Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Число вращения плоских линейных деревьев, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 8, 41–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:28:23

УДК 514.77

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Число вращения плоских линейных деревьев

В работе вводятся новые естественные геометрические характеристики плоских линейных деревьев – граничное множество и число вращения. Оказывается, что число уровней выпуклости граничного множества ограничено сверху линейной функцией от числа вращения. В качестве следствий этого общего факта получен ряд нетривиальных утверждений, касающихся геометрии линейных деревьев, являющихся экстремалами функционала длины и веса.

Библиография: 17 названий.

Введение

В настоящей работе изучаются плоские линейные укладки деревьев. Напомним, что *дерево* – это конечный связный ациклический граф; *плоской укладкой* графа называется эквивалентный ему плоский граф, т.е. граф, вершины которого – это точки плоскости, а ребра – вложенные плоские кривые; и, наконец, укладку естественно называть *линейной*, если все ее ребра представляют собой прямолинейные отрезки. Казалось бы, вопрос о плоских линейных укладках произвольных графов (а не только деревьев) давно и хорошо изучен: имеются критерии существования плоских укладок (или, как их еще называют, *вложений в плоскость*) произвольного графа, например, теорема Понтрягина–Куратовского, и, более того, известна теорема Вагнера: если граф допускает некоторую плоскую укладку, то он допускает и линейную плоскую укладку (см., например, [16]). Наконец, найдены алгоритмы, проверяющие существует ли у данного графа плоская укладка, и, если ответ на этот вопрос положителен, то строящие соответствующий плоский граф.

Однако совсем иначе обстоит дело, если мы потребуем, чтобы искомая плоская линейная укладка графа G обладала какими-либо дополнительными геометрическими свойствами. Сформулируем общую задачу, которая возникает при таком подходе.

Пусть G – связный плоский граф. Такие графы мы будем называть *сетями*. Если M – произвольное фиксированное конечное множество точек плоскости, и G – произвольная сеть, множество вершин которой содержит M , то говорят, что сеть G *затягивает* M , или M является *границей* сети G .

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (ISF), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).

Пусть G – произвольная сеть, и M – произвольное конечное подмножество плоскости. Сеть Γ с границей M и эквивалентная G , называется *сетью типа G , затягивающей M* . Если, кроме того, фиксировано некоторое конечное подмножество V вершин сети G и некоторое взаимно однозначное отображение $\beta: V \rightarrow M$, то каждую сеть Γ типа G , затягивающую M , и такую, что, ограничение некоторой эквивалентности между G и Γ на множество V совпадает с β , называют *сетью типа G , затягивающей M по граничному отображению β* , или, для краткости, *сетью типа (G, β) , затягивающей M* . Само отображение β называется *граничным отображением*.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С ЗАРАНЕЕ ЗАДАННЫМИ УГЛАМИ. Пусть фиксированы сеть G и граничное отображение $\beta: V \rightarrow M$. Существует ли сеть Γ типа G , затягивающая множество M по граничному отображению β , такая, что углы между некоторыми парами ребер из Γ удовлетворяют каким-либо заранее заданным ограничениям? Описать все сети G и Γ , для которых решение существует.

Задачи этого типа часто возникают в самых разнообразных приложениях. Несмотря на это, они еще весьма далеки от своего решения, так как оказываются чрезвычайно сложными.

Покажем, как из поставленной задачи получается, в частном случае, классическая задача о минимальных сетях на плоскости. Пусть G – произвольная сеть, степени вершин которой не превосходят трех. Пусть фиксировано граничное отображение $\beta: V \rightarrow M$, и предположим, что V содержит все вершины из G степени 1 и 2. Задача о поиске плоской линейной сети Γ типа G , затягивающей множество M по граничному отображению β , и такой, что угол между любыми двумя соседними ребрами сети Γ больше или равен 120° , – это, в точности, задача поиска локально минимальной сети данного типа G с данной границей $\beta: V \rightarrow M$. В случае, если G – дерево, то для каждого граничного отображения β ответ можно получить с помощью классического алгоритма Мелзака [17]. Задачу описания локально минимальных сетей всевозможных типов, затягивающих данное множество M , часто называют *обобщенной проблемой Штейнера*.¹ Над решением этой чрезвычайно сложной задачи работают много известных отечественных и зарубежных специалистов.

В данной работе предлагается новый подход к решению задач такого типа в предположении, что рассматриваемые графы являются деревьями. Авторами предлагается новая геометрическая характеристика плоского линейного дерева – число вращения, которая оказывается тесно связанной с естественно определяемой “геометрической” границей такого дерева. Из доказанной нами здесь основной теоремы (см. ниже) легко следуют как полученные нами ранее результаты о возможных типах плоских локально минимальных бинарных деревьев и минимальных взвешенных бинарных деревьев [9], [11], так и естественные обобщения этих

¹История проблемы Штейнера насчитывает уже более 300 лет и восходит к таким выдающимся ученым как Ферма, Торричелли, Кавальери, Симпсон, Гильберт и др. В своем современном виде эта задача была впервые поставлена Ярником и Кесслером. Название “проблема Штейнера”, породившее определенную путаницу в вопросах приоритета, было введено, для случая трех граничных точек, Курантом и Роббинсом. См. обзор в [2], [6], [12].

результатов на случай любых (не обязательно бинарных) локально минимальных деревьев и минимальных взвешенных деревьев (см. следствия 1–4).

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы. Для этого нам понадобится ввести ряд определений. Мы введем здесь необходимые понятия неформально, отложив формальные определения до §§ 1, 2 ниже. Определим сначала число вращения линейного дерева. Если на плоскости задана произвольная ориентированная ломаная L , то назовем *кручением* $\text{tn}(L)$ ломаной L деленную на $\pi/3$ величину полного угла поворота при движении по этой ломаной. Другими словами, если рассматривать звенья ориентированной ломаной как векторы, то, при переходе через каждую внутреннюю вершину ломаной, вектор-звено поворачивается на некоторый угол (положительный или отрицательный). Чтобы получить кручение ломаной, следует просуммировать все такие углы поворота и умножить на нормирующий множитель $3/\pi$.

Пусть теперь Γ – произвольное линейное дерево, и (a, b) – произвольная упорядоченная пара ребер из Γ . Рассмотрим единственный путь γ в дереве Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Очевидно, γ представляет собой некоторую ломаную, которую мы ориентируем от a к b . Назовем *числом вращения* $\text{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары* (a, b) *ребер из* Γ кручение $\text{tn} \gamma$ ломаной γ . Наконец, *числом вращения* $\text{tw} \Gamma$ *линейного дерева* Γ назовем максимум чисел вращения $\text{tw}(a, b)$, где максимум берется по всевозможным упорядоченным парам (a, b) ребер из Γ . Ясно, что всегда $\text{tw} \Gamma \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работах [4], [5], [9], [11] при изучении геометрии локально минимальных бинарных деревьев и минимальных взвешенных бинарных деревьев, мы определяли число вращения не для конкретного дерева, а сразу для класса планарной эквивалентности таких деревьев. Это было возможно, поскольку мы знали локальное устройство изучаемых минимальных сетей, а именно, знали величины углов, под которыми стыкуются их ребра. В рамках же рассматриваемой нами более общей задачи, ограничения на углы могут быть заданы в виде неравенств. Ясно, что, исходя из таких ограничений, нельзя адекватно определить число вращения между парой ребер дерева. (В качестве примера можно рассмотреть задачу о минимальных взвешенных деревьях, у которых имеются вершины степени больше чем три.) Тем не менее, для каждого конкретного дерева, удовлетворяющего этим ограничениям, число вращения определяется естественным образом, что и сделано выше, и можно изучать, как изменяется число вращения внутри класса таких деревьев. Отметим, что для минимальных (взвешенных) бинарных деревьев определенное нами число вращения не изменяется внутри указанного класса и совпадает с числом вращения таких деревьев в смысле [4], [5], [9], [11].

Определим теперь (геометрическую) границу линейного дерева. Пусть Γ – линейное дерево, и P – произвольная вершина из Γ . Вершину P линейного дерева Γ назовем *граничной*, если существует проходящая через P прямая ℓ такая, что одна из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ , содержит все ребра из Γ , инцидентные P . Все остальные вершины из Γ будем называть *внутренними*. Множество всех граничных вершин линейного дерева Γ называется его *границей* или *граничным множеством* и обозначается через $\partial\Gamma$.

Определим, наконец, разбиение произвольного конечного множества точек плос-

кости на уровни выпуклости. Пусть M – произвольное непустое конечное множество точек плоскости. Отнесем к его *первому уровню выпуклости* M^1 все точки из M , лежащие на границе выпуклой оболочки множества M . Заметим, что M^1 не пусто. Выбросим M^1 из M . Если полученное в результате множество не пусто, используем для его преобразования ту же процедуру. А именно, все точки из M , попавшие на границу выпуклой оболочки множества $M \setminus M^1$, отнесем ко *второму уровню выпуклости* M^2 множества M . Продолжим этот процесс до тех пор, пока все точки из M не попадут на какой-нибудь уровень выпуклости. Построенное разбиение $M = \bigsqcup_{i=1}^k M^i$ называется *разбиением на уровни выпуклости*, а множество M^i называется *i -м уровнем выпуклости* множества M . Говорят, что $M = \bigsqcup_{i=1}^k M^i$ *имеет k уровней выпуклости*. Количество уровней выпуклости множества M будем обозначать через $\varkappa(M)$. Отметим, что множество M лежит на границе своей выпуклой оболочки, если и только если оно имеет один уровень выпуклости, который, очевидно, совпадает с ним самим.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть Γ – произвольное линейное дерево, и $M = \partial\Gamma$ – его граница. Обозначим через $\varkappa(M)$ количество уровней выпуклости множества $\partial\Gamma$. Тогда*

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\varkappa(M) - 1) + 6.$$

Продemonстрируем, как работает эта теорема на примерах локально минимальных деревьев, минимальных параметрических деревьев, экстремальных взвешенных деревьев и минимальных прямоугольных деревьев.

Пусть Γ – локально минимальное дерево типа (G, β) , затягивающее конечное множество M точек плоскости (см. необходимые определения в [4]–[12]). Тогда, из теоремы о локальном устройстве таких сетей вытекает, что дерево Γ – линейное, и угол между любыми двумя соседними ребрами дерева Γ больше или равен 120° . Легко показать, что геометрическая граница $\partial\Gamma$ такого линейного дерева совпадает со множеством всех его вершин степени 1 и 2, из которого выброшены все вершины степени 2 такие, что угол между инцидентными им ребрами равен 180° . С другой стороны, из той же теоремы о локальном устройстве следует, что $\partial\Gamma \subset M$. Поэтому, из основной теоремы немедленно получается следующее утверждение, обобщающее результаты из [4]–[12] для локально минимальных бинарных деревьев.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть Γ – произвольное локально минимальное дерево, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда*

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\varkappa(\partial\Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\varkappa(M) - 1) + 6.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что граница $\partial\Gamma$ не может быть определена исходя лишь из сети G и граничного отображения β , так как *a priori* не понятно, какие из вершин степени 2 сети G становятся фиктивными вершинами минимального дерева Γ . Поэтому разумно дать промежуточную оценку, определив, например, множество M' , состоящее из всех точек из M , соответствующих при граничном отображении β вершинам степени 1 и 2 сети G . Тогда будет иметь место следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1'. Во введенных обозначениях, $\text{tw } \Gamma \leq 12(\chi(M') - 1) + 6$.

Пусть Γ – минимальное параметрическое дерево типа (G, β) , затягивающее конечное множество M точек плоскости (см. необходимые определения в [12]). Вершины дерева Γ , не попавшие во множество M , будем называть *подвижными*. Тогда, из теоремы о локальном устройстве таких сетей вытекает, что дерево Γ – линейное, и в каждой подвижной вершине сети Γ сумма направлений всех приходящих в нее ребер равна 0. Отсюда следует, что каждая подвижная вершина из Γ является внутренней вершиной линейного дерева Γ . Иными словами, геометрическая граница $\partial\Gamma$ содержится во множестве M . Поэтому, из основной теоремы немедленно получается следующее утверждение, обобщающее результаты из [4]–[12].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Γ – произвольное минимальное параметрическое дерево, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\chi(\partial\Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\chi(M) - 1) + 6.$$

Пусть теперь Γ – минимальное взвешенное дерево типа (G, β) , затягивающее конечное множество M точек плоскости (см. необходимые определения в [9], [11], [12]). Отметим, что мы рассматриваем случай произвольных весов, не обязательно положительных.² Тогда, из очевидного обобщения теоремы о локальном устройстве минимальных взвешенных сетей со случая положительных весов на произвольные веса, вытекает, что дерево Γ – линейное, и в каждой подвижной вершине сети Γ линейная комбинация направлений всех приходящих в нее ребер с коэффициентами-весами этих ребер, равна 0.

Отсюда следует, что если все веса положительны, то каждая подвижная вершина из Γ является внутренней вершиной линейного дерева Γ . Иными словами, геометрическая граница $\partial\Gamma$ содержится во множестве M . Поэтому, из основной теоремы немедленно получается следующее утверждение, обобщающее результаты из [9], [11] для минимальных взвешенных бинарных деревьев.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Γ – произвольное минимальное взвешенное дерево с положительными весами, затягивающее фиксированное конечное множество M точек плоскости. Тогда

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\chi(\partial\Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\chi(M) - 1) + 6.$$

Предположим теперь, что веса ребер могут быть любыми. Вершину взвешенного дерева G назовем *вырожденной*, если все инцидентные ей ребра имеют нулевые веса. Далее, невырожденную вершину взвешенного дерева G *положительной*, если веса всех инцидентных этой вершине ребер больше или равны 0. Аналогично, назовем невырожденную вершину взвешенного дерева G *отрицательной*, если веса всех инцидентных этой вершине ребер меньше или равны 0. Наконец, назовем вершину из G *недетерминированной*, если она не является ни положительной, ни

²Функционал веса, в случае произвольных весов, может иметь не только локальные минимумы, но и локальные максимумы, и седловые точки. Мы сохраним термин “минимальный” за всеми критическими точками функционала веса.

отрицательной. Отметим, что все вырожденные вершины являются, по определению, недетерминированными. Тогда, геометрическая граница $\partial\Gamma$ минимального дерева Γ содержится в объединении $\overline{M}$ множества M и множества всех недетерминированных вершин из G .

СЛЕДСТВИЕ 4. В сделанных выше обозначениях, для минимального взвешенного линейного дерева Γ имеет место оценка:

$$\text{tw } \Gamma \leq 12(\chi(\partial\Gamma) - 1) + 6 \leq 12(\chi(\overline{M}) - 1) + 6.$$

Авторы искренне и глубоко признательны академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе. Авторы также благодарны О. Р. Мусину и всем участникам его семинара по компьютерной геометрии (МГУ) за полезные и интересные обсуждения, которые послужили стимулом написания настоящей статьи.

§ 1. Ломаные линии

В первых двух разделах данного параграфа собраны необходимые определения и свойства ломаных линий. Поскольку используемая в работе техника аналогична разработанной в [8], [9], мы приводим здесь лишь формулировки необходимых результатов. Все доказательства заинтересованный читатель может найти в [8]. В третьем разделе получено обобщение результатов из [8] о связи кручений двух находящихся в общем положении ломаных с общими концевыми вершинами на случай произвольных ломаных.

1.1. Одна ломаная. Напомним определение ломаной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечный набор отрезков $\Delta_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, называется *незамкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, и интервалы (A_i, A_{i+1}) попарно не пересекаются.

Конечное множество отрезков $\Delta_i = [A_i, A_{(i+1) \bmod (n+1)}]$, $i = 0, \dots, n$, называется *замкнутой ломаной*, если все точки A_i попарно различны, и интервалы $(A_i, A_{(i+1) \bmod (n+1)})$ попарно не пересекаются.

Отрезки $[A_i, A_{i+1}]$ называются *ребрами* ломаной, а точки A_i — ее *вершинами*. Если ломаная незамкнута, то вершины A_0 и A_{n+1} называются *концевыми*, а все остальные — *внутренними* вершинами ломаной. Ребра незамкнутой ломаной, содержащие ее концевые вершины, также называются *концевыми ребрами*, а все остальные ребра — *внутренними ребрами* ломаной.

Ломаная L' называется *подломаной* ломаной L , если каждое ребро ломаной L' является также и ребром ломаной L .

Если ломаная L' совпадает с ломаной L как подмножество плоскости, но содержит некоторые дополнительные вершины, то L' называется *измельчением* ломаной L .

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем, говоря о ломаных, мы, допуская определенную вольность речи, иногда будем подразумевать их “естественные” измельчения, которые очевидно определяются из контекста. Например, если некоторая ломаная L' , как подмножество плоскости, содержится в ломаной L , то мы будем говорить, что

L' является подломаной ломаной L , хотя формально это верно лишь для измельчения ломаной L , полученного добавлением ко множеству ее вершин всех вершин ломаной L' .

Пусть L – произвольная ломаная. По определению, все ее вершины A_i канонически перенумерованы. Ясно, что каждая ломаная может быть задана занумерованным набором своих вершин. Если перенумеровать точки A_i в противоположном порядке, то мы снова получим ломаную, совпадающую с исходной как подмножество плоскости. Выбор одной из двух канонических нумераций вершин называется *ориентацией* ломаной L . Если ориентация ломаной L фиксирована, то можно рассматривать каждое звено $A_i A_{i+1}$ ломаной L как вектор с началом в A_i и концом в A_{i+1} .

Напомним, что если (a, b) – упорядоченная пара линейно независимых векторов на плоскости, то можно определить *ориентированный угол* $\alpha(a, b)$ от a к b так. Величина $\alpha(a, b)$ равна величине меньшего из двух углов между векторами, а знак – знаку ориентированного репера (a, b) . Если векторы a и b сонаправлены, то ориентированный угол равен нулю, по определению. Для противоположно направленных векторов мы не будем определять ориентированный угол.

В дальнейшем, нам будет удобно нормировать ориентированный угол.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Твистингом* $\text{tw}(a, b)$ *упорядоченной пары векторов* a и b назовем число $\alpha(a, b)/(\pi/3)$.

Отметим, что в случае незамкнутой ломаной твистинг определен лишь для внутренних вершин.

Пусть L – ориентированная ломаная, и $a_i = [A_i, A_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, – ее последовательные ребра (если ломаная замкнута, то сложение понимается по модулю $n + 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Твистингом* $\text{tw } A_i$ *вершины* A_i назовем твистинг $\text{tw}(a_{i-1}, a_i)$ между последовательными векторами-звеньями, инцидентными A_i .

Предположим теперь, что ломаная L незамкнута.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма твистингов всех внутренних вершин ломаной L называется *кручением вдоль* L и обозначается через $\text{tn } L$:

$$\text{tn } L = \sum_{i=1}^n \text{tw } A_i.$$

Если ломаная L состоит из одного звена, то положим $\text{tn } L = 0$.

Легко видеть, что кручение вдоль незамкнутой ломаной L обладает следующими свойствами:

- (1) если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (кососимметричность);
- (2) если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают;

- (3) если A_i – произвольная внутренняя вершина L , и L_1 и L_2 – ломанные линии, на которые A_i разбивает L , ориентированные в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L_1 + \text{tn } L_2$;
- (4) если P – произвольная точка лежащая внутри произвольного ребра из L , и L_1 и L_2 – ломанные, на которые P разбивает L , ориентированные в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L_1 + \text{tn } L_2$.

Пусть теперь L – замкнутая ломаная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма твистингов всех вершин замкнутой ломаной L называется *кручением вдоль замкнутой ломаной L* и обозначается через $\text{tn } L$:

$$\text{tn } L = \sum_{i=0}^n \text{tn } A_i.$$

Сформулируем несколько очевидных свойств кручения вдоль замкнутой ломаной L .

