Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Лосев, Симплектические слайсы для действий редуктивных групп, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 75–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:03:03

УДК 512.745

И. В. Лосев

Симплектические слайсы для действий редуктивных групп

Пусть G – редуктивная алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, X – симплектическое гладкое аффинное алгебраическое многообразие, $G : X$ – гамильтоново действие, x – точка из X с замкнутой орбитой. В работе описана структура многообразия X в некоторой инвариантной окрестности точки x . Окрестность берется в комплексной топологии.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Все объекты ниже определены над полем $\mathbb{C}$.

Пусть X – гладкое аффинное алгебраическое многообразие, наделенное регулярной симплектической формой ω . Каждой функции $f \in \mathbb{C}[X]$ сопоставляется гамильтоново векторное поле $v(f)$, определяемое так, что для каждого векторного поля η на X

$$\omega(v(f), \eta) = \partial_\eta f.$$

На алгебре $\mathbb{C}[X]$ вводится скобка Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}$ по формуле

$$\{f, g\} = \omega(v(f), v(g)), \quad f, g \in \mathbb{C}[X].$$

Скобка Пуассона наделяет алгебру $\mathbb{C}[X]$ структурой алгебры Ли.

Пусть G – редуктивная алгебраическая группа, действующая на многообразии X . Действие $G : X$ называется *гамильтоновым*, если оно сохраняет симплектическую форму и задано такое линейное отображение из касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G в $\mathbb{C}[X]$, $\xi \mapsto H_\xi$, что $v(H_\xi)$ есть поле скоростей ξ_* и $H_{\text{Ad}(g)\xi} = gH_\xi$ (такое отображение автоматически является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е. $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi, \eta]}$). Мы еще говорим в этой ситуации, что X – *гамильтоново G -многообразие*. Отметим, что из существования отображения $\xi \mapsto H_\xi$ с указанными свойствами следует, что связная компонента группы G сохраняет симплектическую форму.

Пусть $G : X$ – гамильтоново действие. *Отображение моментов* $\mu_G : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ определяется по правилу $\mu_G(x)(\xi) = H_\xi(x)$. В дальнейшем мы будем отождествлять $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ посредством инвариантной невырожденной симметрической билинейной формы $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}$. Это даст нам возможность рассматривать μ_G как отображение из X в $\mathfrak{g}$.

Все вышеозначенное можно определить также и для действий вещественных (соответственно комплексных) групп Ли на гладких (соответственно комплексно-аналитических) многообразиях.

В теории групп преобразований весьма важным является вопрос о локальной структуре действия группы в окрестности некоторой точки. В теории алгебраических групп преобразований рассматриваются окрестности в комплексной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00988).

или этальной топологии, а также формальные окрестности. Под комплексной топологией мы везде понимаем топологию на комплексно аналитическом пространстве, ассоциированном с алгебраическим многообразием; соответствующие окрестности мы называем аналитическими. При этом окрестность точки $x \in X$ описывается обычно как однородное расслоение над G/G_x с некоторым слоем F . Этот слой вкладывается в X в качестве локально замкнутого подмножества (в случае комплексной топологии это следует из представления окрестности в виде однородного расслоения), содержащего x и инвариантно относительно действия G_x , и называется *слайсом*. Например, имеет место следующая теорема (аналитическая версия теоремы о слайсе), принадлежащая Луне [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть редуктивная группа G действует на гладком аффинном алгебраическом многообразии X и $x \in X$ – точка с замкнутой G -орбитой. Обозначим через V нормальное пространство к орбите Gx в точке x и через π_X, π_V – морфизмы факторизации для действий $G : X, G_x : V$. Существуют аналитические окрестности O_1 точки $\pi_X(x)$ в $X//G$ и O_2 точки $\pi_V(0)$ в $V//G_x$, для которых имеет место изоморфизм комплексно аналитических G -многообразий $\pi_X^{-1}(O_1) \cong G *_{G_x} \pi_V^{-1}(O_2)$.

Сохраним обозначения, введенные в теореме. В случае, когда действие $G : X$ первоначально являлось гамильтоновым, возникает вопрос об описании структуры гамильтонова многообразия на однородном расслоении $G *_{G_x} \pi_V^{-1}(O_2)$. Ответ на этот вопрос логично называть “теоремой о симплектическом слайсе”. Подчеркнем однако, что само комплексное подмногообразие $F = \pi_V^{-1}(O_2)$, вообще говоря, не будет симплектическим подмногообразием в X (т.е. ограничение симплектической формы на него может быть вырожденным).

Теорема о симплектическом слайсе была первоначально доказана Гийемином и Стернбергом в случае действия компактной группы на гладком многообразии [2]. Пусть X – вещественное гладкое симплектическое многообразие, G – компактная группа, действующая на X гамильтоново, а x – точка из X . Положим $H = G_x$, $\eta = \mu_G(x)$, $V = (\mathfrak{g}_*x)^\perp_s / (\mathfrak{g}_*x \cap (\mathfrak{g}_*x)^\perp_s)$ (через $\perp_s$ мы обозначаем “косоортогональное дополнение”, т.е. ортогональное дополнение относительно симплектической формы). Отметим, что $\eta \in \mathfrak{g}^H$, а V является симплектическим H -модулем. Тройку (H, η, V) мы будем называть *определяющей для точки x* . Результаты Гийемина и Стернберга нам будет удобно сформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть X_1, X_2 – симплектические гладкие вещественные многообразия, на которых заданы гамильтоновы действия компактной группы G . Пусть $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ – точки с одинаковыми определяющими тройками. Тогда существуют G -инвариантные окрестности U_1, U_2 точек x_1, x_2 в соответствующих многообразиях и симплектоморфизм $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, переводящий x_1 в x_2 и являющийся изоморфизмом гамильтоновых многообразий (это оправдывает термин “определяющая тройка”).

