Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Рябых, Приближение неаналитических функций аналитическими, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 87–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:00:42

УДК 517.53/.57

В. Г. Рябых

Приближение неаналитических функций аналитическими

В работе изучается приближение неаналитических функций функциями из пространства Харди.

Библиография: 12 названий.

Рассмотрим пространство Харди H_p , $0 \leq p \leq \infty$, в единичном круге. В [1] была изучена задача о свойствах функции, на которой достигается $\inf \|\bar{\omega} - a\|_{L_\infty}$, где $\omega \in L_\infty$ задана, $a \in H_\infty^0$.

Авторов [1] интересовал вопрос, как изменения в регулярности ω скажутся на φ : $\|\bar{\omega} - \varphi\| = \inf_{a \in H_\infty^0} \|\bar{\omega} - a\|$. Их подтвердившаяся гипотеза заключалась в том, что связь между ω и φ подобна связи между ω и ее проекцией на H_∞ .

Некоторые теоремы из этой работы приведены в [2]. В [3] часть теорем из [1] перенесена на непрерывные функции с модулями непрерывности, принадлежащими некоторому достаточно широкому классу.

В настоящей работе исследуется вопрос о наследовании свойств регулярности ω функцией φ для случая, когда аппроксимация происходит в пространстве L_q , $1 < q \leq \infty$. Известно, что $L_q = \bar{H}_q \oplus H_q^0$, $1 < q < \infty$, $H_q^0 = \{g \in H_q : g(0) = 0\}$. В связи с этим без особенного уменьшения общности будем считать, что $\omega \in H_q$, а ее граничное значение обладает той или иной регулярностью.

Введем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Рассмотрим линейный функционал над H_p , $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $x \in H_p$, $\omega \in H_q$, вида

$$l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{i\theta}) d\theta. \quad (1)$$

Пусть f – экстремальный элемент этого функционала, т.е. функция из H_p , для которой $l(f) = \|l\|$, $\|f\| = 1$. Хорошо известно, что экстремальный элемент функционала (1) над пространством H_p при $p \in (1, \infty)$ существует и единствен, а для $p = 1$ существует по крайней мере для ω , непрерывных при $|z| \leq 1$ (см., например, [4], [5]).

Для дальнейшего нам понадобятся следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА А (см. [2]). Пусть в функционале (1) при $1 < p < \infty$ функция $\omega \in H_q$, а при $p = 1$ функция $\omega \in C_{(|z| \leq 1)} \cap H_\infty$. Тогда справедливо равенство

$$\sup \left(\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} x(t) \overline{\omega(t)} d\theta \right|, \|x\| = 1 \right) = \inf_{a \in H_q^0} \|\bar{\omega} - a\| = \|l\|.$$

Причем при $p \in (1, \infty)$ существуют функции $f \in H_p$, $\|f\| = 1$, и $X \in H_q^0$, для которых

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t) \bar{\omega}(t) d\theta = \|\bar{\omega} - X\| = \|l\|; \quad (2)$$

функции f и X определены единственным образом. При $p = 1$ функция f существует, но может быть не единственной. Соотношение (2) выполняется тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in T = \{t : |t| = 1\}$

$$\frac{|f(t)|^p}{f(t)} = \frac{\bar{\omega}(t)}{\|l\|} - \frac{X(t)}{\|l\|}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА В (см. [6]). Пусть $\Phi \in (H_\delta)^*$, $0 < \delta < 1$. Тогда существует единственная функция $g \in H_\infty$ такая, что

$$\Phi(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(re^{i\theta})g(e^{-i\theta})d\theta. \quad (4)$$

Если при этом $1/(n+1) < \delta < 1/n$, то $g^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$, где $\alpha = 1/\delta - n$.

Обратно, для $g \in H_\infty$, $g^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$, предел (4) существует для всех $x \in H_\delta$ и определяет функционал над H_δ .

При $\delta = 1/(n+1)$ для $g^{(n-1)}$ выполняется условие Зигмунда:

$$|g^{(n-1)}(te^{ih}) - 2g^{(n-1)}(t) + g^{(n-1)}(te^{-ih})| = O(h).$$

Соответственно, если $g^{(n-1)}$ удовлетворяет условию Зигмунда, то она образует над H_δ ограниченный функционал вида (4).

