Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Сачков, Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 95–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:53:34

УДК 517.977

Ю. Л. Сачков

Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны

Рассматривается обобщенная задача Дидоны – модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$. Группа дискретных симметрий в этой задаче строится как продолжение группы отражений стандартного математического маятника. Исследовано действие этих симметрий в прообразе и образе экспоненциального отображения.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Как известно, классическая задача Дидоны может быть сформулирована следующим образом. Даны две точки на плоскости, соединенные кривой γ_0 , и число S . Требуется соединить эти точки кратчайшей кривой γ так, чтобы область на плоскости, ограниченная кривыми γ_0 и γ , имела алгебраическую площадь S . Решение этой задачи есть дуга окружности или отрезок прямой, соединяющий заданные точки [1], [2].

Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Пусть заданы две точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные некоторой кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, число $S \in \mathbb{R}$, а также точка $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , такую, чтобы область, ограниченная парой кривых γ_0 и γ , имела заданные алгебраическую площадь S и центр масс c .

В работе [3] показано, что эта задача может быть переформулирована как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и интегральным критерием:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z, v, w) \in M = \mathbb{R}^5, & u &= (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = 0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где векторные поля при управлениях имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00703-а). Автор также благодарит за поддержку Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste, Italy), где эта работа была начата.

С инвариантной точки зрения это – субриманова задача

$$\begin{aligned} \dot{q} &\in \Delta_q, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad q \in M,$$

есть распределение, в котором скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задается полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Эта задача нильпотентна: поля X_1, X_2 порождают 5-мерную нильпотентную алгебру Ли $\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, где

$$\begin{aligned} X_3 &= [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_5 = [X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial w}, \\ T_q M &= \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(q). \end{aligned}$$

Все нетривиальные коммутаторы в этой алгебре Ли исчерпываются следующими тремя:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$

т.е. $\text{Lie}(X_1, X_2)$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли длины 3 с двумя образующими. Флаг распределения Δ :

$$\Delta \subset \Delta^2 = [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = [\Delta, \Delta^2] \subset \dots \subset TM,$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= L_1 = \text{span}(X_1, X_2), \\ \Delta^2 &= L_1 \oplus L_2 = \text{span}(X_1, X_2, X_3), \\ \Delta^3 &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5). \end{aligned}$$

Поэтому вектор роста распределения Δ :

$$(n_1, n_2, \dots, n_N), \quad n_i = \dim \Delta^i(q), \quad n_N = \dim \text{Lie}(\Delta)(q),$$

равен $(2, 3, 5)$.

Итак, $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть нильпотентная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Она является локальной квазиоднородной нильпотентной аппроксимацией произвольной субримановой структуры на 5-мерном многообразии с вектором роста $(2, 3, 5)$ (см. [4], [5], а также [6]). Как показано в работе [7], такая нильпотентная структура единственна. Обобщенная задача Дидоны есть модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$.

1.2. Известные результаты. Настоящая работа является продолжением работ [3], [7], их результаты мы будем постоянно использовать.

В работе [3] доказано существование оптимальных управлений в обобщенной задаче Дидоны. С помощью принципа максимума Понтрягина в инвариантной форме [8] построена гамильтонова система для нормальных экстремалей, а также найдены аномальные экстремали. Непрерывные симметрии задачи были вычислены в работе [7]. С их помощью в работе [3] показано, что экспоненциальное отображение факторизуется по действию двухпараметрической группы симметрий (вращений и дилатаций). Нормальная гамильтонова система проинтегрирована в терминах эллиптических функций Якоби. Аномальные геодезические оптимальны до бесконечности. Малые дуги нормальных геодезических оптимальны, но большие дуги, вообще говоря, нет; точки потери оптимальности называются *точками разреза*.

1.3. Содержание работы. В этой работе мы начинаем поиск точек разреза в обобщенной задаче Дидоны. Известно, что нормальные геодезические могут терять оптимальность по двум причинам: либо в данной точке пересекаются разные геодезические равной длины (точки Максвелла), либо семейство геодезических имеет огибающую (сопряженные точки). Для задач с богатой группой симметрий точки Максвелла можно искать как неподвижные точки композиции экспоненциального отображения и симметрий: если симметрия переставляет геодезические, но сохраняет их общую конечную точку, то эта конечная точка является точкой Максвелла.

В настоящей работе мы строим группу дискретных симметрий экспоненциального отображения в обобщенной задаче Дидоны. Это – группа диэдра, она возникает благодаря наличию отражений в фазовой плоскости стандартного маятника. Вертикальная часть гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина сводится после редукции по двумерной группе непрерывных симметрий к системе стандартного маятника. Мы продолжаем отражения стандартного маятника до отражений в прообразе и образе экспоненциального отображения. Эти дискретные симметрии имеют простой наглядный смысл для эйлеровых эластик – проекций геодезических на плоскость (x, y) : отражения эластик в центре хорды, в самой хорде, а также в серединном перпендикуляре к хорде. Дискретные симметрии факторизуются по действию вращений и дилатаций. Действие отражений особенно просто представляется в специальных эллиптических координатах, порожденных фазовым потоком стандартного маятника.

