum_{j=1}^m K^{(j)}(\overline{W}^{(j)}(t\lambda)) + K(\overline{Z}(t\lambda | q^{-1})) \leq c(\Lambda) q^{-1} r(t\lambda), \quad \mathcal{N} = q^{-1}. \quad (3.16)$$

Для $h \in B$ выполняется $\Lambda(h) > t\lambda$. Поэтому

$$I_a[u_b] = \sum_{h \in B} \Lambda(h) |c_h|^2 \geq t\lambda \|u_b\|_\pi^2. \quad (3.17)$$

Оценим скалярные произведения ($\alpha \in \Lambda$):

$$(a_\alpha D^\alpha u_w, D^\alpha u_b)_\pi = \sum_{k \in W} \sum_{h \in B} c_k \bar{c}_h (a_\alpha D^\alpha e_k, D^\alpha e_h)_\pi.$$

Двукратное интегрирование по частям по каждой из переменных x_j с учетом (3.12) приводит к оценкам

$$\begin{aligned} |(a_\alpha D^\alpha e_k, D^\alpha e_h)_\pi| &\leq c(a_\alpha) k^\alpha h^\alpha \Theta(k, h), \\ |(a_\alpha D^\alpha u_w, D^\alpha u_b)_\pi| &\leq c(a_\alpha) \left(\sum_{k \in W} k^{2\alpha} |c_k|^2 \sum_{h \in B} \Theta(k, h) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{h \in B} h^{2\alpha} |c_h|^2 \sum_{k \in W} \Theta(k, h) \right)^{1/2} \\ &\leq c(m, a_\alpha) q \|D^\alpha u_w\|_\pi \|D^\alpha u_b\|_\pi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.14), (3.18) следует, что

$$I_a[u] \geq (1 - c(a)q)(I_a[u_w] + I_a[u_b]). \quad (3.19)$$

Доказательство следующего неравенства отличается от (3.19) лишь упрощениями:

$$J_p[u] \leq J_{p+q}[u_w] + c(p) \|u_b\|_\pi^2, \quad (3.20)$$

$p + q = p(x) + q$, $x \in Q_\pi$. В силу (3.19), (3.20), (2.6), (3.17)

$$\begin{aligned} \frac{J_p[u]}{I_a[u]} &\leq (1 - c(a)q)^{-1} \left(\frac{J_{p+q}[u_w]}{I_a[u_w]} + \frac{c(p) \|u_b\|_\pi^2}{I[u_b]} \right) \\ &\leq (1 - c(a)q)^{-1} \left(\frac{J_{p+q}[u_w]}{I_a[u_w]} + c(p)t^{-1}\lambda^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В соответствии с (2.2) $\forall \mu_1 > 0$, $\forall \nu \in E$ существуют подпространства $\mathcal{L}_{\mu_1}^{(\nu)} \subset H_0^a(Q_{\pi q}^{(\nu)})$ такие, что

$$\begin{aligned} \dim(H_0^a(Q_{\pi q}^{(\nu)}) \ominus \mathcal{L}_{\mu_1}^{(\nu)}) &= N_+^{(q)}(\mu_1, Q_{\pi q}^{(\nu)}), \\ J_{p+q}[u] &\leq \mu_1 I_a[u] \quad \forall u \in \mathcal{L}_{\mu_1}^{(\nu)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$N_+^{(q)}(\mu_1, Q_{\pi q}^{(\nu)})$ – ФРС задачи, соответствующей КФ $I_a[u]$, $J_{p+q}[u]$, $u \in H_0^a(Q_{\pi q}^{(\nu)})$. Положим $\mu_1 = \varphi(q, t)\mu$, $\varphi(q, t) = 1 - c(a)q - c(p)t^{-1}$, $\lambda = \mu^{-1}$.

