Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, И. А. Гореликова, Е. В. Жужома, О замкнутых секущих иррациональных потоков на поверхностях, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 35–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:26:25

УДК 517.917+513.9

С. Х. Арансон, И. А. Гореликова, Е. В. Жужома

О замкнутых секущих иррациональных потоков на поверхностях

В работе рассматриваются замкнутые простые трансверсали у иррационального потока на замкнутой ориентируемой поверхности отрицательной эйлеровой характеристики. Дается отрицательный ответ на гипотезу А. Б. Катка о существовании для иррациональных потоков на таких поверхностях простых замкнутых трансверсалей в любом свободном гомотопическом классе, содержащем негомологичные нулю простые замкнутые кривые.

Библиография: 17 названий.

Введение

Одним из основных методов исследования динамических систем с непрерывным временем (потоков), восходящим к Пуанкаре, является построение секущей и изучение отображения последования на этой секущей. Классическим примером такого подхода служит изучение топологической структуры потока без точек покоя и без периодических траекторий на двумерном торе T^2 (например, минимального потока, у которого каждая траектория всюду плотна на T^2). Для такого потока в каждом ненулевом гомотопическом (и, следовательно, гомологическом) классе тора, содержащем простую замкнутую геодезическую, существует простая замкнутая трансверсаль, свободно гомотопная указанной геодезической. Этот результат очевиден для минимального потока, поскольку он топологически эквивалентен линейному потоку. Для нетранзитивного (заведомо, неминимального) потока Данжуа этот результат можно доказать, используя поворот векторного поля [1]. Отметим, что для топологического потока трансверсальность кривой означает, что локально эта кривая является кривой однократного пересечения для траекторий потока.

В отличие от тора (замкнутой ориентируемой поверхности нулевой эйлеровой характеристики), на котором существуют потоки без точек покоя, на замкнутой ориентируемой поверхности M отрицательной эйлеровой характеристики любой поток обязательно имеет точки покоя. Естественным аналогом минимального потока на торе является *иррациональный поток на M* , т.е. поток, все одномерные траектории которого всюду плотны в M и все точки покоя которого являются седлами отрицательного индекса. Очевидно, что иррациональный поток транзитивен и не имеет сепаратрисных связей. Настоящая статья посвящена вопросу существования замкнутых простых трансверсалей у иррационального потока на замкнутой ориентируемой поверхности M отрицательной эйлеровой характеристики в гомотопических классах, содержащих в качестве представителей простые замкнутые геодезические.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00501).

Имеются топологические ограничения на простую замкнутую кривую, которая может быть в принципе трансверсалью иррационального потока. Такая кривая не может быть гомотопной нулю, так как в противном случае внутри кривой была бы точка покоя положительного индекса. Это ограничение имеет место и для T^2 . На замкнутой ориентируемой поверхности M отрицательной эйлеровой характеристики эта кривая вдобавок не может быть гомологичной нулю, поскольку такая кривая разбивает поверхность, и поток с такой трансверсалью не может иметь всюду плотной полутраектории. Поэтому естественно предположить (как обобщение упомянутого выше результата о секущих минимального потока на торе), что для любого фиксированного иррационального потока f^t на замкнутой ориентируемой поверхности M отрицательной эйлеровой характеристики в любом гомотопическом классе, содержащем негомологичные нулю простые замкнутые кривые, существует представитель – простая замкнутая трансверсаль (такую гипотезу в беседе с первым автором высказал в 70-х годах А. Б. Каток). Однако эта гипотеза оказалась неверной. В статье строится иррациональный поток f^t такой, что в некотором гомотопическом классе, содержащем негомологичные нулю простые замкнутые кривые, не существует замкнутых трансверсалей потока f^t . После этого примера естественно исследовать гомотопические классы, содержащие в качестве представителей замкнутые трансверсали фиксированного иррационального потока. На языке специальных геодезических ламинаций (так называемых геодезических каркасов) в статье приводятся необходимое и достаточное условия существования простой замкнутой трансверсали, свободно гомотопной данной простой геодезической. Результаты статьи были анонсированы в [2].

Авторы выражают благодарность Д. В. Аносову и А. М. Степину за полезные обсуждения, а также благодарят рецензента за замечания, способствовавшие улучшению текста.

§ 1. Контрпример к гипотезе Катка

В этом параграфе строится контрпример к гипотезе Катка, который мы формулируем в виде следующей теоремы о существовании.

ТЕОРЕМА 1.1. *На любой замкнутой ориентируемой поверхности M отрицательной эйлеровой характеристики существует иррациональный поток f^t , обладающий следующим свойством: на M имеется негомологичная нулю простая замкнутая геодезическая H такая, что ни она сама, ни любая другая простая замкнутая кривая H' , свободно гомотопная H , не является замкнутой трансверсалью (в топологическом смысле) для потока f^t .*

Перед доказательством введем некоторые понятия и обозначения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Известно, что замкнутая ориентируемая поверхность M отрицательной эйлеровой характеристики является поверхностью рода $h \geq 2$. Хотя в утверждении теоремы 1.1 ничего не говорится о римановой структуре поверхности M , нам удобно будет считать, что M наделена римановой метрикой постоянной отрицательной кривизны, которая вводится с помощью плоскости Лобачевского. Именно, пусть Δ – плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, т.е. Δ – единичный круг на комплексной z -плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (\|z\| = 1)$ называется *абсолютом*. В силу теоремы об униформизации существует группа Γ изометрий плоскости Δ такая, что

$\Delta/\Gamma \cong M$. Обозначим через $\pi: \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma \cong M$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением и которая индуцирует на M риманову метрику постоянной отрицательной кривизны (M иногда называют *гиперболической поверхностью*).

Напомним, что поток называется *сверхтранзитивным*, если каждая его одномерная траектория всюду плотна на поверхности. Таким образом, иррациональный поток – это сверхтранзитивный поток без сепаратрисных связей, у которого точки покоя являются седлами отрицательного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1 проведем для замкнутой ориентируемой поверхности M рода $h = 2$ (кренделя). Из конструкции будет ясно, как теорема доказывается для замкнутых ориентируемых поверхностей рода $h \geq 3$. Крендель появится как накрытие для тора относительно двулистного разветвленного накрытия с двумя точками ветвления порядка два.

Рассмотрим на торе T^2 иррациональную обмотку f_μ^t с иррациональным числом вращения μ . Траектории потока f_μ^t являются незамкнутыми геодезическими линиями в евклидовой метрике на торе. Известно, что каждая траектория такого потока f_μ^t является незамкнутой рекуррентной (и, более того, квазипериодической) траекторией, всюду плотной на торе. Евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y является для T^2 (неразветвленной) универсальной накрывающей. Если группа накрывающих преобразований состоит из целочисленных сдвигов $(x, y) \mapsto (x + m, y + n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то траектории накрывающего потока $\tilde{f}_\mu^t$ на $\mathbb{R}^2$ имеют вид: $x = x(t) = t + C_1$, $y = y(t) = \mu t + C_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$.

Пусть C – любая простая замкнутая геодезическая на T^2 (не уменьшая общности, можно считать C нулевым меридианом тора). Тогда C является глобальной секущей для потока f_μ^t . Возьмем на C две любые точки a, b , принадлежащие двум различным траекториям L_1, L_2 потока f_μ^t . Заменим отрезок $[a, b] \subset C$ на гомотопную нулю простую замкнутую кривую S , которая обладает следующими свойствами:

- 1) точки $a, b \in S$ разбивают S на два криволинейных отрезка α, β , являющихся кривыми без контакта для траекторий потока f_μ^t ;
- 2) траектории L_1, L_2 имеют внешние касания (в топологическом смысле) с S в точках $a, b \in S$ соответственно;
- 3) кривая S ограничивает на торе открытый диск D , замыкание которого содержит $[a, b]$.

Можно рассматривать эту замену отрезка так, как будто мы “раздуваем” отрезок $[a, b]$ до небольшого диска и обозначаем через S границу этого диска.

Рассмотрим двулистное разветвленное накрытие $p: M \rightarrow T^2$ с точками ветвления $a, b \in S$ порядка два каждая. Для введения необходимых обозначений удобно представить построение поверхности M следующим образом. Возьмем две копии тора с дырой $T^2 - D$, на одной из которых сохраним ранее введенные обозначения, а на другой копии снабдим соответствующие обозначения штрихом. Теперь склеим эти копии вдоль границ, отождествив α с α' и β с β' . Отметим, что если ориентация на граничных компонентах индуцируется ориентацией поверхности, то склейка производится с помощью обращающего ориентацию гомеоморфизма. Ясно, что M является замкнутой ориентируемой поверхностью рода $h = 2$ (кренделем), а $p^{-1}(S)$ – горловиной, разбивающей M на две части I, II, каждая из которых гомеоморфна тору с дырой (см. рис. 1). Поднятия точек a, b на M обозначим также через a, b соответственно (эти точки являются единственными точками на торе, которые имеют одноточечные

Рис. 1. Поверхность M

прообразы относительно накрытия p). Прообраз $p^{-1}(C - [a, b])$ состоит из двух дуг λ и λ' , имеющих общие концевые точки a, b . Будем для определенности считать, что в части I лежит дуга λ , а в части II – дуга λ' . Положим

$$\Lambda = \lambda \cup \lambda' \cup a \cup b.$$

Нетрудно видеть, что Λ является простой замкнутой кривой, негомологичной нулю на M .

Поместим в точках $a, b \in T^2$ непроходимые крошки (или, что то же самое, фальшивые седла). Тогда поток f_μ^t превратится в сверхтранзитивный поток, который мы обозначим через $f_{0,\mu}^t$. Тогда в силу [3], [4] на M существует поток f^t , накрывающий $f_{0,\mu}^t$ относительно двулистного разветвленного накрытия $p: M \rightarrow T^2$. Так как поток f_μ^t минимальный и точки a, b лежат на разных траекториях потока f_μ^t , то f^t является иррациональным потоком с двумя седлами a и b , причем λ и λ' являются для потока f^t дугами без контакта. Седла a, b имеют по четыре сепаратрисы.