ТЕОРЕМА С. Для того чтобы 2π -периодическая функция ψ имела на T производную $n-1$ порядка, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \left(\frac{1}{2\pi} \int \psi(\varphi) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \right) \right| \leq \frac{A(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

Фактически эта теорема доказана для случая $n = 1$ в [7]. Ее распространение на более высокие порядки производной не вызывает особых затруднений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в функционале (1) $1 < p < \infty$ и $\omega \in H_\infty$. Тогда $f \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством (3), в котором для простоты записи будем считать, что $\|l\| = 1$. Для почти всех $t \in T$ имеем

$$\frac{|f(t)|^p}{f(t)} = \bar{\omega}(t) - X(t). \quad (5)$$

Представим f в виде $f = Fb$, где F – внешняя, а b – внутренняя функции. Так как $|b(t)|$ почти всюду на T равен единице, то

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)b(t)} = \bar{\omega}(t) - X(t). \quad (6)$$

Откуда вытекает, что

$$|F(t)|^p = \bar{\omega}(t)F(t)b(t) - F(t)b(t)X(t). \quad (7)$$

Умножим обе части последнего равенства на функцию a , аналитическую в замкнутом круге $|z| \leq 1$, и проинтегрируем по θ , после чего получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)|F(t)|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)F(t)b(t)\bar{\omega}(t) d\theta. \quad (8)$$

Следующая оценка очевидна:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} a(t) F(t) b(t) \bar{\omega}(t) d\theta \right| \leq \frac{\|\omega\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |aF| d\theta \leq \|\omega\|_\infty \|F\|_p \|a\|_q. \quad (9)$$

Теперь для левой части (8) выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} a |F|^p d\theta \right| \leq \|\omega\|_\infty \|F\|_p \|a\|_q. \quad (10)$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(a) |F|^p d\theta \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a |F|^p d\theta \right| \quad (11)$$

и

$$\|a\|_q \leq \|\operatorname{Re}(a)\|_q + \|\operatorname{Im}(a)\|_q \leq (1 + c_q) \|\operatorname{Re}(a)\|_q, \quad (12)$$

где $c_q = O(q/(q-1))$ (см. [8]), то (11) с помощью (10) приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(a) |F|^p d\theta \right| \leq (1 + c_q) \|\omega\|_\infty \|F\|_p \|\operatorname{Re}(a)\|_q. \quad (13)$$

Множество вещественных частей аналитических функций плотно в L_q , $1 < q < \infty$, поэтому функционал из левой части (13) можно продолжить с сохранением нормы на все пространство L_q , т.е. для любого $x \in L_q$ имеем

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x |F|^p d\theta \right| \leq (1 + c_q) \|\omega\|_\infty \|F\|_p \|x\|_q. \quad (14)$$

Теперь же на основании теоремы об аналитическом представлении линейного функционала над L_q (см. [9]) заключаем, что $|F|^p \in L_p$, т.е. $F \in L_{p^2}$. Но это означает, что правую часть (8) теперь можно оценить следующим образом ($1/p^2 + 1/q_2 = 1$):

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \bar{\omega} b F a d\theta \right| \leq \|\omega\|_\infty \|F\|_{p^2} \|a\|_{q_2}. \quad (15)$$

Аналогично оценке (15) можно получить

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x |F|^p d\theta \right| \leq \|\omega\|_\infty \|F\|_{p^2} \|x\|_{q_2}. \quad (16)$$

Это означает, что $|F|^p \in L_{p^2}$, а сама $F \in L_{p^3}$. После n -кратного повторения упомянутых операций заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x |F|^p d\theta \right| \leq \|\omega\|_\infty \|F\|_{p^n} \|x\|_{q_n}, \quad \frac{1}{p^n} + \frac{1}{q_n} = 1. \quad (17)$$

Из этого следует, что $F \in H_{p^{n+1}}$. В силу неограниченности n и условия $p > 1$ заключаем, что $F \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$, а это в свою очередь означает, что $f \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$.