В пространстве $H_0^a(Q_\pi)$ выделим подпространство $\mathcal{L}_\mu^*$, для которого выполняются условия (3.13), (3.15) и условие $u \in \mathcal{L}_{\mu_1}^{(\nu)} \forall \nu \in E(\mathcal{N})$. В силу (3.21), (3.22), (3.16)

$$\begin{aligned} J_p[u] &\leq \mu I_a[u] \quad \forall u \in \mathcal{L}_\mu^*, \\ \dim(H_0^a(Q_\pi) \ominus \mathcal{L}_\mu^*) &\leq c(\Lambda)q^{-1}r(t\mu^{-1}) + \sum_{\nu \in E} N_+^{(q)}(\varphi(q, t)\mu, Q_{\pi q}^{(\nu)}). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.3) с учетом (2.26)

$$N_+(\mu, Q_\pi) \leq C(\Lambda) q^{-1} t^{(m-1)/2} r(\mu^{-1}) + \sum_{\nu \in E} N_+^{(q)}(\varphi(q, t)\mu, Q_{\pi q}^{(\nu)}). \quad (3.23)$$

Для оценки ФРС в (3.23) используем (3.7), (3.9) с заменой μ на $\varphi(q, t)\mu$, p на $p + q$, $Q_{\pi q}$ на $Q_{\pi q}^{(\nu)}$.

Пусть $\delta > 0$. Далее будем считать, что при $\mu \rightarrow 0$ выполняется $\delta \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $q = o(\delta)$ ($\delta > 0$).

а) Пусть $p(x) \geq \delta \ \forall x \in Q_{\pi q}^{(\nu)}$ (ср. условие леммы 3). Тогда $\delta < p(x) + q \leq (1 + q\delta^{-1})p(x)$, $x \in Q_{\pi q}^{(\nu)}$. В соответствии с (3.7) при $\omega = 3c_0(a, p)q\delta^{-1}$ и (2.22) при $\varepsilon = (\varphi(q, t))^{-1}(1 + q\delta^{-1}) - 1$ получим, что

$$N_+^{(q)}(\varphi(q, t)\mu, Q_{\pi q}^{(\nu)}) \leq Cq^m r(\mu^{-1}) + \pi^{-m}(1 + C(q\delta^{-1} + t^{-1})) \int_{Q_{\pi q}^{(\nu)}} w_+(\mu^{-1}, x) dx, \quad (3.24)$$

$$C = C(a, p).$$

б) Пусть условие п. а) не выполнено. Используем (3.9) с заменой p на $p + q$ ($q < \delta$), δ на 2δ . Тогда

$$N_+^{(q)}(\varphi(q, t)\mu, Q_{\pi q}^{(\nu)}) \leq C(a)q^m (\delta^{m/(2l)} w(\mu^{-1}) + \delta^{(m-1)/(2l)} r(\mu^{-1})). \quad (3.25)$$

Оценка (3.11) следует из (3.23)–(3.25) при

$$\delta = \left(\frac{r(\mu^{-1})}{w(\mu^{-1})} \right)^{2l\chi/m}, \quad t = \delta^{-m/(2l)}, \quad q = \delta^{1+m/(2l)}.$$

§ 4. Доказательства теорем 1–4

Доказательства проводятся для величин $N_+(\mu, \Omega)$, в (1.3) $c_a = c_p = 1$ (см. пп. 2.1, 2.2), $Q = Q_\pi$. Случай $Q \neq Q_\pi$ рассматривается в п. 4.5.

4.1. Доказательство теоремы 1. Необходимость. (См. построения п. 2.4.) Пусть $w(\lambda_1) = \infty$ для некоторого λ_1 . Для $d = 4(ml + 1)$ кубы $M(n) \subset W((d + 1)^{2l}\lambda_1)$, $M(n) \cap M(n') = \emptyset$, $n \neq n'$. Выберем точки $k(n) \in \mathbb{Z}_+^m$, $2k(n) \in M(n)$, $\text{dist}(2k(n), \partial M(n)) > 2ml \ \forall n$. Введем следующие функции:

$$u_n(x) = \exp(2ik(n)x) \prod_{j=1}^m \sin^l(2x_j) = \sum_h c_h(n) \exp(2ihx),$$

$$h \in \mathbb{Z}_+^m, \quad 2h \in M(n).$$

Тогда $u_n \in H_0^\Lambda(Q_\pi)$ ($a = \Lambda$, см. п. 2.3),

$$\|u_n\|_{Q_\pi}^2 = \pi^m \sum_h |c_h(n)|^2,$$

$$I[u_n] = \pi^m \sum_h \Lambda(2h) |c_h(n)|^2 < (d + 1)^{2l} \lambda_1 \|u_n\|_{Q_\pi}^2, \quad (4.1)$$