Процедура продолжения симметрий стандартного маятника до симметрий экспоненциального отображения имеет общий характер и применима к целому ряду задач оптимального управления, в которых независимая подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина имеет нетривиальную группу симметрий; такова, например, известная задача о качении сферы по плоскости [9].

Описание дискретных симметрий экспоненциального отображения в обобщенной задаче Дидоны, полученное в данной работе, будет использовано для полного описания точек Максвелла, соответствующих этим симметриям, а также для нахождения некоторых сопряженных точек вдоль геодезических. Таким образом, будет получена оценка сверху для времени разреза на всех геодезических. Эти результаты будут изложены в последующих работах [10], [11].

Сложные вычисления и иллюстрации в этой работе были выполнены с помощью системы Mathematica [12].

Автор выражает благодарность А. А. Аграчеву за постановку задачи и полезные обсуждения во время работы.

§ 2. Отражения

2.1. Отражения поля направлений стандартного маятника. Как известно [3], для обобщенной задачи Дидоны вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина сводится (после факторизации по двум симметриям) к стандартному уравнению маятника

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, & \theta \in S^1; \\ \dot{c} = -\sin \theta, & c \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Легко видеть, что следующие отражения цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ сохраняют поле направлений маятника (см. рис 1):

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: (\theta, c) &\mapsto (\theta, -c), \\ \varepsilon^2: (\theta, c) &\mapsto (-\theta, c), \\ \varepsilon^3: (\theta, c) &\mapsto (-\theta, -c). \end{aligned}$$

Рис. 1. Отражения в фазовой плоскости маятника

Отражения ε^1 и ε^2 изменяют направление времени, а ε^3 сохраняет направление времени на траекториях маятника. Эти отражения порождают группу диэдра (группу симметрий прямоугольника):

$$D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$$

с таблицей умножения

	ε^1	ε^2	ε^3
ε^1	Id	ε^3	ε^2
ε^2	ε^3	Id	ε^1
ε^3	ε^2	ε^1	Id

Далее мы шаг за шагом продолжим действие отражений ε^i так, чтобы они стали симметриями экспоненциального отображения: $\text{Exp} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \text{Exp}$ (см. предложение 2.6).

2.2. Отражения траекторий стандартного маятника. Действие симметрий ε^i продолжается на множество траекторий уравнения маятника (с сохранением направления времени). Пусть

$$\gamma = \{(\theta_s, c_s) \mid s \in [0, t]\}$$

есть гладкая кривая на фазовом цилиндре стандартного маятника $S^1 \times \mathbb{R}$. Определим отображения кривых следующим образом:

$$\varepsilon^1: \gamma \mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1) \mid s \in [0, t]\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^2: \gamma \mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}) \mid s \in [0, t]\},$$

$$\varepsilon^3: \gamma \mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3) \mid s \in [0, t]\} = \{(-\theta_s, -c_s) \mid s \in [0, t]\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий стандартного маятника (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение доказывается непосредственным дифференцированием. Например, для ε^1 получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \theta_s^1 &= \frac{d}{ds} \theta_{t-s} = -\dot{\theta}_{t-s} = -c_{t-s} = c_s^1, \\ \frac{d}{ds} c_s^1 &= \frac{d}{ds} (-c_{t-s}) = \dot{c}_{t-s} = -\sin \theta_{t-s} = -\sin \theta_s^1. \end{aligned}$$

Итак, если кривая γ – траектория маятника, то и кривые $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ также суть траектории маятника (см. рис. 2).

Рис. 2. Отражения траекторий маятника

2.3. Отражения траекторий обобщенного маятника. В работе [3] показано, что вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для обобщенной задачи Дидоны есть система уравнений обобщенного маятника

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c, & \theta \in S^1; \\ \dot{c} = -\alpha \sin(\theta - \beta), & c \in \mathbb{R}; \\ \dot{\alpha} = 0, & \alpha \geq 0; \\ \dot{\beta} = 0, & \beta \in S^1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим гладкие кривые вида

$$\gamma = \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta) \mid s \in [0, t], \alpha, \beta = \text{const}\}$$

в фазовом пространстве обобщенного маятника. Продолжим действие отражений ε^i на семейство таких кривых следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1: \gamma &\mapsto \gamma^1 = \{(\theta_s^1, c_s^1, \alpha, \beta^1)\} = \{(\theta_{t-s}, -c_{t-s}, \alpha, \beta)\}, \\ \varepsilon^2: \gamma &\mapsto \gamma^2 = \{(\theta_s^2, c_s^2, \alpha, \beta^2)\} = \{(-\theta_{t-s}, c_{t-s}, \alpha, -\beta)\}, \\ \varepsilon^3: \gamma &\mapsto \gamma^3 = \{(\theta_s^3, c_s^3, \alpha, \beta^3)\} = \{(-\theta_s, -c_s, \alpha, -\beta)\}.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий обобщенного маятника (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к дифференцированию так же, как для предложения 2.1.