ТЕОРЕМА 2. Если в функционале (1) $\omega \in H_{q^*}$, $1 < q < q^*$, то $X \in \bigcap_{\gamma < q^*} H_\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вновь воспользуемся равенством (8) и к его правой части применим неравенство Гёльдера, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{\omega} b F a| d\theta \leq \|\omega\|_{q^*} \|F\|_{p_1} \|a\|_{\beta_1}, \quad (18)$$

где $p_1 = p$, $q_1 = q < q^*$, а $1/q^* + 1/p_1 + 1/\beta_1 = 1$. Оценим левую часть (8):

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F|^p a \, d\theta \right| \leq \|\omega\|_{q^*} \|F\|_{p_1} \|a\|_{\beta_1}. \quad (19)$$

Повторив рассуждения, с помощью которых было выведено неравенство (13), получим оценку

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(a) |F|^p \, d\theta \right| \leq (1 + c_{\beta_1}) \|\omega\|_{q^*} \|F\|_{p_1} \|\operatorname{Re}(a)\|_{\beta_1}. \quad (20)$$

Из этого неравенства так же, как и при выводе (14), заключаем, что $|F|^p \in L_{\alpha_1}$, $1/\alpha_1 + 1/\beta_1 = 1$, т.е. $F \in L_{p\alpha_1}$.

Теперь положим

$$p_2 = p_1 \alpha_1 = \frac{p}{1 - 1/\beta_1} = \frac{p}{1/p_1 + 1/q^*} = \frac{p}{1/p + 1/q^*}. \quad (21)$$

Заметим, что $p_2 > p_1$, а так как $1/q_2 = 1 - 1/p_2 > 1 - 1/p_1 = 1/q_1$, то $q_2 < q_1 < q^*$. Выберем β_2 так, чтобы выполнялось условие $1/q^* + 1/p_2 + 1/\beta_2 = 1$. Вновь считая, что $1/\alpha_2 + 1/\beta_2 = 1$, аналогично (20) выведем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(a) |F|^p \, d\theta \leq (1 + c_{\beta_2}) \|\omega\|_{q^*} \|F\|_{p_2} \|\operatorname{Re}(a)\|_{\beta_2}. \quad (22)$$

Следовательно, $|F|^p \in L_{\alpha_2}$, а потому $F \in L_{p\alpha_2}$, где

$$p\alpha_2 = \frac{p}{1 - 1/\beta_2} = \frac{p}{1/p_2 + 1/q^*} > p_2. \quad (23)$$

Обозначим $p_3 = p\alpha_2$. Так как $1/p_3 < 1/p_2$, то из $1/p_3 + 1/q_3 = 1$ следует, что $q_3 < q^*$. Подставим теперь в (23) $1/p_2 = (1/p)(1/p + 1/q^*)$. В результате получим

$$p_3 = \frac{1}{(1/p)(1/p_2 + 1/q^*)} = \frac{1}{1/p^3 + 1/(p^2 q^*) + 1/(p q^*)}.$$

После n -кратного повторения аналогичных вычислений получаем

$$p_n = \frac{1}{1/p^n + 1/(q^*(1/p^{n-1} + \dots + 1/p))}. \quad (24)$$

Переходя в этом равенстве к пределу, заключаем, что F , а следовательно, и f суммируемы в любой степени α ,

$$\alpha < \frac{1}{(1/(q^* p))(1/(1 - 1/p))} = (p - 1)q^*. \quad (25)$$

Однако из (5) следует, что

$$|X| \leq |f|^{p-1} + |\omega|.$$

Откуда при $\gamma < q^*$, принимая во внимание, что $(p - 1)\gamma < (p - 1)q^*$, имеем

$$\|X\|_{\gamma} \leq \| |f|^{p-1} \|_{\gamma} + \|\omega\|_{\gamma}. \quad (26)$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в (1) $1 \leq p < \infty$ и $n \geq 1$. Если $\omega^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то $(|F(e^{i\theta})|^p)^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$. Если $\omega^{(n-1)}$ удовлетворяет условию Зигмунда, то и $(|F|^p)^{(n-1)}$ удовлетворяет этому условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n = 1$. Тогда из принадлежности ω классу Липшица вытекает, что $f \in H_p$, $0 < p < \infty$. При $p = 1$ это следует из [1; теорема 2, (а)]: $\omega \in C \Rightarrow f \in H_p$, $0 < p < \infty$. Для остальных p – из теоремы 1 настоящей работы.