2) Пусть G – компактная группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G , η – H -неподвижный элемент из $\mathfrak{g}$, а V – симплектический H -модуль. Существуют такое симплектическое многообразие X с гамильтоновым действием группы G и точка $x \in X$, что определяющая тройка точки x есть (H, η, V) .

Для доказательства существования многообразия X в п. 2) осуществляется явное построение. Отметим, что для этого используются две различные конструкции: одна для случая $\eta = 0$ и другая для перехода к общему случаю.

В случае редуктивной группы и аффинного алгебраического многообразия имеется теорема о симплектическом слайсе, принадлежащая Кнопу (см. [3]).

Ее формулировка (и доказательство) являются калькой с теоремы 2. Отличия следующие:

- 1) как и везде в теории действий редуктивных групп, рассматриваются точки с замкнутыми орбитами;
- 2) в доказательстве теоремы единственности (п. 1) теоремы 2) берутся формальные окрестности U_1, U_2 ;
- 3) теорема существования (п. 2) теоремы 2) доказана лишь в случае, когда η – полупростой элемент.

Наиболее существенным недостатком теоремы Кнопа является ограничение на элемент η .

Перейдем к формулировке наших результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество в аффинном алгебраическом G -многообразии X называется *насыщенным*, если оно является прообразом при морфизме факторизации некоторого подмножества в $X//G$.

В настоящей работе мы опишем строение некоторой открытой аналитической насыщенной окрестности замкнутой орбиты. Напомним, что под аналитической окрестностью понимается окрестность в комплексной топологии.

Пусть G – редуктивная группа, X – аффинное алгебраическое симплектическое многообразие с гамильтоновым действием группы G . Пусть $x \in X$ – точка с замкнутой G -орбитой. Определяющая тройка точки x вводится так же, как и выше. Отметим, что стабилизатор точки x обязательно редуктивен (см. [4; п. 4.7]).

Пусть H – редуктивная подгруппа в G , $\eta \in \mathfrak{g}^H$, V – симплектический H -модуль. В § 2 мы построим “простейшее” многообразие с определяющей тройкой (H, η, V) . Как G -многообразие это будет однородное расслоение над орбитой G/H . Слоем будет открытое (в топологии Зариского) H -инвариантное подмножество в некотором H -модуле, содержащее точку 0. Указанные многообразия мы будем называть *модельными* и обозначать через $M_G(H, \eta, V)$. Отметим, что в отличие от доказательства теоремы Гийемина и Стернберга построение многообразия $M_G(H, \eta, V)$ производится единообразно для всех элементов η .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X_1, X_2 – аффинные гладкие гамильтоновы G -многообразия, x_1, x_2 – точки из X_1, X_2 соответственно с замкнутыми G -орбитами. Многообразия X_1, X_2 назовем *аналитически эквивалентными в окрестностях точек x_1, x_2* , если существуют насыщенные аналитические окрестности U_1, U_2 точек x_1, x_2 и голоморфный изоморфизм гамильтоновых G -многообразий $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$, переводящий x_1 в x_2 .

В § 3 будет доказана следующая теорема о симплектическом слайсе.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – гладкое аффинное гамильтоново G -многообразие, точка $x \in X$ такова, что орбита Gx замкнута, и (H, η, V) – определяющая тройка точки x . Тогда многообразие X в окрестности точки x аналитически эквивалентно модельному многообразию $M_G(H, \eta, V)$ в окрестности точки $[e, 0]$.

Автор благодарит Э. Б. Винберга за постановку задачи и внимание к работе и рецензента за ценные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Указатель обозначений. Алгебраические группы обозначаются строчными латинскими буквами, их касательные алгебры – соответствующими прописными готическими буквами;

- μ_G – отображение моментов из гамильтонова G -многообразия X в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G ;

- $\perp_s$ – ортогональное дополнение относительно кососимметрической формы;
- $[g, z]$ – образ элемента $(g, z) \in G \times Z$ в однородном расслоении $G *_H Z$ при канонической проекции (здесь H – редуктивная подгруппа в редуктивной группе G , Z – аффинное алгебраическое H -многообразие);
- ξ_* – поле векторов скоростей для элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ при действии $G : X$;
- g_* – автоморфизм многообразия TX , индуцированный образом элемента g из группы G при действии $G : X$;
- $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$ – централизатор элемента x в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

§ 2. Модельные гамильтоновы многообразия

В этом параграфе мы строим модельные гамильтоновы многообразия. Основной результат – предложение 1.

2.1. Общая конструкция. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа, H – ее редуктивная подгруппа, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ – соответствующие алгебры Ли. Выберем в $\mathfrak{g}$ невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму $(\cdot, \cdot)$, которая невырождена также и на $\mathfrak{h}$, и отождествим с ее помощью пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ с их сопряженными.

Пусть η – элемент алгебры $\mathfrak{g}$, для которого $\text{Ad}(H)\eta = \eta$, и V – пространство симплектического представления группы H с формой ω_V и отображением моментов $\mu_H : V \rightarrow \mathfrak{h}$. Напомним, что отображение μ_H задается равенством

$$(\mu_H(v), \xi) = \frac{1}{2} \omega_V(\xi v, v), \quad \xi \in \mathfrak{h}.$$

Его дифференциал вычисляется по формуле $(d_v \mu_H(v_1), \xi) = \omega_V(\xi v, v_1)$.

Очевидно, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta)$. Обозначим через U аннулятор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta)^*$. В этом пункте мы наделим открытое инвариантное подмногообразие однородного расслоения $X = G *_H (U \oplus V)$ структурой гамильтонова многообразия, для которого тройка (H, η, V) будет определяющей для точки $x = [e, 0]$.