Ясно, что Λ не есть цикл без контакта для f^t , поскольку по построению траектории потока f^t при увеличении времени пересекают дуги λ и λ' в противоположных направлениях. Ориентируем Λ так, чтобы при движении вдоль Λ в положительном направлении траектории пересекали λ (соответственно λ'), переходя с левой стороны дуги λ на ее правую сторону (соответственно с правой на левую). Обозначим данную ориентацию через J . Из негомотопности (и даже негомологичности) нулю кривой $\Lambda \subset M$ следует, что полный прообраз $\pi^{-1}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\Lambda}$ представляет собой счетное множество непересекающихся между собой попарно конгруэнтных кривых l_α , $\alpha \in \mathbb{Z}$, без самопересечения, каждая из которых имеет на абсолюте ровно две геометрически различные граничные точки, которые обозначим через $\sigma^+(l_\alpha)$, $\sigma^-(l_\alpha)$. При этом если $l_\alpha \neq l_{\alpha'}$, то ни одна из граничных точек кривой l_α не совпадает ни с одной из граничных точек кривой $l_{\alpha'}$.

Ориентация J и проекция $\pi: \Delta \rightarrow M$ индуцирует на каждой из кривых $l_\alpha \in \bar{\Lambda}$ ориентацию, задающую положительное направление. Будем считать, что точка $\sigma^+(l_\alpha)$ соответствует положительному направлению l_α , а $\sigma^-(l_\alpha)$ – отрицательному направлению на l_α .

Обозначим через $I_\alpha = [\bar{a}_0, \bar{a}_1]$ полуоткрытую дугу на l_α с концевыми конгруэнтными точками $\bar{a}_0, \bar{a}_1 \in \pi^{-1}(a)$, не содержащую внутри себя конгруэнтных точек. Тогда существует элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\bar{a}_1 = \gamma(\bar{a}_0)$. Так как кривая Λ простая, то $\gamma(l_\alpha) = l_\alpha$ и для любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, выполняется равенство

$$[\bar{a}_0, \bar{a}_1] \cap \gamma^n([\bar{a}_0, \bar{a}_1]) = \emptyset.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что I_α положительно ориентирована от точки $\bar{a}_0$ к точке $\bar{a}_1$. Поэтому элемент γ имеет $\sigma^+(l_\alpha)$ своей притягивающей неподвижной точкой, а $\sigma^-(l_\alpha)$ – своей отталкивающей неподвижной точкой.

На I_α существует единственная точка, которую мы обозначим через $\bar{b}_0$, проектирующаяся в точку b , $\pi(\bar{b}_0) = b$. Положим $\bar{\lambda} = (\bar{a}_0, \bar{b}_0)$, $\bar{\lambda}' = (\bar{b}_0, \bar{a}_1)$. Тогда

$$[\bar{a}_0, \bar{a}_1] = \bar{\lambda} \cup \bar{\lambda}' \cup \bar{a}_0 \cup \bar{b}_0 \cup \bar{a}_1.$$

Назовем $\bar{\lambda}_n = \gamma^n(\bar{\lambda})$ *красными дугами*, а $\bar{\lambda}'_n = \gamma^n(\bar{\lambda}')$ – *синими дугами*. Так как γ является неевклидовым скольжением, то при движении вдоль l_α в положительном направлении красные и синие дуги чередуются и переход от красных дуг к синим дугам происходит через точки $\bar{b}_i \in \pi^{-1}(b)$, а переход от синих дуг к красным дугам происходит через точки $\bar{a}_j \in \pi^{-1}(a)$.

Обозначим через $\bar{f}^t$ накрывающий для f^t поток на Δ . Поскольку траектории потока f^t на M пересекают дугу $\lambda \in \Lambda$ при выбранной ориентации J , переходя с левой стороны кривой Λ на ее правую сторону, а дугу $\lambda' \in \Lambda$ пересекают, переходя с правой стороны кривой Λ на ее левую сторону, то на универсальной накрывающей Δ траектории накрывающего потока $\bar{f}^t$ пересекают красные дуги $\bar{\lambda}_n \in l_\alpha$, переходя с левой стороны кривой l_α на ее правую сторону, а синие дуги $\bar{\lambda}'_n \in l_\alpha$, переходя с правой стороны кривой l_α на ее левую сторону. В точках $\bar{a}_j, \bar{b}_i \in l_\alpha$ находятся седла потока $\bar{f}^t$.

Возьмем любую нетривиально рекуррентную положительную полутраекторию l потока f^t с начальной точкой m_0 при $t = 0$ на красном интервале $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через $\bar{l}$ поднятие полутраектории l с начальной точкой $\bar{m}_0$ при $t = 0$, принадлежащей красному интервалу $\bar{\lambda} \in l_\alpha$, где α – некоторое фиксированное целое число.

Для ссылок будем необходимые в дальнейшем утверждения формулировать как шаги.

ШАГ 1.1. *Полутраектория $\bar{l}$ при увеличении времени t не может снова пересекать l_α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 1.1. Предположим противное. Обозначим через $\bar{m}^*$ первую при увеличении времени после значения $t = 0$ точку на $\bar{l}$, в которой $\bar{l}$ снова пересекается с l_α . Поскольку по условию точка $\bar{m} = l \cap l_\alpha$ принадлежит красному интервалу $\bar{\lambda} \subset l_\alpha$, то в силу конструкции кривой l_α точка $\bar{m}^* = l \cap l_\alpha$ принадлежит некоторому синему интервалу $\lambda^* \in l_\alpha$. Дуга $[\bar{m}, \bar{m}^*] \stackrel{\text{def}}{=} \xi$ полутраектории $\bar{l}$ не имеет общих точек с кривой l_α за исключением точек $\bar{m}, \bar{m}^*$. Обозначим через $\bar{D}$ диск на Δ , ограниченный замкнутой кривой $\bar{K}$, состоящей из дуги ξ и отрезка $\eta_\alpha = [\bar{m}^*, \bar{m}]$ кривой l_α .

Поскольку точки $\bar{m}^*, \bar{m}$ принадлежат интервалам разного цвета, то на дуге η_α лежит нечетное число $\nu = 2n + 1$ состояний равновесия $O_1, O_2, \dots, O_\nu$ потока $\bar{f}^t$. При этом каждое из этих состояний равновесия является седлом с четырьмя сепаратрисами, две из которых локально лежат внутри диска $\bar{D}$, а две другие локально лежат вне $\bar{D}$, и других состояний равновесия потока $\bar{f}^t$ на замкнутой кривой $\bar{K}$ нет.

Внутри $\bar{D}$ а priori либо нет состояний равновесия потока $\bar{f}^t$, либо может лежать лишь конечное множество состояний равновесия $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ и каждое из них является седлом с четырьмя сепаратрисами (эти седла могут появиться за счет того, что дуга ξ полутраектории $\bar{l}$ может пересекаться с другими кривыми l_{α^*} , конгруэнтными l_α). Поскольку индекс каждого седла равен минус

Рис. 2. Кривая $\bar{C}$

единица, то сумма Σ_{ind} индексов состояний равновесия, лежащих внутри $\bar{D}$, либо равна нулю, либо $\Sigma_{\text{ind}} = -m < 0$, т.е. $\Sigma_{\text{ind}} \leq 0$.

Далее, выполним следующую операцию: малым шевелением кривой $\bar{K} = \xi \cup \eta_\alpha$ продеформируем ее в близкую к ней простую замкнутую кривую $\bar{C}$, удовлетворяющую следующим свойствам:

- 1) на $\bar{C}$ нет состояний равновесия потока $\bar{f}^t$;
- 2) $\bar{C}$ ограничивает на Δ область $\bar{D}_0 \subset \text{int } \bar{D}$, внутри которой либо нет состояний равновесия, либо если они есть, то это только седла $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$;
- 3) замкнутая кривая $\bar{C}$ является кривой без контакта (в топологическом смысле) всюду, кроме $2n + 4$ точек (см. рис. 2).

При этом в двух точках имеется внешнее касание с траекториями и в $2n + 2$ точках – внутренние касания. Из $2n + 2$ внутренних касаний $\nu = 2n + 1$ происходят из-за того, что кривая $\bar{C}$ проходит вблизи седел $O_1, O_2, \dots, O_\nu$, лежащих на дуге η_α кривой l_α , а еще одно внутреннее касание происходит из-за того, что кривая $\bar{C}$ проходит вблизи дуги $\xi = [\bar{m}, \bar{m}^*]$. Что касается двух внешних касаний, то они происходят из-за того, что кривая $\bar{C}$ проходит вблизи точек $\bar{m}$ и $\bar{m}^*$, являющихся точками пересечения дуги ξ с дугой $\eta_\alpha = [\bar{m}^*, \bar{m}] \subset l_\alpha$.

Так как на замкнутой кривой $\bar{C}$ имеются два внешних касания ($I = 2$) и $\nu = 2n + 2$ внутренних касаний ($J = 2n + 2$) с траекториями потока $\bar{f}^t$, то индекс j кривой $\bar{C}$ относительно потока $\bar{f}^t$ равен

$$j = \frac{2 - I + J}{2} = \frac{2 - 2 + 2n + 2}{2} = n + 1 > 0.$$

Из свойства 2) вытекает, что сумма индексов Σ_{ind} состояний равновесия, лежащих внутри области $\bar{D}_0$, равна либо нулю, либо $\Sigma_{\text{ind}} = -m < 0$, т.е. $\Sigma_{\text{ind}} \leq 0$. Так как сумма индексов Σ_{ind} равна индексу замкнутой кривой $\bar{C}$, т.е. числу $j = n + 1 > 0$, то из равенства $j = \Sigma_{\text{ind}}$ получаем противоречие, состоящее в том, что, с одной стороны, $j > 0$, а с другой стороны, $j \leq 0$.