$(u_n, u_{n'})_{Q_\pi} = 0$, $n \neq n'$. Обозначим через $N_+^{(\Lambda)}(\mu, Q_\pi)$ ФРС задачи, соответствующей КФ $I[u]$, $\|u\|_{Q_\pi}^2$, $u \in H_0^\Lambda(Q_\pi)$. В силу (2.1), (4.1)

$$N_+^{(\Lambda)}((d+1)^{-2l}\lambda_1^{-1}) = \infty.$$

Достаточность установлена в лемме 3 §3: в силу (2.4), (3.7), (3.9) с учетом (2.8), (2.9), (2.14) $N_+(\mu, \Omega) < \infty \forall \mu > 0$.

4.2. Доказательство теоремы 3. (См. пп. 3.2, 3.3.) Пусть $\Omega \subset Q_\pi$, $\delta > 0$. Построим кубы $Q_{\pi q}^{(\nu)}$: $q = \mathcal{N}^{-1}$, $\nu \in E(\mathcal{N})$, $q < (12c_0)^{-1}$, $\delta \in (6c_0q, 2^{-1})$, $c_0 = c_0(a, p)$. Будем писать: $\nu \in T$, если $Q_{\pi q}^{(\nu)} \subset \Omega$; $\nu \in A$, если $\nu \in T$, $p(x) \geq \delta \forall x \in Q_{\pi q}^{(\nu)}$; $D = T \setminus A$. Если $\nu \in D$, то $p(x) \leq 2\delta \forall x \in Q_{\pi q}^{(\nu)}$ (ср. доказательство леммы 3). В силу (1.1)

$$\text{mes } \Omega - \sum_{\nu \in T} \text{mes } Q_{\pi q}^{(\nu)} \leq c(\Omega)q. \quad (4.2)$$

В соответствии с (2.4), (3.8) $(\omega = 3c_0(a, p)q\delta^{-1})$

$$\begin{aligned} N_+(\mu, \Omega) &\geq \sum_{\nu \in A} N_+(\mu, Q_{\pi q}^{(\nu)}) \\ &\geq \pi^{-m}(1 - Cq\delta^{-1}) \sum_{\nu \in A} \int_{Q_{\pi q}^{(\nu)}} w_+(\mu^{-1}, x) dx - cq^{-1}r(\mu^{-1}), \\ C &= C(a, p), \quad c = c(a). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Далее, в силу (2.8), (2.27), (4.2)

$$\sum_{\nu \in D} \int_{Q_{\pi q}^{(\nu)}} w_+(\mu^{-1}, x) dx \leq w(2\delta\mu^{-1}) \text{mes } \Omega \leq C(\Lambda, \Omega)\delta^{m/(2l)}w(\mu^{-1}), \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} w_+(\mu^{-1}, x) dx - \sum_{\nu \in T} \int_{Q_{\pi q}^{(\nu)}} w_+(\mu^{-1}, x) dx \leq c(\Omega)qw(\mu^{-1}). \quad (4.5)$$

Положим $\chi_0 = 2^{-1}m(m+l)^{-1}$,

$$\delta = \left(\frac{r(\mu^{-1})}{w(\mu^{-1})} \right)^{2l\chi_0/m}, \quad q = \delta^{1+m/(2l)}.$$

Заметим, что $\chi_0 > \chi$. Из (4.3)–(4.5) следует, что

$$N_+(\mu, \Omega) \geq \int_{\Omega} w_+(\mu^{-1}, x) dx - C(a, p, \Omega)r^{\chi_0}(\mu^{-1})w^{1-\chi_0}(\mu^{-1}). \quad (4.6)$$

Пусть $\Omega^* = Q_\pi \setminus \Omega$. В силу (2.4) $N_+(\mu, \Omega) \leq N_+(\mu, Q_\pi) - N_+(\mu, \Omega^*)$. К $N_+(\mu, Q_\pi)$ применим (3.11), к $N_+(\mu, \Omega^*)$ – (4.6) с заменой Ω на Ω^* . Тогда

$$N_+(\mu, \Omega) \leq \pi^{-m} \int_{\Omega} w_+(\mu^{-1}, x) dx + C(a, p, \Omega)r^\chi(\mu^{-1})w^{1-\chi}(\mu^{-1}). \quad (4.7)$$

Утверждение теоремы следует из (4.6), (4.7).