2.4. Отражения нормальных экстремалей. Как показано в работе [3], нормальная гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет треугольный вид при параметризации $\lambda = (h_1, \dots, h_5; q) \in T^*M$: подсистема для координат в слое кокасательного расслоения $(h_1, \dots, h_5) \in T_q^*M$ не зависит от точки $q \in M$ (напомним, что $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$). Эта независимая вертикальная подсистема на поверхности уровня гамильтониана $H = (h_1^2 + h_2^2)/2 = 1/2$ записывается в координатах $(\theta, c, \alpha, \beta) \in T_q^*M$ как обобщенный маятник (2), где $h_1 = \cos \theta$, $h_2 = \sin \theta$, $h_3 = c$, $h_4 = \alpha \sin \beta$, $h_5 = -\alpha \cos \beta$. Продолжим действие отражений ε^i с вертикальной подсистемы на полную гамильтонову систему.

Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$ есть точка в прообразе экспоненциального отображения

$$\text{Exp}: N \mapsto M, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q_t,$$

где $C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^*M$ – начальный цилиндр для экстремалей. Тогда $\lambda_s = e^{s\vec{H}}(\lambda)$, $s \in [0, t]$, есть соответствующая нормальная экстремаль, $\text{Exp}(\nu) = \pi(\lambda_t) = q_t$. Здесь и далее $e^{s\vec{H}}$ обозначает поток гамильтонова поля $\vec{H}$ с гамильтонианом H . Запишем экстремаль в координатах как $\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, \beta; q_s)$. Тогда нормальная гамильтонова система ПМП запишется в виде

$$\dot{\lambda}_s = \vec{H}(\lambda_s) : \begin{cases} \dot{\theta}_s = c_s; \\ \dot{c}_s = -\alpha \sin(\theta_s - \beta); \\ \dot{\alpha} = 0; \\ \dot{\beta} = 0; \\ \dot{q}_s = \cos \theta_s X_1(q_s) + \sin \theta_s X_2(q_s). \end{cases} \quad (3)$$

В п. 2.3 было определено действие отражений на траектории вертикальной подсистемы:

$$\varepsilon^i: \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta)\} \mapsto \{(\theta_s^i, c_s^i, \alpha, \beta^i)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s \in [0, t].$$

Продолжим это действие на траектории нормальной гамильтоновой системы (3):

$$\begin{aligned}\varepsilon^i: \{\lambda_s\} &= \{(\theta_s, c_s, \alpha, \beta; q_s)\} \mapsto \{\lambda_s^i\} = \{(\theta_s^i, c_s^i, \alpha, \beta^i; q_s^i)\}, \\ i &= 1, 2, 3, \quad s \in [0, t],\end{aligned}$$

где кривая q_s^i есть решение задачи Коши для отраженных управлений:

$$\begin{aligned}\dot{q}_s^i &= \cos \theta_s^i X_1(q_s^i) + \sin \theta_s^i X_2(q_s^i), \quad s \in [0, t], \\ q_0^i &= q_0.\end{aligned}$$

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Группа отражений $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ сохраняет семейство траекторий нормальной гамильтоновой системы (3).*

Действие отражений на геодезические q_s будет описано в пп. 2.6, 2.7.

2.5. Отражения в прообразе экспоненциального отображения.

В п. 2.4 было определено действие отражений ε^i на нормальные экстремали $\lambda_s = e^{s\vec{H}}(\lambda)$

$$\varepsilon^i: \lambda_s \mapsto \lambda_s^i, \quad s \in [0, t]. \quad (4)$$

Наша цель – представить отражения как симметрии экспоненциального отображения $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda)$.

Сейчас мы определим действие отражений в прообразе экспоненциального отображения. Положим

$$\varepsilon^i: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \quad (\lambda, t) \mapsto (\lambda^i, t),$$

где $\lambda^i = \lambda_0^i$ есть начало соответствующей отраженной экстремали (4). В координатах:

$$\varepsilon^1: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^1, c^1, \alpha, \beta^1, t) = (\theta_t, -c_t, \alpha, \beta, t), \quad (5)$$

$$\varepsilon^2: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^2, c^2, \alpha, \beta^2, t) = (-\theta_t, c_t, \alpha, -\beta, t), \quad (6)$$

$$\varepsilon^3: (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta^3, c^3, \alpha, \beta^3, t) = (-\theta, -c, \alpha, -\beta, t). \quad (7)$$

Теперь мы хотели бы определить действие отражений в образе экспоненциального отображения как

$$\varepsilon^i: M \rightarrow M, \quad q_t \mapsto q_t^i.$$

Однако а priori не очевидно, что точка q_t^i однозначно определяется точкой q_t . Чтобы убедиться в этом, исследуем действие отражений на геодезические.