Используя представление для ядра Пуассона ($z = re^{i\varphi}$, $t = e^{i\theta}$)

$$P(r, \theta - \varphi) = \left(\frac{1}{1 - \bar{z}e^{i\theta}} + \frac{ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \right),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} P(r, \theta - \varphi) = -i \frac{\bar{z}t}{(1 - \bar{z}t)^2} + i \frac{z\bar{t}}{(1 - z\bar{t})^2}. \quad (27)$$

Умножим обе части (7) на первое слагаемое из правой части (27) и проинтегрируем по θ . Повторим аналогичную процедуру с равенством, сопряженным к (7) и умноженным на второе слагаемое из правой части (27). После сложения полученных равенств будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (P(r, \theta - \varphi)) |F(t)|^p d\theta = \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(t)f(t)t}{(1 - \bar{z}t)^2} d\theta - \frac{z}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(t)f(t)t}{(1 - z\bar{t})^2} d\theta. \quad (28)$$

При вышеуказанных свойствах f и ω выполняется равенство

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(t)f(t)t}{(1 - \bar{z}t)^2} d\theta \right| = \left| \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(\rho t)f(t)e^{i\theta}}{(1 - \bar{z}t)^2} d\theta \right|. \quad (29)$$

Правую часть этого равенства можно на основании теоремы В ($\omega \in \text{Lip } \alpha$) считать значением линейного функционала над пространством H_δ на элементе $f(t)t/(1 - \bar{z}t)^2$ с $\delta = 1/(1 + \alpha)$, поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(\rho t)f(t)}{(1 - \bar{z}t)^2} d\theta \right| \leq \|l\| \left\| \frac{f(t)}{(1 - \bar{z}t)^2} \right\|_{H_{1/(1+\alpha)}}. \quad (30)$$

Применим к правой части (30) неравенство Гёльдера ($1/p_1 + 1/q_1 = 1$). Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(t)|^{1/(1+\alpha)}}{|1 - \bar{z}t|^{2/(1+\alpha)}} d\theta \right)^{1+\alpha} \\ & \leq \left(\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - \bar{z}t|^{2p_1/(1+\alpha)}} \right\}^{1/p_1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^{q_1/(1+\alpha)} d\theta \right\}^{1/q_1} \right)^{1+\alpha} \\ & \leq \frac{C}{|1 - r|^{(2-(1+\alpha)/p_1)}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^{q_1/(1+\alpha)} d\theta \right\}^{(1+\alpha)/q_1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выбирая теперь $1 < p_1 < 1 + \alpha$ и полагая $2 - (1 + \alpha)/p_1 = 1 - \beta$, $0 < \beta < 1$, правую часть (31) запишем в виде

$$\frac{C}{(1 - r)^{1-\beta}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^{q_1/(1+\alpha)} d\theta \right)^{(1+\alpha)/q_1}.$$

Так как $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, то

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\omega}(t)f(t)}{(1-\bar{z}t)^2} d\theta \right| \leq \frac{C_2}{(1-r)^{1-\beta}}. \quad (32)$$

Аналогично оцениваем и второе слагаемое из (28), после чего окончательно получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} P(r, \theta - \varphi) |F(t)|^p d\theta \right| \leq \frac{C_3}{(1-r)^{1-\beta}}. \quad (33)$$

Из последнего неравенства с помощью теоремы В заключаем, что $|F(t)|^p$ удовлетворяет условию Липшица с показателем β , т.е. эта функция непрерывна, а следовательно, ограничена, а так как $|f|$ почти всюду на единичной окружности совпадает с $|F|$, то f по крайней мере принадлежит H_∞ .