- (1) Если заменить ориентацию ломаной L на противоположную, то кручение вдоль L изменит знак (кососимметричность).
- (2) Если ломаная L' получена из L измельчением, то кручения вдоль L и L' совпадают.
- (3) Если A_i – произвольная вершина L , и L' – незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по A_i , и ориентированная в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L' + \text{tn } A_i$. Более точно, чтобы получить ломаную L' из ломаной L , следует выбросить из L малую (связную) окрестность $U_A \subset L$ точки A_i , не содержащую вершин ломаной L , отличных от точки A_i , если A_i – вершина.
- (4) Если P – произвольная точка лежащая внутри произвольного ребра из L , и L' – незамкнутая ломаная, полученная из L разрезанием по P и ориентированная в соответствии с ориентацией L , то $\text{tn } L = \text{tn } L'$.

Следующее предложение непосредственно вытекает из определений и теоремы о сумме углов плоского многоугольника.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть L – произвольная замкнутая ломаная, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\text{tn } L = 6$. Если же L ориентирована по часовой стрелке, то $\text{tn } L = -6$.

В дальнейшем нам также понадобится следующее понятие деформации ломаной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство ломаных L^t , $t \in [0, 1]$, с вершинами в точках A_i^t , где $i = 0, \dots, n+1$, называется *деформацией ломаной $L = L^0$* , если все кривые A_i^t непрерывны. Вершина A_i ломаной L называется *неподвижной* при деформации L^t , если $A_i^t = A_i$ для любого $t \in [0, 1]$. Все остальные вершины называются *подвижными*. Ребро $[A_i, A_{i+1}]$ ломаной L , называется *подвижным*, если подвижна хотя бы одна из его вершин. Множество всех подвижных ребер из L называется *носителем деформации L^t* .

Легко доказывается следующее предложение [7], [8], [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть L^t – произвольная деформация ломаной L . Если L незамкнута, то предположим дополнительно, что направления первого и последнего ее звеньев не меняются в процессе деформации. Тогда кручение вдоль L не изменяется при деформации:

$$\text{tn } L^t = \text{const} = \text{tn } L, \quad t \in [0, 1].$$

1.2. Пара ломаных: случай общего положения. Пусть L^1 и L^2 – две ломаных, некоторые вершины которых фиксированы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что L^1 и L^2 находятся в *общем положении*, если они пересекаются не более чем в конечном числе точек, каждая из которых или не является вершиной ни одной из ломаных, или является фиксированной вершиной одной из L^i .

Пусть теперь L^1 и L^2 – некоторые ломаные, и предположим, что эти ломаные находятся в общем положении. Выбросим из L^2 все точки пересечения с L^1 , и обозначим через L_j^2 замыкания полученных связных компонент. Ясно, что L_j^2 являются ломаными. Если ломаная L^2 ориентирована, то будем предполагать что компоненты L_j^2 занумерованы в соответствии с ориентацией ломаной L^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Построенное разбиение $L^2 = \bigcup L_j^2$ назовем *каноническим разбиением*³ ломаной L^2 по отношению к L^1 .

Предположим теперь, что ломаные L^1 и L^2 соединяют две различные фиксированные точки A и B , находятся в общем положении и ориентированы от A к B . Пусть $L^2 = \bigcup_{j=1}^N L_j^2$ – каноническое разбиение L^2 относительно L^1 . Каждая ломаная L_j^2 , вместе с соответствующей частью L^1 , ограничивает некоторую ограниченную область Ω_j на плоскости. Более точно, если A_j и B_j – начальная и конечная вершины ломаной L_j^2 , и b_j – часть ломаной L^1 между A_j и B_j , то область Ω_j ограничена замкнутой ломаной $L_j^2 \cup b_j$. Ломаную b_j будем называть *основанием* области Ω_j , а сами области Ω_j – *Ω -областями*. Первая и последняя из Ω_j называются *концевыми*, а все остальные – *внутренними Ω -областями*.

Так как ломаная L^2 ориентирована, то определено *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2 . Припишем каждой из L_j^2 знак следующим образом. Определим *знак* $\text{sign}(L_j^2)$ ломаной L_j^2 равным $+1$, если, двигаясь в положительном направлении по ломаной L_j^2 , мы обходим область Ω_j против часовой стрелки (ломаная L_j^2 является частью границы $\partial\Omega_j$ области Ω_j). В противном случае, положим $\text{sign}(L_j^2) = -1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $L^2 = \bigcup_{j=1}^N L_j^2$ – каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 . Сумма знаков $\text{sign}(L_j^2)$ по всем $j = 1, \dots, N$ называется *индексом ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\text{Ind}(L^2, L^1)$.

³Такое определение канонического разбиения было дано в [8], [9]. В следующем разделе мы дадим другое определение канонического разбиения, работающее без предположений об общем положении ломаных. Поэтому определенное только-что понятие естественнее называть, скажем, *регулярным каноническим разбиением*, что мы и будем делать начиная со следующего раздела. Здесь мы сохраняем терминологию из [8].

Рассмотрим теперь концевые области Ω_1 и Ω_N , и ориентируем их границы – замкнутые ломаные, в соответствии с положительным направлением движения вдоль L_1^2 и L_N^2 , соответственно. Обозначим через $\alpha(L^2, L^1)$ твистинг точки A как вершины ломаной $\partial\Omega_1$, и через $\beta(L^2, L^1)$ – твистинг точки B как вершины ломаной $\partial\Omega_N$. Назовем эти числа *начальным и конечным твистингом ломаной L^2 по отношению к L^1* . Отметим, что $\alpha(L^2, L^1)$ совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1 , и направлением начального звена ломаной L^2 . В свою очередь, $\beta(L^2, L^1)$ совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1 .

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат настоящего раздела (см. [8]).

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть L^1 и L^2 – ломаные, соединяющие пару различных точек A и B и ориентированные от A к B . Предположим, что единственные фиксированные вершины ломаных L^1 и L^2 – это точки A и B , и, кроме того, пусть ломаные L^1 и L^2 находятся в общем положении. Тогда*

$$\text{tn } L^2 = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

Приведем другое, иногда более удобное, определение индекса одной ломаной по отношению к другой.

Пусть L^1 и L^2 – такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1 , и пусть Ω_j – произвольная внутренняя Ω -область, а L_j^2 – соответствующая ломаная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область Ω_j и соответствующая ломаная L_j^2 называются *A-областью* и *A-элементом*, соответственно, если Ω_j содержит точку A и не содержит точки B . Если Ω_j содержит B и не содержит A , то Ω_j и L_j^2 называются *B-областью* и *B-элементом*. Далее, если Ω_j содержит и A , и B , то Ω_j и L_j^2 называются *полными*, или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A , ни B , то Ω_j и L_j^2 называются *пустыми*, или *E-областью* и *E-элементом*.

Ясно, что каждая внутренняя Ω -область (внутренний элемент канонического разбиения) является или *A*-, или *B*-, или *F*-, или *E*-областью (элементом). Таким образом, мы разбили множество всех внутренних Ω -областей (внутренних элементов канонического разбиения) на четыре класса, каждый из которых может быть пустым. Продолжим теперь это разбиение на концевые Ω -области так. Если существует по крайней мере две Ω -области (т.е. если ломаные L^1 и L^2 пересекаются не только по концевым вершинам), то Ω_1 отнесем к *A*-областям, а Ω_N – к *B*-областям. Если же существует ровно одна Ω -область (она же концевая), то отнесем ее к *A*-областям.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Определим *знак области Ω_j* как знак $\text{sign}(L_j^2)$ и обозначим его через $\text{sign}(\Omega_j)$. Припишем каждой Ω -области Ω_j букву $X_j^{\text{sign}(\Omega_j)}$, где буква X_j равна *A*, *B*, *F* или *E*, в зависимости

от того, к какому классу принадлежит область Ω_j . Составим *слово* $W(L^2, L^1)$, записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\text{sign}(\Omega_1)} \dots X_N^{\text{sign}(\Omega_N)}.$$

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв, и обозначим его через $\text{Weight}(L^2, L^1)$. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Во введенных выше обозначениях,*

$$\text{Ind}(L^2, L^1) = \text{Weight}(L^2, L^1).$$

Нам понадобится также следующее определение (см. [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пустая Ω -область, внутренность (а, значит, и основание) которой не содержит точек ломаной L^2 , назовем *строго пустой областью*. Соответствующие основания будем называть *пустыми*.

Легко доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Если множество пустых Ω -областей не пусто, то среди них найдется строго пустая Ω -область.*

В работе [8] с помощью строго пустых областей были определены *элементарные деформации ломаной L^2 относительно L^1* . Каждая такая деформация затрагивает малую окрестность в L^2 элемента канонического разбиения, соответствующего строго пустой области, и приводит к исчезновению этой строго пустой области, сохраняя при этом свойства общего положения. Используя элементарные деформации, можно последовательно ликвидировать строго пустые области, а значит и все пустые области. Полученная в результате ломаная называется *ломаной, редуцированной из L^2* . Редуцированная ломаная по-прежнему находится с L^1 в общем положении, но уже не образует пустых областей. Значение этой редукции ясно из следующего утверждения, доказанного в [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Элементарные деформации ломаной L^2 сохраняют как индекс $\text{Ind}(L^2, L^1)$, так и начальный $\alpha(L^2, L^1)$ и конечный $\beta(L^2, L^1)$ твистинги ломаной L^2 по отношению к L^1 .*

Следующее утверждение, доказанное в [8], описывает устройство редуцированных ломаных.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Пусть L^1 и L^2 — произвольная пара незамкнутых ломаных с общими концевыми точками A и B , находящихся в общем положении (при фиксированных A и B), и таких, что L^2 не образует пустых областей относительно L^1 . Тогда слово $W(L^2, L^1)$ имеет одну из следующих двух форм:*

- (1) $A^p F^q B^r$, где все p , q и r одновременно или положительны, или отрицательны, и $q = \pm 1$;
- (2) $A^p B^q$, где $pq \leq 0$, и $p \neq 0$.

Пусть L^1 и L^2 , как и выше, – пара ломаных в общем положении при фиксированных общих концевых вершинах A и B . Теорема 1.1, вместе с утверждением 1.4, дают возможность легко вычислять кручение одной ломаной, если вторая ломаная редуцирована. Чтобы применить эти результаты к произвольной ломаной L^2 , нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. *Пусть L^1 и L^2 – ломаные линии с общими концевыми вершинами A и B , находящиеся в общем положении. Обозначим через $\overline{L}^2$ ломаную, редуцированную из L^2 . Рассмотрим канонические разбиения ломаных L^2 и $\overline{L}^2$ относительно L^1 . Пусть p и q – количества A - и B -элементов канонического разбиения исходной ломаной L^2 . Тогда*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq p + q + 1.$$

Более того,

- (1) *если канонические разбиения ломаных L^2 и $\overline{L}^2$ не содержат F -элементов, то*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq \max(p, q);$$

- (2) *если каноническое разбиение ломаной L^2 не содержит F -элемента, а каноническое разбиение ломаной $\overline{L}^2$ содержит F -элемент, то*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq p + q - 1.$$

В заключение данного раздела мы определим понятие шапочки для ломаных, находящихся в общем положении. Ниже это понятие будет перенесено на общий случай.

Пусть ломаная L^1 замкнута, а ломаная L^2 – незамкнута. Как и выше, будем предполагать, что ломаные находятся в общем положении. Рассмотрим каноническое разбиение $L^2 = \bigcup L_i^2$ ломаной L^2 по отношению к L^1 . Обозначим через σ область, ограниченную ломаной L^1 . Тогда каждый внутренний элемент L_j^2 канонического разбиения, лежащий вне σ , называется *шапочкой*. Концевой элемент разбиения называется *шапочкой*, если он лежит вне σ , и обе его концевых вершины принадлежат ломаной L^1 .

Пусть L_j^2 – некоторая шапочка, и A_j и B_j – концевые вершины L_j^2 . Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаных, которые мы обозначим через L' и L'' . Рассмотрим области σ' и σ'' , ограниченные парами ломаных (L_j^2, L') и (L_j^2, L'') , соответственно. Тогда одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $\sigma' \subset \sigma''$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внутренность меньшей области σ' , построенной выше, называется *шапочкой*, *соответствующей L_j^2* , или *H -областью*, и обозначается через $H(L_j^2)$. Внутренность ломаной L' назовем *основанием шапочки* (как L_j^2 , так и $H(L_j^2)$), и обозначим через $b(L_j^2)$.

Ясно, что $\partial H(L_j^2) = L_j^2 \sqcup b(L_j^2)$.

Рассмотрим важный частный случай, когда замкнутая ломаная L^1 порождена некоторым уровнем выпуклости. А именно, пусть M – конечное множество точек плоскости, и M^t – его t -й уровень выпуклости. Обозначим через σ^t выпуклую оболочку множества M^t , и через W^t – границу многоугольника σ^t , т.е. $W^t = \partial\sigma^t$. Положим, для удобства, $\sigma = \sigma^1$, и $W = W^1$.

Пусть L^2 – незамкнутая ломаная линия, содержащаяся в σ . Предположим, что L^2 находится в общем положении по отношению ко всем W^t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Шапочка, образованная L^2 по отношению к W^t , называется t -шапочкой.

Пусть L_i^2 – некоторая t -шапочка. Предположим, что L_i^2 пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^s$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \sigma^{s-1}$ для некоторого s . Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i^2 образует s -шапочку, но не образует $(s-1)$ -шапочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В только что введенных обозначениях, каждая из s -шапочек, образованных ломаной L_i^2 , называется *верхушкой* шапочки L_i^2 . Число s называется *индексом шапочки* L_i^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть L_i^2 – некоторая шапочка, и L' – некоторая ее верхушка. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $H(L') \subset H(L_i^2)$. Тем не менее, следующее утверждение имеет место (см. [8]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. Пусть L_i^2 и L_j^2 – две t -шапочки, и $H(L_i^2) \subset H(L_j^2)$. Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда для любой верхушки L'_i меньшей шапочки L_i^2 найдется верхушка L'_j большей шапочки L_j^2 такая, что $H(L'_i) \subset H(L'_j)$.

Приведем еще одну полезную оценку на кручение ломаной L^2 , концевые точки A и B которой расположены на замкнутой ломаной L^1 , ограничивающей выпуклую область. Предположим, что ломаные находятся в общем положении (вершины A и B фиксированы), и обозначим через L' и L'' те ломаные, на которые токи A и B разбивают L^1 . Тогда можно доказать следующее утверждение [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7. В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:

$$|\text{tn } L^2| < 3|\text{Ind}(L^2, L') + \text{Ind}(L^2, L'')| + 6.$$

1.3. Пара произвольных ломаных. В настоящей статье, в отличие от работ [8], [9], нам не удастся ограничиться рассмотрением лишь случая ломаных в общем положении (дело в том, что здесь мы собираемся работать с произвольными линейными деревьями, а не только с экстремальными функционала длины или веса, как в [8], [9]). Поэтому, нам придется обобщить результаты предыдущего раздела, отказавшись от предположения об общем положении ломаных.

Итак, пусть L^1 и L^2 – пара произвольных ломаных. Выбросим из ломаной L^2 множество $L^1 \cap L^2$. Замыкания L_j^2 полученных связных компонент, очевидно, являются ломаными, каждая из которых – подломаная ломаной L^2 . Рассмотрим теперь само множество $L^1 \cap L^2$. Отметим, что как $L^1 \cap L^2$, так и его связные компоненты, –

замкнуты. Кроме того, ясно, что произвольная связная компонента S_i^2 множества $L^1 \cap L^2$ – или ломаная, которая является подломаной как L^2 , так и L^1 , или точка. Таким образом, мы представили ломаную L^2 в виде объединения замкнутых множеств двух типов: L_j^2 и S_i^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Построенное разбиение $L^2 = (\bigcup L_j^2) \cup (\bigcup S_i^2)$ назовем *каноническим разбиением ломаной L^2 по отношению к L^1* . Ломаные L_j^2 будем называть *регулярными* элементами канонического разбиения, а элементы S_i^2 – *сингулярными*.

Пусть теперь ломаная L^2 – незамкнута. Элемент канонического разбиения ломаной L^2 по отношению к L^1 , содержащий хотя бы одну из концевых вершин ломаной L^2 , назовем *концевым*. Все остальные элементы канонического разбиения будем называть *внутренними*. Если же ломаная L^2 – замкнута, то все элементы ее канонического разбиения будем, по определению, называть *внутренними*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если V – концевая вершина ломаной L^2 , то она принадлежит или одному, или двум элементам канонического разбиения. При этом, в первом случае элемент канонического разбиения, содержащий V , может быть как регулярным ($V \notin L^1$), так и сингулярным ($V \in S_i^2$ и $S_i^2 \neq V$). Во втором случае, один из таких элементов регулярный, а другой – сингулярный и совпадает с V (другими словами, в этом случае вершина V является изолированной точкой пересечения ломаных L^1 и L^2).

ЗАМЕЧАНИЕ. С формальной точки зрения, для ломаных, находящихся в общем положении, в предыдущем разделе было определено *другое* понятие канонического разбиения, которое мы, начиная с этого места, будем называть *регулярным каноническим разбиением*. Пусть L^1 и L^2 – пара ломаных, находящихся в общем положении при некоторых фиксированных общих вершинах. Пусть $L^2 = \bigcup \bar{L}_j^2$ – регулярное каноническое разбиение, и $L^2 = (\bigcup L_j^2) \cup (\bigcup S_i^2)$ – каноническое разбиение, определенное только что (не регулярное). Ясно, что каждый элемент регулярного канонического разбиения $\bar{L}_j^2$ совпадает, как подломаная ломаной L^2 , с соответствующим регулярным элементом L_j^2 канонического разбиения. Каждый сингулярный элемент S_i^2 канонического разбиения является или внутренней точкой некоторого ребра ломаной L^2 , или совпадает с одной из фиксированных вершин.

Пусть S_i^2 – некоторый сингулярный элемент канонического разбиения. Элемент S_i^2 представляет собой ломаную, начальную и конечную точки которой мы обозначим через A_i и B_i , соответственно (точки A_i и B_i совпадают, если и только если S_i^2 состоит из одной точки). В дальнейшем, переходя при необходимости к подразбиениям исходных ломаных, будем *предполагать*, что каждая из точек A_i и B_i или является вершиной обеих ломаных L^1 и L^2 , или не является вершиной ни одной из них. Из этого предположения вытекает, в частности, что если S_i^2 состоит более чем из одной точки, то обе его концевые вершины являются вершинами обеих ломаных. Если же S_i^2 состоит из одной точки $A_i = B_i = S_i^2$, то эта точка может как быть общей вершиной ломаных L^1 и L^2 , так и не быть вершиной ни одной из них. В последнем случае эта точка является внутренней для некоторых ребер из

L^1 и L^2 . Таким образом, из нашего предположения вытекает, в частности, что если хотя бы одна из точек A_i и B_i не является общей вершиной ломаных L^1 и L^2 , то элемент S_i^2 состоит из одной точки.

Чтобы сформулировать для произвольной пары ломаных L^1 и L^2 аналог теоремы 1.1 из предыдущего раздела о связи кручений, нам следует обобщить на случай таких ломаных понятие индекса $\text{Ind}(L^2, L^1)$ и концевых твистингов. В свою очередь, чтобы определить индекс пары ломаных, нужно приписать каждому элементу построенного канонического разбиения некоторый “знак”. Прежде чем определять знаки сингулярных элементов канонического разбиения, полезно разбить множество всех таких элементов на два класса. Элементы, попавшие в один класс, будем называть *трансверсальными*, а в другой – *касательными*.

Итак, пусть, как и выше, $L^2 = (\bigcup L_j^2) \cup (\bigcup S_i^2)$ – каноническое разбиение ломаной L^2 относительно ломаной L^1 . Мы будем предполагать в дальнейшем, если не оговорено противное, что ломаные L^1 и L^2 различны как подмножества плоскости, исключая тем самым из рассмотрения тривиальный случай совпадающих ломаных.