ШАГ 1.2. Полутраектория $\bar{l}$ пересекает последовательно при увеличении времени t бесконечное множество попарно различных кривых $l_{\alpha'} \in \bar{\Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 1.2. Поскольку f^t – иррациональный поток, то l всюду плотна на M и при увеличении времени бесконечное множество раз пересекает кривую Λ . Поэтому $\bar{l}$ пересекает бесконечное множество раз поднятия

кривой Λ . Из шага 1.1 вытекает, что каждое поднятие кривой Λ полутраектория $\bar{l}$ пересекает не более чем в одной точке. Отсюда следует требуемое утверждение.

Переобозначим кривую l_α , о которой шла речь в шаге 1.1, через l_{α_0} , сделав индекс α текущим.

Напомним, что ориентация J кривой Λ и проекция $\pi: \Delta \rightarrow M$ индуцируют на каждой из кривых $l_\alpha \in \bar{\Lambda}$ ориентацию, задающую положительное направление. Полутраектория $\bar{l}$ ориентирована естественным образом: положительным считается направление, соответствующее увеличению времени. Так как $\bar{l}$ трансверсально пересекает кривые l_α , то в каждой точке пересечения $l_\alpha \cap \bar{l}$ определен индекс пересечения, равный $+1$ или -1 .

ШАГ 1.3. *Полутраектория $\bar{l}$ при увеличении времени t пересекает кривые l_α с разными индексами пересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО шага 1.3. Так как полутраектория l всюду плотна на M , то l при увеличении времени пересекает бесконечное множество раз как синий интервал $\lambda' \in \Lambda$, так и красный интервал $\lambda \in \Lambda$. Поскольку траектории потока f^t на M пересекают дугу $\lambda \in \Lambda$ при выбранной ориентации J , переходя с левой стороны кривой Λ на ее правую сторону, а дугу $\lambda' \in \Lambda$ пересекают, переходя с правой стороны кривой Λ на ее левую сторону, то индекс пересечения l с Λ на красном и синем интервалах различный. Будем для определенности считать, что l пересекает красный интервал λ с индексом $+1$, а синий интервал λ' – с индексом -1 . Так как каждое поднятие кривой Λ на Δ является кривой с идеальными концевыми точками на абсолюте (следовательно, разбивает Δ на две полуплоскости) и в силу шага 1.2 каждое поднятие пересекается полутраекторией $\bar{l}$ не более чем в одной точке, то любое поднятие красного интервала пересекается полутраекторией $\bar{l}$ с индексом пересечения $+1$, а любое поднятие синего интервала – с индексом пересечения -1 . Поскольку $\bar{l}$ пересекает бесконечное множество поднятий как красного интервала, так и синего, то отсюда вытекает требуемый результат.

Рассмотрим на M простую замкнутую геодезическую H , свободно гомотопную кривой Λ . Покажем, что любая простая замкнутая кривая H' , свободно гомотопная H , не может являться циклом без контакта для потока f^t на M . Предположим противное. Зададим положительное направление на H' , согласованное с положительным направлением J на Λ . Обозначим это положительное направление на H' снова через J . Так как H' свободно гомотопна Λ , то для каждого поднятия h_β кривой H' имеется ровно одно поднятие, которое мы обозначим через $l_{\alpha(\beta)}$, кривой Λ такое, что идеальные концевые точки на абсолюте кривых $h_\beta, l_{\alpha(\beta)}$ совпадают. Обозначим концевые точки кривой h_β через $\sigma^+(h_\beta), \sigma^-(h_\beta)$. При этом будем считать, что направление от точки $\sigma^+(h_\beta)$ к $\sigma^-(h_\beta)$ является положительным направлением на h_β , индуцируемым ориентацией J . Согласованность ориентаций кривых H' и Λ означает, что

$$\sigma^-(h_\beta) = \sigma^-(l_{\alpha(\beta)}), \quad \sigma^+(h_\beta) = \sigma^+(l_{\alpha(\beta)}).$$

Отсюда и из шага 1.3 вытекает, что существуют поднятия кривой H' , которые пересекаются полутраекторией $\bar{l}$ с разными индексами пересечения. Это невозможно, поскольку каждое поднятие h_β является кривой без контакта для накрывающего потока $\tilde{f}^t$. Полученное противоречие доказывает теорему для поверхности M рода $h = 2$.

Доказательство для M рода $h \geq 3$ аналогично, но только тор T^2 нужно разветвлять над $2(h-1)$ точками. Например, для M рода $h = 3$ вместо одной кривой S нужно взять две гомотопные нулю простые замкнутые кривые S_1 и S_2 , пересекающиеся с C в точках a_1, a'_1 и a_2, a'_2 соответственно, через которые проходят различные траектории потока f_μ^t . Далее рассматривается двулистная разветвленная накрывающая M над тором T^2 с разветвлениями порядка два над точками a_1, a'_1, a_2, a'_2 . Тогда M будет замкнутой ориентируемой поверхностью рода $h = 3$, а S_1 и S_2 становятся негомологичными нулю и не гомотопными друг другу простыми замкнутыми кривыми. Каждая из кривых S_1, S_2 обладает свойствами, аналогичными свойствам простой замкнутой кривой Λ , и дальнейшее доказательство проходит по выше указанной схеме.

§ 2. Условие существования глобальной секущей

В этом параграфе на языке специальных геодезических ламинаций (так называемых *геодезических каркасов*), которые несут в себе информацию об асимптотических направлениях траекторий потоков, приводится необходимое и достаточное условие существования простой замкнутой трансверсали, свободно гомотопной данной простой геодезической, у иррационального потока. Отметим, что если поток f^t иррациональный, то у него имеется хотя бы одна простая замкнутая трансверсаль, которую мы обозначим через C [5]. Так как каждая одномерная траектория потока f^t всюду плотна на поверхности, то C является глобальной секущей (напомним, что трансверсаль называется *глобальной секущей*, если она пересекается с каждой одномерной траекторией потока и любая полутраектория, начинающаяся на C и не идущая в седло, снова пересекает C). Таким образом, иррациональный поток имеет по крайней мере одну глобальную секущую. Такая секущая негомологична нулю и свободно гомотопна некоторой простой замкнутой геодезической, которая в свою очередь определяет однозначно (“простой”) элемент фундаментальной группы поверхности M . После теоремы 1.1 естественно исследовать те (“простые”) элементы фундаментальной группы, которые содержат в качестве представителей глобальные секущие фиксированного иррационального потока.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые определения и результаты из теории Аносова–Вейля (см. основополагающие работы [6], [7], а также обзоры [8]–[10]).

Пусть f^t – поток на ориентируемой замкнутой гиперболической поверхности M (отметим, что M имеет род $h \geq 2$). Для f^t имеется накрывающий поток $\tilde{f}^t$ на Δ относительно проекции π . Рассмотрим траекторию $\tilde{l}$ потока $\tilde{f}^t$, которая в обоих направлениях стремится к разным точкам абсолюта $\alpha(\tilde{l})$, $\omega(\tilde{l}) \in S_\infty$, $\alpha(\tilde{l}) \neq \omega(\tilde{l})$, где $\alpha(\omega)(\tilde{l})$ означает $\alpha(\omega)$ -предельное множество траектории $\tilde{l}$. Обозначим через $\tilde{g}(\tilde{l})$ геодезическую, соединяющую точки $\alpha(\tilde{l})$, $\omega(\tilde{l})$ и ориентированную от $\alpha(\tilde{l})$ к $\omega(\tilde{l})$. Эта геодезическая $\tilde{g}(\tilde{l})$ называется *соасимптотической траектории* $\tilde{l}$. Аналогичное построение соасимптотической геодезической проводится для обобщенной траектории (т.е. объединения сепаратрисы и ее односторонних продолжений по Бендиксону). Обозначим через $\overline{G}(\tilde{f}^t)$ топологическое замыкание семейства ориентированных геодезических, соасимптотических всем траекториям и обобщенным траекториям потока $\tilde{f}^t$. Тогда

$$\pi(\overline{G}(\tilde{f}^t)) \stackrel{\text{def}}{=} G(f^t)$$

является геодезической ламинацией, которая называется *геодезическим каркасом потока* f^t .

Пусть теперь f^t – иррациональный поток и $\bar{l}$ – одна из накрывающих для нетривиально рекуррентной траектории l потока f^t . В [11] доказано, что обе полутраектории $\bar{l}$ имеют асимптотические направления и стремятся к разным точкам абсолюта. Поэтому для $\bar{l}$ существует соасимптотическая геодезическая $\bar{g}(\bar{l})$. Таким образом, геодезический каркас иррационального потока не пуст, $G(f^t) \neq \emptyset$. Ясно, что полный прообраз $\pi^{-1}(G(f^t))$ геодезического каркаса $G(f^t)$ является геодезической ламинацией на Δ .

Иррациональный поток является частным случаем иррационального слоения (можно сказать иррациональный поток является ориентируемым иррациональным слоением, у которого особенности суть седла отрицательного индекса). В работе [12; теорема 3.25] (см. также [13]) имеется описание геодезического каркаса иррационального слоения, которое мы приведем для ссылок.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{F}$ – иррациональное слоение с особенностями, являющимися седлами отрицательного индекса, на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности M^2 . Тогда справедливо следующее.