Если ω – функция из класса Зигмунда, то она одновременно и липшицева (с показателем, меньшим единицы), и для $|F|^p$ и f также выполняются упомянутые выше условия.

Переходим к доказательству основной части теоремы. Пусть $\omega^{(n-1)}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем, меньшим единицы, или условию Зигмунда. Тогда как в первом, так и во втором случаях $|F|^p$ – функция Липшица с показателем β . Это дает возможность представить $|F(t)|^p$ при $|t| = 1$ в виде $|F(t)|^p = \phi(t) + \psi(t)$, здесь $\phi, \psi \in H_\infty \cap \text{Lip } \beta$, причем $\psi(z) = \phi(z) - \phi(0)$.

Заменим теперь в левой части (7) функцию $|F|^p$ ее разложением и умножим новое равенство на аналитическую в замкнутом единичном круге функцию $a(t)$. После интегрирования получим

$$\int_0^{2\pi} a(t)\bar{\psi}(t) d\theta = \int_0^{2\pi} a(t)f(t)\bar{\omega}(t) d\theta.$$

Так как правую часть равенства можно продолжить до линейного функционала над H_δ с $\delta = 1/(n + \alpha)$ при $\omega^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, или $\delta = 1/(n + 1)$, если $\omega^{(n-1)}$ принадлежит классу Зигмунда, то это же можно сделать и с левой частью. Тогда теорема В позволяет сделать заключение о принадлежности $\psi^{(n-1)}(t)$ классам Липшица с показателем α или Зигмунда соответственно. Но $|F(t)|^p$ представлена в виде суммы функций одинаковой гладкости, следовательно, и ее гладкость такая же.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в (1) $1 \leq p < 2$ и $\omega \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда и экстремальная функция f обладает такой же гладкостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части (6) на $F^{1-p/2} \in H_\infty$ и учитывая, что $\bar{b}(t) = 1/b(t)$, $t = e^{i\theta}$, имеем

$$\overline{\left(\frac{\bar{t}^n F^{p/2} \bar{b}}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} \right)} = \frac{\bar{\omega} t^n F^{1-p/2}}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} - \frac{t^n F^{1-p/2} X}{(1-\bar{z}t)^{n+1}}. \quad (34)$$

После умножения последнего равенства на b , $z = re^{i\varphi}$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\overline{F^{p/2} t^n}}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{\omega} t^n F^{1-p/2} b}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} - \frac{1}{2\pi} \frac{t^n F^{1-p/2} b X}{(1-\bar{z}t)^{n+1}}. \quad (35)$$

Проинтегрируем (34) и применим формулу

$$y^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{y(t)\bar{t}^n}{(1-\bar{t}z)^{n+1}} d\theta.$$

Тогда

$$(F^{p/2}(z)b(z))^{(n)} = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\omega(t)} t^n b(t) F^{1-p/2}}{(1-t\bar{z})^{n+1}} d\theta. \quad (36)$$

Следовательно, при $\omega^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$ имеем

$$|(F^{p/2}(z)b(z))^{(n)}| \leq n! \|l\| \left\| \frac{t^n b F^{1-p/2}}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} \right\|_\delta = O\left(\left\| \frac{1}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} \right\|_\delta\right), \quad (37)$$

где $\|l\|$ – норма линейного функционала, а $\delta = 1/(n + \alpha)$.

Воспользуемся теперь следующей оценкой из работы [6; формула (4)]:

$$\left\| \frac{1}{(1-\bar{z}t)^{n+1}} \right\|_\delta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{n+1-1/\delta}}\right). \quad (38)$$

Получим

$$|(F^{p/2}b)^{(n)}| = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right). \quad (39)$$

Откуда вытекает, что $(F^{p/2}b)^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$.

Аналогично доказывается, что

$$|(F^{p/2})^{(n)}| = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right),$$

а $(F^{p/2})^{(n-1)} \in \text{Lip } \alpha$.