Мы начнем с определения допустимой окрестности сингулярного элемента. Пусть S_i^2 – произвольный сингулярный элемент, и обозначим через A_i и B_i – начальную и конечную вершины ломаной S_i^2 . Обозначим через E_i^j ориентированную подломаную ломаной L^j , полученную из S_i^2 добавлением всех тех ребер ломаной L^j , которые содержат хотя бы одну из точек A_i и B_i . Обозначим начальное и конечное звенья построенной ломаной E_i^j через b^j и e^j , соответственно. Отметим, что ребра b^j и e^j могут совпадать.

Рассмотрим ε -окрестность U_ε элемента S_i^2 , т.е. множество тех точек плоскости, расстояние от которых до S_i^2 не превосходит $\varepsilon > 0$, причем выберем ε настолько малым, чтобы окрестность U_ε пересекалась только со звеньями ломаной S_i^2 и звеньями b^1, b^2, e^1 и e^2 , построенными выше. Если элемент S_i^2 является концевым и состоит более чем из одной точки, а V – концевая вершина ломаной L^2 , принадлежащая S_i^2 , то подправим множество U_ε следующим образом. Пусть e – общее звено ломаных L^1 и L^2 , содержащее V , а ℓ – прямая, проходящая через V перпендикулярно к e . Обозначим через $H(V)$ замкнутый полукруг, отсекаемый от U_ε прямой ℓ и пересекающийся с e лишь по точке V . Перестроенное множество U_ε определим как замыкание множества $U_\varepsilon \setminus H(V)$ и будем по-прежнему обозначать через U_ε .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Построенное выше множество U_ε будем называть *допустимой ε -окрестностью* сингулярного элемента S_i^2 .

Пусть сингулярный элемент S_i^2 отличен от концевой вершины ломаной L^2 . В этом случае каждая из ломаных L^j , $j = 1, 2$, разбивает каждую допустимую окрестность U_ε элемента S_i^2 на две компоненты. Обозначим через δ_ε границу допустимой окрестности U_ε . Ясно, что δ_ε – вложенная замкнутая кусочно-гладкая кривая на плоскости, пересекающаяся с каждой из ломаных L^1 и L^2 ровно по двум точкам. При этом, каждая из этих точек пересечения лежит на одном из ребер b^1, b^2, e^1, e^2 . Ясно, что если элемент S_i^2 является внутренним, то все эти четыре точки пересечения попарно различны, а если S_i^2 – концевой элемент, то две из этих точек совпадают между собой и совпадают с общей концевой вершиной ломаных L^1 и L^2 .

Построим теперь разбиение множества всех сингулярных элементов на два класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сингулярный элемент S_i^2 назовем *касательным*, если ломаная L^2 разбивает границу δ_ε произвольной допустимой окрестности U_ε элемента S_i^2 на две (замкнутых) компоненты, причем только одна из этих компонент пересекается с ломаной L^1 . В противном случае, сингулярный элемент S_i^2 назовем *трансверсальным*.

В дальнейшем нам также будет полезно следующее разбиение множества трансверсальных сингулярных элементов на два класса. Назовем трансверсальный сингулярный элемент *существенным*, если он содержит внутреннюю вершину хотя бы одной из ломаных L^1 или L^2 . В противном случае, трансверсальный сингулярный элемент назовем *несущественным*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поясним только что данные определения (см. рис. 1). Пусть сначала S_i^2 – концевой сингулярный элемент. Если S_i^2 совпадает с одной из концевых вершин ломаной L^2 , то он является трансверсальным элементом, так как ломаная L^2 в этом случае вообще не разбивает никакую допустимую окрестность элемента S_i^2 . Если же концевой сингулярный элемент S_i^2 состоит больше чем из одной точки, то он, очевидно, является касательным.

Далее, внутренний сингулярный элемент S_i^2 является трансверсальным, если точки, принадлежащие ломаным L^1 и L^2 , чередуются на границе δ_ε произвольной допустимой окрестности элемента S_i^2 . В противном случае, элемент S_i^2 является касательным.

Наконец, концевой трансверсальный элемент всегда является несущественным, а внутренний трансверсальный элемент является несущественным, только если он состоит из одной точки, не являющейся вершиной ни одной из ломаных L^1 и L^2 .

РИС. 1. Типы сингулярных элементов

Итак, мы построили разбиение множества всех сингулярных элементов канонического разбиения на два класса – касательные и трансверсальные сингулярные элементы.

Предположим теперь, что обе ломаные L^1 и L^2 незамкнуты и соединяют различные точки A и B , т.е. соответствующие концевые точки ломаных L^1 и L^2 совпадают. Как и выше, будем предполагать, что $L^1 \neq L^2$. Ориентируем ломаные L^1 и L^2 от A к B . Для таких ломаных определим знаки элементов канонического разбиения.

Для регулярных элементов канонического разбиения – ломаных L_j^2 , знак определяется точно так же, как и в случае ломаных общего положения. А именно, если A_j и B_j – начальная и конечная вершины ломаной L_j^2 , являющейся регулярным элементом канонического разбиения, и b_j – часть ломаной L^1 между A_j и B_j , то замкнутая ломаная $L_j^2 \cup b_j$ ограничивает конечную область на плоскости, которую мы обозначим через Ω_j . Ломаную b_j , как и выше, будем называть *основанием* области Ω_j , а сами области Ω_j – *Ω -областями*. Выбранная ориентация ломаной L^2 определяет *положительное направление движения* вдоль L^2 и, следовательно, вдоль каждой L_j^2 . Определим *знак* $\text{sign}(L_j^2)$ *ломаной* L_j^2 равным $+1$, если, двигаясь в положительном направлении по ломаной L_j^2 , мы обходим область Ω_j против часовой стрелки. В противном случае, положим $\text{sign}(L_j^2) = -1$.

Определим теперь знаки сингулярных элементов. Если S_i^2 – трансверсальный сингулярный элемент, то положим $\text{sign}(S_i^2) = 0$. Пусть теперь S_i^2 – касательный сингулярный элемент. Рассмотрим некоторую его допустимую окрестность U , и пусть δ – граница допустимой окрестности U . По определению, ломаная L^2 разбивает δ на две компоненты. Обозначим через δ_0 ту из этих компонент, которая содержит внутри себя точки из L^1 (эта компонента существует и единственна по определению). Ориентация ломаной L^2 задает порядок на точках пересечения ломаной L^2 с δ . Ориентируем δ_0 от первой точки пересечения ломаной L^2 с δ ко второй. Назовем так ориентированную кривую δ_0 *главной компонентой* границы δ допустимой окрестности. С другой стороны, ориентация плоскости также задает ориентацию кривой δ_0 , как части замкнутой кривой δ . Если эти две ориентации на δ_0 совпадают, то положим $\text{sign}(S_i^2) = +1$, в противном случае, положим $\text{sign}(S_i^2) = -1$.

Итак, каждому элементу канонического разбиения приписан знак, который равен ± 1 или 0 . Здесь мы пользуемся предположением о том, что ломаные L^1 и L^2 не совпадают как подмножества плоскости. Отметим, что если $L^1 = L^2$, то знак единственного сингулярного элемента не определен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L^1 и L^2 – две различные ломаные, соединяющие точки A и B , и $L^2 = (\bigcup L_j^2) \cup (\bigcup S_i^2)$ – каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 . Сумма знаков элементов канонического разбиения называется *индексом ломаной L^2 относительно L^1* и обозначается через $\text{Ind}(L^2, L^1)$:

$$\text{Ind}(L^2, L^1) = \sum_j \text{sign}(L_j^2) + \sum_i \text{sign}(S_i^2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть L^1 и L^2 – пара ломаных, соединяющих фиксированные точки A и B на плоскости, и находящихся в общем положении. Тогда, как мы уже отмечали выше, для ломаных L^1 и L^2 определено как регулярное каноническое разбиение, так и просто каноническое разбиение (не регулярное). Поэтому для ломаной L^2 относительно L^1 определено два числа: индекс в смысле ломаных в общем

положении, определенный в предыдущем разделе, который мы начиная с этого момента будем называть *регулярным индексом*, и индекс, определенный только что. Однако, поскольку, как легко видеть, все сингулярные элементы канонического разбиения в случае ломаных в общем положении являются трансверсальными и не дают вклада в индекс, имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. *Если ломаные L^1 и L^2 , соединяющие фиксированные точки A и B , находятся в общем положении, то регулярный индекс ломаной L^2 по отношению к L^1 совпадает с общим (не регулярным) индексом.*

Перейдем теперь к определению концевых твистингов. Если концевой сингулярный элемент состоит из одной точки V (здесь или $V = A$, или $V = B$), то, очевидно, имеется концевой регулярный элемент, содержащий точку V , и можно определить твистинг точно так же, как и в случае общего положения. А именно, нужно ориентировать границу Ω -области Ω , порожденной этим регулярным концевым элементом, в соответствии с положительным направлением движения по ломаной L^2 , и определить концевой твистинг в точке V равным твистингу этой точки как вершины ориентированной ломаной $\partial\Omega$.

В этом случае, если $V = A$, то концевой твистинг $\alpha(L^2, L^1)$ в вершине A совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением, противоположным направлению начального звена ломаной L^1 , и направлением начального звена ломаной L^2 . В свою очередь, если $V = B$, то концевой твистинг $\beta(L^2, L^1)$ в вершине B совпадает с деленной на $\pi/3$ величиной ориентированного угла между направлением последнего звена ломаной L^2 и направлением, противоположным направлению последнего звена ломаной L^1 .

Предположим теперь, что не существует концевого регулярного элемента, содержащего точку V . Это означает, что имеется единственный элемент канонического разбиения, содержащий точку V , и этот элемент, который мы обозначим через S_V^2 , является касательным сингулярным элементом. Отметим, что теперь угол между инцидентными вершине V концевыми ребрами ломаных L^1 и L^2 равен 0, поэтому воспользоваться старым определением концевого твистинга в точке V нельзя. Действительно, величина угла между нужными нам направлениями этих ребер равна π , поэтому *ориентированный* угол между этими направлениями не определен. Чтобы задать концевой твистинг в точке V , мы воспользуемся знаком касательного сингулярного элемента S_V^2 . А именно, в этом случае положим концевой твистинг в вершине V равным $3 \operatorname{sign}(S_V^2)$. Как и выше, обозначим концевые твистинги в вершинах A и B через $\alpha(L^2, L^1)$ и $\beta(L^2, L^1)$, соответственно.

Теперь все готово, чтобы сформулировать главный результат настоящего параграфа, являющийся обобщением теоремы 1.1 на случай произвольных ломаных.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть L^1 и L^2 – различные ломаные, соединяющие пару точек A и B и ориентированные от A к B . Тогда*

$$\operatorname{tn} L^2 = \operatorname{tn} L^1 + 6 \operatorname{Ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 1.2 мы воспользуемся специальными деформациями Φ_t , $t \in [a, b]$, ломаной L^2 , где $\Phi_a(L^2) = L^2$, $\Phi_b(L^2) = \overline{L}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Деформацию Φ_t будем называть *регуляризующей*, если она обладает следующими свойствами:

- (1) деформация Φ_t неподвижна на концевых точках A и B ;
- (2) деформация Φ_t не меняет индекс $\text{Ind}(L^2, L^1)$, т.е. $\text{Ind}(\Phi_t(L^2), L^1) = \text{const}$;
- (3) в результате деформации получается ломаная $\Phi_b(L^2)$, находящаяся по отношению к L^1 в общем положении (при фиксированных A и B);
- (4) кручение ломаной $\Phi_t(L^2)$, а также концевые твистинги $\alpha(\Phi_t(L^2), L^1)$ и $\beta(\Phi_t(L^2), L^1)$ ломаной $\Phi_t(L^2)$ по отношению к L^1 , непрерывно зависят от $t \in [a, b]$.

Ясно, что регуляризующая деформация должна “ликвидировать” касательные сингулярные элементы канонического разбиения и оставить лишь трансверсальные сингулярные элементы канонического разбиения, состоящие из одной точки. При этом условие (2) сохранения индекса при регуляризующей деформации не дает нам возможности просто так “уничтожать” касательные сингулярные элементы: нужно следить за тем, чтобы при этом индекс не изменился (напомним, что из всех сингулярных элементов именно касательные элементы дают вклад в индекс). Мы построим регуляризующую деформацию Φ_t , $t \in [0, 1]$, в виде двух последовательных деформаций, из которых первая, скажем Ψ_t , $t \in [0, 1/2]$, перестраивает касательные сингулярные элементы, а вторая, скажем θ_t , $t \in [1/2, 1]$, перестраивает трансверсальные сингулярные элементы. Мы будем требовать, чтобы деформация Ψ_t обладала всеми свойствами регуляризующих деформаций, кроме свойства (3), т.е. полученная в результате ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не должна находиться в общем положении. Однако, мы будем требовать, чтобы ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не образовывала бы уже касательных сингулярных элементов. Такую деформацию Ψ_t будем называть *1-регуляризующей*. В свою очередь, деформация θ_t будет регуляризующей деформацией, причем свойство (4) будет усилено: мы будем требовать, чтобы при деформации θ_t ни концевые твистинги, ни кручение ломаной L^2 не менялись. Такие деформации θ_t будем называть *2-регуляризующими*.

Мы построим 1-регуляризующую деформацию Ψ_t , $t \in [0, 1/2]$, обладающую следующими специальными свойствами. Пусть каноническое разбиение ломаной $L^2 = \Psi_0(L^2)$ относительно L^1 содержит s_t касательных сингулярных элементов, s_r трансверсальных сингулярных элементов, и r регулярных элементов. Тогда существует такое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{s_t} = 1/2$ отрезка $[0, 1/2]$, что каноническое разбиение ломаной $\Psi_t(L^2)$ при $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, s_t$, содержит $s_t - i$ касательных сингулярных элементов, $s_r + 2i$ трансверсальных сингулярных элементов и $r + i$ регулярных элементов. Другими словами, при переходе через значение $t = t_i$ ровно один касательный сингулярный элемент перестраивается, образуя два новых трансверсальных сингулярных элемента и один новый регулярный элемент. В частности, ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ уже не образует касательных сингулярных элементов. Такие 1-регуляризующие деформации будем называть *правильными*.

Прежде чем определять правильную 2-регуляризующую деформацию θ_t , сформулируем следующее очевидное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.9. Ломаные L^1 и L^2 , соединяющие фиксированные точки A и B , находятся в общем положении, если и только если каноническое раз-

биение ломаной L^2 относительно L^1 не содержит ни касательных сингулярных элементов, ни существенных трансверсальных сингулярных элементов.

Мы построим 2-регуляризующую деформацию θ_t , $t \in [1/2, 1]$, обладающую следующими специальными свойствами. Обозначим через $\tilde{L}^2$ ломаную, полученную из L^2 деформацией Ψ_t , т.е. положим $\tilde{L}^2 = \Psi_{1/2}(L^2)$. Пусть каноническое разбиение ломаной $\theta_{1/2}(\tilde{L}^2) = \tilde{L}^2$ содержит s_e существенных трансверсальных сингулярных элементов, s_n несущественных трансверсальных сингулярных элементов и r регулярных элементов (и, по построению, 0 касательных элементов). Тогда существует такое разбиение $1/2 = t_0 < t_1 < \dots < t_{s_e} = 1$ отрезка $[1/2, 1]$, что каноническое разбиение ломаной $\theta_t(\tilde{L}^2)$ при $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, s_e$, содержит $s_e - i$ существенных трансверсальных сингулярных элементов, $s_n + i$ несущественных трансверсальных сингулярных элементов, r регулярных элементов и, по-прежнему, 0 касательных сингулярных элементов. Другими словами, при переходе через значение $t = t_i$ ровно один существенный трансверсальный сингулярный элемент перестраивается, образуя один новый несущественный трансверсальный сингулярный элемент. В частности, ломаная $\theta_1(\tilde{L}^2)$ уже не образует существенных трансверсальных сингулярных элементов. Поэтому $\theta_1(\Psi_{1/2}(L^2))$ находится в общем положении с ломаной L^1 в силу утверждения 1.9. Такие 2-регуляризующие деформации также будем называть *правильными*.

Регуляризующую деформацию Φ_t , $t \in [0, 1]$, являющуюся результатом последовательного применения правильных 1- и 2-регуляризующих деформаций Ψ_t , $t \in [0, 1/2]$, и θ_t , $t \in [1/2, 1]$, будем также называть *правильной*.

Предположим, что мы умеем строить правильные регуляризующие деформации Φ_t , θ_t и Ψ_t . Поскольку ломаные $\Phi_1(L^2)$ и L^1 находятся в общем положении, к ним применима теорема 1.1. Поэтому, при $t = 1$, имеет место следующее равенство:

$$\text{tn}(\Phi_1(L^2)) = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(\Phi_1(L^2), L^1) - \alpha(\Phi_1(L^2), L^1) - \beta(\Phi_1(L^2), L^1). \quad (*)$$

Заметим, что правильная 2-регуляризующая деформация θ_t , $t \in [1/2, 1]$, по построению, не меняет ни одного из слагаемых, входящих в равенство (*). Поэтому равенство (*) справедливо при всех $t \in [1/2, 1]$. Так как, по определению, $\Phi_{1/2}(L^2) = \Psi_{1/2}(L^2)$, при $t = 1/2$ справедливо следующее равенство:

$$\text{tn}(\Psi_{1/2}(L^2)) = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(\Psi_{1/2}(L^2), L^1) - \alpha(\Psi_{1/2}(L^2), L^1) - \beta(\Psi_{1/2}(L^2), L^1). \quad (**)$$

Отметим, что ломаная $\Psi_{1/2}(L^2)$ не образует касательных сингулярных элементов по отношению к L^1 . Теперь доказательство теоремы легко получается индукцией по числу s_t касательных сингулярных элементов канонического разбиения ломаной L^2 .

В самом деле, если s_t равно нулю, т.е. касательных элементов нет, то утверждение теоремы совпадает с равенством (**), которое уже доказано. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо при $s_t < n$, и пусть каноническое разбиение ломаной L^2 по отношению к L^1 содержит n касательных сингулярных элементов. Тогда, по предположению индукции, равенство (**) справедливо при $t \in (0, 1/2]$. Далее, в силу свойства (2) регуляризующей деформации, $\text{Ind}(\Psi_t(L^2), L^1) = \text{const} = \text{Ind}(L^2, L^1)$, поэтому

$$\text{tn}(\Psi_t(L^2)) = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(L^2, L^1) - \alpha(\Psi_t(L^2), L^1) - \beta(\Psi_t(L^2), L^1), \quad t \in (0, 1/2].$$

Перейдем к пределу при $t \rightarrow 0^+$. В силу свойства (4) регуляризующей деформации Ψ_t , получим:

$$\text{tn}(\Psi_0(L^2)) = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(L^2, L^1) - \alpha(\Psi_0(L^2), L^1) - \beta(\Psi_0(L^2), L^1),$$

то есть

$$\text{tn } L^2 = \text{tn } L^1 + 6 \text{Ind}(L^2, L^1) - \alpha(L^2, L^1) - \beta(L^2, L^1),$$

что и требовалось. Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось построить правильные 1- и 2-регуляризующие деформации. Мы вынесем это построение в отдельный подраздел.

Построение правильной регуляризующей деформации. Прежде всего, перейдя, если нужно, к некоторому измельчению ломаной L^2 , будем, не ограничивая общности, предполагать, что каждый регулярный элемент ломаной L^2 состоит, по меньшей мере, из двух звеньев. Напомним, выше мы предполагали также, что каждая из концевых точек произвольного сингулярного элемента канонического разбиения или является вершиной обеих ломаных L^1 и L^2 , или не является вершиной ни одной из них.