- 1) Геодезический каркас $G(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$ является нетривиальной минимальной и неприводимой геодезической ламинацией, состоящей из незамкнутых рекуррентных по Биркгофу геодезических (в частности, из незамкнутых нетривиально рекуррентных геодезических).
- 2) Любая геодезическая из $G(\mathcal{F})$ является соасимптотической геодезической некоторого слоя или обобщенного слоя слоения $\mathcal{F}$.
- 3) Каждая компонента множества $M^2 - G(\mathcal{F})$ есть односвязная область, любое поднятие которой на универсальную накрывающую представляет собой внутренность геодезического многоугольника с конечным числом сторон и вершинами, лежащими на абсолюте. При этом стороны геодезического многоугольника принадлежат $\bar{G}(\mathcal{F})$, а каждая вершина достигается ровно одной сепаратрисой некоторого седла накрывающего слоения. Обратно, каждому седлу накрывающего слоения соответствует единственный геодезический многоугольник, образованный геодезическими из $\bar{G}(\mathcal{F})$, такой, что сепаратрисы седла достигают все вершины многоугольника и число сепаратрис равно числу вершин.

Для потока можно уточнить, что геодезический многоугольник из множества $M^2 - G(f^t)$ имеет четное число сторон и вершин.

Заметим, что так как геодезический каркас $G(f^t)$ иррационального потока f^t состоит из незамкнутых геодезических, то любая замкнутая геодезическая на поверхности пересекается с геодезическими из $G(f^t)$ трансверсально. Из теоремы 2.1 вытекает, что если у потока f^t существует глобальная секущая C , свободно гомотопная простой замкнутой геодезической g_0 , то g_0 ориентируемо пересекается со всеми геодезическими из геодезического каркаса $G(f^t)$.¹

Прежде чем перейти к основной теореме, докажем три технических утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Под дугой на поверхности понимается гомеоморфный образ отрезка (т.е. путь без самопересечений). Замкнутость дуги $\smile[c, d]$ означает, что концевые точки c, d принадлежат дуге. Через $\smile(c, d)$ будем обозначать открытую дугу, не содержащую своих концевых точек.

¹Предполагается, что g_0 снабжена ориентацией и все геодезические из $G(f^t)$ ориентированы согласованно с траекториями и обобщенными траекториями потока f^t .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\bar{g}$ – поднятие простой замкнутой геодезической g . Предположим, что замкнутая дуга $\smile[c, d] \subset \Delta$ пересекает $\bar{g}$ только в концевых точках c, d , так что эта дуга и отрезок $[c, d] \subset \bar{g}$ ограничивают диск $\bar{D} \subset \Delta$. Если $\pi(\smile[c, d])$ не имеет самопересечений, то на отрезке $[c, d]$ нет конгруэнтных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует изометрия $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \text{id}$, такая, что $\gamma([c, d]) \cap [c, d] \neq \emptyset$. Поскольку g – простая геодезическая, то $\gamma(\bar{g}) = \bar{g}$. Следовательно, $\bar{g}$ является осью гиперболической изометрии γ . Не уменьшая общности, можно считать, что $\gamma(c) \in [c, d]$. Для краткости обозначим $\smile[c, d]$ через ζ . Так как концевые точки дуги ζ не конгруэнтные, то $\gamma(c) \in (c, d)$ (см. рис. 3). Ясно, что дуга $\gamma(\zeta)$ пересекает $\bar{g}$ только в концевых

Рис. 3

точках $\gamma(c)$ и $\gamma(d)$. Так как γ – гиперболическая изометрия с осью $\bar{g}$ (неевклидов сдвиг плоскости Лобачевского Δ вдоль $\bar{g}$), то $\gamma(d) \notin [c, d]$ и, следовательно, $\gamma(d) \notin D$. Поскольку изометрия γ сохраняет ориентацию, то дуга $\gamma(\zeta)$ пересекает внутренность диска D . Отсюда вытекает, что $\gamma(\zeta)$ должна пересечь ζ , что невозможно, поскольку $\pi(\zeta)$ не имеет самопересечений. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполняются условия леммы 2.1. Дополнительно предположим, что $\pi(\smile[c, d])$ пересекается с g только в концевых точках $\pi(c)$, $\pi(d)$. Тогда в диске D нет конгруэнтных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует изометрия $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \text{id}$, такая, что $\gamma(D) \cap D \neq \emptyset$ и, следовательно, $\gamma(\partial D) \cap \partial D \neq \emptyset$. Отсюда вытекает, что либо $\gamma(\smile[c, d]) \cap \bar{g} \neq \emptyset$, либо $\gamma^{-1}(\smile[c, d]) \cap \bar{g} \neq \emptyset$. Однако согласно условию дуга $\pi(\smile[c, d])$ не имеет самопересечений и пересекается с g только в концевых точках. Поэтому не существует дуг, конгруэнтных $\smile[c, d]$ (и отличных от $\smile[c, d]$), которые пересекаются с ∂D . Полученное противоречие доказывает лемму.

Напомним, что *изотопией* (или *деформацией*) *поверхности* M^2 называется непрерывное отображение $\phi: M^2 \times [0; 1]$ такое, что $\varphi_t = \phi(\cdot, t)$ есть гомеоморфизм для любого $0 \leq t \leq 1$ и $\varphi_0 = \text{id}$. Обычно изотопию записывают как семейство $\varphi_t: M^2 \rightarrow M^2$. Аналогичное определение дается для изотопии плоскости Лобачевского Δ . Такая изотопия $\bar{\varphi}_t: \Delta \rightarrow \Delta$ является поднятием изотопии $\varphi_t: M^2 \rightarrow M^2$, если $\pi \circ \bar{\varphi}_t = \varphi_t \circ \pi$ для любого $0 \leq t \leq 1$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\bar{g}$ – поднятие простой замкнутой геодезической g . Предположим, что замкнутая дуга $\smile[c, d] \subset \Delta$ с концевыми точками $c, d \in \bar{g}$ пересекает $\bar{g}$ в конечном числе точек. Если $\pi(\smile[c, d])$ не имеет самопересечений, то существует изотопия $\bar{\varphi}_t: \Delta \rightarrow \Delta$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\bar{\varphi}_t$ переводит $\smile[c, d]$ в отрезок $[c, d] \subset \bar{g}$;
- 2) точки c, d неподвижны относительно $\bar{\varphi}_t$;
- 3) $\bar{\varphi}_t$ является поднятием некоторой изотопии поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слегка пошевелив g , можно считать, что g находится в общем положении относительно $\pi(\smile[c, d])$ и не имеет с $\pi(\smile[c, d])$ точек касания. Доказательство проводится индукцией по числу точек пересечения дуги $\smile[c, d]$ с $\pi^{-1}(g)$. Пусть пересечение $\smile[c, d] \cap \pi^{-1}(g)$ состоит только из точек c и d (это минимальное число точек пересечения). Тогда дуга $\smile[c, d]$ и отрезок $[c, d] \subset \bar{g}$ ограничивают диск $\bar{D} \subset \Delta$. Согласно лемме 2.2 в диске $\bar{D}$ нет конгруэнтных точек. Как следствие ограничение $\pi|_{\bar{D}}: \bar{D} \rightarrow \pi(\bar{D})$ накрытия π на $\bar{D}$ является гомеоморфизмом на образ и $\pi(\bar{D})$ – диск на поверхности M^2 . Поэтому существует изотопия поверхности M^2 , носитель которой принадлежит произвольно малой окрестности диска $\pi(\bar{D})$ и которая переводит дугу $\pi(\smile[c, d])$ в геодезический сегмент $\pi([c, d])$, оставляя точки $\pi(c), \pi(d)$ неподвижными. Ясно, что поднятие этой изотопии является требуемой изотопией.

Пусть теперь пересечение $\smile[c, d] \cap \pi^{-1}(g)$ содержит точки, отличные от c и d . Рассмотрим диски $\bar{D}_\mu$, ограниченные геодезическими из $\pi^{-1}(g)$ и дугами, принадлежащими $\smile[c, d]$. Введем на этих дисках отношение порядка: $\bar{D}_1 \leq \bar{D}_2$, если $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2$. Пусть $\bar{D}$ – минимальный по отношению введенного порядка диск, ограниченный отрезком E , который лежит на одной из геодезических (скажем, $\bar{g}_E$) семейства $\pi^{-1}(g)$, и дугой $\smile A \in \smile[c, d]$. Из минимальности $\bar{D}$ вытекает, что E и $\smile A$ удовлетворяют условиям лемм 2.1, 2.2. Следовательно, $\bar{D}$ не содержит конгруэнтных точек. Тогда существует изотопия плоскости Лобачевского, которая деформирует $\smile A$ через диск $\bar{D}$ в отрезок E . Предположим, что ни одна из концевых точек дуги $\smile A$ не совпадает с c и d . Ясно, что существует изотопия, переводящая чуть большую, чем $\smile A$, дугу в дугу $\smile A'$, не пересекающуюся с $\bar{D}$ и, в частности, с E . Более того, можно добиться того, чтобы $\smile A'$ не пересекалась со всей геодезической $\bar{g}_E$. Носитель указанной изотопии может быть сосредоточен в сколь угодно малой окрестности диска $\bar{D}$, т.е. в области, не содержащей конгруэнтных точек. Поэтому изотопия опускается на поверхность в некоторую изотопию поверхности. Если одна из концевых точек дуги $\smile A$ совпадает с c или d , то данная концевая точка остается неподвижной и принадлежит $\smile A'$. В любом случае мы получаем новую дугу, которая пересекается с геодезическими из $\pi^{-1}(g)$ хотя бы на одну точку меньше. Согласно методу математической индукции мы получаем требуемую изотопию (как композицию всех предыдущих изотопий).

Отметим, что требуемая изотопия в лемме 2.3 является композицией изотопий, носители которых сосредоточены в некоторых дисках. При этом объединение носителей может образовывать гомотопически нетривиальное множество.