Пусть $\eta = \eta_s + \eta_n$ – разложение Жордана, где η_s – полупростой, а η_n – нильпотентный элементы. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta_s)$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{l}^H$. Если $\eta_n \neq 0$, то выберем в $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{sl}_2$ -тройку (η_n, h, f) . Если же $\eta_n = 0$, то положим $h = f = 0$. Пространство $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f)$ H -инвариантно и дополняет в $\mathfrak{l}$ подпространство $[\eta_n, \mathfrak{l}]$, являющееся ортогональным дополнением к $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta)$ в $\mathfrak{l}$. Таким образом, мы можем отождествить $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f)$ с $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta)^*$, причем это отождествление H -эквивариантно. Теперь U отождествляется с $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f) \cap \mathfrak{h}^\perp$. Ниже (замечание 1) мы покажем, что существует изоморфизм между модельными многообразиями, построенными по различным f .

Построим линейное представление группы $\mathbb{C}^*$ в $U \oplus V$ следующим образом:

$$\begin{aligned} t.v &= tv, \\ t.u &= t^2 \exp(-\ln(t) \text{ad}(h))u = t^2 t^{-\text{ad}(h)}u. \end{aligned}$$

Здесь через $t^{-\text{ad}(h)}$ обозначено линейное преобразование пространства $\mathfrak{g}$, действующее на собственном пространстве оператора $\text{ad}(h)$, соответствующего собственному значению n , умножением на t^{-n} . Заметим, что определение корректно, поскольку подпространство $U \subset \mathfrak{g}$ инвариантно относительно $\text{ad}(h)$, а все собственные значения $\text{ad}(h)$ на $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(f)$ являются целыми числами. Так как эти числа неположительны, для любого вектора $w \in U \oplus V$ предел $\lim_{t \rightarrow 0} t.w$ существует и равен 0. Далее, заметим, что действие $\mathbb{C}^* : U \oplus V$ коммутирует с действием H , поэтому оно продолжается до действия $\mathbb{C}^* : G *_H (U \oplus V)$,

перестановочного с действием группы G . В дальнейшем под действием группы $\mathbb{C}^*$ на $U \oplus V$ или на $G *_H (U \oplus V)$ всегда будет подразумеваться именно это действие.

Определим отображение $\mu_G: X \rightarrow \mathfrak{g}$ следующим образом:

$$\mu_G([g, (u, v)]) = \text{Ad}(g)(\eta + u + \mu_H(v)).$$

Отображение μ_G корректно определено (в силу H -эквивариантности отображения μ_H) и является G -эквивариантным морфизмом алгебраических многообразий. Заметим теперь, что в случае нильпотентного элемента η выполняется равенство

$$\mu_G(t.x) = t^2 t^{-\text{ad}(h)} \mu_G(x).$$

Теперь мы определим кососимметрическую форму на многообразии $X = G *_H (U \oplus V)$. Пусть $u \in U$, $v \in V$, $x = [e, (u, v)]$. Касательное пространство $T_x X$ есть фактор $(U \oplus V \oplus \mathfrak{g})/\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ вложено по формуле $\xi \mapsto (\xi u, \xi v, \xi)$, $\xi \in \mathfrak{h}$. Поэтому можем отождествить векторное пространство $T_x X$ с пространством $U \oplus V \oplus \mathfrak{h}^\perp$. При этом отождествлении для любого $g \in H$ эндоморфизм $g_*: T_x X \rightarrow T_{hx} X$ есть образ элемента g при действии на $U \oplus V \oplus \mathfrak{h}^\perp$.

Зададим на $T_x X$ кососимметрическую 2-форму ω_x по формуле

$$\begin{aligned} \omega_x(u_1 + v_1 + \xi_1, u_2 + v_2 + \xi_2) \\ = \omega_V(v_1, v_2) + (\xi_1, u_2) - (\xi_2, u_1) + (\mu_G(x), [\xi_1, \xi_2]), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_1, u_2 \in U, \quad v_1, v_2 \in V, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp.$$

Форма ω на подмногообразии $U \oplus V$, которое рассматривается как слой однородного расслоения, H -инвариантна. Поэтому можем рассмотреть G -инвариантную форму ω на всем X .

Основным результатом этого параграфа является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Форма ω замкнута на X и невырождена в точке $[e, (0, 0)]$.

2) В случае, когда η – нильпотентный элемент, форма ω невырождена на всем многообразии X .

3) Обозначим через X_r подмножество точек из X , в которых форма ω невырождена. Тогда X_r – аффинное симплектическое G -многообразие, причем действие $G: X_r$ гамильтоново с отображением моментов μ_G .

4) Определяющая тройка точки $[e, (0, 0)]$ на многообразии X_r совпадает с (H, η, V) .

Доказательство предложения приводится ниже в леммах 2–4. Лемма 1 имеет вспомогательный характер.

ЛЕММА 1. В точке $x = [g, (u, v)]$ имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} \omega_x(\xi_{1*}x + g_*(u_1 + v_1), \xi_{2*}x + g_*(u_2 + v_2)) \\ = \omega_V(v_1, v_2) + (\text{Ad}(g)^{-1}\xi_1, u_2 + d_v\mu_H(v_2)) \\ - (\text{Ad}(g)^{-1}\xi_2, u_1 + d_v\mu_H(v_1)) + (\mu_G(x), [\xi_1, \xi_2]), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\xi_i \in \mathfrak{g}, \quad v_i \in V, \quad u_i \in U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу G -инвариантности формы ω достаточно доказать формулу (2) для $g = e$. Если $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$, то (2) превращается в (1), так как $d_v\mu_H(v_i) \in \mathfrak{h}$ для $i = 1, 2$. Поэтому остается проверить справедливость