Рассмотрим каноническое разбиение ориентированной ломаной L^2 относительно L^1 . Пусть S_i^2 – или касательный сингулярный элемент канонического разбиения, или существенный трансверсальный элемент, и A_i и B_i – концевые точки ломаной S_i^2 . Обозначим через $b_i = A'_i A_i$ то вектор-звено из L^2 , конечная вершина которого совпадает с A_i , а через $e_i = B_i B'_i$ – то вектор-звено из L^2 , начальная вершина которого совпадает с B_i . При этом, если $A_i = A$, то положим $A'_i = A_i$, а если $B_i = B$, то положим $B'_i = B_i$. По определению, если $A_i \neq A$, то звено $b_i = A'_i A_i$ принадлежит некоторой регулярной компоненте, причем, в силу принятого соглашения, вершина A'_i является внутренней вершиной этой регулярной компоненты. Аналогично, если $B_i \neq B$, то звено $e_i = B_i B'_i$ принадлежит некоторой регулярной компоненте, причем вершина B'_i является внутренней вершиной этой регулярной компоненты. Обозначим через $\bar{S}_i$ ломаную, полученную из S_i^2 добавлением звеньев b_i и e_i . Отметим, что ломаные $\bar{S}_i$ и $\bar{S}_j$, построенные для разных касательных сингулярных элементов S_i^2 и S_j^2 канонического разбиения, пересекаются не больше чем по общей концевой вершине.

Мы начнем с построения 1-регуляризующей деформации Ψ_t . Построим по каждому касательному сингулярному элементу S_i^2 деформацию Ψ_t^i ломаной L^2 такую, что носитель деформации Ψ_t^i совпадает с ломаной $\bar{S}_i$.

Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U касательного сингулярного элемента S_i^2 . Ломаная L^1 разбивает область U на две компоненты, которые мы обозначим через U' и U'' . Отметим, что внутренность одной из этих компонент, скажем U'' , пересекается с ломаной L^2 , а внутренность другой – U' , – не пересекается. Далее, ясно, что все внутренние вершины V_k ломаной $\bar{S}_i$ лежат на пересечении замыканий компонент U' и U'' . Зададим в каждой вершине V_k вектор v_k , направленный внутрь компоненты U' . Очевидно, сдвигая вершины V_k ломаной $\bar{S}_i$ вдоль векторов v_k внутрь компоненты U' , можно так продеформировать ломаную $\bar{S}_i$, что полученная в результате ломаная будет в общем положении с ломаной L^1 . Обозначим через Ψ_t^i деформацию ломаной L^2 , совпадающую на участке $\bar{S}_i$ с только что построенной деформацией, и постоянную вне $\bar{S}_i$.

Посмотрим, как изменилось каноническое разбиение ломаной L^2 при деформации Ψ_t^i . По построению, ломаная $\Psi_t^i(\bar{S}_i)$ пересекается с ломаной L^1 ровно по двум точкам, каждая из которых образует, очевидно, новый трансверсальный сингулярный элемент канонического разбиения. Подломаная, высекаемая из $\Psi_t^i(\bar{S}_i)$ этими двумя точками, образует новый регулярный элемент L_i канонического разбиения. Таким образом, касательный сингулярный элемент S_i^2 перестроился в один регулярный элемент и два трансверсальных сингулярных элемента.

ЛЕММА 1.1. *Знак регулярного элемента L_i совпадает со знаком того сингулярного касательного элемента S_i^2 , из которого он возник.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы непосредственно вытекает из определений. В самом деле, напомним, что элемент L_i получается из элемента S_i^2 в результате деформации Ψ_t^i , которая сдвигает вершины V_k ломаной S_i^2 внутрь области U' , отсеченной ломаной L^1 от допустимой окрестности U . Ясно, что продолжая двигать вершины V_k до границы δ допустимой окрестности, можно так продолжить эту деформацию (уже в классе вложенных кусочно-гладких кривых), что деформируемая кривая L_i будет вытеснена на главную компоненту δ_0 границы δ допустимой окрестности. Из этого наблюдения сразу вытекает, что $\text{sign}(L_i) = \text{sign}(S_i^2)$. Действительно, при движении по L_i в направлении, заданном ориентацией ломаной L^2 , соответствующая Ω -область остается по ту же сторону от L_i , что и допустимая окрестность U от главной компоненты δ_0 границы ∂U окрестности U при движении по этой главной компоненте δ_0 в положительном направлении. Лемма доказана.

Таким образом, индекс $\text{Ind}(\Psi_t^i(L^2), L^1)$ не меняется при деформации Ψ_t^i . Легко проверяется, что остальные свойства 1-регуляризующих деформаций также выполнены.

Построим такие деформации Ψ_t^i для всех сингулярных касательных элементов S_i^2 . Определим теперь деформацию Ψ_t ломаной L^2 как результат последовательного применения деформаций Ψ_t^i . Поскольку носители разных деформаций Ψ_t^i пересекаются не более чем по концевым точкам, деформация Ψ_t определена корректно. Кроме того, очевидно, что полученная в результате деформации Ψ_t ломаная $\tilde{L}^2$ не образует по отношению к L^1 касательных сингулярных элементов. Однако, ломаная $\tilde{L}^2$ может не находиться по отношению к L^1 в общем положении при фиксированных A и B , так как она образует, вообще говоря, с ломаной L^1 существенные трансверсальные сингулярные элементы. Итак, мы построили правильную 1-регуляризующую деформацию Ψ_t ломаной L^2 .

Построим теперь 2-регуляризующую деформацию θ_t ломаной $\tilde{L}^2$, которая уничтожает существенные трансверсальные сингулярные элементы. Пусть теперь S_i^2 – произвольный существенный трансверсальный сингулярный элемент ломаной $\tilde{L}^2$. По определению, элемент S_i^2 является внутренним элементом. Построим деформацию θ_t^i , носитель которой совпадает с ломаной $\bar{S}_i$ (см. выше).

Рассмотрим произвольную допустимую окрестность U существенного трансверсального сингулярного элемента S_i^2 . Если элемент S_i^2 состоит из одной точки V_1 , то зададим в точке V_1 вектор, не параллельный ни одному из звеньев ломаных L^1 и $\tilde{L}^2$, инцидентных вершине V_1 .

Пусть теперь элемент S_i^2 состоит более чем из одной точки. Упорядочим вершины ломаной S_i^2 в соответствии с ориентацией ломаной $\tilde{L}^2$, и обозначим их через $V_1, \dots, V_K$, где $K > 1$. Через каждую вершину V_i проведем прямую ℓ_i , содержащую биссектрису меньшего угла между инцидентными вершине V_i ребрами ломаной $\tilde{L}^2$.

Ломаные L^1 и L^2 разбивают область U на четыре компоненты. Так как S_i^2 состоит более чем из одной точки, то две из этих компонент пересекаются с S_i^2 только по концевым точкам ломаной S_i^2 , а каждая из двух других пересекает внутренность ломаной S_i^2 . Более того, одна из этих последних двух компонент пересекает внутренность ребра b_i , не пересекая при этом внутренности ребра e_i , а другая – наоборот. Первую из этих двух компонент мы обозначим через U' , а вторую – через U'' .

Далее, ясно, что все вершины $V_1, \dots, V_K$ ломаной S_i^2 лежат на пересечении замкнутой компоненты U' и U'' . Зададим в первой вершине этого множества вектор, направленный внутрь компоненты U' и параллельный прямой ℓ_1 . Отметим, что направление этого вектора всегда определено и притом однозначно, так как инцидентные вершине V_1 звенья границы компоненты U' принадлежат ломаной $\tilde{L}^2$. В каждой вершине $V_i, i > 1$, зададим вектор, направленный внутрь компоненты U'' и параллельный прямой ℓ_i . Отметим, что направление этого вектора всегда однозначно определено по аналогичным соображениям. Очевидно, сдвигая вершины V_j вдоль построенных векторов, можно так продеформировать ломаную $\bar{S}_i$, что полученная в результате ломаная будет в общем положении с L^1 . Обозначим через θ_t^i деформацию ломаной $\tilde{L}^2$, совпадающую с только что построенной на ломаной $\bar{S}_i$ и постоянную вне $\bar{S}_i$.

Посмотрим, как изменилось каноническое разбиение ломаной $\tilde{L}^2$ при деформации θ_t^i . По построению, полученная в результате деформации ломаная $\theta_t^i(\bar{S}_i)$ пересекается с ломаной L^1 ровно по одной точке, которая образует, очевидно, новый несущественный трансверсальный сингулярный элемент канонического разбиения. Таким образом, существенный трансверсальный сингулярный элемент S_i^2 перестроился в один несущественный трансверсальный сингулярный элемент.

Заметим, что при деформации θ_t^i не меняются ни концевые твистинги, ни кручение ломаной $\tilde{L}^2$, ни индекс этой ломаной по отношению к L^1 . Остается построить по деформациям θ_t^i одну деформацию θ_t , являющуюся результатом последовательного применения деформаций θ_t^i . Ясно, что полученная деформация будет правильной 2-регуляризующей деформацией.

Итак, мы построили правильные 1-регуляризующую деформацию Ψ_t и 2-регуляризующую деформацию θ_t . Из конструкции ясно, что последовательное применение деформаций θ_t и Ψ_t порождает искомую правильную регуляризующую деформацию Φ_t . Доказательство теоремы 1.2 полностью закончено.

Как и в случае общего положения, приведем теперь другое, иногда более удобное, определение индекса одной ломаной по отношению к другой.

Пусть L^1 и L^2 – такие же, как и выше. Рассмотрим каноническое разбиение L^2 относительно L^1 . Как и в случае общего положения, мы хотим построить разбиение элементов канонического разбиения на классы. Начнем с регулярных элементов. Для них разбиение строится точно так же, как и в случае общего положения.

А именно, пусть L_j^2 – произвольный внутренний регулярный элемент канонического разбиения, и Ω_j – соответствующая Ω -область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область Ω_j и соответствующий регулярный элемент L_j^2 называются *A-областью* и *A-элементом*, соответственно, если Ω_j содержит точку A и не содержит B . Если Ω_j содержит B и не содержит A , то Ω_j и L_j^2 называются *B-областью* и *B-элементом*. Далее, если Ω_j содержит и A , и B , то Ω_j и L_j^2 называются *полными* или *F-областью* и *F-элементом*. Наконец, если Ω_j не содержит ни A , ни B , то Ω_j и L_j^2 называются *пустыми* или *E-областью* и *E-элементом*.

Ясно, что каждый внутренний регулярный элемент канонического разбиения является или *A*-, или *B*-, или *F*-, или *E*-элементом. Как и в случае общего положения, продолжим это разбиение на концевые регулярные элементы (если они есть). Если имеется два концевых регулярных элемента, то первый из них отнесем к *A*-элементам, а последний – к *B*-элементам (напомним, что ломаная L^2 ориентирована от A к B). Если же имеется только один концевой регулярный элемент канонического разбиения, то мы отнесем этот элемент к *A*-элементам, если он содержит точку A , и к *B*-элементам в противном случае. Таким образом, множество всех регулярных элементов канонического разбиения (соответственно, всех Ω -областей) разбито на четыре класса: *A*-, *B*-, *F*- и *E*-элементы (области).

Пусть теперь S_i^2 – сингулярный элемент канонического разбиения. Отнесем все внутренние сингулярные элементы к *E*-элементам. Концевой сингулярный элемент также отнесем к *E*-элементам, если и только если он является трансверсальным (т.е. он состоит из одной точки, или, другими словами, имеется регулярный концевой элемент, содержащий этот сингулярный). Если же концевой сингулярный элемент не совпадает с соответствующей концевой вершиной (т.е. является касательным), то отнесем этот элемент к *A*-элементам, если он содержит точку A , и к *B*-элементам в противном случае. Отметим, что сингулярный элемент не может содержать сразу обе точки A и B , так как ломаные L^1 и L^2 различны по предположению. Таким образом, построено разбиение множества всех элементов канонического разбиения на четыре класса.

Построим теперь по паре ломаных L^1 и L^2 некоторое слово. Пусть $L^2 = \bigcup_{i=1}^N L_i$ – каноническое разбиение ломаной L^2 относительно L^1 , где через L_i обозначены последовательно занумерованные элементы канонического разбиения (как регулярные, так и сингулярные). Припишем теперь каждому элементу L_i букву $X_i^{\text{sign}(L_i)}$, где буква X_i равна A , B , F или E в зависимости от того, к какому классу принадлежит элемент L_i , и $\text{sign}(L_i)$ – знак этого элемента, определенный выше. Составим слово $W(L^2, L^1)$, записав полученные буквы по порядку:

$$W(L^2, L^1) = X_1^{\text{sign}(L_1)} \dots X_N^{\text{sign}(L_N)}.$$

Определим *вес слова* $W(L^2, L^1)$ как сумму степеней всех входящих в него букв, и обозначим его через $\text{Weight}(L^2, L^1)$. Буквы, входящие в слово в нулевой степени, договоримся не писать. Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.10. *Во введенных выше обозначениях,*

$$\text{Ind}(L^2, L^1) = \text{Weight}(L^2, L^1).$$

Напомним, что в случае общего положения нами были получены оценки на индекс ломаной L^2 по отношению к L^1 в терминах количества A - и B -элементов (см. утверждение 1.5). Чтобы получить аналогичные оценки в общем случае, нам понадобится следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.11. *Пусть L^1 и L^2 – пара произвольных ломаных, соединяющих точки A и B . Пусть Φ_t – правильная регуляризующая деформация ломаной L^2 относительно L^1 . Тогда количества A -, B - и F -элементов, образованных ломаной L^2 по отношению к L^1 , совпадают с соответствующими количествами A -, B - и F -элементов, образованных ломаной $\Phi_t(L^2)$ по отношению к ломаной L^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, отметим, что только регулярные элементы и концевые касательные сингулярные элементы не являются пустыми. При правильной регуляризующей деформации Φ_t каждый внутренний сингулярный элемент порождает не более одного регулярного элемента, который является пустым, и не порождает крайних элементов. Далее, крайний сингулярный A - или B -элемент порождает при деформации Φ_t регулярный A - или B -элемент, соответственно. Наконец, регулярные элементы не переходят из класса в класс при регуляризующей деформации. Доказательство закончено.

Комбинируя утверждение 1.11, утверждение 1.5 и замечание о том, что $\text{Ind}(L^2, L^1) = \text{Ind}(\Phi_t(L^2), L^1)$, получаем следующие оценки на индекс.

Пусть L^1 и L^2 – различные ломаные линии с общими концевыми вершинами A и B . Пусть, как и выше, Φ – это регуляризующая деформация ломаной L^2 . Обозначим через $\bar{\Phi}(L^2)$ ломаную, редуцированную из $\Phi(L^2)$ (напомним, что $\Phi(L^2)$ и L^1 – в общем положении).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *В сделанных выше обозначениях, рассмотрим канонические разбиения ломаных L^2 и $\bar{\Phi}(L^2)$ относительно L^1 . Пусть p и q – количества A - и B -элементов канонического разбиения исходной ломаной L^2 относительно L^1 . Тогда*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq p + q + 1.$$

Более того,

- (1) *если канонические разбиения ломаных L^2 и $\bar{\Phi}(L^2)$ не содержат F -элементов, то*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq \max(p, q);$$

- (2) *если каноническое разбиение ломаной L^2 не содержит F -элемента, а каноническое разбиение ломаной $\bar{\Phi}(L^2)$ содержит F -элемент, то*

$$|\text{Ind}(L^2, L^1)| \leq p + q - 1.$$

В заключение данного раздела мы приведем еще одну полезную оценку на кручение ломаной L , концевые точки A и B которой расположены на замкнутой ломаной W , ограничивающей выпуклый многоугольник σ . Обозначим через W^1 и W^2 те ломаные, на которые точки A и B разбивают W . Предположим, что ломаная L не содержится целиком в W , в частности, L не совпадает ни с W^1 , ни с W^2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.12. *В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:*

$$|\mathrm{tn} L| \leq 3|\mathrm{Ind}(L, W^1) + \mathrm{Ind}(L, W^2)| + 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ориентируем ломаные W^1 и W^2 от A к B . В силу теоремы 1.2, имеем:

$$\begin{aligned} \mathrm{tn} L &= \mathrm{tn} W^1 + 6\mathrm{Ind}(L, W^1) - \alpha(L, W^1) - \beta(L, W^1), \\ \mathrm{tn} L &= \mathrm{tn} W^2 + 6\mathrm{Ind}(L, W^2) - \alpha(L, W^2) - \beta(L, W^2). \end{aligned}$$

Поскольку знаки твистингов $\alpha(L, W^1)$ и $\alpha(L, W^2)$, так же, как и твистингов $\beta(L, W^1)$ и $\beta(L, W^2)$, различны, то

$$|\alpha(L, W^1) + \alpha(L, W^2)| \leq 3 \quad \text{и} \quad |\beta(L, W^1) + \beta(L, W^2)| \leq 3.$$

Кроме того, так как W ограничивает выпуклую область,

$$|\mathrm{tn} W^1 + \mathrm{tn} W^2| \leq 6.$$

Теперь, складывая первые два равенства и используя сделанные выше оценки, получаем требуемое.

Нам также понадобится следующая модификация только что доказанного утверждения. В обозначениях утверждения 1.12, рассмотрим каноническое разбиение $L = \bigcup L_i$ ломаной L относительно W . Предположим, что концевой сингулярный элемент L_1 , содержащий точку A , не совпадает с точкой A и, для определенности, является подломаной ломаной W^1 . Как и выше будем предполагать, что $L \not\subset W$, поэтому, в частности, $L_1 \neq W_1$. Для краткости, обозначим концевой сингулярный элемент L_1 через ℓ , и пусть A' – концевая вершина ломаной ℓ , отличная от A . Обозначим через $\bar{L}$ и $\bar{W}^1$ ломаные, полученные, соответственно, из L и W^1 выбрасыванием подломаной ℓ . Далее, обозначим через $\bar{W}^2$ ломаную, полученную из W^2 добавлением ломаной ℓ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.13. *В сделанных предположениях, имеет место следующее неравенство:*

$$|\mathrm{tn} L| \leq 3|\mathrm{Ind}(\bar{L}, \bar{W}^1) + \mathrm{Ind}(\bar{L}, \bar{W}^2)| + 6.$$

Другими словами, в сделанных предположениях, при оценке кручения ломаной L , можно перейти к ломаной $\bar{L}$, сингулярные концевые элементы которой совпадают с соответствующими концевыми вершинами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ориентируем ломаные W^1 и W^2 от A к B . В силу теоремы 1.2, имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{tn} L &= \mathrm{tn} W^1 + 6 \mathrm{Ind}(L, W^1) - \alpha(L, W^1) - \beta(L, W^1), \\ \mathrm{tn} L &= \mathrm{tn} W^2 + 6 \mathrm{Ind}(L, W^2) - \alpha(L, W^2) - \beta(L, W^2).\end{aligned}$$

По определению индекса ломаной, $\mathrm{Ind}(L, W^1) = \mathrm{sign}(\ell) + \mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^1})$. С другой стороны, так как подломаная ℓ ломаной L^2 пересекается с ломаной W^2 только по одной точке A , то $\mathrm{Ind}(L, W^2) = \mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^2})$. Наконец, по определению концевой твистинга, $\alpha(L, W^1) = 3 \mathrm{sign}(\ell)$. Имея ввиду сделанные наблюдения, складывая предыдущие равенства и группируя слагаемые, получаем, что:

$$\begin{aligned}2 \mathrm{tn} L &= 6(\mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^2})) - (\beta(L, W^1) + \beta(L, W^2)) \\ &\quad + 3 \mathrm{sign}(\ell) + (\mathrm{tn} W^1 + \mathrm{tn} W^2 - \alpha(L, W^2)).\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $|\beta(L, W^1) + \beta(L, W^2)| \leq 3$ как и в доказательстве утверждения 1.12; $|3 \mathrm{sign}(\ell)| = 3$; и, наконец, $|\mathrm{tn} W^1 + \mathrm{tn} W^2 - \alpha(L, W^2)| \leq 6$, так как ломаные W^1 и W^2 — это пересекающиеся по одной точке A части границы W выпуклого многоугольника, а $-\alpha(L, W^2)$ — это твистинг в точке A как в вершине ломаной W , ориентированной одним из двух возможных способов. Поэтому, разделив предыдущее соотношение на два, получаем:

$$\begin{aligned}|\mathrm{tn} L| &\leq 3|\mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^2})| + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 \\ &= 3|\mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^1}) + \mathrm{Ind}(\overline{L}, \overline{W^2})| + 6,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Оказывается, утверждение 1.12 можно существенно усилить, если предположить дополнительно, что ломаная L целиком лежит в многоугольнике σ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.14. Пусть L — ломаная, лежащая в выпуклом многоугольнике σ , причем предположим, что концевые точки A и B ломаной L лежат на ограничивающей многоугольник σ ломаной W . Тогда кручение ломаной L по абсолютной величине не превосходит шести: $|\mathrm{tn} L| \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства построим специальную деформацию ломаной L . Пусть $V_1, \dots, V_k$ — все внутренние вершины из L , попавшие на ломаную W . Зададим в каждой из вершин V_i вектор v_i , направленный внутрь многоугольника σ . Определим деформацию Φ_t , $t \in [0, 1]$, ломаной L , сдвигая каждую из вершин V_i вдоль соответствующего вектора v_i внутрь многоугольника σ . Ясно, что ломаные $\Phi_t(L)$, $t \in (0, 1]$, находятся в общем положении с ломаной W при фиксированных общих концевых вершинах. Поэтому для этих ломаных справедливо строгое неравенство:

$$|\mathrm{tn} \Phi_t(L)| < 6, \quad t \in (0, 1].$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \rightarrow 0^+$, получаем требуемое утверждение.