Основной результат этого параграфа содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть f^t – иррациональный поток на ориентируемой замкнутой гиперболической поверхности M^2 , и пусть простая замкнутая геодезическая g_0 ориентируемо пересекается со всеми геодезическими из геодезического каркаса $G(f^t)$. У потока f^t существует глобальная секущая C , свободно гомотопная g_0 , тогда и только тогда, когда произвольное поднятие $\bar{g}_0$ геодезической g_0 может пересекать только соседние стороны любого многоугольника, образованного геодезическими из $\bar{G}(f^t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть у потока f^t существует глобальная секущая C , свободно гомотопная g_0 . Возьмем произвольное поднятие $\bar{g}_0$ геодезической g_0 . Пусть P – многоугольник, образованный геодезическими из $\bar{G}(f^t)$ и пересекающийся с $\bar{g}_0$. Отметим, что идеальные концевые точки $\bar{g}_0^-$, $\bar{g}_0^+$ геодезической $\bar{g}_0$ рациональные и, следовательно, не могут совпадать с вершинами P , которые принадлежат множеству иррациональных точек [8]. Отсюда и из того, что P является геодезически выпуклым многоугольником, вытекает, что $\bar{g}_0$ пересекает P ровно по двум сторонам. Покажем, что $\bar{g}_0$ пересекает две соседние стороны многоугольника P . Предположим противное. Тогда на каждой дуге, на которые абсолют разбивается точками $\bar{g}_0^-$, $\bar{g}_0^+$, лежат хотя бы две вершины многоугольника P (см. рис. 4, а)). Поскольку g_0 и C свободно гомо-

Рис. 4

топны, существует поднятие $\bar{C}$ кривой C с идеальными концевыми точками $\bar{g}_0^-$, $\bar{g}_0^+$. Обозначим через D^- , D^+ области, на которые плоскость Δ разбивается кривой $\bar{C}$.

Согласно теореме 2.1 P соответствует некоторому седлу S накрывающего потока f^t , при этом сепаратрисы седла S достигают все идеальные вершины многоугольника P . Пусть для определенности S лежит в D^- (см. рис. 4, б)); если S лежит в D^+ , то доказательство аналогичное. На дуге абсолюта, примыкающей к области D^+ , возьмем две соседние идеальные вершины a , b многоугольника P , соответствующие двум соседним сепаратрисам седла S . Эти сепаратрисы должны пересекать трансверсаль $\bar{C}$, переходя из D^- в область D^+ . Так как одна сепаратриса стремится к S при $t \rightarrow +\infty$, а вторая – при $t \rightarrow -\infty$, то на $\bar{C}$ должны быть точки, в которых траектории потока пересекают $\bar{C}$ в противоположных направлениях. Это невозможно, поскольку тогда на $\bar{C}$ существует точка касания (см. рис. 4, б)). Полученное противоречие показывает, что $\bar{g}_0$

может пересекать только соседние стороны любого многоугольника, образованного геодезическими из $\bar{G}(f^t)$.

Достаточность. Пусть произвольное поднятие $\bar{g}_0$ геодезической g_0 может пересекать только соседние стороны любого многоугольника, образованного геодезическими из $\bar{G}(f^t)$. Отметим, что достаточно доказать достаточность для потока, который топологически эквивалентен потоку f^t с помощью гомеоморфизма, гомотопного тождественному. Действительно, согласно [14] (см. также [15]) гомотопный тождественному гомеоморфизм поверхности поднимается на плоскость Лобачевского до гомеоморфизма, который продолжается на абсолют и действует на абсолюте как элемент группы Γ накрывающих преобразований (заметим, что поднятие самого гомеоморфизма также определяется с точностью до действия некоторого элемента группы Γ). Поэтому два потока, топологически эквивалентные с помощью гомеоморфизма, гомотопного тождественному, имеют одинаковый геодезический каркас.

Напомним, что траектория называется *нетривиально рекуррентной* в смысле Биркгофа, если она не является точкой покоя и периодической траекторией и ее топологическое замыкание образует минимальное множество. Согласно [16], если топологический поток с конечным множеством точек покоя не содержит нетривиально рекуррентных в смысле Биркгофа траекторий, то он топологически эквивалентен с помощью гомеоморфизма, гомотопного тождественному, C^∞ гладкому потоку (см. обобщение этой теоремы на потоки с произвольным множеством точек покоя в [17]). Отсюда следует, что f^t можно считать C^∞ гладким потоком, поскольку иррациональный поток не имеет нетривиальных минимальных множеств и все нетривиально рекуррентные траектории не являются рекуррентными в смысле Биркгофа.

Для ссылок некоторые утверждения мы будем оформлять в виде *шагов*.

Слегка пошевелив g_0 , можно считать, что g_0 не проходит через точки покоя и находится в общем положении относительно траекторий потока f^t , т.е. на кривой g_0 имеется только конечное число точек касания с траекториями потока f^t . Поэтому также можно считать, что любая траектория касается кривой g_0 не более чем в одной точке.

Возьмем произвольное поднятие $\bar{g}_0$ геодезической g_0 . Так как $G(f^t)$ является неприводимой геодезической ламинацией (см. теорему 2.1), то g_0 пересекается с $G(f^t)$ и, следовательно, $\bar{g}_0$ пересекается с $\bar{G}(f^t)$. Возьмем конгруэнтные точки $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \in \bar{g}_0$ такие, что через эти точки проходят геодезические $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ соответственно из $\bar{G}(f^t)$ и внутри отрезка $[\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2] \subset \bar{g}_0$ с концевыми точками $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ нет конгруэнтных точек. Согласно теореме 2.1 любая геодезическая из $G(f^t)$ является соасимптотической геодезической некоторой траектории или обобщенной траектории потока f^t . Не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ являются соасимптотическими геодезическим поднятий $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ нетривиально рекуррентных траекторий соответственно (см. рис. 5, а)).

Будем говорить, что пары точек $\{a, b\}, \{c, d\}$, лежащих на абсолюте, *разделены*, если на каждом интервале, на которые одна пара разбивает абсолют, лежит ровно одна точка из другой пары (например, на каждом из двух интервалов вида $(a, b) \subset S_\infty$ лежит точка c или d).

Поскольку идеальные концевые точки $g_-, g_+ \in S_\infty$ геодезической $\bar{g}_0$ разделены на абсолюте с парой точек

$$\omega(\bar{l}_i) = \omega(\bar{g}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i, \quad \alpha(\bar{l}_i) = \alpha(\bar{g}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i$$

Рис. 5

для каждого $i = 1, 2$, то $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ должны пересекать $\bar{g}_0$. Обозначим через $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_i$ соответственно первую и последнюю (при возрастании времени) точки пересечения траектории $\bar{l}_i$ с $\bar{g}_0$.

Так как точки $\beta_1, \beta_2 \in \bar{g}_0$ конгруэнтные, то существует гиперболическое отображение γ из группы накрывающих преобразований, которое переводит β_1 в β_2 . Тогда $\gamma(\bar{g}_1) = \bar{g}_2$ и $\gamma(\bar{l}_1) = \bar{l}_2$. Так как g_0 – простая геодезическая, то $\gamma(\bar{g}_0) = \bar{g}_0$. Отсюда вытекает, что $\gamma(\bar{b}_1) = \bar{b}_2$ и $\gamma(\bar{a}_1) = \bar{a}_2$. Более того, так как по построению внутри отрезка $[\beta_1, \beta_2] \subset \bar{g}_0$ нет конгруэнтных точек, то внутри отрезка $[\bar{b}_1, \bar{b}_2] \subset \bar{g}_0$ с концевыми точками $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ (так же, как и внутри отрезка $[\bar{a}_1, \bar{a}_2] \subset \bar{g}_0$ с концевыми точками $\bar{a}_1, \bar{a}_2$) нет конгруэнтных точек.

Дуга $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ траектории $\bar{l}_1$ накрывающего потока $\bar{f}^t$ проектируется в компактную дугу $\pi(\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1])$ потока f^t . Пошевелив, если необходимо, векторное поле в некоторой окрестности дуги $\pi(\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1])$, можно считать, что $\pi(\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1])$ трансверсальна g_0 . В частности, g_0 трансверсальна траектории $l = \pi(\bar{l}_1) = \pi(\bar{l}_2)$ в точках $a = \pi(\bar{a}_1)$ и $b = \pi(\bar{b}_1) = \pi(\bar{b}_2)$.

Пусть $\varphi_t: M^2 \rightarrow M^2$ – изотопия поверхности M^2 , где $\varphi_0 = \text{id}$. Под действием гомеоморфизма φ_1 поток f^t отображается в (топологически эквивалентный) поток $f_1^t = \varphi_1(f^t)$. Поскольку φ_1 гомотопен тождественному, то $G(f_1^t) = G(f^t)$. Ясно, что если траектория l потока f^t имеет соасимптотическую геодезическую $g(l)$, то траектория $\varphi_1(l)$ имеет ту же самую соасимптотическую геодезическую $g(l)$.

ШАГ 2.1. Существует изотопия φ_t , переводящая поток f^t в поток $f_1^t = \varphi_1(f^t)$, такая, что выполняется следующее условие:

пусть $\bar{f}_1^t$ – накрывающий поток для f_1^t , и пусть $\bar{l}'_1$ – траектория потока $\bar{f}_1^t$, которая является поднятием траектории $\varphi_1(l_1)$ и имеет соасимптотическую геодезическую $\bar{g}(\bar{l}'_1) = \bar{g}(l_1)$; тогда $\bar{l}'_1$ пересекает $\bar{g}_0$ только в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.1. Если $\bar{a}_1 = \bar{b}_1$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $\bar{a}_1 \neq \bar{b}_1$ (см. рис. 5, б)). Поскольку траектория l_1 неперiodическая, то на дуге $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ траектории $\bar{l}_1$ нет конгруэнтных точек.