4.3. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть условие (1.6) не выполнено. Задачу класса Λ рассмотрим для $a(x, \xi) = \Lambda(\xi)$, $p(x) = 1$. Если (1.5) справедливо, то $N_+(\mu, \Omega) \sim \Phi_+(\mu^{-1}) \text{mes } \Omega \forall \Omega$. Однако последнее соотношение не имеет места для какой-либо функции $\Phi_+(\lambda)$ [4; теорема 6].

Достаточность установлена в теореме 3.

4.4. Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть условие (1.8) не выполнено. Как и в п. 4.3, положим $a(x, \xi) = \Lambda(\xi)$, $p(x) = 1$. При этом $v_+(\mu^{-1}, x) = v(\mu^{-1})$. Однако вейлевская асимптотика

$$N_+(\mu, \Omega) \sim \pi^{-m}(\text{mes } \Omega)v(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow +0,$$

нарушается для некоторого куба $Q^{(0)} \subset Q_\pi$ [5; теорема 3].

Достаточность. Если (1.8) выполнено, то $\lim(w(\lambda)v^{-1}(\lambda)) = 1$, $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда (см. (1.2)) справедливо (1.6), тем самым и (1.7). Очевидно, $v_+(\mu^{-1}, x) \leq w_+(\mu^{-1}, x) + g(\mu^{-1})$, $x \in Q_\pi$. Отсюда в соответствии с (1.7)

$$\left| N_+(\mu, \Omega) - \pi^{-m} \int_{\Omega} v_+(\mu^{-1}, x) dx \right| \leq c(a, p, \Omega)(g(\mu^{-1}) + r^\chi(\mu^{-1})w^{1-\chi}(\mu^{-1})),$$

что с учетом (1.2) приводит к (1.9).

4.5. Рассмотрим случай $Q \neq Q_\pi$. (См. обозначения п. 2.5.) Очевидно, можно считать $Q = Q_{\pi q}$, $q > 0$. Выполним замену переменных $x' = q^{-1}x$: $Q_{\pi q} \rightarrow Q_\pi$ (ср. доказательство леммы 3 §3). Величины $w(\lambda)$, $v(\lambda)$, $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $w_+(\lambda, x)$, $v_+(\lambda, x)$ заменяются соответственно на $w_{(q)}(\lambda) = q^m w(\lambda | q^{-1})$, $v_{(q)}(\lambda) = q^m v(\lambda)$, $r_{(q)}(\lambda) = q^{m-1} r(\lambda | q^{-1})$, $g_{(q)}(\lambda) = q^m (v(\lambda) - w(\lambda | q^{-1}))$, $w_{+(q)}(\lambda, x') = q^m w_+(\lambda, x | q^{-1})$, $v_{+(q)}(\lambda, x') = q^m v_+(\lambda, x)$. С учетом (2.29)–(2.31) дальнейшие изменения в доказательствах очевидны.

Список литературы

- [1] В. Н. Туловский, “Распределение собственных значений для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами”, *Функц. анализ*, **5:3** (1971), 85–90.
- [2] В. Н. Туловский, “Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **89(131):2** (1972), 191–206.
- [3] А. С. Андреев, “Асимптотика спектра задачи Дирихле для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами”, *Функц. анализ и его прилож.*, **17:3** (1983), 61–62.
- [4] А. С. Андреев, “О формуле Вейля спектральной асимптотики для неэллиптических операторов задачи Дирихле”, *Проблемы математического анализа (межвузовск. сборн.)*, № 9, Изд-во ЛГУ, Л., 1984, 3–18.
- [5] А. И. Кароль, М. З. Соломяк, “Об одном классе дифференциальных операторов с нестандартным поведением спектра задачи Дирихле”, *Матем. заметки*, **31:5** (1982), 747–751.
- [6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.

А. С. Андреев (A. S. Andreev)
Военно-морской институт радиоэлектроники
им. А. С. Попова, г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
19.02.2004 и 18.02.2005