§ 2. Плоские линейные деревья

В данном параграфе напоминаются основные понятия, связанные с плоскими линейными деревьями (в дальнейшем, для краткости, — *линейными деревьями*), которые нам понадобятся. Здесь же на случай линейных деревьев будут обобщены понятия числа вращения и сетевой геодезической, введенные авторами ранее для плоских бинарных деревьев (см. [4], [5], [7], [12]). Начнем с напоминания определения плоского линейного дерева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связный плоский ациклический граф (т.е. плоское дерево) называется *линейным деревом*, если все его ребра представляют собой прямолинейные отрезки.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем под словом “ребро” мы часто будем понимать открытый интервал, т.е. ребро без инцидентных ему граничных вершин.

2.1. Число вращения плоского линейного дерева. Обобщим понятие числа вращения [4], [5], [12] на случай произвольного линейного дерева. Пусть a и b — произвольные ребра из Γ . Рассмотрим единственный ориентированный путь $\gamma(a, b)$ в Γ , начинающийся на a и заканчивающийся на b . Путь $\gamma(a, b)$, очевидно, представляет собой ориентированную ломаную на плоскости. *Числом вращения между ребрами a и b линейного дерева Γ* назовем кручение ломаной $\gamma(a, b)$: $\text{tw}(a, b) = \text{tn } \gamma(a, b)$. Отметим, что так определенное число вращения обладает следующими свойствами:

- (1) $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$ (косая симметрия);
- (2) $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c) = \text{tw}(a, c)$ для любых ребер a, b и c из Γ , лежащих на одном пути в Γ (аддитивность вдоль путей);
- (3) $\text{tw}(a, a) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числом вращения линейного дерева Γ* называется максимум чисел вращения, взятый по всем упорядоченным парам ребер из Γ :

$$\text{tw } \Gamma = \max_{(a, b)} \text{tw}(a, b).$$

Пусть Γ — линейное дерево, и P — произвольная вершина из Γ . Каждая прямая ℓ , проходящая через P , определяет пару полуплоскостей, которые мы будем называть *полуплоскостями, порожденными ℓ* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вершину P линейного дерева Γ назовем *граничной*, если существует проходящая через P прямая ℓ такая, что одна из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ , содержит все ребра из Γ , инцидентные P . Все остальные вершины из Γ будем называть *внутренними*. Множество всех граничных вершин дерева Γ назовем (*геометрической*) *границей дерева Γ* и обозначим через $\partial\Gamma$.

Внутренние вершины произвольного линейного дерева Γ могут быть трех типов. Внутренняя вершина P из Γ называется *устойчивой*, если для любой прямой ℓ , проходящей через P , каждая из открытых полуплоскостей, порожденных ℓ ,

содержит ребра из Γ , инцидентные P . Внутренняя вершина степени два называется *фиктивной*, а внутренняя вершина степени больше чем два и не являющаяся устойчивой называется *неустойчивой*.

Пусть Γ – произвольное линейное дерево. Рассмотрим произвольную фиктивную вершину V из Γ (если такая есть) и заменим пару ребер e_V и e'_V из Γ , инцидентных V , на одно “длинное” ребро, являющееся объединением отрезков e_V и e'_V . Ясно, что так перестроенный граф снова является линейным деревом, которое совпадает с Γ как подмножество плоскости, однако содержит на одну фиктивную вершину меньше. Будем повторять описанную процедуру до тех пор, пока не построим линейное дерево Γ' , совпадающее с Γ как подмножество плоскости, но уже не имеющее фиктивных вершин. Будем говорить, что линейное дерево Γ' получено *укрупнением дерева* Γ . Ясно, что дерево Γ' совпадает с Γ , как подмножество плоскости, поэтому, $\text{tw } \Gamma = \text{tw } \Gamma'$. Кроме того, по определению, совпадают и границы обоих этих деревьев. Таким образом, при доказательстве основной теоремы, можно ограничиться случаем деревьев без фиктивных вершин. Всюду ниже, не ограничивая общности, будем рассматривать лишь линейные деревья, не содержащие фиктивных вершин.

Далее, оказывается, для произвольного линейного дерева Γ сколь угодно малой деформацией, неподвижной на границе дерева Γ , можно все устойчивые внутренние вершины превратить в устойчивые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть Γ – произвольное линейное дерево. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует правильное линейное дерево Γ_ε такое, что $|\text{tw } \Gamma - \text{tw } \Gamma_\varepsilon| < \varepsilon$, и множества $\partial \Gamma$ и $\partial \Gamma_\varepsilon$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим деформацию дерева Γ , изменяющую положение только его неустойчивых внутренних вершин.

Пусть V – произвольная внутренняя неустойчивая вершина из Γ . Тогда, по определению, существует ровно два инцидентных ей ребра из Γ , угол между которыми равен π . Эти ребра назовем *опорными ребрами вершины V* . Полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через опорные ребра вершины V , и содержащую все ребра из Γ , инцидентные V , назовем *опорной полуплоскостью вершины V* .

Рассмотрим подграф Υ' дерева Γ , порожденный множеством всех неустойчивых внутренних вершин из Γ , т.е. подграф, множество вершин которого совпадает с множеством всех неустойчивых внутренних вершин дерева Γ , а множество ребер состоит из тех и только тех ребер из Γ , которые соединяют неустойчивые внутренние вершины. Так как мы строим деформацию, неподвижную на всех вершинах, кроме неустойчивых внутренних, то достаточно научиться строить эту деформацию для каждой связной компоненты графа Υ' . Иными словами, без ограничения общности будем предполагать, что Υ' связен, т.е. является деревом.

Предположим сначала, что граф Υ' состоит из одной вершины V . Это означает, что все вершины из Γ , смежные с V , не являются неустойчивыми внутренними вершинами. Построим деформацию дерева Γ , неподвижную на всех вершинах из Γ , отличных от V , и смещающую вершину V внутрь ее опорной полуплоскости. Ясно, что при малых смещениях эта деформация превращает вершину V в устойчивую внутреннюю вершину дерева Γ и не меняет типы всех остальных вершин из Γ .

Пусть граф Υ' содержит по крайней мере две вершины. Добавим к графу Υ' все опорные ребра входящих в Υ' вершин. Полученное дерево обозначим через Υ . Отметим, что линейное дерево Υ может, вообще говоря, содержать фиктивные вершины. Обозначим через $\hat{\Upsilon}$ укрупнение дерева Υ .

Допустим, что V – вершина дерева Υ' степени 1. Ясно, что существует или одно, или два ребра из Υ , инцидентных V и не входящих в Υ' . Если таких ребер два, то V является вершиной графа $\hat{\Upsilon}$ и имеет в нем степень 3. Кроме того, среди вершин из Γ , смежных с V , ровно одна вершина является неустойчивой внутренней вершиной, причем эта вершина принадлежит Υ' . Построим деформацию дерева Γ , смещающую вершину V внутрь единственного инцидентного V опорного ребра из $\hat{\Upsilon}$ и оставляющую неподвижными все остальные вершины из Γ . Ясно, что, как и выше, при малых смещениях эта деформация превращает вершину V в устойчивую внутреннюю вершину дерева Γ и не меняет типы всех остальных вершин из Γ .

Предположим, что существует ровно одно ребро из Υ , инцидентное V и не входящее в Υ' . В этом случае, очевидно, вершина V является фиктивной вершиной графа Υ , и поэтому лежит внутри некоторого ребра e графа $\hat{\Upsilon}$. Отметим, что ребро e составлено из опорных ребер тех вершин дерева Γ , которые лежат внутри e . Обозначим через $V = V_1, \dots, V_n$ последовательные фиктивные вершины дерева Υ , лежащие внутри ребра e , и пусть $V_1, \dots, V_p$ – максимальный начальный отрезок этой последовательности такой, что опорные полуплоскости вершин V_i для $1 \leq i \leq p$ совпадают. Обозначим через A и B вершины дерева Υ , смежные с V_1 и V_p , соответственно, и отличные от V_i , $1 \leq i \leq p$. Отметим, что обе эти вершины принадлежат ребру e , причем вершина A заведомо является концом ребра e .

Построим ломаную $L = \{A = W_0, W_1, \dots, W_p, W_{p+1} = B\}$ такую, что

- (1) ломаная L лежит в общей опорной полуплоскости вершин V_i , $1 \leq i \leq p$;
- (2) ломаная L , вместе с отрезком AB , ограничивает строго выпуклый многоугольник;
- (3) расстояние между точками V_i и W_i не превосходит e .

Построим деформацию линейного дерева Γ , постоянную на всех вершинах, за исключением $V_i, \dots, V_p$, и переводящую каждую вершину V_i в соответствующую вершину W_i , $1 \leq i \leq p$. Ясно, что при достаточно малом ε эта деформация превращает вершины V_i , $i = 1, \dots, p$, в устойчивые внутренние вершины дерева Γ и не меняет тип других вершин из Γ , отличных от B .

Для вершины B существует три возможности:

- (1) или $p < n$, т.е. вершина $B = V_{p+1}$ является фиктивной вершиной дерева Υ , лежащей внутри ребра e , в частности, B – неустойчивая внутренняя вершина из Γ ;
- (2) или $p = n$ и степень вершины B в дереве $\hat{\Upsilon}$ равна 1 (в этом случае $\hat{\Upsilon} = e$, и B не является неустойчивой внутренней вершиной из Γ);
- (3) или $p = n$ и степень вершины B в дереве $\hat{\Upsilon}$ больше 1 (при этом, очевидно, вершина B – неустойчивая внутренняя вершина из Γ , и единственное инцидентное B ребро дерева Γ , содержащееся в e , не является опорным для B).

В первом случае внутренняя неустойчивая вершина B становится внутренней устойчивой вершиной. Во втором и в третьем случае тип вершины B не меняется.

Таким образом, нами построена сколь угодно малая неподвижная на границе деформация линейного дерева Γ , превращающая некоторое количество неустойчивых внутренних вершин дерева Γ в устойчивые внутренние вершины и не меняющая типы других вершин из Γ . Повторяя описанную процедуру до тех пор, пока не будут исчерпаны все неустойчивые внутренние вершины дерева Γ , мы построим искомое дерево Γ_r . Предложение доказано.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что на каждом шаге описанной в доказательстве предложения 2.1 процедуры, вершины деформируемого дерева Γ смещаются внутри выпуклой оболочки вершин, остающихся неподвижными на этом шаге.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное дерево Γ , не содержащее ни фиктивных, ни неустойчивых внутренних вершин назовем *правильным*.

Из предложения 2.1 немедленно вытекает, что при доказательстве основной теоремы, можно ограничиться случаем правильных линейных деревьев. Всюду ниже, не ограничивая общности, будем рассматривать лишь правильные линейные деревья.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что все внутренние вершины правильного линейного дерева, по определению, являются устойчивыми.

Имеет место следующее простое, но полезное предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть Γ – произвольное правильное линейное дерево, a и b – такие ребра из Γ , что $\text{tw}(a, b) = \text{tw } \Gamma$. Тогда ребра a и b несомненно являются граничными. Более точно, если $\gamma(a, b)$ – путь в Γ , начинающийся на ребре a и заканчивающийся на ребре b , то концевые вершины этого пути являются граничными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть, скажем, ребро b не является граничным. Так как дерево Γ – правильное, то обе вершины, инцидентные ребру b , являются устойчивыми внутренними вершинами для Γ . Рассмотрим ломаную $\gamma = \gamma(a, b)$ – единственный путь в Γ от a к b , ориентируем γ от a к b , и пусть B – концевая вершина ломаной γ . По предположению, вершина B из Γ является устойчивой внутренней вершиной. Рассмотрим прямую ℓ , проходящую через ребро b (и, в частности, через вершину B). Тогда, так как B – устойчивая внутренняя вершина, в каждой из порожденных прямой ℓ открытых полуплоскостей содержатся ребра из Γ , инцидентные B . Выберем в каждой из этих полуплоскостей по одному такому ребру и обозначим выбранные ребра через c_i , $i = 1, 2$. Рассмотрим ломаные $\gamma_i = \gamma \cup c_i$, ориентированные от a к c_i . Очевидно, что твистинги ломаных γ_i в вершине B отличны от нуля и противоположны по знаку, поэтому, или $\text{tw}(a, c_1) > \text{tw}(a, b)$, или $\text{tw}(a, c_2) > \text{tw}(a, b)$, что противоречит выбору ребер a и b . Доказательство закончено.

2.2. Квази-геодезические. В данном разделе вводится понятие квази-геодезической, которое будет очень полезным при доказательстве основной теоремы.

Пусть Γ – правильное линейное дерево, P – произвольная внутренняя вершина из Γ , и l – произвольная прямая на плоскости. Мы начнем с доказательства следующего несложного факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. В сделанных выше обозначениях, существует путь γ в Γ , соединяющий две граничных вершины из Γ , такой, что $P \in \gamma$, и ортогональная проекция пути γ на прямую l взаимно однозначна с образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на две леммы.

ЛЕММА 2.1. По крайней мере одно из ребер сети Γ , инцидентных вершине P (обозначим его через e), однозначно проектируется на прямую l (т.е. ребро e не ортогонально l).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в противном случае все ребра, инцидентные P , лежат на проходящей через P прямой $l^\perp$, ортогональной к l . Поэтому каждая из порожденных $l^\perp$ открытых полуплоскостей не содержит ребер из Γ , инцидентных P , что противоречит предположению о том, что вершина P – внутренняя. Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть e – произвольное ребро линейного дерева Γ . Предположим, что e не ортогонально прямой l , и пусть P' – вершина из Γ , инцидентная e . Тогда, если P' не является граничной вершиной дерева Γ , то среди ребер из Γ , инцидентных P' и отличных от e , найдется ребро e' такое, что ортогональная проекция на прямую l пути, составленного из двух ребер e и e' , взаимно однозначна с образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямую $l^\perp$, проходящую через P' и перпендикулярную прямой l , и обозначим через Π_i , $i = 1, 2$, две открытых полуплоскости, порожденные $l^\perp$. Так как ребро e не ортогонально l , то оно лежит в одной из этих полуплоскостей, скажем в Π_1 . Поскольку вершина P' является устойчивой внутренней вершиной дерева Γ , в полуплоскости Π_2 лежит некоторое ребро из Γ , инцидентное P' . Обозначим это ребро через e' . Очевидно, ребро e' также не ортогонально прямой l .

Обозначим через $\nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow l$ ортогональную проекцию плоскости на прямую l . Точка $\nu(P')$ разбивает прямую l на две компоненты, в одну из которых проектируется полуплоскость Π_1 , а в другую – Π_2 . Теперь ясно, что отрезки $\nu(e)$ и $\nu(e')$ пересекаются только по точке $\nu(P')$. Лемма 2.2 доказана.

Используя лемму 2.2, можно продолжить состоящий из одного ребра путь, найденный в лемме 2.1, до максимального пути, который, по лемме 2.2, будет ограничен некоторыми граничными вершинами дерева Γ . Предложение 2.2 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Путь γ в правильном линейном дереве Γ , соединяющий пару граничных вершин из Γ , и такой, что существует прямая l на плоскости, ортогональная проекция пути γ на которую взаимно однозначна с образом, называется *квази-геодезической*. Прямая l в этом случае называется *направляющей квази-геодезической* γ .

Пусть теперь n – произвольный единичный вектор (т.е. некоторое направление), и пусть l – некоторая прямая, параллельная n . Пусть γ – некоторая квази-геодезическая с направляющей l в правильном линейном дереве Γ . Обозначим через A и B граничные вершины из Γ , которые соединяет γ , и пусть P – некоторая точка на γ .

Точка P разбивает путь γ на две компоненты γ' и γ'' (если P совпадает с A или B , то одна из этих компонент пуста). Снова обозначим через ν ортогональную проекцию плоскости на прямую l . Положим $A_l = \nu(A)$, $B_l = \nu(B)$ и $P_l = \nu(P)$. Предположим, что компонента γ'' не пуста, вектор $P_l B_l$ сонаправлен с n , и B – концевая вершина пути γ'' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Построенная выше компонента γ'' называется *квази-геодезическим лучом, выпущенным из точки P в направлении n* . Далее, если a – ребро пути γ , содержащее P и пересекающееся с γ'' более чем по точке, то γ'' называют также *геодезическим лучом, выпущенным с ребра a сети Γ в направлении n* .

Из предложения 2.3 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Из любой внутренней вершины произвольного правильного линейного дерева в любом направлении можно выпустить квази-геодезический луч. С любого ребра произвольного правильного линейного дерева в любом направлении, не перпендикулярном этому ребру, можно выпустить квази-геодезический луч.*

В качестве первого приложения разработанной техники, мы докажем следующее полезное предложение, являющееся обобщением классического результата о плоских минимальных деревьях (см. [1], [3], [13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть Γ – произвольное линейное дерево, $\partial\Gamma = M$ – его граница, и σ – выпуклая оболочка множества M . Тогда $\Gamma \subset \sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала пусть Γ – правильное линейное дерево. Докажем предложение “от противного”. Предположим, что существует точка P из Γ , лежащая вне σ .

ЛЕММА 2.3. *Пусть σ – произвольный выпуклый многоугольник, и Γ – произвольное правильное линейное дерево. Если Γ не лежит целиком в σ , то существует граничная вершина из Γ , лежащая вне σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – произвольная точка из Γ , лежащая вне σ . Если P не является вершиной сети Γ , то рассмотрим ребро e из Γ , содержащее P . Поскольку σ – выпуклый многоугольник, а $P \notin \sigma$, то одна из вершин сети Γ , инцидентных ребру e , также не принадлежит σ , поэтому, без ограничения общности, мы можем сразу предполагать, что точка P – это вершина сети Γ . Если P – граничная вершина, то утверждение леммы выполнено. Предположим теперь, что вершина P не принадлежит $\partial\Gamma$. Тогда, так как Γ – правильное линейное дерево, вершина P является внутренней.

Итак, пусть P – внутренняя вершина. Пусть l – некоторая прямая, отделяющая точку P от выпуклого многоугольника σ . Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости, которые мы обозначим через Π' и Π'' . Пусть, для определенности, $P \in \Pi'$. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в полуплоскость Π' . Выпустим из внутренней вершины P квази-геодезический луч γ в направлении n . Ясно, что γ не пересекает σ , поэтому концевая вершина луча γ , принадлежащая $\partial\Gamma$, лежит вне σ . Лемма доказана.