равенства (2), когда $\xi_1 \in \mathfrak{h}$, $u_1 = v_1 = 0$. В этом случае при отождествлении $T_x X \cong U \oplus V \oplus \mathfrak{h}^\perp$ вектор $\xi_{1*}x$ записывается как $[\xi_1, u] + \xi_1 v$. Если $\xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$, то

$$\begin{aligned} \omega_x(\xi_{1*}x, \xi_{2*}x + u_2 + v_2) &= \omega_x([\xi_1, u] + \xi_1 v, u_2 + v_2 + \xi_2) \\ &\stackrel{(1)}{=} \omega_V(\xi_1 v, v_2) - (\xi_2, [\xi_1, u]) = (\xi_1, d_v \mu_H(v_2)) + (u, [\xi_1, \xi_2]) \\ &= (\xi_1, u_2 + d_v \mu_H(v_2)) + (\eta + u + \mu_H(v), [\xi_1, \xi_2]). \end{aligned}$$

Последнее равенство верно потому, что $(\xi_1, u_2) = 0$ (так как $\xi_1 \in \mathfrak{h}$), $(\eta, [\xi_1, \xi_2]) = 0$ (так как $[\xi_1, \eta] = 0$) и $(\mu_H(v), [\xi_1, \xi_2]) = 0$ (так как $[\xi_1, \xi_2] \in \mathfrak{h}^\perp$). Таким образом, остается проверить справедливость (2), когда $\xi_2 \in \mathfrak{h}$. В этом случае

$$\omega(\xi_{1*}x, \xi_{2*}x) = \omega_V(\xi_1 v, \xi_2 v) = (\mu_H(v), [\xi_1, \xi_2]),$$

что дает нам (2), поскольку $(\eta + u, [\xi_1, \xi_2]) = 0$. Действительно, $[\xi_1, \xi_2] \in \mathfrak{h}$, $u \in \mathfrak{h}^\perp$ и $(\eta, [\xi_1, \xi_2]) = 0$ (см. выше).

ЛЕММА 2. *Подмногообразие $X_r \subset X$, на котором форма ω невырождена, открыто, инвариантно и содержит точку $[e, (0, 0)]$. В случае, когда η является нильпотентным элементом, $X_r = X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для $x = [e, (u, v)]$ форма ω_x невырождена на $U \oplus V \oplus \mathfrak{h}^\perp$ для x из некоторого открытого подмножества, содержащего $[e, (0, 0)]$. Пусть $(u_1, v_1, \xi_1) \in \ker \omega_x$. Подставляя $u_2, \xi_2 = 0$ в (1), убеждаемся, что $v_1 = 0$. Полагая теперь $\xi_2 = v_2 = 0$, убеждаемся, что

$$\xi_1 \in \mathfrak{h}^\perp \cap (\mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f) \cap \mathfrak{h}^\perp)^\perp = (\mathfrak{h} + (\mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f) \cap \mathfrak{h}))^\perp = \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f)^\perp = [\mathfrak{l}, f] \oplus \mathfrak{l}^\perp. \quad (3)$$

Подставляя $v_2 = u_2 = 0$, видим, что для всех $\xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$ имеет место равенство

$$(\xi_2, u_1) = (\xi_2, [\mu_G(x), \xi_1]),$$

откуда

$$u_1 - [\mu_G(x), \xi_1] \in \mathfrak{h}. \quad (4)$$

Положим теперь $u = v = 0$. В этом случае $\mu_G(x) = \eta$. Из равенства (4) следует, что $[\eta, \xi_1] \in \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f)$. Заметим, что $\mathfrak{l}^\perp$ является $\text{ad}(\eta)$ -инвариантным подпространством в $\mathfrak{g}$ и $\text{ad}(\eta)|_{\mathfrak{l}^\perp}$ – невырожденный оператор, поскольку его полупростая часть $\text{ad}(\eta_s)|_{\mathfrak{l}^\perp}$ невырождена. Таким образом, из $[\eta, \xi_1] \in \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f)$ следует, что проекция ξ_1 на $\mathfrak{l}^\perp$ тривиальна, иными словами, что $\xi_1 \in \mathfrak{l}$. Из последнего включения вытекает, что $[\eta_n, \xi_1] \in \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f)$. Так как $(\eta_n, h, f) - \mathfrak{sl}_2$ -тройка, то $[\eta_n, \mathfrak{l}] \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(f) = \{0\}$, откуда $\xi_1 \in \mathfrak{z}_\mathfrak{l}(\eta_n)$. Теперь из (3) получаем, что $\xi_1 = 0$. Наконец, $u_1 = 0$ в силу (4).

Из доказанного следует, что форма ω_x невырождена для пары (u, v) , принадлежащей некоторой H -инвариантной окрестности точки 0 (в смысле топологии Зариского) в $U \oplus V$. Этим доказано первое утверждение леммы.

Предположим, что элемент η является нильпотентным. В этом случае $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$. Пусть для некоторой пары $(u, v) \in U \oplus V$ мы нашли элементы $\xi_1 \in [\mathfrak{g}, f]$, $u_1 \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{h}^\perp$, для которых выполняется (4) и которые не равны нулю. Покажем, что для любого $t \in \mathbb{C}^*$ для пары $t \cdot (u, v)$ выполняется то же самое. Действительно, пусть $u_1 - [\mu_G(x), \xi_1] = \zeta \in \mathfrak{h}$. Тогда, поскольку $h \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, элемент ζ неподвижен относительно $t^{\text{ad}(h)}$ и, таким образом,

$$\zeta = t^{-\text{ad}(h)} u_1 - [\mu_G(t \cdot x), t^{-2} t^{-\text{ad}(h)} \xi_1].$$

Нетрудно видеть, что это дает требуемую пару $t^{-2} t^{-\text{ad}(h)} \xi_1$, $t^{-\text{ad}(h)} u_1$ для точки $t \cdot x$. Получили противоречие.