Рассмотрим пересечение дуги $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ с $\pi^{-1}(g_0)$. Так как $\pi(\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1])$ трансверсальна g_0 , то пересечение $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1] \cap \pi^{-1}(g_0)$ состоит из конечного числа точек. Поэтому $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ удовлетворяет условию леммы 2.3. Отметим, что если $\bar{g}_* \in \pi^{-1}(g_0)$ – кривая, отличная от $\bar{g}_0$, то, поскольку идеальные концевые точки геодезических $\bar{g}_0, \bar{g}_*$ на абсолюте не разделены, $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ пересекается с $\bar{g}_*$ в четном числе точек. Напротив, так как идеальные концевые точки $g_-, g_+ \in S_\infty$ геодезической $\bar{g}_0$ разделены на абсолюте с парой точек $\omega(\bar{l}_1), \alpha(\bar{l}_1)$ и $\bar{a}_1$ и $\bar{b}_1$ являются соответственно первой и последней (при возрастании времени) точками пересечения траектории $\bar{l}_1$ с $\bar{g}_0$, то $\smile[\bar{a}_1, \bar{b}_1]$ пересекает $\bar{g}_0$ в нечетном числе точек. Согласно лемме 2.3 существует изотопия, которая переводит f^t в требуемый поток f_1^t .

Поток f_1^t обозначим снова через f^t и далее будем считать, что траектория $\bar{l}_1$ потока $\bar{f}^t$ пересекает $\bar{g}_0$ ровно в одной точке $\bar{b}_1$.

Обозначим через I_ω промежуток абсолюта, ограниченный точками ω_1, ω_2 , не содержащий точек α_1, α_2 . Аналогично, через I_α обозначается промежуток абсолюта, ограниченный точками α_1, α_2 и не содержащий точек ω_1, ω_2 . Очевидно, I_ω и I_α не пересекаются (см. рис. 5).

Обозначим через $\mathcal{D}^+$ область плоскости Лобачевского, ограниченную отрезком $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ и положительными полутраекториями $\bar{l}_1^+(\bar{b}_1), \bar{l}_2^+(\bar{b}_2)$. Аналогично, через $\mathcal{D}^-$ обозначим область, ограниченную отрезком $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ и отрицательными полутраекториями $\bar{l}_1^-(\bar{b}_1), \bar{l}_2^-(\bar{b}_2)$. Промежутки I_ω и I_α входят в идеальную границу областей $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ соответственно.

В множестве седел потока $\bar{f}^t$, лежащих в $\mathcal{D}^+$, выделим два типа:

- $A^+)$ седла, все сепаратрисы которых достигают точки на промежутке I_α ;
- $B^+)$ седла, все сепаратрисы которых достигают точки на промежутке I_ω , но некоторые из сепаратрис пересекают $\bar{g}_0$.

Множество седел обоих типов обозначим через $\aleph^+$. По аналогии с областью $\mathcal{D}^+$ в множестве седел, лежащих в $\mathcal{D}^-$, выделим два типа:

- $A^-)$ седла, все сепаратрисы которых достигают точки на промежутке I_ω ;
- $B^-)$ седла, все сепаратрисы которых достигают точки на промежутке I_α , но некоторые из сепаратрис пересекают $\bar{g}_0$.

Множество седел обоих типов $A^-)$ и $B^-)$ обозначим через $\aleph^-$. Отметим, что у каждого седла из $\aleph^+ \cup \aleph^-$ имеются хотя бы две сепаратрисы, пересекающие $\bar{g}_0$ в разных направлениях (если траектории ориентировать согласованно с увеличением времени, то можно говорить о пересечениях с разным индексом пересечения). Поэтому при $\aleph^+ \cup \aleph^- \neq \emptyset$ кривая $\bar{g}_0$ не может быть трансверсалью.

Покажем, что существует изотопия плоскости Лобачевского, которая опускается в изотопию поверхности и переводит $\bar{f}^t$ в поток с пустым множеством $\aleph^+ \cup \aleph^-$.

Рассмотрим седло $\bar{s} \in \aleph^+$ типа $A^+)$. Тогда у $\bar{s}$ имеются две сепаратрисы l_-, l_+ , достигающие точки $s_-, s_+ \in I_\alpha$ соответственно, такие, что все остальные сепаратрисы седла $\bar{s}$ достигают на абсолюте точки, принадлежащие промежутку $[s_-, s_+] \subset I_\alpha$. Следовательно, все сепаратрисы седла $\bar{s}$, отличные от l_- и l_+ , лежат в области (обозначим ее через $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$), ограниченной l_- и l_+ и имеющей отрезок $[s_-, s_+]$ в качестве идеальной границы (см. рис. 6, а)). У седла $\bar{s} \in \aleph^+$ типа $B^+)$ имеются две сепаратрисы l_-, l_+ , достигающие точки $s_-, s_+ \in I_\omega$ соответственно, такие, что все остальные сепаратрисы этого седла достигают на абсолюте точки, принадлежащие промежутку $[s_-, s_+] \subset I_\omega$.

Рис. 6

Следовательно, все сепаратрисы седла $\bar{s}$, отличные от l_- и l_+ , лежат в области (обозначим ее через $\bar{D}(\bar{s}, B^+)$), ограниченной l_- и l_+ и имеющей отрезок $[s_-, s_+]$ в качестве идеальной границы (см. рис. 6, б)).

Для седел множества $\aleph^-$ полностью аналогично вводятся области $\bar{D}(\bar{s}, A^-)$, $\bar{D}(\bar{s}, B^-)$. Область $\bar{D}(\bar{s}, A^-)$ (соответственно $\bar{D}(\bar{s}, B^-)$) симметрична в топологическом смысле области $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$ (соответственно $\bar{D}(\bar{s}, B^+)$) относительно $\bar{g}_0$.

В следующем утверждении $\bar{S}_C^\pm$ означает седло из множества $\aleph^\pm$ типа $C^\pm$), где символ C есть либо A , либо B . Область $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm, C^\pm)$ для краткости будем обозначать через $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm)$.

ШАГ 2.2. Для любых седел $\bar{S}_C^\pm \in \aleph^\pm$ типа $C^\pm$) выполняется одно из следующих соотношений:

- 1) либо $\bar{D}(\bar{S}_A^+) \subset \bar{D}(\bar{S}_B^-)$, либо $\bar{D}(\bar{S}_B^-) \subset \bar{D}(\bar{S}_A^+)$, либо $\bar{D}(\bar{S}_A^+) \cap \bar{D}(\bar{S}_B^-) = \emptyset$;
- 2) либо $\bar{D}(\bar{S}_B^+) \subset \bar{D}(\bar{S}_A^-)$, либо $\bar{D}(\bar{S}_A^-) \subset \bar{D}(\bar{S}_B^+)$, либо $\bar{D}(\bar{S}_A^-) \cap \bar{D}(\bar{S}_B^+) = \emptyset$;
- 3) $\bar{D}(\bar{S}_A^+) \cap \bar{D}(\bar{S}_A^-) = \emptyset$, $\bar{D}(\bar{S}_B^+) \cap \bar{D}(\bar{S}_B^-) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.2 непосредственно вытекает из того факта, что одномерные траектории потока попарно не пересекаются и не имеют самопересечений.

Из шага 2.2 следует, что на множестве областей вида $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm)$ можно ввести частичное отношение порядка: $\bar{D}_1 \leq \bar{D}_2$, если $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2$.

ШАГ 2.3. Пусть семейство $\{\bar{D}_i\}$ областей вида $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm)$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{D}_1 \leq \bar{D}_2 \leq \dots \leq \bar{D}_i \leq \bar{D}_{i+1} \leq \dots$$

Тогда семейство $\{\bar{D}_i\}$ состоит из конечного числа различных элементов и, следовательно, имеет максимальный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.3. Рассмотрим для определенности случай, когда область $\bar{D}_1$ есть $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$, и воспользуемся предыдущими обозначениями (во всех остальных случаях рассуждение аналогичное). Покажем, что этой области соответствует хотя бы одна точка касания геодезической $\bar{g}_0$ с траекториями потока и, более того, включение $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2$ увеличивает число точек касания.

Поскольку кривая $l_- \cup \bar{s} \cup l_+$ разбивает Δ на две области $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$ и $\Delta - \bar{D}(\bar{s}, A^+)$, то одна из сепаратрис l_- , l_+ является продолжением по Бендиксону другой. Для определенности будем считать, что α -сепаратриса l_+ является продолжением по Бендиксону ω -сепаратрисы l_- .

Обозначим через c, d соответственно последнюю и первую точки пересечения l_- и l_+ с $\bar{g}_0$. Такие точки существуют, так как $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$. Ясно, что $c, d \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$. Поскольку l_+ является продолжением по Бендиксону сепаратрисы l_- , то l_- и l_+ пересекают $\bar{g}_0$ в точках c, d с разными индексами пересечения. Отсюда вытекает, что на отрезке $[c, d] \subset \bar{g}_0$ имеется хотя бы одна точка касания $\bar{g}_0$ с траекториями потока.

Для дальнейших рассуждений введем необходимые обозначения. Обозначим через $\bar{D}_s$ диск, ограниченный отрезком $[c, d] \subset \bar{g}_0$, седлом $\bar{s}$ и дугами $\smile[c, \bar{s}]$, $\smile(\bar{s}, d]$ сепаратрис l_- и l_+ . Таким образом, каждому седлу $\bar{s}$ соответствуют отрезок $I_s = [c, d] \subset \bar{g}_0$ и диск $\bar{D}_s$.