Из леммы 2.3 немедленно вытекает, что вне выпуклой оболочки множества M расположена точка из M – противоречие, что и доказывает предложение 2.4 для случая правильных линейных деревьев.

Пусть теперь Γ – произвольное линейное дерево. Повторив для него процедуру, описанную в доказательстве предложения 2.1, продеформируем Γ сколь угодно малой деформацией в правильное линейное дерево Γ_r . Для дерева Γ_r предложение 2.4 уже доказано, поэтому все дерево Γ_r , и, в частности, все его внутренние вершины, лежат в выпуклой оболочке границы $\partial\Gamma_r$ дерева Γ_r . Напомним, что граница дерева Γ_r совпадает по построению с границей исходного дерева Γ , поэтому дерево Γ_r лежит в выпуклой оболочке множества $\partial\Gamma$. Будем последовательно деформировать дерево Γ_r обратно в дерево Γ . На каждом шаге этой деформации граница $\partial\Gamma$ остается на месте, и, как было отмечено при доказательстве предложения 2.1, все вершины перемещаются в выпуклой оболочке неподвижных вершин. Таким образом, при этой деформации все вершины деформируемого дерева не выходят за пределы выпуклой оболочки множества $\partial\Gamma$, что и требовалось. Доказательство закончено.

В заключение данного раздела мы приведем одно элементарное свойство ломаных, взаимно однозначно проектируемых на некоторую прямую, которое будет использоваться нами в дальнейшем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть γ – некоторая ломаная, и предположим, что существует прямая l , ортогональная проекция ломаной γ на которую взаимно однозначна с образом. Ориентируем ломаную γ и прямую l в одном направлении. Последнее означает, что углы между векторами-звеньями ломаной γ и вектором-направлением n прямой l меньше, чем $\pi/2$. Пусть a – первое, b – последнее звенья ломаной γ . Положим $\alpha = \text{tw}(n, a)$, т.е. α равно деленной на $\pi/3$ величине ориентированного угла от вектора n к вектору a , и, аналогично, $\beta = \text{tw}(n, b)$. Тогда $\text{tn } \gamma = \beta - \alpha$. В частности, $|\alpha| < 3/2$, $|\beta| < 3/2$, и $|\text{tn } \gamma| < 3$.

2.3. Шапочки. В данном разделе мы обобщим понятие шапочки на случай произвольных ломаных.

Пусть L^1 – произвольная замкнутая ломаная, и L^2 – произвольная незамкнутая ломаная. Построим каноническое разбиение $L^2 = \bigcup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1 . Обозначим через σ область, ограниченную ломаной L^1 . Тогда каждый внутренний регулярный элемент L_j канонического разбиения, лежащий вне многоугольника σ , называется *регулярной шапочкой*. Концевой регулярный элемент называется *регулярной шапочкой*, если он лежит вне области σ , а обе его концевые вершины лежат на ломаной L^1 .

Далее, внутренний сингулярный элемент L_i канонического разбиения называется *сингулярной шапочкой*, если оба примыкающих к L_i регулярных элемента лежат в σ . Концевой сингулярный элемент называется *сингулярной шапочкой*, если, во-первых, он отличен от концевой точки, и, во-вторых, единственный соседний с ним внутренний регулярный элемент лежит в σ . В дальнейшем, мы иногда будем говорить просто о шапочках, имея в виду как регулярные, так и сингулярные шапочки.

Пусть L_j – некоторая регулярная шапочка, и A_j и B_j – концевые вершины L_j . Эти точки разбивают замкнутую ломаную L^1 на две ломаные, которые мы обозначим через L' и L'' . Рассмотрим области σ' и σ'' , ограниченные парами ломаных (L_j, L') и (L_j, L'') , соответственно. Тогда одна из этих областей содержит другую. Пусть, для определенности, $\sigma' \subset \sigma''$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Открытая область σ' , построенная выше, называется *H-областью*, соответствующей регулярной шапочке L_j , и обозначается через $H(L_j)$. Ломаную L' назовем *основанием* (как для L_j , так и для $H(L_j)$), и обозначим через $b(L_j)$. Замыкание области $H(L_j)$ будем обозначать через $\overline{H}(L_j)$, и называть *$\overline{H}$ -множеством*, соответствующим регулярной шапочке L_j .

Ясно, что $\partial H(L_j) = L_j \cup b(L_j)$, и $\overline{H}(L_j) = H(L_j) \cup \partial H(L_j)$.

Пусть теперь L_i – сингулярная шапочка. *Основанием сингулярной шапочки* L_i будем называть саму ломаную L_i . Удобно также определить для сингулярных шапочек понятие *$\overline{H}$ -множества*, положив $\overline{H}(L_i) = b(L_i) = L_i$.

Рассмотрим произвольное правильное линейное дерево Γ . Пусть $\partial\Gamma = M$ – граница дерева Γ , и L^1 – замкнутая ломаная, являющаяся границей некоторого уровня выпуклости M^t множества M . Пусть незамкнутая ломаная L^2 – это некоторый путь в дереве Γ . Построим каноническое разбиение $L^2 = \bigcup L_j$ ломаной L^2 по отношению к L^1 .

Шапочка, образованная ломаной $L^2 \subset \Gamma$ по отношению к L^1 , называется *существенной*, или если она регулярная, или если она сингулярная и, к тому же, содержит хотя бы одну внутреннюю вершину дерева Γ . В противном случае, шапочка называется *несущественной*. Таким образом, шапочка L_i называется *существенной*, если и только если она сингулярна, и все вершины ломаной $L_i \subset \Gamma$ являются граничными вершинами правильного линейного дерева Γ . Отметим, что все вершины несущественной шапочки L_i обязательно лежат на одном и том же уровне выпуклости.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от случая общего положения, путь $L^2 \subset \Gamma$ может образовывать шапочки и по отношению к первому, т.е. самому внешнему уровню выпуклости множества $M = \partial\Gamma$. Однако, очевидно, такая шапочка всегда является несущественной.

Пусть, как и выше, M^t – это t -й уровень выпуклости граничного множества $M = \partial\Gamma$ правильного линейного дерева Γ . Пусть σ^t – выпуклая оболочка множества M^t , а W^t – граница многоугольника σ^t , т.е. $W^t = \partial\sigma^t$. Через $\text{Int}(\sigma^t)$ обозначим внутренность многоугольника σ^t , т.е. $\text{Int}(\sigma^t) = \sigma^t \setminus W^t$. Снова положим $\sigma = \sigma^1$ и $W = W^1$. Пусть L^2 – произвольный путь в дереве Γ (в частности, L^2 – некоторая незамкнутая ломаная). В силу предложения 2.4, ломаная L^2 целиком содержится в σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Существенная шапочка, образованная L^2 по отношению к W^t , называется *t-шапочкой*.

Пусть L_i – некоторая t -шапочка (в частности, шапочка L_i – существенная). Заметим, что если ломаная L_i образует также и некоторую s -шапочку, то, во-первых, $s \leq t$, а, во-вторых, ломаная L_i образует также и r -шапочки для всех r , $s \leq r \leq t$.

Существует такое наименьшее число s_0 , что ломаная L_i образует s_0 -шапочку. Другими словами, s_0 – такое число, что ломаная L_i образует некоторую s_0 -шапочку и не образует $(s_0 - 1)$ -шапочек (еще раз напомним, что все t -шапочки существенны по определению).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В сделанных только что обозначениях, число s_0 называется *индексом t -шапочки L_i* . Каждая из существенных s_0 шапочек, образованных ломаной L_i , называется *верхушкой t -шапочки L_i* . Верхушка L' называется *регулярной*, если шапочка L' регулярна, и *сингулярной* в противном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрический смысл понятия индекса существенной шапочки ясен из следующего рассмотрения. Предположим, что t -шапочка L_i пересекает множество $\sigma \setminus \text{Int}(\sigma^s)$, но не пересекает множество $\sigma \setminus \text{Int}(\sigma^{s-1})$ для некоторого s . Тогда, очевидно, $t \geq s$, и ломаная L_i образует шапочку по отношению к W^s , но не образует шапочки по отношению к W^{s-1} . Возможны следующие два случая.

- (1) Хотя бы одна из s -шапочек, образованных ломаной L_i , является существенной. Тогда индекс t -шапочки L_i равен s .
- (2) Все s -шапочки, образованные ломаной L_i , являются несущественными. Тогда, как вытекает из нижеследующей леммы, индекс t -шапочки равен $s + 1$.

ЛЕММА 2.4. *Если, в сделанных выше предположениях, ломаная L_i не образует существенных s -шапочек, т.е. реализуется второй случай, то ломаная L_i образует существенную $(s + 1)$ -шапочку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, так как ломаная L_i образует существенную t -шапочку, но не образует существенных s -шапочек, то $t \neq s$, поэтому $t > s$. Далее, ломаная L_i пересекает $\sigma \setminus \sigma^{s+1}$, так как она пересекает даже меньшее множество $\sigma \setminus \text{Int}(\sigma^s)$, поэтому L_i образует по крайней мере одну регулярную шапочку по отношению к W^{s+1} . Это и есть искомая существенная $(s + 1)$ -шапочка. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть L_i – некоторая t -шапочка, и L' – некоторая ее верхушка. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L_i)$. Тем не менее, следующее утверждение имеет место.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Пусть L_i и L_j – две t -шапочки, $\overline{H}(L_i) \subset \overline{H}(L_j)$. Предположим также, что индексы этих шапочек совпадают. Тогда, для любой верхушки T_i меньшей шапочки L_i найдется верхушка T_j большей шапочки L_j такая, что $\overline{H}(T_i) \subset \overline{H}(T_j)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, рассмотрим произвольную верхушку T_i меньшей шапочки L_i . Так как $T_i \subset \overline{H}(L_i) \subset \overline{H}(L_j)$, существует верхушка T_j большей шапочки L_j такая, что $T_i \subset \overline{H}(T_j)$, откуда немедленно следует, что $\overline{H}(T_i) \subset \overline{H}(T_j)$, что и требовалось.

Мы используем следствие 2.1 о квази-геодезических для доказательства следующего важного предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть Γ – некоторое правильное линейное дерево. Рассмотрим произвольный путь L в Γ , и пусть σ^t – выпуклая оболочка некоторого уровня выпуклости M^t границы $M = \partial\Gamma$ дерева Γ . Обозначим через W^t замкнутую ломаную, ограничивающую σ^t . Рассмотрим каноническое разбиение $L = \bigcup L_i$ ломаной L по отношению к W^t , и пусть L_j – некоторая регулярная шапочка, образованная ломаной L по отношению к W . Тогда

- (1) если соответствующая H -область $H(L_j)$ содержит точку пути L , то $H(L_j)$ также содержит точку из границы $M = \partial\Gamma$ дерева Γ ;
- (2) если внутренность основания $b(L_j)$ шапочки L_j содержит вершину пути L , являющуюся внутренней вершиной дерева Γ , то $H(L_j)$ содержит точку из границы $M = \partial\Gamma$ дерева Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала первое утверждение предложения. Пусть некоторая точка P из L лежит внутри области $H(L_j)$. Если P не является вершиной сети Γ , то рассмотрим ребро e из Γ , содержащее P . Поскольку σ – выпуклый многоугольник, а $P \notin \sigma$, то одна из вершин сети Γ , инцидентных ребру e , также не принадлежит σ . Однако, с другой стороны, ребро e не может пересекать L_j , так как дерево Γ не содержит циклов. Поэтому эта вершина обязательно содержится в $H(L_j)$, и поэтому, без ограничения общности, мы можем сразу предполагать, что точка P – это вершина сети Γ . Если P – граничная вершина, то утверждение предложения выполнено. Предположим теперь, что вершина P не принадлежит $\partial\Gamma$. Тогда, так как Γ – правильное дерево, P является внутренней устойчивой вершиной.

Итак, пусть P – внутренняя устойчивая вершина. Пусть l – некоторая прямая, отделяющая точку P от выпуклого многоугольника σ . Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости, которые мы обозначим через Π' и Π'' . Пусть, для определенности, $P \in \Pi'$. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в полуплоскость Π' . Выпустим из вершины P квази-геодезический луч γ в направлении n . Ясно, что γ не пересекает σ . Но с другой стороны, γ не может пересечь и L_j (в противном случае, дерево Γ содержит цикл, что невозможно). Поэтому γ заканчивается внутри области $H(L_j)$, и, в частности, концевая точка луча γ , принадлежащая $\partial\Gamma$, лежит в $H(L_j)$. Первое утверждение предложения доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Пусть V – некоторая внутренняя вершина дерева Γ , принадлежащая пути L и лежащая внутри основания $b(L_j)$ шапочки L_j . Так как многоугольник σ – выпуклый, существует прямая l , проходящая через V , и такая, что многоугольник σ целиком лежит в одной из ограниченных l замкнутых полуплоскостей. Обозначим через n вектор, перпендикулярный прямой l и направленный во вторую полуплоскость, т.е. “от σ ”. Выпустим геодезический луч γ из V в направлении n . Этот геодезический луч целиком лежит в $H(L_j)$ (луч γ не может пересекать L_j , так как дерево Γ не содержит циклов и, по построению, не возвращается на σ). Поэтому, в частности, в $H(L_j)$ лежит граничная вершина, являющаяся концевой вершиной этого геодезического луча. Предложение доказано.

Из предложения 2.5 вытекают следующие важные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть Γ – произвольное правильное линейное дерево, $M = \partial\Gamma$ – его граница, и пусть L – некоторый путь в Γ . Пусть L' – некоторая регулярная шапочка, образованная путем L по отношению к какому-нибудь уровню выпуклости множества M , а $\hat{L}'$ – регулярная верхушка шапочки L' (если такая есть). Тогда

- (1) соответствующая H -область верхушки L' не пересекается с L , другими словами, $H(\hat{L}') \cap L = \emptyset$;
- (2) внутри основания $b(\hat{L}')$ верхушки $\hat{L}'$ не содержится вершин пути L , являющихся внутренними вершинами дерева Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H(\hat{L}') \cap L$ не пусто, то, в силу предложения 2.5, область $H(\hat{L}')$ содержит точки из M . Последнее невозможно, так как $\hat{L}'$ – верхушка. Первое утверждение следствия доказано. Второе утверждение доказывается точно так же.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть Γ – произвольное правильное линейное дерево, $M = \partial\Gamma$ – его граница, и пусть L – некоторый путь в Γ . Предположим, что L образует две существенных шапочки L' и L'' по отношению к некоторому уровню выпуклости M^t множества M , причем $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L'')$. Тогда индексы шапочек L' и L'' различны.

В частности, если $L^1, \dots, L^m$ – некоторые существенные шапочки, образованные L , и такие, что

$$\overline{H}(L^1) \subset \dots \subset \overline{H}(L^m),$$

а L^1 является t -шапочкой, то $m < t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть L' и L'' – две t -шапочки, $\overline{H}(L') \subset \overline{H}(L'')$, и индексы шапочек L' и L'' совпадают и равны s . Пусть T' – произвольная верхушка меньшей шапочки L' . Тогда, в силу утверждения 2.2, существует такая верхушка T'' большей шапочки L'' , что $\overline{H}(T') \subset \overline{H}(T'')$. Очевидно, что s -шапочка T'' регулярна. Если s -шапочка T' также регулярна, то H -область регулярной верхушки T'' содержит точки из ломаной $T' \subset L$, что противоречит утверждению (1) следствия 2.2. Если же s -шапочка T' сингулярна, то она, очевидно, целиком лежит внутри основания шапочки T'' . Поэтому основание регулярной верхушки T'' содержит лежащую на пути L внутреннюю вершину из Γ . Последнее противоречит утверждению (2) следствия 2.2.

Второе утверждение следствия немедленно вытекает из первого и того, что, по определению, 1-шапочек не существует. Следствие доказано.

Эти результаты будут использованы при доказательстве основной теоремы.

§3. Доказательство основной теоремы

Напомним основные обозначения. Пусть Γ – линейное дерево, $M = \partial\Gamma$ – множество граничных точек дерева Γ , и пусть M имеет $\varkappa$ уровней выпуклости. Мы докажем, что тогда $\text{tw } \Gamma \leq 12(\varkappa - 1) + 6$.

Прежде всего, мы будем предполагать без ограничения общности (см. предложение 2.1), что дерево Γ является правильным.

Пусть a и b – некоторые ребра из правильного линейного дерева Γ такие, что $\text{tw } \Gamma = \text{tw}(a, b)$. В силу предложения 2.2, ребра a и b – граничные. Обозначим через L единственный путь в Γ , соединяющий a и b , и ориентируем L от a к b . Тогда $\text{tn } L = \text{tw } \Gamma$. Обозначим через A и B концевые вершины пути L , инцидентные a и b , соответственно. При этом, обе точки A и B принадлежат M .

Пусть M^t – t -й уровень выпуклости множества M . Предположим, что $A \in M^p$, $B \in M^q$, и пусть $p \leq q$.

Обозначим через σ^t выпуклую оболочку множества M^t , и через W^t – границу множества σ^t : $\partial\sigma^t = W^t$. Как и выше, будем обозначать через $\text{Int}(\sigma^t)$ внутренность многоугольника σ^t . Для краткости положим $\sigma = \sigma^1$ и $W = W^1$.

Пусть $S^t = \sigma^t \setminus \sigma^{t+1}$. Если множество σ^{t+1} не пусто, то множество S^t двусвязно (т.е. гомотопна окружности), ограничено W^t и W^{t+1} , причем $W^t \subset S^t$, а $W^{t+1} \cap S^t = \emptyset$.

Мы отдельно рассмотрим две возможности: или $p = q$, или $p < q$. Начнем с первого случая.

3.1. Случай $p = q$. Если $p = q = 1$, т.е. путь L начинается и заканчивается на границе W выпуклой оболочки σ внешнего уровня выпуклости M^1 , то, в силу утверждения 1.14, $|\text{tn } L| \leq 6$, и утверждение теоремы имеет место. Поэтому, в дальнейшем, мы будем считать, что $p = q \geq 2$.

Далее, если ломаная L целиком лежит на границе W^p выпуклого многоугольника σ^p , то, очевидно, $|\text{tn } L| \leq 6$, и утверждение теоремы снова имеет место. Поэтому ниже мы предполагаем, что $L \not\subset W^p$.

Обозначим через W_1 и W_2 те части замкнутой ломаной W^p , на которые ее разбивают точки A и B . Так как $L \not\subset W^p$, то, в частности, L не совпадает ни с W_1 , ни с W_2 . Рассмотрим каноническое разбиение $L = \bigcup L_i$ ломаной L относительно W^p . Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ – множества, состоящие из всех (существенных) p -шапочек, образованных L , таких, что их $\overline{H}$ -множества содержат точки A и B , соответственно. Очевидно, $\overline{H}$ -множества шапочек, принадлежащих $\mathcal{H}_A$ (соответственно, $\mathcal{H}_B$), упорядочены по включению. Поэтому, из следствия 2.3 вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Каждое из множеств $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ состоит не более чем из $p - 1$ элемента.*

Непосредственно из построения вытекает следующее:

- (1) все p -шапочки, порожденные L и не принадлежащие ни $\mathcal{H}_A$, ни $\mathcal{H}_B$, являются пустыми элементами канонического разбиения ломаной L или относительно W_1 , или относительно W_2 ;
- (2) каждый *внутренний* не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2 , является регулярным и содержит, по крайней мере, одну (существенную) шапочку из $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$; более того, разные такие непустые элементы содержат различные шапочки из $\mathcal{H}$;
- (3) каждый *концевой* не пустой элемент, образованный L относительно W_1 или W_2 , может быть как регулярным, так и сингулярным. Он может

образовывать шапочку, а может и не образовывать. Если рассматриваемый элемент образует шапочку, то эта шапочка может быть как существенной, так и несущественной.