2.6. Отражения эйлеровых эластиков. Система (3) показывает, что проекции нормальных геодезических q_s на плоскость (x, y) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= \cos \theta_s, \\ \dot{y}_s &= \sin \theta_s,\end{aligned}$$

где угол θ_s в свою очередь есть решение уравнения маятника

$$\ddot{\theta}_s = -\alpha \sin(\theta_s - \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Такие кривые (x_s, y_s) называются *эйлеровыми эластиками*, они были открыты Эйлером как стационарные профили упругого стержня. Эластики суть

экстремали функционала $\frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2(s) ds$ для плоских кривых, где κ – кривизна на кривой γ (см., например, [9], [13]). Эйлеровы эластики (проекция решений обобщенной задачи Дидоны) образуют с точностью до поворотов и растяжений однопараметрическое семейство кривых, соединяющее прямую и окружность (проекция решений классической задачи Дидоны). Эскизы различных типов эластик приведены в работе [3].

Пусть $q_s = (x_s, y_s, z_s, v_s, w_s)$, $s \in [0, t]$, есть геодезическая, а

$$q_s^i = (x_s^i, y_s^i, z_s^i, v_s^i, w_s^i), \quad s \in [0, t], \quad i = 1, 2, 3,$$

суть ее образы под действием отражений (см. п. 2.4). Кривые (x_s, y_s) и (x_s^i, y_s^i) суть эйлеровы эластики. Действие отражений ε^i на эти кривые описано в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Справедливо*

- 1) $(x_s^1, y_s^1) = (x_t - x_{t-s}, y_t - y_{t-s})$, $s \in [0, t]$;
- 2) $(x_s^2, y_s^2) = (x_t - x_{t-s}, y_{t-s} - y_t)$, $s \in [0, t]$;
- 3) $(x_s^3, y_s^3) = (x_s, -y_s)$, $s \in [0, t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только действие ε^1 , отражения ε^2 , ε^3 изучаются аналогично. Имеем

$$x_s^1 = \int_0^s \cos \theta_r^1 dr = \int_0^s \cos \theta_{t-r} dr = \int_{t-s}^t \cos \theta_r dr.$$

Принимая во внимание, что

$$x_{t-s} = \int_0^{t-s} \cos \theta_r dr,$$

получаем

$$x_s^1 + x_{t-s} = \int_0^t \cos \theta_r dr = x_t,$$

т.е.

$$x_s^1 = x_t - x_{t-s}, \quad s \in [0, t].$$

Аналогично получаем

$$y_s^1 = y_t - y_{t-s}, \quad s \in [0, t].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим наглядный смысл действия отражений на эластики $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$ в случае $(x_t, y_t) \neq (x_0, y_0)$.

В силу равенства

$$\varepsilon^1: \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{pmatrix} x_t - x_{t-s} \\ y_t - y_{t-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^1 \\ y_s^1 \end{pmatrix}$$

отражение ε^1 есть композиция двух преобразований: (а) обращения времени на эластике и (б) отражения плоскости (x, y) в центре $p_c = (x_t/2, y_t/2)$ хорды эластики, т.е. отрезка, соединяющего ее начало $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и конец (x_t, y_t) (см. рис. 3).

Рис. 3. Отражение ε^1 элаستيку в центре хорды p_c

Для отражения ε^2 имеем разложение

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\xrightarrow{(a)} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(c)} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_t - x_{t-s} \\ y_{t-s} - y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^2 \\ y_s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где χ – полярный угол точки (x_t, y_t) :

$$\cos \chi = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}, \quad \sin \chi = \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}.$$

То есть отражение ε^2 действует на элаستيку как композиция трех преобразований: (а) обращения времени на эластике, (b) отражения плоскости (x, y) в серединном перпендикуляре $l^\perp$ к хорде и (с) поворота на угол (-2χ) (см. рис. 4).

Рис. 4. Отражение ε^2 элаستيку в серединном перпендикуляре $l^\perp$

Отражение ε^3 представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\stackrel{(a)}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(b)}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_s \\ -y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^3 \\ y_s^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

это композиция (а) отражения плоскости (x, y) в хорде элаستي и (b) поворота на угол (-2χ) , т.е. отражения в хорде l (см. рис. 5).

Рис. 5. Отражение ε^3 элаستي в хорде l

Итак, по модулю обращения времени на эластике и вращений плоскости (x, y) , имеем

- i) ε^1 есть отражение элаستي в центре хорды;
- ii) ε^2 есть отражение элаستي в серединном перпендикуляре к хорде;
- iii) ε^3 есть отражение элаستي в хорде.

2.7. Отражения концов геодезических. Опишем действие отражений ε^i на концы геодезических $q_t = (x_t, y_t, z_t, v_t, w_t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Справедливо*

- 1) $(x_t^1, y_t^1, z_t^1, v_t^1, w_t^1) = (x_t, y_t, -z_t, v_t - x_t z_t, w_t - y_t z_t)$;
- 2) $(x_t^2, y_t^2, z_t^2, v_t^2, w_t^2) = (x_t, -y_t, z_t, -v_t + x_t z_t, w_t - y_t z_t)$;
- 3) $(x_t^3, y_t^3, z_t^3, v_t^3, w_t^3) = (x_t, -y_t, -z_t, -v_t, w_t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство 1), остальные два рассматриваются аналогично. Равенство $(x_t^1, y_t^1) = (x_t, y_t)$ следует из предложения 2.4. Далее, учитывая это же предложение и равенства $\dot{x} = \cos \theta$, $\dot{y} = \sin \theta$, $\dot{z} = (x\dot{y} - \dot{x}y)/2$, в силу нормальной гамильтоновой системы (3) в координатах (x, y, z, v, w) получаем

$$\begin{aligned} z_t^1 &= \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}(y_t - y_{t-s}) + \sin \theta_{t-s}(x_t - x_{t-s})) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}y_t + \sin \theta_{t-s}x_t) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t (-\cos \theta_{t-s}y_{t-s} + \sin \theta_{t-s}x_{t-s}) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}x_t y_t + \frac{1}{2}y_t x_t + \frac{1}{2} \int_t^0 (-\cos \theta_s y_s + \sin \theta_s x_s) ds \\
&= -z_t.
\end{aligned}$$

Аналогично доказываются равенства $v_t^1 = v_t - x_t z_t$ и $w_t^1 = w_t - y_t z_t$.

Предложение 2.5 показывает, что конец отраженной геодезической q_t^i однозначно определяется концом исходной геодезической q_t . Поэтому можно определить действие отражений на концы геодезических как отображения

$$\varepsilon^i: M \rightarrow M, \quad \varepsilon^i: q_t \rightarrow q_t^i.$$

Предложение 2.5 описывает действие этого отображения в координатах (x, y, z, v, w) на M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Отражение

$$\varepsilon^3: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w)$$

есть симметрия нильпотентной субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, задаваемой полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом. Это отражение действует на базис как

$$\varepsilon_*^3: (X_1, X_2) \mapsto (X_1, -X_2),$$

т.е. это – отражение плоскости Δ в прямой $\mathbb{R}X_1$.

2.8. Отражения как симметрии экспоненциального отображения.

Из определения действия отражений ε^i в прообразе и образе экспоненциального отображения следует, что отражения являются симметриями экспоненциального отображения. Получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc}
C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\
\downarrow \varepsilon^i & & \downarrow \varepsilon^i \\
C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
(\lambda_0, t) & \xrightarrow{\text{Exp}} & q_t \\
\downarrow \varepsilon^i & & \downarrow \varepsilon^i \\
(\lambda_0^i, t) & \xrightarrow{\text{Exp}} & q_t^i,
\end{array}$$

т.е.

$$\varepsilon^i \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varepsilon^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

§ 3. Группа симметрий экспоненциального отображения

Наряду с дискретной группой симметрий $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ экспоненциальное отображение имеет непрерывную двухпараметрическую группу симметрий $e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$, где

$$\begin{aligned}
h_0(\lambda) &= \langle \lambda, X_0(q) \rangle, & X_0 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}, \\
Z &= \vec{h}_Y + e, & h_Y(\lambda) &= \langle \lambda, Y(q) \rangle, \\
Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, & e &= \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}.
\end{aligned}$$

Действительно, согласно [3; утверждение 4.2]

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t'\vec{H}} \circ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\lambda), \quad t' = te^r,$$

откуда с помощью канонической проекции $\pi: T^*M \rightarrow M$, $\pi(\lambda) = q$, получаем

$$e^{sX_0} \circ e^{rY} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\lambda), t'). \quad (8)$$

Определим естественное действие непрерывных симметрий в прообразе экспоненциального отображения:

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0}: C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow C \times \mathbb{R}_+, & (\lambda, t) &\mapsto (e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t), \\ e^{rZ}: C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow C \times \mathbb{R}_+, & (\lambda, t) &\mapsto (e^{rZ}(\lambda), te^r). \end{aligned}$$

Из этого определения и равенства (8) получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Следующие диаграммы коммутативны:*

$$\begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow e^{s\vec{h}_0} & & \downarrow e^{sX_0} \\ C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow e^{rZ} & & \downarrow e^{rY} \\ C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M, \end{array}$$

т.е.

$$e^{sX_0} \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ e^{s\vec{h}_0}, \quad e^{rY} \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ e^{rZ}.$$

Итак, группа, порожденная отражениями, вращениями и дилатациями

$$G = \langle \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, e^{s\vec{h}_0}, e^{rZ} \rangle$$

сохраняет экспоненциальное отображение. Найдём коммутационные соотношения в группе G . Потоки полей $\vec{h}_0$ и Z коммутируют между собой [3]. Отражения ε^i также коммутируют между собой (см. таблицу умножения в п. 2.1). Установим правила коммутирования дискретных и непрерывных симметрий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *В прообразе экспоненциального отображения $C \times \mathbb{R}_+$ справедливы следующие коммутационные соотношения:*

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^1 &= \varepsilon^1 \circ e^{s\vec{h}_0}, & e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^2 &= \varepsilon^2 \circ e^{-s\vec{h}_0}, & e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^3 &= \varepsilon^3 \circ e^{s\vec{h}_0}, \\ e^{rZ} \circ \varepsilon^i &= \varepsilon^i \circ e^{rZ}, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение доказывается непосредственным вычислением с использованием выражений для действия отражений (5)–(7) и непрерывных симметрий

$$\begin{aligned} e^{s\vec{h}_0}: (\theta, c, \alpha, \beta, t) &\mapsto (\theta + s, c, \alpha, \beta + s, t), \\ e^{rZ}: (\theta, c, \alpha, \beta, t) &\mapsto (\theta, ce^{-r}, \alpha e^{-2r}, \beta, te^r) \end{aligned}$$

в прообразе экспоненциального отображения.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. В образе экспоненциального отображения M справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$e^{sX_0} \circ \varepsilon^1 = \varepsilon^1 \circ e^{sX_0}, \quad e^{sX_0} \circ \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \circ e^{-sX_0}, \quad e^{sX_0} \circ \varepsilon^3 = \varepsilon^3 \circ e^{sX_0}, \\ e^{rY} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ e^{rY}, \quad i = 1, 2, 3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим прообраз экспоненциального отображения $N = C \times \mathbb{R}_+$. Рассмотрим факторпространства прообраза и образа экспоненциального отображения, а также соответствующие канонические проекции:

$$N'' = N/G_{\vec{h}_0, Z}, \quad \pi''_0: N \rightarrow N'', \\ M'' = M/G_{X_0, Y}, \quad \pi''_1: M \rightarrow M'',$$

где $G_{\vec{h}_0, Z} = \langle e^{s\vec{h}_0}, e^{rZ} \rangle$ и $G_{X_0, Y} = \langle e^{sX_0}, e^{rY} \rangle$ суть двухпараметрические группы непрерывных симметрий в N и M соответственно [3]. Предложение 3.2 и следствие 3.1 позволяют определить действие отражений в факторпространствах

$$\varepsilon^i: N'' \rightarrow N'', \quad \varepsilon^i: M'' \rightarrow M''$$

так, чтобы следующая диаграмма была коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & \\ \varepsilon^i \searrow & & \downarrow \text{Exp} & \swarrow \varepsilon^i & \\ N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M & & \\ \pi''_0 \downarrow & & \downarrow \pi''_1 & & \downarrow \pi''_1 \\ N'' & \xrightarrow{\text{Exp}''} & M'' & & \\ \varepsilon^i \searrow & & \downarrow \text{Exp}'' & \swarrow \varepsilon^i & \\ N'' & \xrightarrow{\text{Exp}''} & M'' & & \end{array}$$

§ 4. Действие отражений в прообразе экспоненциального отображения

В работе [3] были введены так называемые эллиптические координаты в подобластях фазового пространства маятника. Эти координаты порождены координатами “действие–угол” для стандартного маятника. Одна из этих координат – время на траекториях маятника, а вторая – перепараметризованная энергия маятника. В этом параграфе мы напомним конструкцию эллиптических координат (с некоторыми исправлениями и дополнениями), а затем с помощью этих координат опишем действие отражений в прообразе экспоненциального отображения.

Двадцать шестая из “Лекций по динамике” К. Якоби [14] называется “Эллиптические координаты” и начинается известными словами:

“Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть применена”.

Отметим, что координаты, введенные ниже, не имеют отношения к эллиптическим координатам Якоби. Более того, наш ход был противоположным изложенному Якоби: наши эллиптические координаты пришлось вводить специально для того, чтобы параметризовать субримановы геодезические [3] и найти точки Максвелла [10], [11]. Эллиптические координаты приподнимают завесу сложности над задачами, управляемыми уравнением маятника, и открывают нашему глазу их решение (см. рис. 6). Здесь имеется важная точка пересечения с Якоби: наши координаты вводятся с помощью эллиптических функций Якоби [15], [16]. Другим существенным моментом будет исследование сопряженных точек, т.е. решений уравнения Якоби, вдоль геодезических [11].

Рис. 6. Сетка эллиптических координат

4.1. Эллиптические координаты в начальном цилиндре. Напомним [3], что множество начальных точек экстремалей есть цилиндр – фазовое пространство обобщенного маятника (2)

$$C = T_{q_0}^* M \cap H^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \{(\theta \in S^1, c \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta \in S^1)\},$$

а энергия обобщенного маятника равна

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

В работе [3] было введено разбиение цилиндра C на подмножества:

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{i=1}^7 C_i, & C_i \cap C_j &= \emptyset, \quad i \neq j, \\ C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (-\alpha, \alpha)\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (\alpha, +\infty)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta \neq \pi\}, \\
C_4 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -\alpha\}, \\
C_5 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta = \pi\}, \\
C_6 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, c \neq 0\}, \\
C_7 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = c = 0\}.
\end{aligned}$$

В подмножествах C_1, C_2, C_3 эллиптические координаты $(k, \varphi, \alpha, \beta)$ вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ k \in (0, 1), \varphi \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta \pmod{2\pi} \right\}, \\
k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \in (0, 1), \\
\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha} \varphi); \\ \frac{c}{2} = k \sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha} \varphi), \end{cases} & s_1 = \operatorname{sgn} \cos \frac{\theta - \beta}{2}.
\end{aligned}$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 \operatorname{dn}(\sqrt{\alpha} \varphi).$$

Здесь и далее мы используем эллиптические функции Якоби sn , cn , dn (см. [15], [16]).

Область C_2 разобьем на две связные компоненты

$$C_2^\pm = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E \in (\alpha, +\infty), \operatorname{sgn} c = \pm 1\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C_2^\pm &= \left\{ k \in (0, 1), \varphi \left(\bmod \frac{2Kk}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta \pmod{2\pi} \right\}, \\
k &= \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \left(\sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \right)^{-1} \in (0, 1), \\
\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_2 \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha} \varphi}{k}; \\ \frac{c}{2} = s_2 \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha} \varphi}{k}, \end{cases} & s_2 = \operatorname{sgn} c.
\end{aligned}$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{\alpha} \varphi}{k}.$$

В области C_2 будут также использоваться координаты (k, ψ, α, β) , где $\psi = \varphi/k$. Тогда

$$C_2^\pm = \left\{ k \in (0, 1), \psi \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), \alpha > 0, \beta \pmod{2\pi} \right\}.$$

Множество C_3 также разбиваем на две связные компоненты

$$C_3^\pm = \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E = \alpha, \operatorname{sgn} c = \pm 1\}.$$

Тогда

$$C_3^\pm = \{\varphi \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta(\bmod 2\pi)\},$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 s_2 \operatorname{th}(\sqrt{\alpha} \varphi); \\ \frac{c}{2} = s_2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha} \varphi)}, \end{cases} \quad s_1 = \operatorname{sgn} \cos \frac{\theta - \beta}{2}, \quad s_2 = \operatorname{sgn} c.$$

В этом случае

$$\cos \frac{\theta - \beta}{2} = s_1 \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha} \varphi)}.$$

На рис. 6 изображена сетка эллиптических координат в фазовой плоскости стандартного маятника ($\alpha = 1, \beta = 0$). В области C_1 (колебания маятника с малой энергией $E < 1$) нарисованы кривые $k = \operatorname{const}$, $\varphi/K = \operatorname{const}$; в области C_2 (вращения маятника с большой энергией $E > 1$) нарисованы кривые $k = \operatorname{const}$, $\psi/K = \operatorname{const}$; эти области разделены множеством C_3 (движения маятника с критической энергией $E = 1$), состоящим из двух сепаратрис $k = 1$.

4.2. Эллиптические координаты в прообразе экспоненциального отображения. В соответствии с разбиением начального цилиндра $C = \bigcup_{i=1}^7 C_i$ рассмотрим разбиение прообраза экспоненциального отображения

$$N = \bigcup_{i=1}^7 N_i, \quad N_i = C_i \times \mathbb{R}_+.$$

Аналогично наряду с разбиением на связные компоненты

$$C_i = C_i^+ \cup C_i^-, \quad C_i^\pm = C_i \cap \{\operatorname{sgn} c = \pm 1\}, \quad i = 2, 3, 6,$$

будем рассматривать разбиения

$$N_i = N_i^+ \cup N_i^-, \quad N_i^\pm = C_i^\pm \times \mathbb{R}_+, \quad i = 2, 3, 6.$$

Определим эллиптические координаты в подмножествах N_1, N_2, N_3 :

$$\begin{aligned} N_1 &= \{(k, \varphi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ N_2 &= \{(k, \psi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ N_3 &= \{(\varphi, \alpha, \beta, \delta)\}, \\ \delta &= t\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эллиптические координаты приспособлены к действию непрерывных симметрий; в этих координатах вращения и дилатации выглядят особенно просто. Действительно, в координатах $N = \{(\theta, c, \alpha, \beta, t)\}$ имеем

$$\vec{h}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad Z = -c \frac{\partial}{\partial c} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + t \frac{\partial}{\partial t},$$

поэтому в координатах $N_j = \{(k, \varphi, \alpha, \beta, \delta)\}$

$$\vec{h}_0 = \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad Z = -2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Функции (k, φ, δ) являются координатами в факторпространствах N_j'' , $j = 1, 2, 3$.