Рассмотрим теперь область $\bar{D}_2$ такую, что $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2$. Область $\bar{D}_2$ согласно шагу 2.2 имеет вид $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$ или $\bar{D}(\bar{s}, B^-)$. Пусть для определенности $\bar{D}_2$ имеет вид $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$ (в противном случае рассуждение незначительно модифицируется). Сделаем переобозначения $\bar{D}_1 = \bar{D}_{s_1}$, $\bar{D}_2 = \bar{D}_{s_2}$. Так как $\bar{D}_{s_1} \subset \bar{D}_{s_2}$, то либо $I_{s_1} \subset I_{s_2}$, либо $I_{s_1} \cap I_{s_2} = \emptyset$. Если $I_{s_1} \subset I_{s_2}$, то на $I_{s_2} - I_{s_1}$ имеется хотя бы одна точка касания $\bar{g}_0$ с траекториями потока, так как у каждого седла $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ не менее четырех сепаратрис. Если $I_{s_1} \cap I_{s_2} = \emptyset$, то на отрезке I_{s_2} имеется хотя бы одна точка касания $\bar{g}_0$ с траекториями потока. В любом случае получаем, что включение $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2$ увеличивает число точек касания. Отсюда вытекает требуемое утверждение, поскольку на $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ имеется только конечное число точек касания.

Из шага 2.3 следует, что в множестве областей вида $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm)$ существует только конечное число максимальных (по включению) областей, так как на $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ имеется только конечное число точек касания.

Пусть $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$ – максимальная (по включению) область из множества областей $\bar{D}(\bar{S}_C^\pm)$. По определению $\bar{s} \in \mathcal{N}^+$ является седлом типа A^+ и у $\bar{s}$ имеются две сепаратрисы l_- , l_+ , ограничивающие совместно с $\bar{s}$ область $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$. Обозначим через c, d соответственно первую и последнюю точки пересечения l_- и l_+ с $\bar{g}_0$ (отметим, что эти обозначения отличаются от обозначений, сделанных в доказательстве шага 2.3). Такие точки существуют, поскольку $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$ (см. рис. 7). Ясно, что $c, d \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$. Так как у иррационального потока нет

Рис. 7

сепаратрисных связей, то на кривой

$$K_s = \smile[c, \bar{s}] \cup \bar{s} \cup \smile(\bar{s}, d]$$

нет конгруэнтных точек. В силу леммы 2.3 существует изотопия поверхности, накрывающая для которой переводит K_s в $[c, d]$, “продавливая” $\bar{D}(\bar{s}, A^+) \cap \mathcal{D}^+$ в область $\mathcal{D}^-$.

Произведя соответствующую деформацию для всех максимальных дисков вида $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$, получим (после переобозначений), что в $\mathcal{D}^+$ нет седел множества $\aleph^+$ типа A^+). Заметим, что одновременно может уменьшиться число областей вида $\bar{D}(\bar{s}, B^-)$ (те, которые принадлежат максимальным областям $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$). При этом согласно шагу 2.2 число областей вида $\bar{D}(\bar{s}, B^+)$ и $\bar{D}(\bar{s}, A^-)$ не изменится.

Пусть $\bar{D}(\bar{s}, B^+)$ – максимальная область из множества областей $\bar{D}(\bar{S}^\pm)$. Седло $\bar{s} \in \aleph^+$ является седлом типа B^+) и у $\bar{s}$ имеются две сепаратрисы l_- , l_+ , ограничивающие совместно с $\bar{s}$ область $\bar{D}(\bar{s}, B^+)$. Обозначим через c , d соответственно первую и последнюю точки пересечения l_- и l_+ с $\bar{g}_0$. Такие точки существуют в силу определения типа B^+). Так как на кривой K_s нет конгруэнтных точек, то в силу леммы 2.3 существует изотопия поверхности, накрывающая для которой переводит K_s в $[c, d]$ и “продавливает” $\bar{D}(\bar{s}, B^+) \cap \mathcal{D}^-$ в область $\mathcal{D}^+$. Произведя соответствующую деформацию для всех максимальных дисков вида $\bar{D}(\bar{s}, A^+)$, получим, что в $\mathcal{D}^+$ нет седел множества $\aleph^+$ типа B^+).

Аналогичную деформацию осуществим для седел множества $\aleph^-$ типов A^-), $B^-)$. Таким образом, далее $\aleph^+ = \emptyset$ и $\aleph^- = \emptyset$.

Обозначим через S_ω множество седел из области $\mathcal{D}^+$, ровно одна сепаратриса которых достигает точку в I_ω , а остальные сепаратрисы достигают точки на промежутке I_α . Аналогично рассмотренным седлам из $\aleph^+$ “продавим” их в область $\mathcal{D}^-$. Но сначала докажем следующее утверждение.

ШАГ 2.4. Пусть $\bar{s} \in S_\omega$, и пусть l – единственная (по определению множества S_ω) сепаратриса седла $\bar{s}$, которая достигает точку на I_ω . Тогда l является α -сепаратрисой, $\alpha(l) = \bar{s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.4. Предположим противное. Тогда $\alpha(l) \in I_\omega$. Пусть l_* – продолжение по Бендиксону сепаратрисы l . Согласно предположению о противном и определению множества S_ω имеем $\omega(l_*) \in I_\alpha$. Тогда геодезическая, соасимптотическая обобщенной траектории $l \cup \{\bar{s}\} \cup l_*$, пересекает $\bar{g}_0$ в направлении противоположном, нежели геодезическая $\bar{g}_1 = \bar{g}(\bar{l}_1)$. Это противоречит условию теоремы о том, что геодезическая g_0 ориентируемо пересекается со всеми геодезическими из геодезического каркаса $G(f^t)$.

Пусть $\bar{s} \in S_\omega$. По условию $\bar{s}$ имеет ровно одну сепаратрису l , достигающую точку на I_ω . Согласно шагу 2.4 l – α -сепаратриса. Пусть l_- , l_+ – продолжения по Бендиксону сепаратрисы l . Тогда l_- , l_+ достигают точки s_- , $s_+ \in I_\alpha$ соответственно. Так как $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$, то l_- и l_+ пересекают $\bar{g}_0$. Обозначим через c , d соответственно первые при уменьшении времени точки пересечения l_- и l_+ с $\bar{g}_0$. Ясно, что $c, d \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$. Так как $\bar{s}$ имеет по крайней мере четыре сепаратрисы, то на отрезке $[c, d] \subset \bar{g}_0$ имеются хотя бы две точки касания $\bar{g}_0$ с траекториями потока. Обозначим через $\bar{D}_s$ диск, ограниченный отрезком $[c, d] \subset \bar{g}_0$, седлом $\bar{s}$ и дугами $\smile[c, \bar{s}]$, $\smile(\bar{s}, d]$ сепаратрис l_- и l_+ . Так как у f^t нет сепаратрисных связей, то на дуге $K_s = \smile[c, \bar{s}] \cup \bar{s} \cup \smile(\bar{s}, d]$ нет конгруэнтных точек.

Возьмем максимальный по включению диск $\bar{D}_s$. Пусть $\bar{d}$ – дуга с концевыми точками $d_1, d_2 \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$, которая совместно с отрезком $[d_1, d_2] \subset [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ ограничивает больший, чем $\bar{D}_s$, диск (см. рис. 8). Существует достаточно близкая к K_s дуга $\bar{d}$, которая трансверсальна потоку и на которой нет конгруэнтных точек. В силу леммы 2.3 существует изотопия поверхности, накрывающая для которой переводит $\bar{d}$ в $[d_1, d_2]$, “продавливая” диск $\bar{D}_s$ в область $\mathcal{D}^-$.

Рис. 8. Дуга $\bar{d}$

Произведем аналогичную деформацию для всех максимальных дисков $\bar{D}_s$, $\bar{s} \in S_\omega$. Тогда получим (после переобозначений), что в $\mathcal{D}^+$ нет седел множества S_ω . Аналогичную процедуру осуществим для седел в $\mathcal{D}^-$, ровно одна сепаратриса которых достигает точку в I_α , а остальные сепаратрисы достигают точки на промежутке I_ω .

Отметим, что в $\mathcal{D}^-$, вообще говоря, могут быть седла, ровно одна сепаратриса которых достигает точку в I_ω , а остальные сепаратрисы достигают точки на промежутке I_α , но некоторые из этих сепаратрис пересекают $\bar{g}_0$ (так же, как и седла в $\mathcal{D}^+$, ровно одна сепаратриса которых достигает точку в I_α , а остальные сепаратрисы достигают точки на промежутке I_ω , но некоторые из этих сепаратрис пересекают $\bar{g}_0$). Отнесем эти седла также к множеству S_ω (соответственно S_α). Полностью аналогично строится изотопия, после которой таких седел уже не будет. Таким образом, далее $S_\omega = \emptyset$ и $S_\alpha = \emptyset$.

Заметим, что все предыдущие деформации не увеличивали число касаний на $\bar{g}_0$ (точнее, на отрезке $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$). Более того, теперь справедливо следующее утверждение.

ШАГ 2.5. Для любого седла $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$ выполняется ровно одно из следующих условий:

- 1) все сепаратрисы седла $\bar{s}$ достигают точки на промежутке I_ω и ни одна из этих сепаратрис не пересекает $\bar{g}_0$;
- 2) ровно одна сепаратриса (скажем, l_s) седла $\bar{s}$ достигает точку на I_α , а остальные сепаратрисы достигают точки на I_ω и не пересекают $\bar{g}_0$; при этом l_s является ω -сепаратрисой (и пересекает $\bar{g}_0$), $\omega(l_s) = \bar{s}$.

Для любого седла $\bar{s} \in \mathcal{D}^-$ выполняется ровно одно из следующих условий:

- 3) все сепаратрисы седла $\bar{s}$ достигают точки на промежутке I_α и ни одна из этих сепаратрис не пересекает $\bar{g}_0$;
- 4) ровно одна сепаратриса (скажем, l_s) седла $\bar{s}$ достигает точку на I_ω , а остальные сепаратрисы достигают точки на I_α и не пересекают $\bar{g}_0$; при этом l_s является ω -сепаратрисой (и пересекает $\bar{g}_0$), $\omega(l_s) = \bar{s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.5. Докажем утверждение только для седла $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$ (для $\bar{s} \in \mathcal{D}^-$ доказательство аналогичное). Предположим противное. Так как $\aleph^+ = \emptyset$, то у $\bar{s}$ имеются сепаратрисы, достигающие точки как на I_ω , так и на I_α . Согласно условию теоремы $\bar{s} \in S_\omega$. Это противоречит тому, что $S_\omega = \emptyset$.