Уже исходя из этих несложных наблюдений можно было бы получить оценку на индексы $\text{Ind}(L, W_i)$, однако эта оценка оказывается слишком грубой для доказательства теоремы. Поэтому необходимы немного более тонкие рассуждения, проясняющие ситуацию, описанную в пункте (3). Для того чтобы сделать это, нам понадобится слегка подправить ломаную L .

Коррекция ломаной L . Рассмотрим произвольную шапочку, соответствующую произвольному пустому элементу L_j , образованному L по отношению к одной из ломаных W_i , $i = 1, 2$. Мы назовем такую шапочку *пустой шапочкой*. Шапочка называется *строго пустой*, если соответствующее $\overline{H}$ -множество не содержит $\overline{H}$ -множеств, порожденных другими пустыми шапочками ломаной L . Ясно, что всегда существует строго пустая шапочка $\overline{H}(L')$, образованная ломаной L по отношению к W_i , и содержащаяся в $\overline{H}(L_j)$.

В разделе 1.2 мы напомнили определение элементарной деформации из [8] для случая ломаных в общем положении. Эти деформации позволяли последовательно избавляться от строго пустых областей. Это делалось в два шага: сначала строго пустая область, образованная ломаной L^2 относительно L^1 , вытеснялась на свое основание, а затем основание “снималось” с ломаной L^1 . В случае ломаных общего положения, для уничтожения регулярной строго пустой шапочки можно воспользоваться точно такой же деформацией. Если же строго пустая шапочка сингулярна, то она, по определению, совпадает со своим основанием, поэтому, чтобы ее уничтожить, не надо делать первый шаг элементарной деформации. Второй шаг определяется точно так же, как и в случае ломаных общего положения. Итак, мы определили деформации произвольных ломаных, которые, так же, как и в случае ломаных в общем положении, мы будем называть *элементарными деформациями*.

Применим к $\overline{H}(L')$ элементарную деформацию и перестроим L так, чтобы полученная ломаная образовывала, по отношению к W_i , одной строго пустой шапочкой и, значит, одним пустым элементом меньше. Ясно, что при такой элементарной деформации не меняются ни направления концевых ребер пути L , ни шапочки, принадлежащие $\mathcal{H}$ (последнее имеет место, так как элементы разбиения, смежные с элементом L' , лежат в многоугольнике σ^p и, поэтому, не принадлежат к p -шапочкам из $\mathcal{H}$). Повторяя этот процесс до тех пор, пока все пустые шапочки не будут уничтожены, и используя тот факт, что кручение ломаной L не меняется при элементарных деформациях, получим следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Существует деформация ломаной L , неподвижная на всех непустых шапочках и сохраняющая направления граничных ребер ломаной L , такая, что полученная в результате ломаная не образует пустых шапочек. Ни кручение ломаной L , ни концевые твистинги при этой деформации не меняются.*

Таким образом, можно предполагать, без ограничения общности, что L не

образует пустых шапочек.

Теперь, с помощью утверждения 1.13, избавимся от касательных концевых сингулярных элементов (если такие есть) как по отношению к W_1 , так и по отношению к W_2 . Обозначим через $\bar{L}$ ломаную, полученную из L выбрасыванием касательных концевых сингулярных элементов (если они есть). Ориентируем ломаную $\bar{L}$ в соответствии с ориентацией ломаной L , и пусть A' и B' – начальная и конечная вершины ломаной $\bar{L}$. Обозначим через $\bar{W}_1$ и $\bar{W}_2$ ломаные, на которые точки A' и B' разбивают W^p . При этом, ломаная $\bar{W}_i$, $i = 1, 2$, получается из W_i добавлением и (или) выбрасыванием концевых касательных сингулярных элементов ломаной L . Имеет место следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 3.1. *В сделанных выше предположениях, пусть L_i – некоторая шапочка, образованная ломаной L по отношению к W^p . Тогда соответствующее $\bar{H}$ -множество или содержит обе точки A и A' , или не содержит ни одной из этих точек.*

Таким образом, из построения и из леммы 3.1 вытекает, что $\bar{L}$, во-первых, не имеет концевых касательных сингулярных элементов, т.е. образует, по отношению к каждой $\bar{W}_i$, четыре концевых элемента, два из которых – регулярны, и, во-вторых, ломаная $\bar{L}$, так же, как и L , не содержит пустых шапочек по отношению к W .

Положим $n_i^A = 1$, если концевой регулярный A' -элемент, образованный ломаной $\bar{L}$ по отношению к $\bar{W}_i$, не содержит шапочек из $\mathcal{H}$. В противном случае, положим $n_i^A = 0$. Аналогично, положим $n_i^B = 1$, если концевой регулярный B' -элемент, образованный ломаной $\bar{L}$ по отношению к $\bar{W}_i$, существует и не содержит шапочек из $\mathcal{H}$. В противном случае, положим $n_i^B = 0$. Ясно, что количество A' -элементов, образованных ломаной $\bar{L}$ по отношению к ломаной $\bar{W}_i$, не превосходит $n_i^A + \#(\mathcal{H}_A)$, а количество B' -элементов, образованных ломаной $\bar{L}$ по отношению к ломаной $\bar{W}_i$, не превосходит $n_i^B + \#(\mathcal{H}_B)$, где $\#(X)$ – обозначает количество элементов во множестве X .

Пусть, далее, $n_i = n_i^A + n_i^B$. Отметим, что $n_i \leq 2$ по определению. Оказывается, в сделанных выше предположениях, для ломаной $\bar{L}$ имеет место следующая более сильная оценка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть ломаная $\bar{L}$ не образует пустых шапочек по отношению к W^p , а также не образует концевых касательных сингулярных элементов. Тогда, в сделанных выше обозначениях, имеет место следующее неравенство:*

$$n_1 + n_2 \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В тривиальном случае, когда ломаная $\bar{L}$ пересекает ломаную W^p лишь в точках A' и B' , имеем, очевидно, две возможности: или ломаная $\bar{L}$ целиком лежит в σ^p , и тогда $n_1^A = n_2^A = 1$ (шапочек нет), $n_1^B = n_2^B = 0$ (B' -элементов, отличных от точки B' , нет), поэтому $n_1 + n_2 = 2$; или ломаная $\bar{L}$ целиком лежит вне σ^p , и тогда $n_1^A = n_2^A = 0$ (шапочки есть), $n_1^B = n_2^B = 0$ (B -элементов, отличных от точки B' , нет), поэтому $n_1 + n_2 = 0$.

Предположим теперь, что имеется хотя бы одна точка пересечения ломаных $\bar{L}$ и W^p , отличная от A' и B' . Покажем, что в этом случае $n_1^A + n_2^A \leq 1$. Рассмотрим концевой регулярный A' -элемент L_1 канонического разбиения ломаной $\bar{L}$ относительно ломаной W^p . Если L_1 лежит вне многоугольника σ^p , то, очевидно, оба концевых A' -элемента, образованных $\bar{L}$ по отношению к ломаным $\bar{W}_i$, $i = 1, 2$, содержат шапочки из $\mathcal{H}$, т.е. $n_1^A = n_2^A = 0$, и поэтому $n_1^A + n_2^A = 0 \leq 1$.

Пусть теперь L_1 лежит внутри σ^p , и предположим, для определенности, что конец ломаной L_1 принадлежит $\bar{W}_1$ (напомним, что ломаная $\bar{L}$ и, значит, все элементы канонического разбиения ориентированы от A' к B'). Тогда $n_1^A = 1$. Обозначим через L_2 – следующий регулярный элемент канонического разбиения. Если L_2 лежит внутри σ^p , то сингулярный элемент S_1 , расположенный между L_1 и L_2 , образует пустую шапочку, что противоречит определению ломаной $\bar{L}$. Поэтому элемент L_2 лежит вне многоугольника σ^p . Ясно, что, в этом случае, элемент L_2 является регулярной шапочкой из $\mathcal{H}$. С другой стороны, концевой регулярный A' -элемент канонического разбиения ломаной $\bar{L}$ по отношению к $\bar{W}_2$ содержит L_2 , и, значит, содержит шапочку из $\mathcal{H}$, откуда $n_2^A = 0$. Таким образом, имеем: $n_1^A + n_2^A = 1$.

Аналогично, в тех же предположениях, можно показать, что $n_1^B + n_2^B \leq 1$. Теперь требуемое неравенство вытекает из определения чисел n_1 и n_2 . Предложение доказано.

При разборе случая $p < q$ нам понадобится следующее уточнение предложения 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть ломаная $\bar{L}$ – такая же, как и выше. Предположим дополнительно, что одно из граничных ребер ломаной $\bar{L}$ лежит вне σ^p . Тогда

- (1) $n_1 + n_2 \leq 1$;
- (2) $n_i + \max(n_j^A, n_j^B) \leq 1$ при $i \neq j$;
- (3) $\max(n_1^A, n_1^B) + \max(n_2^A, n_2^B) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из доказательства предложения 3.3 (см. выше) вытекает, что если, скажем, концевой регулярный B' -элемент канонического разбиения ломаной $\bar{L}$ относительно W^p лежит вне области σ^p , то соответствующие числа n_1^B и n_2^B равны нулю. С другой стороны, из оставшихся двух чисел n_1^A и n_2^A одно равно нулю, а другое – или нулю, или единице (если $n_1^A = n_2^A = 1$, то ломаная $\bar{L}$ целиком лежит в σ^p , что в нашем случае невозможно). Таким образом, из четырех чисел n_1^A , n_2^A , n_1^B и n_2^B три равны нулю, и одно – нулю или единице. Отсюда следуют все три требуемые неравенства. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь канонические разбиения ломаной $\bar{L}$ по отношению к $\bar{W}_i$. Имеются следующие возможности.

1) Разбиение ломаной $\bar{L}$ относительно $\bar{W}_i$ содержит F -элемент. Тогда, в силу предложения 3.1, общее количество A' - и B' -элементов не превосходит $2(p-1) - 2 + n_i$, так как, по меньшей мере, одна из шапочек, входящих в $\mathcal{H}_A$ (соответственно, в $\mathcal{H}_B$), порождена F -элементом. Поэтому, в силу следствия 1.1,

имеем:

$$|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_i)| \leq 2(p-2) + n_i + 1 = 2p-3 + n_i.$$

2) Разбиение ломаной $\overline{L}$ относительно $\overline{W}_i$ не содержит F -элемента. Тогда, как количество A' -областей, так и количество B' -областей, не превосходит $(p-1) + \max(n_i^A, n_i^B)$. Здесь возможны два случая.

2а) После регуляризации и редукции ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W}_i$ каноническое разбиение полученной ломаной снова не содержит F -элемента. Тогда, в силу следствия 1.1, имеем:

$$|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_i)| \leq p-1 + \max(n_i^A, n_i^B) \leq 2p-3 + \max(n_i^A, n_i^B)$$

при $p \geq 2$.

2б) После регуляризации и редукции ломаной $\overline{L}$ по отношению к $\overline{W}_i$ каноническое разбиение полученной ломаной содержит F -элемент. Тогда, в силу следствия 1.1, имеем:

$$|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_i)| \leq p-1 + n_i^A + p-1 + n_i^B - 1 \leq 2p-3 + n_i.$$

Оценим сумму $|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_1) + \text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_2)|$, для чего сложим соответствующие оценки. Напомним, что, в силу предложения 3.3, $n_1 + n_2 \leq 2$. Далее, из неравенства $\max(n_i^A, n_i^B) \leq 1$ вытекает, что $\max(n_1^A, n_1^B) + \max(n_2^A, n_2^B) \leq 2$. Наконец, $n_i + \max(n_j^A, n_j^B) \leq n_1 + n_2 \leq 2$. Итак, во всех случаях получаем, что

$$|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_1) + \text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_2)| \leq 2(2p-3) + 2 = 4(p-1).$$

Теперь, воспользовавшись утверждением 1.13, имеем:

$$|\text{tn } L| \leq 3|\text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_1) + \text{Ind}(\overline{L}, \overline{W}_2)| + 6 \leq 3 \cdot 4(p-1) + 6 = 12(p-1) + 6,$$

т.е. $|\text{tn } L| \leq 12(p-1) + 6$. Основная теорема доказана в случае $p = q$.

3.2. Случай $p < q$. Итак, пусть теперь $p < q$. Разобьем ломаную L следующим образом. Первый фрагмент L_1 — это часть ломаной L между точкой $A = A_1$ и такой первой точкой $B_1 \in L$, что вся оставшаяся часть ломаной L между B_1 и B лежит в замкнутом многоугольнике σ^p . Другими словами, L_1 — это минимальная связная часть ломаной L , содержащая A , и такая, что $L \setminus L_1$ целиком содержится в σ^p .

Второй фрагмент L_2 ломаной L — это часть ломаной L между точкой $A_2 = B_1$ и такой первой точкой B_2 , что вся оставшаяся часть ломаной L , начиная с B_2 , лежит в замкнутом многоугольнике σ^{p+1} . Другими словами, B_2 — это первая точка на L такая, что $L \setminus (L_1 \cup L_2) \subset \sigma^{p+1}$.

Далее, для $i > 1$ и такого, что $p+i-1 \leq q$, т.е. $i \leq q-p+1$, определим фрагмент L_i ломаной L как часть L между $A_i = B_{i-1}$ и такой первой точкой B_i , что оставшаяся часть ломаной L от B_i до B содержится в замкнутом многоугольнике σ^{p+i-1} .

Последний фрагмент разбиения L_{q-p+2} совпадает с оставшейся частью ломаной L , если эта часть не пуста.

Итак, мы построили разбиение ломаной L на участки $L_1, L_2, \dots, L_{q-p+2}$ такие, что каждый фрагмент L_i соединяет точки A_i и B_i , где $A_1, B_1 \in W^p$, $A_i = B_{i-1} \in W^{p+i-2}$ и $B_i \in W^{p+i-1}$ при $1 \leq i \leq q-p+1$, причем $L_i \subset \sigma^{p+i-2}$ при $1 \leq i \leq q-p+1$. Кроме того, A_{q-p+2} и B_{q-p+2} принадлежат W^q и $L_{q-p+2} \subset \sigma^q$. Обозначим через a_i и b_i концевые ребра ломаной L_i , инцидентные точкам A_i и B_i , соответственно. Отметим, что, по определению, ребро b_i , $i = 1, \dots, (q-p+1)$, пересекает границу W^{p+i-1} выпуклого многоугольника σ^{p+i-1} по единственной точке B_i .

Предположим, что точка B_i , $i = 1, \dots, q-p+1$, пересечения ломаной L с ломаной W^{p+i-1} является внутренней точкой некоторого звена ломаной L . Тогда начальный сингулярный элемент ломаной L_i , $i = 2, \dots, q-p+2$, так же, как и конечный элемент предыдущей ломаной L_{i-1} , является трансверсальным (состоит из одной точки) и, более того, $\text{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$. В частности, из этого предположения вытекает, что первый и последний фрагменты L_1 и L_{q-p+2} содержат, по крайней мере, по одному ребру. Путь L , обладающий указанным свойством, назовем *хорошим*. Мы сначала докажем теорему для хорошего пути L , а затем рассмотрим общий случай.

Итак, в сделанных предположениях, для доказательства теоремы достаточно показать следующее:

- (1) имеет место неравенство: $\text{tn } L_1 \leq 12(p-1) + 3$;
- (2) для каждого из фрагментов L_i , $i = 2, \dots, q-p+1$, выполнено: $\text{tn } L_i \leq 12$;
- (3) для последних двух фрагментов L_{q-p+1} и L_{q-p+2} справедлива оценка:

$$|\text{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2})| \leq 15.$$

Используя перечисленные оценки и тот факт, что $\text{tw}(b_{i-1}, a_i) = 0$ при $i = 2, \dots, q-p+2$, получим утверждение теоремы:

$$\begin{aligned} |\text{tn } L| &= \left| \text{tn } L_1 + \sum_{i=2}^{q-p} \text{tn } L_i + \text{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2}) \right| \\ &\leq 12(p-1) + 3 + 12(q-p-1) + 15 = 12(q-1) + 6. \end{aligned}$$

Перейдем к реализации указанного плана.

Шаг (1). Так как концевые вершины ломаной L_1 лежат на одной и той же ломаной W^p , кручение ломаной L^1 не превосходит, как мы уже доказали, $12(p-1) + 6$. Однако, такая оценка оказывается слишком грубой. Усилим эту оценку, используя тот факт, что фрагмент L_1 приходит на W^p в точке B_1 снаружи по отношению к σ^p . А именно, имеет место следующая оценка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *В сделанных выше предположениях, справедливо следующее неравенство: $|\text{tn } L_1| \leq 12(p-1) + 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве случая $p = q$, можно, во-первых, предполагать, что L_1 не образует пустых шапочек по отношению к W^p , и, во-вторых, перейти к ломаной $\bar{L}_1$, которая, к тому же, не образует касательных концевых сингулярных элементов по отношению к W^p . Обозначим через $\bar{W}_1$ и $\bar{W}_2$ компоненты замкнутой ломаной W^p , на которые ее разбивают концевые точки A'_1 и B'_1 ломаной $\bar{L}_1$. Обозначим через $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{A_1}$, $\mathcal{H}_{B_1}$, $n_i^{A_1}$, $n_i^{B_1}$, и n_i те же объекты, что и при доказательстве случая $p = q$.

Так как концевое звено ломаной $\bar{L}_1$ лежит, очевидно, вне области σ^p , мы находимся в условиях следствия 3.1. Используя те же оценки для индекса ломаной $\bar{L}_1$ по отношению к $\bar{W}_i$, что и в случае $p = q$, и заменяя предложение 3.3 следствием 3.1, получаем:

$$|\text{Ind}(\bar{L}, \bar{W}_1) + \text{Ind}(\bar{L}, \bar{W}_2)| \leq 2(2p - 3) + 1 = 4(p - 1) - 1.$$

Теперь, в силу утверждения 1.13, имеем:

$$|\text{tn } L| \leq 3|\text{Ind}(\bar{L}, \bar{W}_1) + \text{Ind}(\bar{L}, \bar{W}_2)| + 6 \leq 3 \cdot 4(p - 1) - 3 + 6 = 12(p - 1) + 3.$$

Предложение 3.4 доказано.

Шаг (2). Оценим кручение каждого из L_i , $2 \leq i \leq q - p + 1$, доказав следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. В сделанных выше обозначениях, если $2 \leq i \leq q - p + 1$, то $|\text{tn } L_i| \leq 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ориентируем L_i от A_i к B_i . Напомним, что мы обозначили через a_i и b_i , соответственно, первое и последнее ребра из L_i . Далее, напомним, что $A_i \in W^{p+i-2}$, а $B_i \in W^{p+i-1}$. Обозначим через B'_i инцидентную ребру b_i вершину из L_i , отличную от B_i , т.е. $b_i = B'_i B_i$.

Пусть l — такая прямая, проходящая через точку B_i , что многоугольник σ^{p+i-1} и точка B'_i лежат в разных полуплоскостях, порожденных этой прямой. Обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный l и направленный в полуплоскость, содержащую B'_i , т.е. “вне σ^{p+i-1} ”. Пусть γ — квази-геодезический луч, выпущенный с ребра сети Γ , содержащего b_i , в направлении n (такой луч существует в силу следствия 2.1). Ясно, что γ пересекает W^{p+i-1} только в точке B_i , и, более того, γ обязательно пересекает W^{p+i-2} . Обозначим через C первую вдоль γ точку пересечения с W^{p+i-2} . Часть γ между B_i и C снова обозначим через γ .

Предположим сначала, что $\gamma \subset L_i$. Обозначим через $L_i[A_i, C]$ часть ориентированного пути L_i от A_i до C . Тогда, в силу утверждения 1.14, имеем: $|\text{tn}(L_i[A_i, C])| \leq 6$. Далее, по утверждению 2.1, $|\text{tn } \gamma| \leq 3$. Поэтому

$$|\text{tn } L_i| = |\text{tn}(L_i[A_i, C]) + \text{tn } \gamma| \leq 6 + 3 = 9,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $\gamma \not\subset L_i$. Положим $\gamma' = L_i \cap \gamma$. Ясно, что γ' связно, так как Γ не имеет циклов, и, кроме того, $\gamma' \supset b_i$. Далее, обозначим через L'_i замыкание

Рис. 2. Оценка кручения фрагмента l_i

$L_i \setminus \gamma'$, а через γ'' — замыкание $\gamma \setminus \gamma'$. Точки A_i и C делят ломаную W^{p+i-2} на две компоненты. Обозначим через W' ту из них, которая, вместе с ломаными L'_i и γ'' , ограничивает множество σ' , не содержащее точки B_i ; оставшуюся компоненту обозначим через W'' (см. рис. 2).

Обозначим через $\bar{\gamma}$ ломаную $W' \cup \gamma$, ориентированную от точки A_i . Рассмотрим каноническое разбиение ломаной L_i относительно ломаной $\bar{\gamma}$, и пусть Ω — первая Ω -область, порожденная ломаной L_i относительно ломаной $\bar{\gamma}$. Обозначим через α начальный твистинг ломаной L_i относительно $\bar{\gamma}$. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. В сделанных выше обозначениях,

$$\text{tn } L_i = \text{tn } \bar{\gamma} - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по построению, ломаная L_i целиком лежит в выпуклом многоугольнике σ^{p+i-2} и пересекается с $\bar{\gamma}$ только по подломаной γ' и по некоторым подломаным из W' . Поэтому, очевидно, каждая компонента из $L_i \cap W'$ порождает касательный сингулярный элемент канонического разбиения ломаной L_i относительно ломаной $\bar{\gamma}$. Легко построить деформацию Φ ломаной L_i такую, что

- (1) деформация Φ не меняет направления концевых звеньев ломаной L_i ;
- (2) полученная в результате ломаная $\Phi(L_i)$, по-прежнему, целиком лежит в многоугольнике σ^{p+i-2} ;
- (3) каноническое разбиение ломаной $\Phi(L_i)$ относительно $\bar{\gamma}$ состоит из трех элементов (другими словами, ломаная $\Phi(L_i)$ пересекается с ломаной $\bar{\gamma}$ лишь по некоторому начальному и концевому участкам).

В самом деле, чтобы построить такую деформацию Φ , достаточно сместить все вершины внутренних сингулярных элементов канонического разбиения ломаной L_i относительно $\bar{\gamma}$ внутрь многоугольника σ^{p+i-2} . Ясно, что деформация Φ не меняет кручение ломаной L_i .

Чтобы завершить доказательство леммы, осталось воспользоваться теоремой 1.2 и вычислить индекс $\text{Ind}(\Phi(L_i), \bar{\gamma})$. По построению, каноническое разбиение ломаной $\Phi(L_i)$ относительно $\bar{\gamma}$ состоит из трех элементов, из которых два элемента — это начальный и конечный сингулярные элементы L_A и L_B , а один — регулярный элемент ℓ . Отметим, что, по построению, знак единственного регулярного элемента ℓ совпадает с определенным выше знаком $\text{sign}(\Omega)$. Далее, концевой сингулярный B_i -элемент L_B всегда является касательным — он совпадает с γ' . Кроме того, по построению, элемент L_B лежит вне области Ω . Поэтому, как легко показать, его знак противоположен знаку регулярного элемента ℓ и равен $-\text{sign}(\Omega)$. Концевой твистинг $\beta(\Phi(L_i), \bar{\gamma})$ равен $-3\text{sign}(\Omega)$, по определению. Учитывая все вышесказанное, получаем:

$$\begin{aligned} \text{tn}(\Phi(L_i)) &= \text{tn} \bar{\gamma} + 6 \text{Ind}(\Phi(L_i), \bar{\gamma}) - \alpha(\Phi(L_i), \bar{\gamma}) - \beta(\Phi(L_i), \bar{\gamma}) \\ &= \text{tn} \bar{\gamma} + 6(\text{sign}(L_A) + \text{sign}(\Omega) - \text{sign}(\Omega)) - \alpha + 3\text{sign}(\Omega) \\ &= \text{tn} \bar{\gamma} + 6\text{sign}(L_A) - \alpha + 3\text{sign}(\Omega). \end{aligned}$$

Напомним, что, по предположению, начальный сингулярный элемент канонического разбиения ломаной L_i относительно W^{p+i-2} является трансверсальным, поэтому элемент L_A — тоже трансверсальный элемент. Тогда $\text{sign}(L_A) = 0$, и

$$\text{tn}(\Phi(L_i)) = \text{tn} \bar{\gamma} - \alpha + 3\text{sign}(\Omega),$$

что и доказывает утверждение леммы.

Вернемся к доказательству предложения. Ориентируем ломаную γ от точки C к B_i и обозначим через β твистинг ломаной $\bar{\gamma}$ в точке C . Так как $\text{tn}(\bar{\gamma}) = \text{tn} \gamma + \beta + \text{tn} W'$, в сделанных выше обозначениях,

$$\begin{aligned} \text{tn} L_i &= \text{tn} \bar{\gamma} - \alpha + 3\text{sign}(\Omega) \\ &= (\beta - \alpha + 3\text{sign}(\Omega)) + \text{tn} \gamma + \text{tn} W'. \end{aligned} \quad (*)$$

Заметим, что знак концевого твистинга α в этом случае совпадает со знаком области Ω . В самом деле, $\text{sign}(\Omega)$ — это знак направления движения по границе области Ω при ее обходе в соответствии с ориентацией ломаной L_i . При этом движении мы, в частности, сворачиваем в точке A_i с первого звена w ломаной $\bar{\gamma}$, взятого с противоположной ориентацией, на первое звено a_i ломаной L_i . По определению, знак твистинга α — это знак репера $(-w, a_i)$. Осталось заметить, что вектор-звено a_i — это вектор-звено из ориентированной ломаной L_i , а вектор $-w$ направлен вне области Ω . Далее, знак твистинга β противоположен знаку области Ω по аналогичным соображениям. Наконец, $|\alpha| \leq 3$ и $|\beta| \leq 3$. Поэтому заключаем, что $|\beta + 3\text{sign}(\Omega) - \alpha| \leq 3$. Наконец, $|\text{tn} \gamma| \leq 3$, а $|\text{tn} W'| \leq 6$, поэтому

$$|\text{tn} L_i| \leq |\beta - \alpha + 3\text{sign}(\Omega)| + |\text{tn} \gamma| + |\text{tn} W'| \leq 12.$$

Предложение доказано.

Шаг (3). Нам будет полезен следующий результат. Пусть W – замкнутая ломаная, ограничивающая выпуклый многоугольник σ , и пусть L – ломаная, лежащая в σ и соединяющая точки $A \in W$ и $B \in W$. Предположим, что $L \not\subset W$. Ориентируем ломаную L от A к B , и обозначим через α и β начальное и конечное звенья ломаной L , соответственно. Ориентируем ломаную W в соответствии с положительным направлением обхода многоугольника σ . Точки A и B разбивают ломаную W на две ориентированных подломанных. Обозначим через W' ту из этих подломанных, движение по которой от B к A происходит в положительном направлении. Через W'' обозначим вторую компоненту ломаной W . Рассмотрим каноническое разбиение ломаной L относительно W' , и пусть α и β – начальный и конечный твистинги ломаной L относительно W' .

ЛЕММА 3.3. *В сделанных только что предположениях, имеет место следующая оценка:*

$$\text{tn } L \leq 6 - \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 3.2, продеформируем ломаную L так, чтобы (1) полученная в результате ломаная $\Phi(L)$ пересекалась с ломаной W лишь по начальному и конечному участкам, и (2) кручение ломаной не изменилось бы: $\text{tn } L = \text{tn } \Phi(L)$. Рассмотрим каноническое разбиение ломаной $\Phi(L)$ относительно ломаной W' , ориентированной, как обычно, от A к B . Это разбиение состоит из трех компонент, которые мы обозначим, как и при доказательстве леммы 3.2, через L_A , ℓ и L_B . При этом элемент ℓ является регулярным, а элементы L_A и L_B – сингулярные концевые элементы. Снова воспользуемся теоремой 1.2. Заметим, что знак единственного регулярного элемента ℓ равен +1. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{tn } L &= \text{tn } W' + 6(\text{sign}(L_A) + \text{sign}(\ell) + \text{sign}(L_B)) - \alpha - \beta \\ &= 6 - \alpha + (6 \text{sign}(L_A) + 6 \text{sign}(L_B) + \text{tn } W' - \beta). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что в последнем соотношении выражение, стоящее в скобках, не превосходит нуля.

Покажем, что $\text{sign}(L_A) \leq 0$. В самом деле, если элемент L_A является трансверсальным, то $\text{sign}(L_A) = 0$, а если элемент L_A является касательным, то, очевидно, ломаная $L_A \subset W'$ лежит вне порожденной регулярным элементом ℓ области Ω , и $\text{sign}(L_A) = -\text{sign}(\ell) = -1$. Аналогично, $\text{sign}(L_B) \leq 0$. Далее, $\text{tn } W' \leq 0$, так как ломаная W' – это часть границы выпуклого многоугольника σ , причем, при движении вдоль W' от A к B мы обходим многоугольник σ в отрицательном направлении. Наконец, $6 \text{sign}(L_B) - \beta \leq 0$. Действительно, если элемент L_B является касательным, то $\beta = 3 \text{sign}(L_B)$, поэтому $6 \text{sign}(L_B) - \beta = 3 \text{sign}(L_B)$, а $\text{sign}(L_B) \leq 0$. Если же L_B – трансверсален, то знак твистинга β – это знак репера $(b, -w)$, где b – это последнее вектор-звено ломаной L , а w – последнее вектор-звено ломаной W' (обе ломаные ориентированы от A к B). Знак же репера $(b, -w)$ положителен. Осталось вспомнить, что, в этом случае, $\text{sign}(L_B) = 0$, поэтому $6 \text{sign}(L_B) - \beta = -\beta \leq 0$. Лемма доказана.

Наконец, докажем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если фрагмент L_{q-p+2} не пуст, то

$$|\text{tn } L_{q-p+1} + \text{tn } L_{q-p+2}| \leq 15.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, для определенности, предположим, что мы оцениваем кручение сверху (те же рассуждения можно применить и для получения оценки снизу, если предварительно произвести отражение плоскости относительно некоторой прямой).

Рассмотрим ломаную W^q , ориентированную против часовой стрелки. Точки $A_{q-p+2} = B_{q-p+1}$ и B_{q-p+2} разбивают эту ломаную на две компоненты. Обозначим через W'_q ту из них, движение по которой от B_{q-p+2} к A_{q-p+2} происходит в положительном направлении. Ориентируем ломаную W'_q от точки $A_{q-p+2} = B_{q-p+1}$ к точке B_{q-p+2} . Первое вектор-звено ломаной W'_q обозначим через w .

Рассмотрим прямую l , проходящую через ребро w , и обозначим через n единичный вектор, перпендикулярный к l и направленный в ту из ограниченных прямой l открытых полуплоскостей, которая не содержит многоугольник σ^q . Прделаем для ломаной L_{q-p+1} построения, описанные в доказательстве предложения 3.5 для ломаной L_i , и сохраним введенные там обозначения (см. рис. 2).

Обозначим через c первое вектор-звено ориентированного от C к B_{q-p+1} пути γ . Обозначим через τ_b и τ_c деленные на $\pi/3$ ориентированные углы между векторами $(-n, b_{q-p+1})$ и векторами $(-n, c)$, соответственно. Тогда, по построению, $|\tau_b| < 3/2$, $|\tau_c| < 3/2$, и, в силу утверждения 2.1, $\text{tn } \gamma = \tau_b - \tau_c$.

Обозначим через ε начальный твистинг ломаной L_{q-p+2} относительно W'_q . Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{tw}(-w, a_{q-p+2}) = \text{tw}(-w, b_{q-p+1}) \\ &= \text{tw}(-w, -n) + \text{tw}(-n, b_{q-p+1}) = 3/2 + \tau_b. \end{aligned}$$

Поэтому $\tau_b = \varepsilon - 3/2$.

Используя все эти соображения, формулу (*) и лемму 3.3, получаем:

$$\begin{aligned} \text{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2}) &= \text{tn } L_{q-p+1} + \text{tn } L_{q-p+2} \\ &= \text{tn } W' + \text{tn } \gamma + \beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega) + \text{tn } L_{q-p+2} \\ &= \text{tn } W' + \tau_b - \tau_c + \beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega) + \text{tn } L_{q-p+2} \\ &= \text{tn } W' + \text{tn } L_{q-p+2} + (\varepsilon - 3/2) + \beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega) - \tau_c \\ &\leq 6 + (6 - \varepsilon) + (\varepsilon - 3/2) + (\beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega)) - \tau_c \\ &= 10 + 1/2 + (\beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega)) - \tau_c. \end{aligned}$$

При доказательстве предложения 3.5 было показано, что $|\beta - \alpha + \text{sign}(\Omega)| \leq 3$. Кроме того, как было отмечено выше, $|\tau_c| < 3/2$. Итак,

$$\begin{aligned} \text{tn}(L_{q-p+1} \cup L_{q-p+2}) &\leq 10 + 1/2 + (\beta - \alpha + 3 \text{sign}(\Omega)) - \tau_c \\ &\leq 10 + 1/2 + 3 + 3/2 = 15. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Итак, основная теорема полностью доказана в предположении, что путь L хороший.

Завершение доказательства теоремы в общем случае. Для завершения доказательства теоремы, очевидно, достаточно перестроить дерево Γ в новое правильное линейное дерево Γ' , обладающее следующими свойствами.

- (1) Граница $M' = \partial\Gamma'$ дерева Γ' состоит из того же количества уровней выпуклости, что и граница $\partial\Gamma$ дерева Γ , т.е. $\kappa(M') = \kappa(M)$.
- (2) В дереве Γ' имеется путь L' , начинающийся на p -м уровне выпуклости множества M' , заканчивающийся на q -м уровне выпуклости множества M' , и получающийся из исходного пути $L \subset \Gamma$ деформацией ломаных. При этом, кручение пути L' совпадает с кручением пути L .
- (3) Путь L' – хороший путь в дереве Γ' .

Опишем алгоритм такой перестройки. Начнем со следующего очевидного утверждения. Пусть Γ – произвольное, не обязательно правильное, линейное дерево, и $\{V_i\}$ – множество всех его вершин. Зададим в каждой точке V_i произвольный вектор v_i , длина которого не больше чем некоторое фиксированное $\varepsilon > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой системы векторов v_i , описанной выше, найдется деформация дерева Γ в классе линейных деревьев, обладающая следующим свойством: если V'_i – образ вершины V_i при этой деформации, то вектор $V_iV'_i$ совпадает с заданным вектором v_i .*

Деформацию линейного дерева Γ из утверждений 3.1 назовем *допустимой ε -деформацией*.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть Γ – произвольное правильное линейное дерево. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, существует допустимая ε -деформация дерева Γ в правильное дерево Γ' такая, что каждый уровень выпуклости границы $\partial\Gamma'$ полученного дерева является многоугольником, все углы которого меньше, чем π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по определению правильного линейного дерева, все его граничные (внутренние) вершины остаются граничными (соответственно, внутренними) вершинами при любых достаточно малых деформациях этого линейного дерева. Отсюда немедленно вытекает утверждение следствия.

Ясно, что при достаточно малых деформациях правильного линейного дерева Γ не меняется структура разбиения граничного множества $\partial\Gamma$ на уровни выпуклости. Кроме того, число вращения при таких деформациях, меняется непрерывно. Вышесказанное позволяет, для завершения доказательства, предполагать, что каждый уровень выпуклости граничного множества исходного правильного линейного дерева Γ представляет собой многоугольник с углами меньше π .

Рассмотрим определенный выше путь L , и пусть, как и выше, A и B – начальная и конечная вершины пути L . По построению, вершины A и B являются граничными, причем A лежит на p -м, а B – на q -м уровнях выпуклости множества $\partial\Gamma$. Перестроим дерево Γ в окрестности каждой его граничной вершины V ,

отличной от A и B , добавив к Γ маленькое ребро e_V таким образом, чтобы в перестроенном дереве Γ , которое мы обозначим через Γ' , вершина V стала внутренней. Граница $\partial\Gamma'$ нового дерева Γ' состоит из точек A и B и вершин степени 1 добавленных ребер e_V .

Добавление ребер e_V к дереву Γ приводит, вообще говоря, к перестройке уровней выпуклости его границы. Однако, так как каждый уровень выпуклости исходного множества $\partial\Gamma$ представляет собой многоугольник с углами меньше π , можно выбрать ребра e_V настолько малыми, что указанная перестройка уровней выпуклости сведется к малой деформации выпуклых многоугольников в классе выпуклых многоугольников. В частности, ребра e_V могут быть выбраны настолько малыми, что число уровней выпуклости дерева Γ не изменится, т.е. $\kappa(\Gamma) = \kappa(\Gamma')$, и, более того, точка A останется вершиной перестроенного p -го уровня выпуклости, а точка B – вершиной перестроенного q -го уровня выпуклости множества $\partial\Gamma'$.

Отметим, что путь L пока вообще не изменялся. Ломаная L является путем в дереве Γ' , соединяющим его граничные вершины A и B . Как и выше, рассмотрим разбиение пути L на фрагменты $L_1, \dots, L_{q-p+2}$ (по отношению к границе дерева Γ'), и обозначим через A_i и B_i – начальную и конечную вершины фрагмента L_i . Из построения следует, что все внутренние вершины ломаной L являются внутренними вершинами дерева Γ' . Поэтому путь L может не оказаться хорошим в Γ' , только если некоторые из точек B_i , $i = 1, \dots, q-p+1$, являются внутренними вершинами дерева Γ' . Напомним, что точка B_i принадлежит границе выпуклой оболочки σ' для $(p+i-1)$ -го уровня выпуклости множества $\partial\Gamma'$. Сдвинем каждую из таких внутренних вершин B_i внутрь соответствующего σ' . Ясно, что при такой перестройке дерева Γ' его граница вообще не меняется, а кручение пути L можно изменить сколь угодно мало. Теперь путь L является хорошим, что и требовалось. Доказательство основной теоремы полностью завершено.

Список литературы

1. Cockayne E. J. On the Steiner problem // Canad. J. Math. 1967. V. 10. P. 431–450.
2. Fomenko A. T., Tuzhilin A. A. Elements of geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space // Transl. Math. Monographs. 1992. V. 93.
3. Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. №1. P. 1–29.
4. Иванов А. О., Тужилин А. А. Решение задачи Штейнера для выпуклых границ // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 207–208.
5. Иванов А. О., Тужилин А. А. Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем. сб. 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844.
6. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. №2 (284). С. 53–115.
7. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner problem for convex boundaries, 1: the general case // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 15–92.
8. Иванов А. О. Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 45–76.
9. Иванов А. О. Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. №2. С. 375–409.

10. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Топология плоских локально минимальных 2-деревьев // УМН. 1994. Т. 49. №6. С. 191–192.
11. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Взвешенные минимальные 2-деревья // УМН. 1995. Т. 50. №5. С. 155–156.
12. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations: CRC Press, 1994.
13. *Preparata F., Shamos M.* Computational Geometry. An introduction. New York: Springer-Verlag, 1985.
14. *Fomenko A. T.* The Plateau Problem. New York: Gordon and Breach, 1989.
15. *Fomenko A. T.* Variational problems in Topology. New York: Gordon and Breach, 1990.
16. *Емеличев В. А. и др.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
17. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. 1960. V. 4. P. 143–148.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: iva@difgeo.math.msu.su; tuz@difgeo.math.msu.su

Поступила в редакцию
15.11.1995