ЛЕММА 3. *Форма ω на X замкнута.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует малая окрестность нуля W в $\mathfrak{h}^\perp$ такая, что отображение $\xi \mapsto \exp(\xi)H$ является диффеоморфизмом W на открытую окрестность W' точки eH в G/H . Имеем диффеоморфизм $(\xi, u, v) \mapsto [\exp(\xi), (u, v)]$ из многообразия $W \times U \times V$ на прообраз окрестности W' при расщеплении $X \rightarrow G/H$. Таким образом, для $x = [e, (u, v)]$ касательное пространство $T_x X$ порождается значениями в точке x векторных полей следующих двух типов:

- а) структурных векторных полей $\xi_*, \xi \in \mathfrak{h}^\perp$;
- б) образов постоянных векторных полей из $U \oplus V$ при описанном выше диффеоморфизме.

Нам надо доказать, что для векторных полей X, Y, Z верно равенство

$$\begin{aligned} L_X(\omega(Y, Z))_x + L_Y(\omega(Z, X))_x + L_Z(\omega(X, Y))_x \\ = \omega_x([X, Y], Z) + \omega_x([Y, Z], X) + \omega_x([Z, X], Y), \end{aligned} \quad (5)$$

где через L_X обозначена производная Ли по векторному полю X (мы придерживаемся соглашений по поводу знаков, введенных в [5; гл. 2, § 1], в частности, для функций имеет место равенство $L_X f = -\partial_X f$).

Отметим, что если Y – поле типа б), а X – поле одного из типов а), б), то

$$[X, Y]_x = 0. \quad (6)$$

Действительно, два поля типа б) коммутируют вообще в любой точке. В случае, когда $X = \xi_*$, имеет место равенство $\exp(t\xi) * Y_{[e, (u, v)]} = Y_{[\exp(t\xi), (u, v)]}$ для достаточно близких к нулю $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует равенство (6) для полей разных типов.

Кроме того, если X – поле типа а), то $L_X \omega = 0$ в силу инвариантности формы ω , поэтому

$$L_X \omega(Y, Z) = \omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]). \quad (7)$$

Рассмотрим отдельно четыре случая.

Случай 1: X, Y, Z типа а). Пусть $X = \xi_*, Y = \eta_*, Z = \zeta_*, \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{h}^\perp$. То, что правая часть уравнения (5) равна 0, следует из (2) и тождества Якоби. Левая часть равна 0 в силу (7).

Случай 2: X, Y типа а), Z типа б). Пусть $X = \xi_*, Y = \eta_*, Z = u_1 + v_1$, где $u_1 \in U, v_1 \in V$. Согласно (6) и (7) доказываемое равенство (5) переписывается в виде

$$2\omega_x([\xi, \eta]_*, u_1 + v_1) + L_{u_1 + v_1} \omega(\xi_*, \eta_*) = \omega([\xi, \eta]_*, u_1 + v_1).$$

Теперь требуемое легко следует из (2).

Случай 3: X типа а), Y, Z типа б). Пусть $X = \xi_*, Y = u_1 + v_1, Z = u_2 + v_2$. Из (6), (7) следует, что достаточно проверить равенство

$$L_{u_1 + v_1} \omega_x(u_2 + v_2, \xi_*) = L_{u_2 + v_2} \omega_x(u_1 + v_1, \xi_*).$$

Как нетрудно убедиться, обе части равны 0.

Случай 4: X, Y, Z типа б). В этом случае все следует из того, что ограничение формы ω на $U \oplus V$, очевидно, замкнуто.

ЛЕММА 4. *Подмножество X_r является аффинным открытым G -инвариантным подмногообразием в X . Действие $G : X$ является гамильтоновым с отображением моментов μ_G . Определяющая тройка точки $[e, (0, 0)]$ совпадает с (H, η, V) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. G -инвариантность подмножества $X_r \subset X$ непосредственно следует из его определения. Покажем, что X_r является аффинным многообразием. Действительно, поскольку $X_r \cong G *_H (X_r \cap (U \oplus V))$, то достаточно доказать, что пересечение $X_r \cap (U \oplus V)$ является аффинным. Но это пересечение – открытое (в топологии Зариского) подмножество в аффинном пространстве. Из факториальности последнего следует, что $X_r \cap (U \oplus V)$ – главное открытое подмножество и как следствие аффинно.

Покажем теперь, что $\mu_G: X_r \rightarrow \mathfrak{g}$ является отображением моментов. Для этого мы по определению отображения моментов должны проверить его G -эквивариантность и справедливость равенства

$$\omega(\xi_*x, \zeta) = \partial_v(\mu_G(x), \xi), \quad \xi \in \mathfrak{g}, \quad x \in X_r, \quad \zeta \in T_x X. \quad (8)$$

Отображение μ_G эквивариантно по построению. Поэтому равенство (8) достаточно проверить в точке x вида $[e, (u, v)]$. В этом случае оно является непосредственным следствием определения отображения μ_G и леммы 1, примененной к $\xi_1 = \xi$, $u_1, v_1 = 0$, $\zeta = \xi_{2*}x + u_2 + v_2$ с $\xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$ (равенство $\partial_{\xi_{2*}x}(\mu_G(x), \xi_1) = (\mu_G(x), [\xi_1, \xi_2])$ вытекает из эквивариантности отображения μ_G).