Таким образом, у любого седла $\bar{s} \in \mathcal{D}^+$ существует не более одной сепаратрисы, достигающей точку I_α и пересекающей геодезическую $\bar{g}_0$ (возможно, несколько раз). Аналогично, у любого седла $\bar{s} \in \mathcal{D}^-$ существует не более одной сепаратрисы, достигающей точку I_ω и пересекающей геодезическую $\bar{g}_0$.

Далее мы будем деформировать $\bar{g}_0$ (точнее, отрезок $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$) и распространять деформацию в конгруэнтные участки) в трансверсаль потока $\bar{f}^t$, последовательно уничтожая точки касания. Не уменьшая общности, можно считать, что все касания являются односторонними, т.е. локально траектория, касающаяся $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ вблизи точки касания, лежит либо в $\mathcal{D}^+$, либо в $\mathcal{D}^-$. Соответственно этому мы будем говорить о касании из области $\mathcal{D}^+$ или $\mathcal{D}^-$. Возможны три случая: либо все касания из $\mathcal{D}^+$, либо все касания из $\mathcal{D}^-$, либо имеются касания из обеих областей. Первые два случая симметричны. Поэтому достаточно рассмотреть последние два случая, когда имеются касания из $\mathcal{D}^-$ (возможно, что только такие касания имеют место).

Пусть $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_q$ – точки касания отрезка $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ с траекториями потока $\bar{f}^t$ из области $\mathcal{D}^-$. В области $\mathcal{D}^+$, принадлежащей достаточно малой окрестности каждой точки $\bar{z}_i$, $i = 1, \dots, q$, траектории образуют простейшее слоение на полудиске, состоящее из “концентрических полуокружностей”. Поэтому для каждой точки $\bar{z}_i$ можно построить семейство замкнутых и вложенных друг в друга дисков $D_\mu(i)$, $\mu \in [0, \infty)$, где $D_0(i) = \bar{z}_i$ и $D_{\mu_1}(i) \subset D_{\mu_2}(i)$ при $\mu_1 < \mu_2$, ограниченных отрезками $[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)] \subset \bar{g}_0$ и дугами $\smile[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)]$ траекторий, лежащих в $\mathcal{D}^+$.

Если при некотором значении μ_0 дуга $\smile[\alpha_{\mu_0}(i), \beta_{\mu_0}(i)]$ коснется отрезка $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ в точке, отличной от концевых точек $\alpha_{\mu_0}(i)$ и $\beta_{\mu_0}(i)$, то существуют отрезок $[\alpha, \beta] \supset [\alpha_{\mu_0}(i), \beta_{\mu_0}(i)]$ и дуга траектории $\smile[\alpha, \beta]$, ограничивающие диск $D' \subset \mathcal{D}^+$, который включает в себе объединение $\bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu_0} D_\mu(i)$ (см. рис. 9, а)). Положив $D' = D_{\mu_0}(i)$, мы продолжим процесс построения дисков $D_\mu(i)$. Отме-

Рис. 9

тим, что точки $\alpha_\mu(i)$, $\beta_\mu(i)$ не могут одновременно стремиться к точкам $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ соответственно при $\mu \rightarrow \infty$, поскольку в окрестности точек $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ векторное поле направлено из области $\mathcal{D}^-$ в область $\mathcal{D}^+$. Таким образом, процесс построения дисков $D_\mu(i)$ приводит к одному из следующих случаев:

- 1) появляется касание в одной (и только в одной) из концевых точек $\alpha_\mu(i)$ или $\beta_\mu(i)$, т.е. процесс построения дисков $D_\mu(i)$ формально заканчивается;
- 2) точки $\alpha_\mu(i)$ (или $\beta_\mu(i)$) стремятся к точке $\alpha_*(i)$ (соответственно $\beta_*(i)$), через которую проходит полутраектория, не стремящаяся затем к точке покоя и не пересекающая трансверсально геодезическую $\bar{g}_0$;
- 3) в границу объединения $\bigcup_{\mu \geq 0} D_\mu(i)$ входит седловая точка покоя s_0 .

В случае 1) отрезок $[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)]$ заменяется дугой так, как изображено на рис. 9, b). При этом исчезает одна точка касания. Возможные самопересечения “уничтожаются” в силу леммы 2.3.

Покажем, что случай 2) не реализуется. Предположим противное. Для определенности будем считать, что точки $\alpha_\mu(i)$ стремятся к точке $\alpha_*(i)$, через

Рис. 10

которую проходит $\bar{L}$, не стремящаяся затем к точке покоя и не пересекающая трансверсально геодезическую $\bar{g}_0$. Поскольку $\bar{L}$ не стремится к точке покоя, она проектируется в нетривиально рекуррентную полутраекторию. Согласно [11] $\bar{L}$ стремится к некоторой точке σ абсолюта, пересекая счетное множество трансверсалей, которые стягиваются (в евклидовой метрике) к σ . Поэтому существует трансверсаль $\bar{T}$, которая пересекается с полутраекторией $\bar{L}$ и не пересекается с $\bar{g}_0$. В силу теоремы о непрерывной зависимости траекторий от начальных условий существует дуга $\smile[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)]$, пересекающаяся с $\bar{T}$. Так как $\bar{L}$ не пересекается с $\bar{g}_0$, то $\smile[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)]$ должна пересечь $\bar{T}$ дважды, что невозможно (см. рис. 10).

Рассмотрим случай 3). Точка покоя s_0 является седлом, так как поток f^t иррациональный. В силу теоремы о непрерывной зависимости траекторий от начальных условий получаем, что в границу объединения $\bigcup_{\mu \geq 0} D_\mu(i)$ входят дуги сепаратрис (обозначим их через S_1, S_2) седла s_0 , ограничивающие седловой сектор, который пересекается с дугами $\smile[\alpha_\mu(i), \beta_\mu(i)]$. Поэтому одна из сепаратрис является продолжением по Бендиксону (слева или справа) другой сепаратрисы в положительном направлении. Предположим для определенности, что S_2 является продолжением по Бендиксону справа сепаратрисы S_1 в положительном направлении. Таким образом, S_1 является ω -сепаратрисой, а S_2 — α -сепаратрисой седла s_0 . Следовательно, проекции S_1 и S_2 на поверхность являются соответственно нетривиально α - и ω -рекуррентными траекториями. Если S_1 в отрицательном направлении не пересекается с $\bar{g}_0$, то полностью аналогично случаю 2) приходим к противоречию. Поэтому S_1 в отрицательном направлении пересекает $\bar{g}_0$. Так же доказывается, что S_2 в положительном направлении пересекает $\bar{g}_0$. Но это противоречит шагу 2.5.

Таким образом, случаи 2), 3) не реализуются. В случае 1), как показано выше, строится изотопия, после которой исчезает одна точка касания. Так как число касаний на $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ конечно, тоб продолжая описанный выше процесс, получим отрезок $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ без точек касания. Проекция отрезка $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ на поверхность даст требуемую замкнутую простую трансверсаль, что завершит доказательство теоремы.

Список литературы

- [1] С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, “О топологической эквивалентности нигде не плотных минимальных множеств динамических систем на торе”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1976, № 5, 104–107.

- [2] С. Х. Арансон, И. А. Гореликова, Е. В. Жужома, “О влиянии абсолюта на локальные и гладкие свойства слоений и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях”, *Докл. РАН*, **379**:2 (2001), 154–157.
- [3] С. Х. Арансон, “Топологическая классификация слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях. Ч. 1: Слоения. Ч. 2: Гомеоморфизмы”, *Деп. в ВИНТИ*, ГГУ, Горький, 1988. № 6887 В-88; 1989. № 1043 В-89.
- [4] H. Whitney, “Regular families of curves”, *Ann. of Math.* (2), **34**:2 (1933), 244–270.
- [5] S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to qualitative theory of dynamical systems on closed surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1996.
- [6] Д. В. Аносов, “О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях, I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:1 (1987), 16–43.
- [7] Д. В. Аносов, “О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях, II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:3 (1988), 451–478.
- [8] Д. В. Аносов, Е. В. Жужома, “Асимптотическое поведение накрывающих кривых на универсальных накрытиях поверхностей”, *Труды МИАН*, **238** (2002), 5–54.
- [9] S. Aranson, V. Grines, E. Zhuzhoma, “On Anosov–Weil problem”, *Topology*, **40**:3 (2001), 475–502.
- [10] I. Nikolaev, E. Zhuzhoma, *Flows on 2-dimensional manifolds. An overview*, Lecture Notes in Math., **1705**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [11] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных динамических систем)”, *Матем. сб.*, **90(132)**:3 (1973), 372–402.
- [12] Д. В. Аносов, Е. В. Жужома, “Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих”, *Труды МИАН*, **249** (2005), 7–239.
- [13] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О представлении минимальных множеств потоков на двумерных многообразиях геодезическими линиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:1 (1978), 104–129.
- [14] Nielsen J., “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I–III”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358; **53** (1929), 1–76; **58** (1932), 87–167.
- [15] Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстену*, ФАЗИС, М., 1998.
- [16] D. Neumann, “Smoothing continuous flows on 2-manifolds”, *J. Differential Equations*, **28**:3 (1978), 327–344.
- [17] C. Gutiérrez, “Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **6**:1 (1986), 17–44.

С. Х. Арансон (S. Kh. Aranson)

И. А. Гореликова (I. A. Gorelikova)

Нижегородский государственный технический университет

Е. В. Жужома (E. V. Zhuzhoma)

Нижегородский государственный технический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru