Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 117–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:57:04

УДК 517.53+517.547+517.574

Б. Н. Хабибуллин**Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге**

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек в единичном круге $\mathbb{D}$, а $N_\Lambda(r)$ – характеристика Неванлинны последовательности Λ , $0 < r < 1$. В терминах характеристики Неванлинны $N_\Lambda(r)$ оценивается минимально возможный рост характеристики $B(r, |f|) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ при $r \rightarrow 1 - 0$ в классе всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $f \not\equiv 0$, обращающихся в нуль на Λ .

Пусть F – мероморфная функция в $\mathbb{D}$. В терминах характеристики Неванлинны $T(r, F)$ функции F оценивается минимально возможный рост характеристик $B(r, |g|)$ и $B(r, |h|)$ в классе всех пар голоморфных функций g и h , представляющих F в виде $F = g/h$.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение и формулировки результатов

Через $\mathcal{M}^+(D)$ обозначаем класс всех положительных борелевских мер μ в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\text{supp } \mu$ – носитель меры $\mu \in \mathcal{M}^+(D)$; $\mu^{\text{rad}}(r) := \mu(D(r))$, где $D(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$; при $r \leq 0$ по определению $D(r) := \emptyset$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность точек единичного круга $\mathbb{D} := D(1)$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{D}$. Последовательности Λ сопоставляем целочисленную меру n_Λ в $\mathbb{D}$ по правилу

$$n_\Lambda(D) = \sum_{\lambda_k \in D} 1, \quad D \subset \mathbb{D}, \quad (1.1)$$

т.е. $n_\Lambda(D)$ – число точек последовательности Λ , попавших в D . В частности, $\text{supp } \Lambda := \text{supp } n_\Lambda$; $\Lambda \subset D$ по определению означает, что $\text{supp } \Lambda \subset D$; $\lambda \in \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \Lambda$) то же, что и $\lambda \in \text{supp } \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \text{supp } \Lambda$);

$$n_\Lambda^{\text{rad}}(r) = n_\Lambda(D(r)) = \sum_{|\lambda_k| < r} 1, \quad r \geq 0, \quad (1.2)$$

– считающая функция последовательности Λ , т.е. $n_\Lambda^{\text{rad}}(r)$ – число точек этой последовательности в круге $D(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \Lambda$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00033) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1528.2003.1).

вопросов всегда легко снимается. При этом соглашении используем и важнейшую характеристику N_Λ последовательности Λ , которую при стандартном обозначении $\log^+ t = \max\{0, \log t\}$ записываем в различных видах:

$$N_\Lambda(r) := \int_0^r n_\Lambda^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \log^+ \frac{r}{t} dn_\Lambda^{\text{rad}}(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \log^+ \frac{r}{|\lambda_k|}; \quad (1.3)$$

N_Λ – проинтегрированная, или усредненная считающая функция последовательности Λ , которую в контексте теории распределений значений можно называть *характеристикой Неванлинны последовательности Λ* .

Следуя Л. Шварцу [1; гл. I, § 4], всюду положительность числа, функции, меры и т.п. понимаем как “ ≥ 0 ”; аналогичное соглашение “ ≤ 0 ” – для отрицательности. Если для функции или отображения f на множестве A $f(x) \equiv b$ при $x \in A$, то пишем “ $f \equiv b$ на A ”; в противном случае – “ $f \not\equiv b$ на A ”. Функция f на подмножестве A вещественной оси $\mathbb{R}$ называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*), если при всех $t_1 < t_2$ из A выполнено неравенство $f(t_1) \leq f(t_2)$ (соответственно $f(t_1) < f(t_2)$). Аналогично различаем *убывание* и *строго убывание*.

Границу множества $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем ∂D .

Пусть $r > 0$ и u – измеримая функция на $\partial D(r)$ (по мере длины дуги) со значениями в расширенной числовой прямой $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Введем в рассмотрение традиционные характеристики

$$B(r, u) := \sup\{u(z) : |z| = r\}, \quad m(r, u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) d\theta, \quad (1.4)$$

где $\sup$ понимается, вообще говоря, как существенная точная верхняя грань относительно меры длины дуги и, как обычно, $u^+ = \max\{0, u\}$ – положительная часть функции u . Для функции u , определенной в нуле, естественно положить $B(0, u) := u(0)$ и $m(0, u) := u^+(0)$.

Класс всех голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$ функций обозначаем через $H(D)$. Функция $f \in H(\mathbb{D})$ *обращается в нуль на последовательности $\Lambda \subset \mathbb{D}$* , если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{D}$ не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$); через Zero_f обозначаем последовательность всех нулей функции f , перенумерованную с учетом кратности. Если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{D}$ совпадает с числом ее повторений в Λ , то Λ – *последовательность нулей функции f* (пишем $\text{Zero}_f = \Lambda$).

Рассматриваются следующие две родственные экстремальные задачи.

ЗАДАЧА 1. *В терминах усредненной считающей функции $N_\Lambda(r)$ последовательности $\Lambda \subset \mathbb{D}$ дать верхнюю оценку возможного минимального роста характеристики $B(r, |f|)$ при $r \rightarrow 1-0$ в классе всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $f \not\equiv 0$, обращающихся в нуль на последовательности Λ .*

Класс всех мероморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $M(D)$. Всяду в работе, если не оговорено противное, для $F \in M(\mathbb{D})$ предполагаем, что $F(0) \neq \infty$. Это упрощает формулировки, не ограничивая общности в границах исследуемой проблематики. Через $T(r, F)$ обозначаем характеристику Неванлинны функции $F \in M(\mathbb{D})$, т.е. если $\Gamma = \{\gamma_k\}$ – последовательность всех полюсов функции F , перенумерованная с учетом кратности, то $T(r, F) := m(r, \log |F|) + N_\Gamma(r)$.

ЗАДАЧА 2. В терминах характеристики Неванлинны $T(r, F)$ мероморфной функции $F \in M(\mathbb{D})$ дать верхнюю оценку на возможный минимальный рост пары характеристик $B(r, |g|)$ и $B(r, |h|)$ в классе всех пар функций $g, h \in H(\mathbb{D})$, представляющих F в виде отношения $F = g/h$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ. Для действительной функции f и функции $g \geq 0$, определенных в левой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, запись $f(r) \lesssim g(r)$, $r \rightarrow a - 0$, далее означает, что найдутся постоянные $C \geq 0$ и $\varepsilon > 0$, при которых $f(r) \leq Cg(r) + C$ для всех $a - \varepsilon < r < a$. Если одновременно при этом $f \geq 0$ и $g(r) \lesssim f(r)$, $r \rightarrow a - 0$, то пишем $f(r) \simeq g(r)$, $r \rightarrow a - 0$. Таким образом, запись $f(r) \lesssim 0$, $r \rightarrow 1 - 0$, эквивалентна ограниченности сверху функции f в некоторой левой окрестности единицы.

Истоки задач 1 и 2 – в классических теоремах Р. Неванлинны о классах голоморфных и мероморфных функций с ограниченной характеристикой в круге [2], [3; теорема 6.11], [4; теорема V.8], которые сформулированы ниже в нетрадиционной и несколько урезанной форме с целью более рельефно выделить связь наших результатов с первоисточником.

ТЕОРЕМА А (Р. Неванлинна). Пусть Λ – последовательность в $\mathbb{D}$. Если

$$N_\Lambda(r) \lesssim 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (1.5)$$

то существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция $f \not\equiv 0$, для которой $f(\Lambda) = 0$ (и даже $\text{Zero}_f = \Lambda$) и выполнено соотношение $\log B(r, |f|) \lesssim N_\Lambda(r)$, $r \rightarrow 1 - 0$.

ТЕОРЕМА В (Р. Неванлинна). Пусть $F \in M(\mathbb{D})$. Если

$$T(r, F) \lesssim 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (1.6)$$

то существует представление $F = g/h$ в виде частного функций $g, h \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих соотношению

$$\log \max\{B(r, |g|), B(r, |h|)\} \lesssim T(r, F), \quad r \rightarrow 1 - 0.$$

Порядком мероморфной функции $F \in M(\mathbb{D})$ называется величина [4; V.4]

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow 1 - 0} \frac{\log T(r, F)}{-\log(1 - r)}.$$

В частности, для функции $f \in H(\mathbb{D}) \subset M(\mathbb{D})$ (во всяком случае в [4]) порядок определяется тем же соотношением, т.е. через характеристику Неванлинны $T(r, f) = m(r, \log |f|)$, а не через характеристику $B(r, |f|)$. Поэтому следующую теорему С можно рассматривать как близкую к теореме В, но все же не как ее прямое обобщение (о различиях см. [4; теорема V.13]).

ТЕОРЕМА С [4; теорема V.27]. Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция порядка ρ представима отношением голоморфных в $\mathbb{D}$ функций того же порядка ρ .

По поводу аналогичной тематики для целых и мероморфных функций в $\mathbb{C}$ и в $\mathbb{C}^n$ можно обратиться к обзору [5] и недавней статье [6].

Для формулировок результатов настоящей работы удобно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Всякую определенную при некотором $a \in [0, 1)$ строго возрастающую непрерывную функцию

$$d: [a, 1) \rightarrow [0, 1), \quad (1.7)$$

удовлетворяющую ограничениям

$$t < d(t) < 1 \quad \forall t \in [a, 1), \quad (1.8)$$

называем *функцией смещения (для круга $\mathbb{D}$)*. При этом две функции смещения отождествляем, если существует левая окрестность точки 1, сужения на которую этих функций совпадают. Говорим, что какое-либо свойство выполняется для функции смещения, если таким свойством обладает сужение этой функции на некоторую левую окрестность точки 1.

Различные графические реализации функций смещения d , ρ , ϱ приведены на рис. 1–4 в § 4. Согласно (1.8) функцию смещения d всегда можно доопределить по непрерывности значением $d(1) = 1$. Кроме того, если существует левая производная $d'_-(1)$ функции смещения (1.7) в точке 1, например если функция d выпукла или вогнута, то из (1.8) сразу следует

$$0 \leq d'_-(1) \leq 1. \quad (1.9)$$

ПРИМЕРЫ. Полезно иметь в виду следующие модельные функции смещения:

- 1) линейные функции смещения $d(r) \equiv \alpha r + (1 - \alpha)$, где постоянная $\alpha \in (0, 1)$;
- 2) выпуклые функции смещения вида $d(r) \equiv r + (1 - r)^\alpha$, где постоянный показатель $\alpha > 1$, при значении постоянной $a \geq 1 - \alpha^{1/(1-\alpha)}$ в (1.7);
- 3) вогнутые функции смещения вида $d(r) \equiv 1 - (1 - r)^\alpha$, где постоянный показатель $\alpha > 1$, при значении постоянной $a > 0$ в (1.7).

Основные результаты настоящей работы по задачам 1 и 2, составляющие содержание соответственно теорем 1 и 2, не предполагают каких-либо априорных условий на характеристики Неванлинны, подобных (1.5), (1.6), и имеют общий характер. Для частных случаев выпуклой функции смещения d теоремы 1 и 2 были анонсированы в [6; п. 3.3, теорема 2] как аналоги соответствующих результатов для функций на $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ – последовательность в $\mathbb{D}$. Тогда для любой выпуклой или вогнутой функции смещения d найдется функция $f \in H(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$ на $\mathbb{D}$, обращающаяся в нуль на Λ и удовлетворяющая соотношению

$$\log B(r, |f|) \lesssim \frac{1}{d(r) - r} N_\Lambda(d(r)), \quad r \rightarrow 1 - 0. \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F \in M(\mathbb{D})$. Тогда для любой выпуклой или вогнутой функции смещения d существует представление $F = g/h$ в виде частного пары функций $g, h \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих соотношению

$$\log \max\{B(r, |g|), B(r, |h|)\} \lesssim \frac{1}{d(r) - r} T(d(r), F), \quad r \rightarrow 1 - 0. \quad (1.11)$$

Появление некоторого возрастающего множителя перед характеристиками Неванлинны в правых частях (1.10) и (1.11) неизбежно, когда такие характеристики не ограничены. Для линейной функции смещения d при умеренном

росте характеристик Неванлинны этот множитель даже обязан быть такого же вида, как в (1.10) и (1.11), что прямо (см. [4; теорема V.13]) или косвенно (см. [7; теорема 2.2]) подтверждается известными фактами о мероморфных функциях конечного порядка и о распределении нулей голоморфных функций в весовых пространствах на единичном круге $\mathbb{D}$.

Структура статьи следующая. В § 2 приводятся варианты взаимосвязи характеристик (1.4) для субгармонических функций. В § 3 изложена общая схема основного в работе неконструктивного метода выметания, основанного на аппарате мер и функций Йенсена, а результаты из § 2 применяются к специальным оценкам функций Йенсена. Подготовительные предложения 4.1, 4.3, 4.7 из § 4 о гашении роста субгармонической функции представляют на наш взгляд и самостоятельный интерес. Из предложения 4.7 в § 5 легко выводятся теоремы 1 и 2. В § 5 также приведено следствие 5.1 о мультипликаторе как эквивалентная версия теоремы 1.

Автор весьма признателен М. Л. Содину за полезную информацию.

§ 2. Вариации на тему неравенства Харнака

В этом параграфе установим оценки сверху функции $v \in \text{SH}(D(R))$ в кольце $D(t) \setminus D(s)$, $0 < s < t < R$, через значения характеристик $m(s, v)$ и $m(t, v)$. Они основаны на простой комбинации неравенства Харнака и выпуклости относительно $\log r$ характеристик (1.4) функции v , или теоремы о двух константах для гармонической меры кольца [8; теорема 4.3.7].

Через $\mathbb{C}_\infty$ обозначаем расширенную комплексную плоскость (сферу Римана) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\bar{S}$ обозначаем замыкание множества S в $\mathbb{C}_\infty$. Если $\bar{S}$ – компакт в $D \subset \mathbb{C}_\infty$ в индуцированной с $\mathbb{C}_\infty$ топологии, то S предкомпактно в D , а обозначаем это как $S \Subset D$.

Функция v субгармоническая на множестве $A \subset \mathbb{C}_\infty$, если она субгармоническая на некотором открытом подмножестве из $\mathbb{C}_\infty$, включающем в себя A (с естественной факторизацией по отношению равенства двух функций на A). Через $\text{SH}(A)$ обозначаем конус всех субгармонических функций на $A \subset \mathbb{C}_\infty$, включая в него и функцию $v \equiv -\infty$ на A ; $\text{SH}^+(A)$ – подконус всех положительных функций из $\text{SH}(A)$.

При $v \in \text{SH}(\overline{D(R)})$ характеристики $B(r, v)$ и $m(r, v)$ из (1.4) непрерывны и выпуклы относительно¹ $\log r$ на отрезке $[0, R]$ [8; теорема 2.6.8]. Из неравенства Харнака [8; теорема 1.3.1], [9; теорема 1.18] следует элементарное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $v \in \text{SH}(\overline{D(t)})$ и $0 \leq r \leq t$. Тогда

$$B(r, v) \leq \frac{t+r}{t-r} m(t, v). \quad (2.1)$$

При $r = t$ доопределяем правую часть в (2.1) как предел этой части при $r \rightarrow t - 0$, т.е. полагаем, как и далее в подобных ситуациях, равной $+\infty$. Заметим, что неравенство (2.1), точное в общем случае, не “чувствует” каких-либо априорных ограничений сверху на характеристику $m(s, v)$ при $s < r$. В определенной мере подобного недостатка лишено следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $v \in \text{SH}(\overline{D(t)})$ и

$$0 \leq s_1 \leq s \leq r \leq t_1 \leq t, \quad (2.2)$$

¹Функция $f(r)$ выпукла относительно $\log r$, если $f(e^x)$ – выпуклая функция от x .

где никакие три величины не совпадают одновременно. Тогда

$$B(r, v) \leq \frac{1}{\log(t_1/s_1)} \left(\left(\log \frac{t_1}{r} \right) \frac{s + s_1}{s - s_1} m(s, v) + \left(\log \frac{r}{s_1} \right) \frac{t + t_1}{t - t_1} m(t, v) \right). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.1 следуют неравенства

$$B(s_1, v) \leq \frac{s + s_1}{s - s_1} m(s, v), \quad B(t_1, v) \leq \frac{t + t_1}{t - t_1} m(t, v). \quad (2.4)$$

Выпуклость характеристики $B(r, v)$ относительно $\log r$ означает, что

$$B(r, v) \leq \frac{\log(t_1/r)}{\log(t_1/s_1)} B(s_1, v) + \frac{\log(r/s_1)}{\log(t_1/s_1)} B(t_1, v).$$

Объединение этой оценки с (2.4) дает (2.3).

Устремляя к нулю в (2.3) при фиксированном $s > 0$ величину s_1 из (2.2), при $t_1 = r$ легко видим, что (2.1) – частный случай (2.3).

Применяя предложение 2.2 при $s_1 = s^2/r$ и $t_1 = \sqrt{rt}$, при которых справедливо (2.2), легко получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если для $v \in \text{SH}(\overline{D(t)})$ известно, что $v \leq 0$ на окружности $\partial D(s)$, то при условии

$$0 \leq s \leq r \leq \frac{t + s}{2} \leq t \leq 3s \quad (2.5)$$

имеет место неравенство

$$B(r, v) \leq 2^6 \frac{r - s}{(t - s)^2} tm(t, v).$$

§ 3. Меры и функции Йенсена

Для субгармонической в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$ функции $u \not\equiv -\infty$ положительная мера $\nu_u = (1/(2\pi))\Delta u$ (здесь Δ – оператор Лапласа, а равенство – в смысле теории обобщенных функций, или распределение) – мера Рисса функции u в D ; обратно, для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(D)$ функция u_ν – субгармоническая в D функция с мерой Рисса $\nu_u = \nu$, которая всегда существует и единственна с точностью до гармонического слагаемого [8; теорема 3.7.9], [9; 3.5].

Далее нам потребуются некоторые понятия и утверждения, которые формулируются здесь только для конуса $\text{SH}(\mathbb{D})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [10; введение], [11; § III.B2], [12; 1.1], [13; определение 2]. Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ с $\text{supp } \mu \subset \mathbb{D}$ называется *мерой Йенсена* в $\mathbb{D}$, если для любой функции $u \in \text{SH}(\mathbb{D})$ выполнено неравенство $u(0) \leq \int_{\mathbb{D}} u d\mu$.

Роль мер Йенсена в доказательствах теорем 1 и 2 определяется следующим результатом из [14; основная теорема] (см. также [15; теорема 1]), сформулированным здесь в ослабленном виде только для круга $\mathbb{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $u \in \text{SH}(\mathbb{D})$ и функция $M: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Если существует постоянная C , с которой неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} u d\mu \leq \int_{\mathbb{D}} M d\mu + C \quad (3.1)$$

выполнено для всех мер Йенсена μ в $\mathbb{D}$, то найдется функция $v \in \text{SH}(\mathbb{D})$ такая, что

$$v(0) \neq -\infty, \quad u(z) + v(z) \leq M(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (3.2)$$

Ниже предложению 3.1 придадим несколько иную форму (предложение 3.3), аналогичную [13; основная теорема] (см. также [11; § III.C1, теорема Хабибуллина], [12; теорема 4.1]). Потенциал меры Йенсена μ в $\mathbb{D}$ — это функция (см. [13; определение 3], [16; (2.9)])

$$V_{\mu}(\zeta) := \int_{\mathbb{D}} \log |z - \zeta| d\mu(z) - \log |\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [13; определения 1 и 1'], [17; а)–с)], [18; определение 2]. Субгармоническую в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ функцию V называем *функцией Йенсена* в $\mathbb{D}$, если выполнены следующие три условия:

- 1) $V(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$;
- 2) существует число $r \in (0, 1)$ такое, что $V(\zeta) \equiv 0$ при $r \leq |\zeta| < 1$ (финитность V);
- 3) справедливо соотношение

$$\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V(\zeta)}{-\log |\zeta|} \leq 1.$$

Функции Йенсена V в $\mathbb{D}$ и потенциалы мер Йенсена из (3.3) всегда доопределяем нулевыми значениями на дополнении $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \mathbb{D}$. Тогда такие функции становятся субгармоническими в $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \{0\}$.

Построение (3.3) потенциалов V_{μ} мер Йенсена μ в $\mathbb{D}$ осуществляет биекцию всех мер Йенсена в $\mathbb{D}$ на класс всех функций Йенсена в $\mathbb{D}$ (см. [13; предложения 1.5 и 4.1], [14; предложение 3.4], [18; теорема двойственности]). При этом справедлива обобщенная формула Пуассона–Йенсена [13; предложение 1.4], [18; предложение 1.2]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть ν — мера Рисса функции $u_{\nu} \in \text{SH}(\mathbb{D})$. Тогда для каждой меры Йенсена μ в $\mathbb{D}$ с потенциалом V_{μ} справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{D}} u_{\nu} d\mu = \int_{\mathbb{D}} V_{\mu} d\nu + u_{\nu}(0). \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) в [13], [18] давалось в иной форме, требующей ограничения $u_{\nu}(0) \neq -\infty$, но в виде (3.4) оно справедливо и без такого ограничения.

Применяя предложение 3.2 к левой части в (3.1), получаем ключевое для доказательства основной теоремы

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ и $0 \notin \text{supp } \nu$, а функция $M: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Если для некоторой постоянной C неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} V_{\mu} d\nu \leq \int_{\mathbb{D}} M d\mu + C \quad (3.5)$$

выполнено для всех мер Йенсена μ в $\mathbb{D}$, то для любой функции $u = u_\nu$ с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \text{SH}(\mathbb{D})$, с которой выполнено (3.2).

Приведем оценки функций Йенсена в духе результатов из § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть V – функция Йенсена в $\mathbb{D}$, доопределенная нулем в $\mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$. Тогда справедлива универсальная оценка

$$B(t, V) \leq \frac{t+r}{t-r} m(r, V), \quad 0 \leq r \leq t < +\infty, \quad (3.6)$$

а при дополнительном ограничении

$$\frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2r}{1+r} \leq t \leq 1 \quad (3.7)$$

справедливо и неравенство

$$B(t, V) \leq 2^6 \frac{1-t}{(1-r)^2} m(r, V). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.1, примененному к инверсии

$$v(z) := V\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.9)$$

функции V , получаем (3.6).

При $r' := 1/t \geq 1$, $s' := 1 =: s$ и $t' := 1/r \leq 3$ из ограничений (3.7) следуют неравенства вида (2.5):

$$s' = 1 \leq r' \leq \frac{t' + 1}{2} = \frac{t' + s'}{2} \leq t' \leq 3 = 3s'.$$

Применение следствия 2.1 к функции v из (3.9) дает

$$B(t, V) = B(r', v) \leq 2^6 \frac{r' - 1}{(t' - 1)^2} t' m(t', v) = 2^6 \frac{1 - t}{(1 - r)^2} \frac{r}{t} m(r, V), \quad (3.10)$$

что ввиду условия $r \leq t$ влечет за собой (3.8).

Несколько ослабив, оценки (3.6) и (3.8) можно объединить в одну:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть V – функция Йенсена в $\mathbb{D}$. Тогда

$$B(t, V) \leq 2^8 \frac{1-t}{(t-r)(1-r)} m(r, V), \quad 0 \leq r \leq t \leq 1. \quad (3.11)$$

§ 4. Несколько подготовительных предложений

Меру $\lambda \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ называем *радиальной на $\mathbb{D}$* , если она представляется в виде тензорного произведения (см. [1; гл. IV, § 8]) мер $(t \geq 0, \theta \in [0, 2\pi))$:

$$d\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes d\lambda^{\text{rad}}(t), \quad \zeta = te^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Если радиальная мера λ не имеет “сильной” особенности в нуле (к примеру, сосредоточена вне некоторой окрестности нуля), то функция $N_\lambda(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, построенная исходя из усредненной считающей функции (ср. с (1.3))

$$N_\lambda(r) := \int_0^r \lambda^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \log^+ \frac{r}{t} d\lambda^{\text{rad}}(t), \quad (4.1)$$

является одной из субгармонических функций, обращающихся в нуль в точке 0, с мерой Рисса именно λ (см. [6; 2.3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$. Тогда для всякой субгармонической в $\mathbb{D}$ функции u с мерой Рисса ν при любом выборе функции смещения ρ на $[a, 1)$, как в (1.7), (1.8), найдется субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$ в $\mathbb{D}$ такая, что выполнено неравенство

$$u(z) + v(z) \leq \frac{2^8}{a} I_\nu(|z|; \rho) \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad (4.2)$$

где

$$I_\nu(r; \rho) := \int_a^r \int_a^x \frac{1 - \rho(t)}{(\rho(t) - t)(1 - t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) dx \quad \text{при } a \leq r < 1, \quad (4.3)$$

$$I_\nu(r; \rho) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq r < a.$$

Рис. 1. К предложению 4.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции смещения $\rho: [a, 1) \rightarrow [\rho(a), 1)$ существует обратная к ней функция (см. рис. 1)

$$\varphi := \rho^{-1}: [b, 1) \rightarrow [a, 1), \quad b := \rho(a) > a, \quad (4.4)$$

которая также строго возрастает, непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\varphi(t) < t \quad \forall t \in [b, 1), \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \varphi(t) = 1. \quad (4.5)$$

В частности, φ – собственное отображение из $[b, 1)$ на $[a, 1)$, т.е. прообраз каждого компакта из $[a, 1)$ при отображении φ – компакт в $[b, 1)$. Пока нам удобно наложить на носитель меры ν ограничение

$$\text{supp } \nu \cap D(b) = \emptyset. \quad (4.6)$$

По предложению 3.5 при $r = \varphi(t) < t \in [b, 1)$ получаем единую для всех функций Йенсена V в $\mathbb{D}$ оценку

$$B(t, V) \leq 2^8 \frac{1-t}{(t-\varphi(t))(1-\varphi(t))} m(\varphi(t), V),$$

где $b \leq t < 1$. Эту оценку с учетом (1.4) и положительности V перепишем в виде

$$V(\zeta) \leq 2^8 \frac{1-\varphi(|\zeta|)}{(|\zeta|-\varphi(|\zeta|))(1-\varphi(|\zeta|))} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta \quad \forall \zeta \in \mathbb{D} \setminus D(b).$$

Отсюда, интегрируя по мере $\nu \geq 0$, с учетом предположения (4.6) и финитности функций Йенсена (условие 2) определения 3) имеем единую для всех функций Йенсена V в $\mathbb{D}$ оценку

$$\int V d\nu \leq 2^8 \int_{b \leq |\zeta| < 1} \left(\frac{1-\varphi(|\zeta|)}{(|\zeta|-\varphi(|\zeta|))(1-\varphi(|\zeta|))} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi(|\zeta|)e^{i\theta}) d\theta \right) d\nu(\zeta). \quad (4.7)$$

Правую “интегральную” часть (без множителя 2^8) здесь можно рассматривать как действие распространенного по стандартной схеме [9; гл. 3] на полунепрерывную сверху вне нуля финитную функцию V некоторого линейного непрерывного функционала (меры Радона) λ на пространстве $C_0(\mathbb{D} \setminus D(a))$ финитных непрерывных функций на $\mathbb{D} \setminus D(a)$, определенного по правилу

$$\langle \lambda, f \rangle = \int_b^1 \left(\frac{1-t}{(t-\varphi(t))(1-\varphi(t))} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi(t)e^{i\theta}) d\theta \right) d\nu^{\text{rad}}(t), \quad (4.8)$$

где $\langle \lambda, f \rangle$ – действие функционала λ на функцию $f \in C_0(\mathbb{D} \setminus D(a))$. Другими словами, мера λ получена из меры $d\nu^{\text{rad}}(t)$, заданной на $[b, 1)$, как композиция трех преобразований:

- 1) умножение меры $d\nu^{\text{rad}}(t)$ (см. [1; гл. IV, § 5]) на непрерывную функцию $(1-t)/((t-\varphi(t))(1-\varphi(t)))$;
- 2) образ на $[a, 1)$ меры, полученной в п. 1), при непрерывном собственном отображении $t \mapsto \varphi(t)$ из $[b, 1)$ на $[a, 1)$ (см. [1; гл. IV, § 6]);
- 3) тензорное произведение меры из 2) и меры $d\theta/(2\pi)$ (см. [1; гл. IV, § 8]).

По построению мера λ , рассматриваемая уже как функция множеств, определена на $\mathbb{D} \setminus D(a)$, и после продолжения нулем на $D(a)$ она становится радиальной на $\mathbb{D}$. При этом неравенство (4.7) можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{D}} V d\nu \leq 2^8 \int_{\mathbb{D}} V d\lambda. \quad (4.9)$$

По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4), примененной к паре λ и N_λ и мере Йенсена μ с потенциалом $V_\mu = V$, получаем $\int_{\mathbb{D}} V d\lambda = \int_{\mathbb{D}} N_\lambda(|z|) d\mu(z)$. Отсюда и из (4.9) следует единое для всех мер Йенсена μ в $\mathbb{D}$ неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} V_\mu d\nu \leq \int_{\mathbb{D}} 2^8 N_\lambda(|z|) d\mu(z). \quad (4.10)$$

Функция $N_\lambda(|z|)$ непрерывна в силу (4.1). Таким образом, (4.10) означает выполнение условия (3.5) предложения 3.3 с функцией $M(z) = 2^8 N_\lambda(|z|)$ и постоянной $C = 0$. Следовательно, для любой субгармонической функции u с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \text{SH}(\mathbb{D})$, $v(0) \neq -\infty$, такая, что справедливо неравенство

$$u(z) + v(z) \leq 2^8 N_\lambda(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (4.11)$$

Для завершения доказательства необходимо провести

Вычисление функции $N_\lambda(|z|)$. Для $x \geq 0$ через $\chi_{D(x)}$ и $\chi_{[0,x]}$ обозначаем характеристические функции круга $D(x)$ в $\mathbb{C}$ и интервала $[0, x]$ в $\mathbb{R}$ соответственно. В этих обозначениях согласно (4.8) имеем

$$\lambda(x) = \langle \lambda, \chi_{D(x)} \rangle = \int_b^1 \left(\frac{1-t}{(t-\varphi(t))(1-\varphi(t))} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{D(x)}(\varphi(t)e^{i\theta}) d\theta \right) d\nu^{\text{rad}}(t).$$

Характеристическая функция $\chi_{D(x)}$ радиальна. Следовательно, последнее равенство можно записать в виде

$$\lambda(x) = \int_b^1 \frac{1-t}{(t-\varphi(t))(1-\varphi(t))} \chi_{[0,x]}(\varphi(t)) d\nu^{\text{rad}}(t).$$

Замена переменной $\tau = \varphi(t)$ в последнем интеграле, т.е. $t = \rho(\tau)$ ввиду (4.4), (4.5), где $\tau \in [a, 1)$, влечет за собой для всех $x \in [a, 1)$ тождества

$$\begin{aligned} \lambda(x) &\equiv \int_a^1 \frac{1-\rho(\tau)}{(\rho(\tau)-\tau)(1-\tau)} \chi_{[0,x]}(\tau) d\nu^{\text{rad}}(\rho(\tau)) \\ &\equiv \int_a^x \frac{1-\rho(t)}{(\rho(t)-t)(1-t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(\tau)). \end{aligned}$$

Теперь определение (4.1) функции N_λ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N_\lambda(r) &= \int_a^r \lambda(x) \frac{dx}{x} = \int_a^r \int_a^x \frac{1-\rho(t)}{(\rho(t)-t)(1-t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(\tau)) \frac{dx}{x} \\ &\leq \frac{1}{a} \int_a^r \int_a^x \frac{1-\rho(t)}{(\rho(t)-t)(1-t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(\tau)) dx, \quad a \leq r < 1, \end{aligned}$$

$$N_\lambda(r) \equiv 0, \quad 0 \leq r < a.$$

Тогда согласно (4.11) получаем (4.2) при ограничении (4.6).

Произвольную меру ν представим в виде суммы мер $\nu = \nu_0 + \nu_1$, где ν_0 — сужение меры ν на круг $D(b)$. Соответственно функцию $u = u_\nu$ можно представить в виде суммы субгармонических функций

$$u(z) = \int_{|z| < b} \log \frac{|z - \zeta|}{2} d\nu(\zeta) + u_{\nu_1} =: u_0 + u_1,$$

где u_0 и $u_1 := u_{\nu_1}$ — субгармонические функции с мерами Рисса ν_0 и ν_1 соответственно. По построению $u_0 \leq 0$ на $\mathbb{D}$ и $\text{supp } \nu_1 \subset \mathbb{D} \setminus D(b)$. Теперь достаточно применить доказанный вариант предложения к u_1 с условием вида (4.6) для меры ν_1 .

Следующий весьма частный случай одного многомерного результата из [19] (см. также [15; лемма 2.2]) позволяет перейти от предыдущего чисто “субгармонического” предложения к его голоморфному варианту.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 [19; предложение 9.1]². Если $u, v \in \text{SH}(\mathbb{D})$, $v \not\equiv -\infty$, и для некоторой непрерывной функции M неравенство $u(z) + v(z) \leq M(z)$ выполнено при всех $z \in \mathbb{D}$, то найдется такая голоморфная функция $q \not\equiv 0$ в $\mathbb{D}$, что в любой точке $z \in \mathbb{D}$ для любого $\sigma \in (0, 1 - |z|)$ выполнено неравенство $u(z) + \log |q(z)| \leq \sup\{M(\zeta) : |z - \zeta| < \sigma\} - \log \sigma$.

Из предложения 4.1 и предложения 4.2 с учетом возрастания функции $I_\nu(r; \rho)$ из (4.3) по переменной r сразу следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$. Тогда для всякой субгармонической в $\mathbb{D}$ функции u с мерой Рисса ν при любом выборе функции смещения $\rho: [a, 1) \rightarrow [0, 1)$ найдется голоморфная функция $q \not\equiv 0$ в $\mathbb{D}$ такая, что справедливо ограничение сверху

$$u(z) + \log |q(z)| \leq \inf_{0 < \sigma < 1 - |z|} \left(\frac{2^8}{a} I_\nu(|z| + \sigma; \rho) + \log \frac{1}{\sigma} \right) \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad (4.12)$$

где $I_\nu(r; \rho)$ определена в (4.3).

В свете неравенств (4.2) и (4.12) из предложений 4.1 и 4.3 актуальны достаточно простые верхние оценки для двойного интеграла (4.3). Всюду далее в этом параграфе рассматривается произвольная мера

$$\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D}), \quad 0 \notin \text{supp } \nu, \quad (4.13)$$

в паре с произвольной функцией смещения ρ . Соответствующий им двойной интеграл из (4.3) удобнее записывать в виде

$$I_\nu(r; \rho) = \int^r \int^x \frac{1 - \rho(t)}{(\rho(t) - t)(1 - t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) dx, \quad (4.14)$$

не указывая нижних пределов интегрирования, поскольку конкретное значение числа $a < 1$, т.е. нижней границы области определения функции смещения ρ , не имеет значения в последующих оценках.

Нам потребуются элементарные следствия из определения усредненной считающей функции (4.1), частично доказанные в [20] (далее используются специальные обозначения, определенные в § 1):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для меры ν из (4.13) справедливы соотношения

$$\int^r \nu^{\text{rad}}(t) dt \leq N_\nu(r) \lesssim \int^r \nu^{\text{rad}}(t) dt, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (4.15i)$$

$$\nu^{\text{rad}}(r) \leq \frac{1}{d} N_\nu(r + d), \quad 0 \leq r < r + d < 1, \quad (4.15d)$$

$$N_\nu(r) \simeq \int^r (r - t) d\nu^{\text{rad}}(t), \quad r \rightarrow 1 - 0. \quad (4.15l)$$

²В [19] по определению из конуса (плюри)субгармонических функций исключена функция, тождественно равная $-\infty$.

При выводе оценок двойного интеграла (4.14) имеет смысл рассмотреть отдельно выпуклые и вогнутые функции смещения $\rho(t)$ при t , достаточно близких к 1.

1) *Случай выпуклой функции смещения ρ .* Ввиду выпуклости функции смещения $\rho(t)$ при некотором $\varepsilon > 0$ для всех t , достаточно близких слева к 1, для левой производной ρ'_- выполнены следующие условия (см. рис. 1):

$$\varepsilon \leq \rho'_-(t) \leq \rho'_-(1) \leq 1, \quad \rho(t) - t \text{ — убывающая функция.} \quad (4.16)$$

Отсюда

$$I_\nu(r; \rho) \leq \int^r \int^x \frac{1-t}{(\rho(t)-t)(1-t)} d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) dx \leq \int^r \frac{\nu^{\text{rad}}(\rho(x))}{\rho(x)-x} dx. \quad (4.17)$$

Последний интеграл можно записать в виде

$$\int^r \frac{1}{\rho'_-(x)(\rho(x)-x)} d\left(\int^x \nu^{\text{rad}}(\rho(t)) d\rho(t)\right).$$

Отсюда оценку (4.17) с учетом (4.16) можно продолжить:

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \frac{1}{\rho(r)-r} \int^r \nu^{\text{rad}}(\rho(t)) d\rho(t) = \frac{1}{\rho(r)-r} \int^{\rho(r)} \nu^{\text{rad}}(t) dt,$$

что ввиду (4.15i) дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Если функция смещения ρ выпукла, то*

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \frac{1}{\rho(r)-r} N_\nu(\rho(r)), \quad r \rightarrow 1-0. \quad (4.18)$$

2) *Случай вогнутой функции смещения ρ .* Из вогнутости $\rho(t)$ легко следует нижняя оценка $\rho(t)-t \geq \varepsilon(1-t)$ при некотором $\varepsilon > 0$ и значениях t , достаточно близких к 1. Следовательно, (4.14) оценивается сверху следующим образом:

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \int^r \int^x \frac{1-\rho(t)}{(1-t)^2} d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) dx, \quad r \rightarrow 1-0,$$

откуда при некотором “огрублении” сразу получаем

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \int^r \left(\int^x (1-\rho(t)) d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) \right) d\frac{1}{1-x}, \quad r \rightarrow 1-0.$$

“Вынос” внутреннего интеграла с увеличением верхнего предела интегрирования в нем до r влечет за собой оценку

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \frac{1}{1-r} \int^r (1-\rho(t)) d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)), \quad r \rightarrow 1-0, \quad (4.19)$$

где для интеграла из правой части справедливо

$$\int^r (1-\rho(t)) d\nu^{\text{rad}}(\rho(t)) = \int^{\rho(r)} (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t) \leq \int_0^{\rho(r)} (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t). \quad (4.20)$$

Для последнего интеграла с учетом (4.15l) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho(r)} (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t) &= \int_0^{\rho(r)} (\rho(r)-t) d\nu^{\text{rad}}(t) + (1-\rho(r))\nu^{\text{rad}}(\rho(r)) \\ &= N_\nu(\rho(r)) + (1-\rho(r))\nu^{\text{rad}}(\rho(r)). \end{aligned} \quad (4.21)$$

При $d = (1 - \rho(r))/2$ из (4.15d) получаем

$$\nu^{\text{rad}}(\rho(r)) \leq \frac{1}{d} N_\nu(\rho(r) + d) = \frac{2}{1 - \rho(r)} N_\nu\left(\frac{1 + \rho(r)}{2}\right).$$

Применяя последнее неравенство к оценке (4.21), продолжим оценку (4.19):

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \frac{1}{1-r} \left(N_\nu(\rho(r)) + 2N_\nu\left(\frac{1 + \rho(r)}{2}\right) \right), \quad r \rightarrow 1-0.$$

Последнее в наших специальных обозначениях дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Если функция смещения ρ вогнута, то для двойного интеграла из (4.14) справедлива оценка*

$$I_\nu(r; \rho) \lesssim \frac{1}{1-r} N_\nu\left(\frac{1 + \rho(r)}{2}\right), \quad r \rightarrow 1-0. \quad (4.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Пусть $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$. Тогда для всякой субгармонической в $\mathbb{D}$ функции u с мерой Рисса ν при любом выборе выпуклой или вогнутой функции смещения d найдется голоморфная функция $q \not\equiv 0$ в $\mathbb{D}$ такая, что справедливо соотношение*

$$u(z) + \log |q(z)| \lesssim \frac{1}{d(r) - r} N_\nu(d(r)), \quad r \rightarrow 1-0. \quad (4.23)$$

Для вывода этого предложения из предложения 4.3 нам потребуются три леммы о построении для различных типов функций смещения для $\mathbb{D}$ специальных минорант, также являющихся функциями смещения.

ЛЕММА 4.1. *Если d – выпуклая функция смещения, то*

$$\rho(r) := \frac{1}{2}(r + d(r))$$

– выпуклая функция смещения, которая при

$$0 < \sigma := \frac{1}{2}(d(r) - r) < \frac{1}{2}(1 - r) \quad (4.24)$$

удовлетворяет условиям

$$\rho(r + \sigma) \leq d(r), \quad \frac{1}{\rho(r + \sigma) - (r + \sigma)} \leq \frac{4}{d(r) - r}. \quad (4.25)$$

Рис. 2. К лемме 4.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (см. рис. 2). По построению ρ – выпуклая функция смещения, а число $\sigma > 0$ из (4.24) удовлетворяет указанным в (4.24) ограничениям. Из определения выпуклой функции имеем

$$d(r + \sigma) \leq \left(1 - \frac{\sigma}{1 - r}\right) d(r) + \frac{\sigma}{1 - r}.$$

Отсюда для функции ρ получаем

$$\rho(r + \sigma) = \frac{1}{2}(r + \sigma) + \frac{1}{2} d(r + \sigma) \leq \frac{1}{2}(r + \sigma) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma}{1 - r}\right) d(r) + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{1 - r}. \quad (4.26)$$

Далее для удобства при фиксированном r положим $d := d(r) > r$. Предположим, что первое неравенство в (4.25) нарушено. Тогда ввиду (4.26) тем более выполнено неравенство

$$(r + \sigma) + \left(1 - \frac{\sigma}{1 - r}\right) d + \frac{\sigma}{1 - r} > 2d,$$

откуда $\sigma - \sigma d/(1 - r) + \sigma/(1 - r) > d - r$, что после “вынесения” σ дает

$$\sigma \frac{(1 - r) + (1 - d)}{1 - r} > d - r.$$

Отсюда, учитывая неравенства $0 < 1 - d < 1 - r$, получаем $\sigma > (d - r)/2$, что противоречит выбору σ в (4.24). Другими словами, справедливость первого неравенства в (4.25) доказана. Второе неравенство в (4.25) тривиально.

Перед переходом к вогнутым функциям смещения d отметим, что соотношение (1.9) для таких функций можно уточнить:

$$0 \leq d'_-(1) < 1. \quad (4.27)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $d: [a, 1) \rightarrow [0, 1)$ – вогнутая функция смещения для $\mathbb{D}$ и ее левая производная $d'_-(1)$ в дополнение к (4.27) удовлетворяет условию

$$d'_-(1) \geq \frac{1}{4}. \quad (4.28)$$

Тогда найдется такая выпуклая (линейная) функция смещения ϱ , что

$$\varrho(r) \leq d(r) \quad \forall r \in [a, 1) \quad (4.29)$$

и при этом справедлива оценка

$$\frac{1}{\varrho(r) - r} \leq \frac{c}{d(r) - r} \quad \forall r \in [a, 1), \quad c = \frac{3}{4} \frac{1 - a}{d(a) - a}. \quad (4.30)$$

Рис. 3. К лемме 4.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (см. рис. 3). В качестве функции смещения ϱ достаточно выбрать линейную функцию, график которой – отрезок, соединяющий начальную точку графика функции d , т.е. точку с координатами $(a, d(a))$, с точкой $(1, 1)$. Из вогнутости d сразу следует неравенство (4.29). Прямые вычисления дают

$$\varrho(r) - r \equiv \frac{d(a) - a}{1 - a}(1 - r). \quad (4.31)$$

Условие (4.28) вместе с вогнутостью и возрастанием d показывают, что график функции d лежит не выше прямой с угловым коэффициентом $1/4$, проходящей через точку с координатами $(1, 1)$. Это вместе с (4.31) дает требуемое неравенство (4.30).

ЛЕММА 4.3. Пусть d – вогнутая функция смещения для $\mathbb{D}$ и ее левая производная $d'_-(1)$ в точке 1 удовлетворяет условию

$$d'_-(1) < \frac{1}{4}. \quad (4.32)$$

Тогда

$$\rho(r) := 2d\left(\frac{4r - 1}{3}\right) - 1 \quad (4.33)$$

– вогнутая функция смещения, которая при

$$\sigma := \frac{1 - r}{4} \quad (4.34)$$

удовлетворяет условиям

$$\frac{1 + \rho(r + \sigma)}{2} \leq d(r), \quad \frac{1}{1 - (r + \sigma)} \leq \frac{4/3}{d(r) - r}. \quad (4.35)$$

Рис. 4. К лемме 4.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (см. рис. 4). Вогнутость и строгое возрастание функции ρ из (4.33), а также верхнее ограничение $\rho < 1$ очевидны по построению. Для того чтобы убедиться, что ρ – функция смещения (см. определение 1, условие (1.8)), важно показать, что при значениях r , достаточно близких к 1, справедливо нижнее ограничение $\rho(r) > r$. Условие (4.32) на левую полукасательную в точке $(1, 1)$ к графику функции d в сочетании с ее возрастанием означает, что для некоторого $a < 1$ выполнено ограничение снизу $d(x) > x/4 + 3/4$ для всех $x \in [a, 1]$. Применяв эту оценку к (4.33), получим

$$\rho(r) = 2d\left(\frac{4r-1}{3}\right) - 1 > 2\left(\frac{1}{4} \frac{4r-1}{3} + \frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{2r+1}{3} > r \quad (4.36)$$

при выполнении условия $(4r-1)/3 \in [a, 1]$, т.е. при всех значениях $r \geq (3a+1)/4 =: a'$ (ввиду $a < 1$ также справедливо $a' < 1$). Вместе с (4.36) это доказывает выполнение условия $\rho(r) > r$ на непустом интервале $[a', 1]$, и, следовательно, ρ – вогнутая функция смещения.

В справедливости (4.35) при выборе σ как в (4.34) убеждаемся непосредственной подстановкой и вычислениями.

Теперь мы готовы дать

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.7. Доказательство будет разбито на три случая в соответствии с доказанными леммами 4.1–4.3. При этом всегда считаем, что ν – ненулевая мера.

1) *Случай выпуклой функции смещения d .* Выберем выпуклую функцию смещения ρ как в лемме 4.1. По предложению 4.3 найдется функция $q \in H(\mathbb{D})$, $q \not\equiv 0$, такая, что

$$u(z) + \log |q(z)| \leq C I_\nu(r + \sigma; \rho) + \log \frac{1}{\sigma}, \quad |z| = r, \quad (4.37)$$

при любом $\sigma \in (0, 1-r)$, где постоянная C не зависит от r и σ . По предложению 4.5 справедлива оценка

$$I_\nu(r + \sigma; \rho) \leq C_1 \frac{1}{\rho(r + \sigma) - (r + \sigma)} N_\nu(\rho(r + \sigma)) + C_1 \quad (4.38)$$

при всех r , достаточно близких слева к 1, где постоянная C_1 не зависит от r и $\sigma \in (0, 1 - r)$. Если и выбор числа σ при каждом r осуществляется как в лемме 4.1, т.е. выполняется (4.24), то ввиду (4.25) из (4.38) и (4.37) следует

$$u(z) + \log |q(z)| \leq CC_1 \frac{4}{d(r) - r} N_\nu(d(r)) + CC_1 + \log \frac{2}{d(r) - r}. \quad (4.39)$$

Рост последнего “логарифмического” слагаемого вблизи 1, очевидно, “гасится” ростом первого слагаемого в правой части (4.39), если увеличить постоянный множитель перед первым слагаемым. Таким образом, получаем (4.23) и в рассматриваемом случае предложение 4.7 доказано.

2) *Случай вогнутой функции смещения d , удовлетворяющей (4.28).* Этот промежуточный случай после выбора по лемме 4.2 выпуклой (даже линейной) функции смещения $\varrho \leq d$ ввиду оценки (4.30) уже содержится в доказанном варианте предложения 4.7 с выпуклой функцией смещения.

3) *Случай вогнутой функции смещения d , удовлетворяющей (4.32).* Выберем вогнутую функцию смещения ρ как в лемме 4.3, т.е. по правилу (4.33). По предложению 4.3 найдется функция $q \in H(\mathbb{D})$, $q \neq 0$, такая, что выполнено (4.37). При этом по предложению 4.6 справедлива оценка

$$I_\nu(r + \sigma; \rho) \leq C_1 \frac{1}{1 - (r + \sigma)} N_\nu\left(\frac{1 + \rho(r + \sigma)}{2}\right) + C_1 \quad (4.40)$$

с некоторой постоянной C_1 , не зависящей от r и σ . Если выбирать значение $\sigma := (1 - r)/4$, т.е. как в (4.34), то с учетом заключительных неравенств (4.35) леммы 4.3 согласно (4.40) из (4.37) получаем

$$u(z) + \log |q(z)| \leq CC_1 \frac{4/3}{d(r) - r} N_\nu(d(r)) + CC_1 + \log \frac{4}{1 - r}, \quad (4.41)$$

где, очевидно, рост последнего “логарифмического” слагаемого вблизи 1 “гасится” ростом первого слагаемого в правой части (4.41) при увеличении постоянного множителя перед первым слагаемым. Это дает (4.23).

§ 5. Доказательства теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Напомним, что по договоренности $0 \notin \Lambda$. Рассмотрим какую-либо голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию f_Λ с последовательностью нулей в точности Λ , т.е. $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$, $0 \notin \Lambda$, $f_\Lambda(0) \neq 0$. Пусть $u = \log |f_\Lambda|$ – субгармоническая функция с мерой Рисса n_Λ . По предложению 4.7 (с мерой n_Λ вместо ν) найдется функция $q \in H(\mathbb{D})$, $q \neq 0$, такая, что выполнено неравенство

$$\log |f_\Lambda(z)| + \log |q(z)| \lesssim \frac{1}{d(r) - r} N_{n_\Lambda}(d(r)), \quad |z| = r \rightarrow 1 - 0.$$

Тогда функция $f = f_\Lambda q$ искомая, поскольку ввиду определений и обозначений (1.1), (1.3), (4.1) имеем $N_{n_\Lambda} = N_\Lambda$ и при этом $f(\Lambda) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для $F \in M(\mathbb{D})$, $F(0) \neq \infty$, пусть $F = g_F/h_F$ – представление функции в виде частного двух голоморфных в $\mathbb{D}$ функций g_F и h_F , не имеющих общих нулей, $h_F(0) \neq 0$. Тогда характеристику

Неванлинны $T(r, F)$ можно определить (см. [21; после теоремы 4.1]) и как интеграл

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^F(re^{i\theta}) d\theta, \quad u^F(z) = \max\{\log |g_F(z)|, \log |h_F(z)|\}. \quad (5.1)$$

По построению u^F – субгармоническая функция. В силу принятого соглашения $F(0) \neq \infty$ имеем $u^F(0) \neq -\infty$. При этом по классической формуле Пуассона–Йенсена [8; 4.5], [9; теорема 3.14] ввиду (5.1) для любого $r \in (0, 1)$ имеем

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^F(re^{i\theta}) d\theta = N_\nu(r) + u^F(0), \quad (5.2)$$

где ν – мера Рисса функции $u^F \in \text{SH}(\mathbb{D})$. Не ограничивая общности, можно считать, что ν – ненулевая мера (в противном случае можно было сразу выбрать g_F и h_F тождественными постоянными). По предложению 4.7 найдется функция $q \in H(\mathbb{D})$, $q \not\equiv 0$, такая, что с учетом (5.1) и (5.2) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \max\{\log |g_F q|(z), \log |h_F q|(z)\} &= u^F(z) + \log |q(z)| \lesssim \frac{1}{d(r) - r} N_\nu(d(r)) \\ &\lesssim \frac{1}{d(r) - r} T(d(r), F), \quad |z| = r \rightarrow 1 - 0. \end{aligned}$$

Таким образом, пара функций $g := g_F q$ и $h := h_F q$ удовлетворяет условию (1.11) и представляет функцию $F = g_F/h_F = (g_F q)/(h_F q) = g/h$.

Дополним теорему 1 ее версией в виде теоремы о мультипликаторе (ср. с тематикой [11]).

СЛЕДСТВИЕ 5.1 (о мультипликаторе). Пусть $f \in H(\mathbb{D})$. Тогда для любой выпуклой или вогнутой функции смещения d существует такая голоморфная функция-мультипликатор $q \not\equiv 0$ в $\mathbb{D}$, что

$$\log B(r, |fq|) \lesssim \frac{1}{d(r) - r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(d(r)e^{i\theta})| d\theta, \quad |z| = r \rightarrow 1 - 0. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие нетривиально лишь при $f \not\equiv 0$ в $\mathbb{D}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$. Пусть $\Lambda = \text{Zero}_f$, $0 \notin \Lambda$. По теореме 1 найдется такая ненулевая функция $F \in H(\mathbb{D})$, что выполнено (1.10) с функцией F вместо f и одновременно $F(\Lambda) = 0$. Последнее означает, что отношение $q = F/f$ – ненулевая голоморфная в $\mathbb{D}$ функция. При этом по формуле Пуассона–Йенсена характеристику $N_\Lambda(d(r))$ в (1.10) можно заменить на среднее по окружности $\partial D(d(r))$ функции $\log |f|$, что и дает (5.3).

Список литературы

- [1] Л. Шварц, *Анализ*, т. I, Мир, М., 1972.
- [2] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, Гостехиздат, М., Л., 1941.
- [3] У. Хейман, *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966.
- [4] М. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publ. Co., New York, 1975.

- [5] B. N. Khabibullin, "The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results", *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **9**:2 (2002), 146–167.
- [6] Б. Н. Хабибуллин, "Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций", *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 120–134.
- [7] Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **13**:5–6 (1978), 405–422.
- [8] T. J. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Math. Soc. Stud. Texts, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [9] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [10] T. W. Gamelin, *Uniform algebras and Jensen measures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **32**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [11] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, CRM, Montreal, QC, 1996.
- [12] T. J. Ransford, "Jensen measures", *Approximation, complex analysis, and potential theory*, Proc. NATO Adv. Stud. Inst. 2000 (Montreal, QC), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **37**, eds. N. U. Arakelyan, P. M. Gauthier, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 221–237.
- [13] Б. Н. Хабибуллин, "Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 1101–1123.
- [14] B. N. Khabibullin, "Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions", *Israel Math. Conf. Proc. ("Entire Functions in Modern Analysis", Tel-Aviv, 1997)*, **15**, 2001, 207–219.
- [15] Б. Н. Хабибуллин, "Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 129–146.
- [16] V. Matsaev, I. F. Ostrovskii, M. Sodin, "Variation on the theme of Marcinkiewicz' inequality", *J. Anal. Math.*, **86** (2002), 289–317.
- [17] C. Sundberg, "Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin", *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:1 (2003), 69–90.
- [18] Б. Н. Хабибуллин, "Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций", *Суб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 905–925.
- [19] Б. Н. Хабибуллин, "Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190.
- [20] T. Y. Chern, "Counting functions for meromorphic functions in the open unit disk", *Complex analysis and its applications*, (Hong Kong, 1993), Pitman Res. Notes Math. Ser., **305**, eds. Ch.-Ch. Yang et al., Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, 50–52.
- [21] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, Физматлит, М., 1970.

Б. Н. Хабибуллин (B. N. Khabibullin)

Башкирский государственный университет, г. Уфа

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Web-site: www.bashedu.ru/khabib-bulat

Поступила в редакцию

24.05.2004 и 21.11.2005