Остается проверить, что тройка (H, η, V) является определяющей для точки $x = [e, (0, 0)] \in X_r$. То, что $G_x = H$, $\mu_G(x) = \eta$, очевидно по построению. Перепишем формулу (1) для точки x с $u_1 = v_1 = 0$:

$$\omega_x(\xi_1, \xi_2 + u_2 + v_2) = (\xi_1, u_2) + (\eta, [\xi_1, \xi_2]).$$

Видим, что $\xi_2 + u_2 + v_2 \in (\mathfrak{g}_*x)^{\perp_s} = (\mathfrak{h}_*x)^{\perp_s}$ влечет $u_2 = 0$. Поэтому $(\mathfrak{g}_*x)^{\perp_s} \subset V \oplus \mathfrak{g}_*x$, откуда следует, что симплектические модули $(\mathfrak{g}_*x)^{\perp_s} / ((\mathfrak{g}_*x)^{\perp_s} \cap \mathfrak{g}_*x)$ и V изоморфны.

Таким образом, предложение 1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Гамильтоново G -многообразие X_r из леммы 4 будем называть *модельным многообразием, определенным тройкой* (H, η, V) , и обозначать через $M_G(H, \eta, V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть f_1, f_2 – два таких элемента из $\mathfrak{s}$, что $(\eta_n, [\eta_n, f_i], f_i)$ есть $\mathfrak{sl}_2$ -тройка. Пусть X_1, X_2 – модельные многообразия, построенные по f_1, f_2 соответственно. Существует элемент $z \in Z_{\text{Int}(\mathfrak{s})}(\eta_n)$, для которого $\text{Ad}(z)f_1 = f_2$ (см., например, [6; гл. 8, п. 11.2, следствие]). Непосредственно проверяется, что отображение $[g, (u, v)] \mapsto [g, (\text{Ad}(z)u, v)]$ является изоморфизмом гамильтоновых G -многообразий X_1 и X_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо векторного пространства V мы можем рассмотреть произвольное гамильтоново H -многообразие Z с H -инвариантной точкой z и построить гамильтоново G -многообразие $M_G(H, \eta, Z)$ (вместо $U \oplus V$ в качестве слоя расслоения надо взять $U \times Z$). Замкнутость формы на X и ее невырожденность на подходящем открытом подмножестве доказываются аналогично.

2.2. Случай кокасательных расслоений. Мы придерживаемся обозначений п. 2.1. Положим $\eta = 0$, а $V = V_1 \oplus V_1^*$ (прямая сумма H -модулей с симплектической формой $\omega_V(v_1 + v_1^*, v_2 + v_2^*) = v_1^*(v_2) - v_2^*(v_1)$ для $v_1, v_2 \in V_1$, $v_1^*, v_2^* \in V_1^*$). В этом пункте мы построим изоморфизм гамильтоновых многообразий $M_G(H, 0, V_1 \oplus V_1^*)$ и T^*Z , где $Z = G *_H V_1$.

Пусть $z = [e, w] \in G *_H V_1$. Отождествим $T_z Z$ с $\mathfrak{h}^\perp \oplus V_1$. Тем самым имеем вложение

$$\psi = V_1 \oplus \mathfrak{h}^\perp \oplus V_1^* \hookrightarrow T^*Z.$$

Несложно заметить, что вложение ψ H -эquivариантно. Имеем отображение $G \times (V_1 \oplus \mathfrak{h}^\perp \oplus V_1^*)$, $(g, v) \mapsto g\psi(v)$. Это отображение пропускается через G -эquivариантный морфизм $\Psi: G *_H (V_1 \oplus \mathfrak{h}^\perp \oplus V_1^*) \rightarrow T^*Z$. Этот морфизм сюръективен и инъективен, а следовательно, является изоморфизмом. Непосредственно из конструкции изоморфизма Ψ видим, что спаривание вектора, касательного к слою расслоения $M_G(H, 0, V_1 \oplus V_1^*) \rightarrow G/H$, с любым другим вектором одинаково для обеих форм. Поэтому остается лишь доказать, что и спаривания векторов скоростей одинаковы. Для этого надо проверить совпадение отображений моментов.

Пусть W – такая окрестность нуля в $\mathfrak{h}^\perp$, как в доказательстве леммы 3. Имеем диффеоморфизм $W \times V_1$ на некоторую окрестность в Z . Пусть $q_1, \dots, q_l$ – линейные координаты в векторном пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^\perp$, $q_{l+1}, \dots, q_m$ – в V_1 . Далее, пусть $p_1, \dots, p_l$ – двойственные линейные координаты в $\mathfrak{h}^\perp \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, $p_{l+1}, \dots, p_m$ – в V_1^* . Рассмотрим тавтологическую форму $\alpha = \sum p_i dq_i$. Как известно (см., например, [5; гл. 2, § 2]), отображение моментов для действия $G: T^*Z$ принимает на векторе ξ значение $\alpha(\xi_*)$. Отсюда следует, что при изоморфизме Ψ отображения моментов совпадают.

§ 3. Аналитическая эквивалентность

3.1. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 5. Пусть H – редуктивная группа, действующая на векторном пространстве V . Каждая H -инвариантная аналитическая окрестность точки 0 содержит насыщенную H -инвариантную окрестность. Обозначим через π_H морфизм факторизации $V \rightarrow V//H$. Образ любой аналитической окрестности точки 0 из V в $V//H$ является окрестностью точки $\pi_H(0)$ в $V//H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – компактная вещественная форма группы H . Выберем на V K -инвариантную эрмитову форму $(\cdot, \cdot)$. Обозначим через $\|\cdot\|$ соответствующую норму. Достаточно показать, что множество $U = HB(0, 1)$ насыщено, где $B(0, 1)$ – единичный шар. Если U содержит замкнутую орбиту, то содержит и весь соответствующий слой морфизма факторизации. Для $v \in V$ обозначим через $d(v)$ расстояние от множества $\pi_H^{-1}(\pi_H(v))$ до 0. Критерий Кемпфа–Несс (см. [4; § 6]) гласит, что если на орбите Gv нашелся вектор u с $\|u\| = d(v)$, то эта орбита замкнута. Отсюда следует первое утверждение.

При доказательстве второго утверждения можно считать, что окрестность V_0 открыта и насыщена. Действительно, в силу H -инвариантности морфизма π_H можем, заменив окрестность V_0 ее H -разнесением, считать окрестность V_0 инвариантной. Такая окрестность содержит открытую насыщенную окрестность нуля по доказанному выше.

Предположим противное. Существует последовательность (x_k) точек из $V//H$ таких, что $\pi_H^{-1}(x_k)$ не пересекается с V_0 для всех k и что $x_k \rightarrow 0$. Рассмотрим такую точку v_k с замкнутой орбиты, лежащей в слое $\pi_H^{-1}(x_k)$, что $d(v_k) = \|v_k\|$. Последовательность $\|v_k\|$ отделена от 0. Умножая v_k на константу, можем считать, что число $\|v_k\|$ не зависит от k . Выделяя из (v_k) подпоследовательность, можем считать, что $(v_k) \rightarrow v$. В этом случае $\pi_H(v) = 0$ и $v \in V_0$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Применяя теорему Луны о слайсах, из предыдущей леммы можно вывести, что образ насыщенного аналитического открытого подмножества гладкого аффинного G -многообразия при морфизме факторизации открыт.

ЛЕММА 6. Пусть H – редуктивная алгебраическая группа, V – векторное пространство с действием группы H , ω^0, ω^1 – H -инвариантные невырожденные кососимметрические билинейные формы на V . Далее, пусть U – H -инвариантное подпространство в V такое, что $\omega^0|_U = \omega^1|_U$. Тогда найдется H -эквивариантный автоморфизм φ пространства V , тождественный на U и такой, что $\varphi^*\omega^1 = \omega^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через W ядро ограничения формы ω^0 на U и через T инвариантное дополнение к W в U . Пусть $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_l$ – разложение в прямую сумму неприводимых подмодулей. Пусть $\tilde{T}^i$ есть инвариантное дополнение к W в $U^{\perp s}$, где дополнение берется относительно формы ω^i . Наконец, выберем в $(\tilde{T}^i \oplus T)^{\perp s}$ (дополнение берется относительно формы ω^i) H -подмодули $\tilde{W}_1^i, \dots, \tilde{W}_j^i$ такие, что

- а) сумма $\tilde{W}_1^i + \dots + \tilde{W}_l^i$ прямая и дополняет $U \oplus \tilde{T}^i$ в V ;
- б) ограничение формы ω^i на $W_j \oplus \tilde{W}_k^i$ равно 0 для $j \neq k$ и невырождено для $j = k$;
- в) форма ω^i равна 0 на $\bigoplus_j \tilde{W}_j^i$.

Несложно видеть, что $\tilde{T}^0 \cong \tilde{T}^1$. Инвариантная невырожденная билинейная форма определяется на пространстве $\tilde{T}^0$ однозначно с точностью до H -эквивариантного автоморфизма. Действительно, $\tilde{T}^0$ есть прямая сумма неприводимых симплектических подмодулей, на которых форма невырождена, и пар попарно сопряженных не симплектических H -подмодулей, которые форма спаривает между собой. Требуемое следует из того, что набор простых подмодулей в разложении H -модуля $\tilde{T}^0$ не зависит от выбора формы.

Теперь можно подобрать искомый изоморфизм φ , потребовав, чтобы он переводил $\tilde{T}^0$ в $\tilde{T}^1$ и $\tilde{W}_j^0$ в $\tilde{W}_j^1$ для $j = \overline{1, l}$.

3.2. Единственность формы в точках замкнутой орбиты с данной определяющей тройкой. Пусть X – гладкое аффинное алгебраическое G -многообразие. Нашей целью здесь будет доказательство следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ω^0, ω^1 – две симплектические G -инвариантные формы на некоторой аналитической инвариантной окрестности замкнутой орбиты Gx в X , причем действия группы G относительно обеих форм являются гамильтоновыми с одинаковыми определяющими тройками для точки x . Существует G -эквивариантный голоморфный изоморфизм Φ некоторых насыщенных аналитических окрестностей точки x , тождественный в точках орбиты Gx и такой, что $\Phi^*\omega_x^1 = \omega_x^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H = G_x$. Заметим, что ограничения форм ω_x^0, ω_x^1 на $\mathfrak{g}_*x$ совпадают. Применив лемму 6, получаем, что существует H -эквивариантный автоморфизм φ пространства T_xX , тождественный на $\mathfrak{g}_*x$ и переводящий ω_x^1 в ω_x^0 .

Применив аналитический вариант теоремы Луны о слайсах (теорема 1), можем считать, что X есть однородное расслоение $G *_H U$, где U – насыщенная аналитическая окрестность точки 0 в нормальном подпространстве N к Gx в X .

Все сводится к случаю, когда автоморфизм φ тождествен на $T_xX/\mathfrak{g}_*x$ (посредством применения изоморфизма Φ_1 вида $[g, x] \mapsto [g, Bx]$, где B – подходящий H -инвариантный автоморфизм пространства N). Выберем инвариантное

дополнение к $\mathfrak{g}_*x$ в T_xX , которое мы обозначим также через N . Существует H -эквивариантное линейное отображение $A: N \rightarrow \mathfrak{g}_*x \cong \mathfrak{h}^\perp$, для которого $\varphi(n) = n + An$ при всех $n \in N$. Зададим морфизм Φ формулой

$$\Phi([g, v]) = [g \exp(Av), v], \quad g \in G, \quad v \in U.$$

Несложно видеть, что это отображение корректно определено, эквивариантно, тождественно на Gx . Обратным ему отображением является $\Phi^{-1}([g, v]) = [g \exp(-Av), v]$. Наконец, для $v \in N$ верно равенство $d_x\Phi(v) = v + Av = \varphi(v)$, что и требовалось.