Воспользуемся формулой

$$f' = (F^{1-p/2})(F^{p/2}b)' - \frac{2}{p}\left(\frac{p}{2} - 1\right)F^{1-p/2}b(F^{p/2})',$$

откуда получим

$$|f'| \leq |F^{1-p/2}| |(F^{p/2}b)'| + \left(\frac{2}{p} - 1\right) |F^{1-p/2}b| |(F^{p/2})'|.$$

Теперь, опираясь на то, что F и b ограничены, а для $(F^{p/2})'$ и $(F^{p/2}b)'$ выполняется (39), имеем

$$|f'(z)| = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{1-\alpha}}\right).$$

Тем самым доказано, что $f \in \text{Lip } \alpha$.

ТЕОРЕМА 5. Если в (1) $2 < p < \infty$ и $\omega \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то X из (2) является функцией, принадлежащей $\text{Lip } \alpha(1 - 2/p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление $|f|^p/f = \bar{f}|F|^{p-2}$, преобразуем (5) к виду

$$\overline{f(t)}|F(t)|^{p-2} = \overline{\omega(t)} - X(t). \quad (40)$$

Умножим теперь обе части равенства (40) на функцию $\overline{ta(t)}$, где $a(t)$ аналитична в замкнутом единичном круге, и проинтегрируем, после чего получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{ta(t)} \overline{f(t)} |F|^{p-2} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{ta(t)} X(t) d\theta. \quad (41)$$

Но по теореме 3 $|F|^p \in \text{Lip } \alpha$, поэтому

$$\begin{aligned} \left| |F(t_1)|^{p-2} - |F(t_2)|^{p-2} \right| &= \left| (|F(t_1)|^p)^{1-2/p} - (|F(t_2)|^p)^{1-2/p} \right| \\ &\leq \left| |F(t_1)|^p - |F(t_2)|^p \right|^{1-2/p} = O(|t_1 - t_2|^{\alpha(1-2/p)}). \end{aligned}$$

Другими словами, $|F|^{p-2}$ – функция класса Липшица, что дает возможность разложить ее следующим способом: $|F(t)|^{p-2} = \phi(t) + t\psi(t)$, где ϕ и ψ – функции, аналитические в круге $|z| < 1$ и принадлежащие тому же классу Липшица, что и $|F(t)|^{p-2}$.

Теперь заменим в (41) $|F(t)|^{p-2}$ ее разложением и после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{ta(t)} X(t) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{ta(t)f(t)\phi(t)} d\theta.$$

В этом равенстве правую часть можно продолжить до непрерывного функционала над H_δ , $0 < \delta < 1$. После этого, поступая так же, как при доказательстве теоремы 3, придем к выводу, что $X \in \text{Lip } \alpha(1 - 2/p)$.

В заключение отметим, что некоторые из результатов настоящей работы были опубликованы в [12].

Список литературы

- [1] L. Carleson, S. Jacobs, “Best approximation by analytic functions”, *Ark. Mat.*, **10** (1972), 219–229.
- [2] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [3] N. Papadimitrakis, “Best uniform approximations by bounded analytic function”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**:3 (1988), 882–886.
- [4] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961.
- [5] С. Я. Хавинсон, “О некоторых экстремальных проблемах теории аналитических функций”, *Уч. записки МГУ. Матем.*, **148**:4 (1951), 133–143.
- [6] P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, “Linear functionals on H_p space with $0 < p < 1$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, **238** (1969), 32–60.
- [7] Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, “Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда”, *Матем. сб.*, **52(94)**:3 (1960), 891–894.
- [8] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.
- [9] Л. В. Канторович, Г. Г. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, Физматгиз, М., 1959.
- [10] Н. А. Широков, “О модуле граничных значений аналитических функций класса Λ_ω^n ”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **113** (1981), 258–260.
- [11] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [12] В. Г. Рябых, “Приближение аналитических функций неаналитическими”, *Деп. в ВИНТИ*, 1998, № 3943-В-98.

В. Г. Рябых (V. G. Ryabykh)

Ростовский государственный университет,

г. Ростов-на-Дону

E-mail: ryabykh@math.rsu.ru

Поступила в редакцию

22.03.1999 и 28.06.2005