3.3. Эквивариантная версия теоремы Дарбу–Вейнштейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X_0, X_1 – гладкие аффинные алгебраические многообразия с действием редуктивной алгебраической группы G и с G -инвариантными симплектическими формами ω^0, ω^1 . Пусть точки $x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$ таковы, что орбиты Gx_0, Gx_1 замкнуты. Пусть оба действия гамильтоновы и определяющие тройки для X_0 в точке x_0 и X_1 в точке x_1 совпадают. Тогда гамильтоновы многообразия X_0 и X_1 аналитически эквивалентны вблизи орбит Gx_0 и Gx_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через N нормальное подпространство к Gx_i в $T_{x_i}X_i$. Как H -модуль N не зависит от i . Действительно, пусть (H, η, V) – определяющая тройка точки x_i в X_i . Тогда $N \cong V \oplus (\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta)/\mathfrak{h})^*$.

ЛЕММА 7. Пусть W – H -инвариантная аналитическая окрестность 0 в N , ω^0, ω^1 – голоморфные симплектические формы на $G *_H W$, совпадающие в точках орбиты $G[e, 0]$. Тогда найдутся открытые H -инвариантные насыщенные аналитические окрестности нуля $W_0, W_1 \subset W$ и голоморфный G -инвариантный тождественный на орбите $[g, 0]$ изоморфизм $\Phi: G *_H W_0 \rightarrow G *_H W_1$, для которого $\Phi^*\omega^1 = \omega^0$ на соответствующих окрестностях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Функция $f_t(u) = \det(z\omega_u^1 + (1-z)\omega_u^0)$, $u \in W$, H -инвариантна, поэтому, уменьшив W , можем считать, что форма $\omega^z = z\omega^1 + (1-z)\omega^0$ невырождена на $G *_H W$ для $|z| \leq 1$. Кроме того, можем считать, что $tu \in W$, если $u \in W$, $|t| \leq 1$.

Мультипликативная группа положительных вещественных чисел $\mathbb{R}_+^*$ действует голоморфными автоморфизмами на $G *_H N$ умножением на скаляры в слоях. Через ξ обозначим соответствующее этому действию векторное поле на $G *_H N$. Автоморфизм, соответствующий числу $t \in \mathbb{R}_+^*$, обозначим через a_t . Для любой точки $x \in G *_H N$ при $t \rightarrow 0$ последовательность $a_t(x)$ сходится к проекции $a_0(x)$ точки x на G/H . Для любой замкнутой 2-формы ω имеет

место равенство $d \int_0^1 \iota_\xi a_t^* \omega dt = \omega - a_0^* \omega$. Заметим, что если форма ω голоморфна, то и форма $\iota_\xi a_t^* \omega$ голоморфна, так как $(1, 0)$ -компонента векторного поля ξ является голоморфным векторным полем (соответствующим действию группы $\mathbb{C}^*$ на $G *_H N$ послойным умножением на константы). Следовательно, форма $\alpha = \int_0^1 \iota_\xi a_t^* \omega dt$ также голоморфна. Кроме того, в точках орбиты G/H форма α равна 0 . Если $\omega_{[g, 0]} = 0$, то $d\alpha = \omega$. Мы положим $\omega = \omega^1 - \omega^0$. Заметим, что форма α в данном случае является G -инвариантной.

Рассмотрим голоморфное векторное поле η^z на $G *_H W$, голоморфно зависящее от параметра z , $|z| \leq 1$, которое задается по правилу $\iota_{\eta^z} \omega^z = \alpha$. Векторное поле η^t G -инвариантно для любого $t \in [0, 1]$, причем $\eta_{[g, 0]}^t = 0$. Рассмотрим

поток Φ_t , определяемый этим семейством векторных полей, Φ_1 есть голоморфный диффеоморфизм из одной G -инвариантной окрестности Y_0 орбиты $G[e, 0]$ в другую, тождественный на этой орбите. Очевидно, что на соответствующих окрестностях $\Phi_1^* \omega^1 = \omega^0$. Согласно лемме 5 окрестность Y_0 можно считать насыщенной. Лемма доказана.

Применив теорему 1, можем считать, что X имеет вид $G *_H W$, где W – открытая H -инвариантная окрестность нуля в N , а $x_1 = x_0 = [e, 0]$. По предположению 2 найдутся G -инвариантные открытые аналитические окрестности W_0, W_1 точки x и голоморфный G -эквивариантный изоморфизм $\Phi: W_0 \rightarrow W_1$ с $\Phi(x) = x$ и $\Phi^* \omega_x^1 = \omega_x^0$. Заменив ω^1 на $\Phi^* \omega^1$ (и модифицировав аналогичным образом одно из отображений моментов), можем считать, что ω^0, ω^1 совпадают в x , а следовательно, в силу G -инвариантности и во всех точках орбиты Gx . Применив предыдущую лемму, можем считать, что $\omega^1 = \omega^0$. Уменьшив окрестность W , можем считать ее связной и (см. лемму 5) насыщенной. Пусть μ^0, μ^1 – соответствующие отображения моментов. Согласно общим свойствам отображений моментов (см. [5]) $\mu^0 - \mu^1$ отличаются на локально постоянное отображение. Поскольку $\mu^0(gx) = \mu^1(gx)$, то $\mu^0 = \mu^1$ тождественно.

Список литературы

- [1] D. Luna, “Slices étales”, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81–105.
- [2] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [3] Ф. Кноп, “Weyl groups of Hamiltonian manifolds, I”, *Preprint*, dg-ga/9712010, 1997.
- [4] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр.*, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309.
- [5] Э. Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56:1** (2001), 3–62.
- [6] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Гл. 7, 8: Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1978.

И. В. Лосев (I. V. Losev)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ivanlosev@yandex.ru

Поступила в редакцию

02.12.2004