4.3. Действие отражений в N . Опишем действие отражений $\varepsilon^i: N_j \rightarrow N_j$ в эллиптических координатах. Пусть $\nu \in N$, обозначим $\nu^i = \varepsilon^i(\nu) \in N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. 1) Если $\nu = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) \in N_1$, то $\nu^i = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_1$, $i = 1, 2, 3$, причем

$$\begin{aligned}\varphi^1 + \varphi_t &= \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^1 &= \beta, \\ \varphi^2 + \varphi_t &= 0 \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^2 &= -\beta, \\ \varphi^3 - \varphi &= \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^3 &= -\beta.\end{aligned}$$

2) Если $\nu = (k, \psi, \alpha, \beta, t) \in N_2$, то $\nu^i = (k, \psi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_2$, $i = 1, 2, 3$, более того,

$$\nu \in N_2^\pm \Rightarrow \nu^1 \in N_2^\mp, \nu^2 \in N_2^\pm, \nu^3 \in N_2^\mp,$$

причем

$$\begin{aligned}\psi^1 + \psi_t &= 0 \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^1 &= \beta, \\ \psi^2 + \psi_t &= 0 \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^2 &= -\beta, \\ \psi^3 + \psi &= 0 \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), & \beta^3 &= -\beta.\end{aligned}$$

3) Если $\nu = (\varphi, \alpha, \beta, t) \in N_3$, то $\nu^i = (\varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_3$, $i = 1, 2, 3$, более того,

$$\nu \in N_3^\pm \Rightarrow \nu^1 \in N_3^\mp, \nu^2 \in N_3^\pm, \nu^3 \in N_3^\mp,$$

причем

$$\begin{aligned}\varphi^1 + \varphi_t &= 0, & \beta^1 &= \beta, \\ \varphi^2 + \varphi_t &= 0, & \beta^2 &= -\beta, \\ \varphi^3 + \varphi &= 0, & \beta^3 &= -\beta.\end{aligned}$$

Предложение 4.1 проиллюстрировано на рис. 7–9 (в случае $\alpha = 1$, $\beta = 0$).

Рис. 7. Отражения в C_1

Рис. 8. Отражения в C_2 Рис. 9. Отражения в C_3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только п. 1), так как остальные два пункта доказываются аналогично.

Отражения ε^i сохраняют область N_1 в силу того, что

$$\varepsilon^i: E \rightarrow E, \quad \varepsilon^1, \varepsilon^3: c \mapsto -c, \quad \varepsilon^2: c \mapsto c,$$

это следует из равенств (5)–(7).

Далее, из равенства (5) получаем $\theta^1 = \theta_t$, $c^1 = -c_t$, откуда с учетом конструкции эллиптических координат (п. 4.1) имеем

$$\operatorname{sn}(\sqrt{\alpha} \varphi^1) = \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha} \varphi_t), \quad \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha} \varphi^1) = -\operatorname{cn}(\sqrt{\alpha} \varphi_t),$$

поэтому

$$\varphi_1 + \varphi_t = \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right).$$

Выражения для действия остальных отражений в эллиптических координатах получаются аналогично.

§ 5. Действие отражений в образе экспоненциального отображения

5.1. Декомпозиция и координаты в M и M'' . Для того чтобы получить простое описание действия отражений в образе экспоненциального отображения, удобно использовать специальные координаты в M , приспособленные к действию симметрий X_0 и Y . Опишем их конструкцию.

Напомним, что

$$M = \{q\} = \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5, \quad q_0 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Введем полярные координаты в плоскостях (x, y) и (v, w) :

$$x = r \cos \chi, \quad y = r \sin \chi, \quad v = \rho \cos \omega, \quad w = \rho \sin \omega.$$

В области $\{r > 0, \rho > 0\}$ определен угол

$$\gamma = \chi - \omega.$$

Рассмотрим следующие подмножества в M :

$$M = M_0 \cup \{q_0\}, \quad M_0 = M \setminus \{q_0\} = \{r^2 + z^2 + \rho^2 > 0\},$$

$$M_0 = M_1 \cup M_2 \cup M_3^+ \cup M_3^-,$$

$$M_1 = \{r > 0\}, \quad M_2 = \{\rho > 0\}, \quad M_3^\pm = \{\pm z > 0\}.$$

Опишем искомые координаты в картах $M_1, M_2, M_3^\pm$ многообразия M_0 :

$$M_1 = \{(r > 0, \chi \in S^1, P, Q, R)\},$$

$$P = \frac{z}{2r^2}, \quad Q = \frac{xv + yw}{r^4} = \frac{\rho}{r^3} \cos \gamma, \quad R = \frac{-yv + xw}{r^4} = \frac{\rho}{r^3} \sin \gamma;$$

$$M_2 = \{(\rho > 0, \omega \in S^1, P', Q', R')\},$$

$$P' = \frac{z}{2\rho^{2/3}}, \quad Q' = \frac{xv + yw}{\rho^{4/3}} = \frac{r}{\rho^{1/3}} \cos \gamma, \quad R' = \frac{-yv + xw}{\rho^{4/3}} = \frac{r}{\rho^{1/3}} \sin \gamma;$$

$$M_3^\pm = \{(r' \geq 0, \chi \in S^1, \rho' \geq 0, \omega \in S^1)\},$$

$$r' = \frac{r}{|z|^{1/2}}, \quad \rho' = \frac{\rho}{|z|^{3/2}}.$$

Кроме того,

$$M_3^\pm = \{(\pm z > 0, \chi \in S^1, r' \geq 0, \rho' \geq 0, \gamma \in S^1)\}$$

$$= \{(\pm z > 0, \chi \in S^1, P'', Q'', R'')\},$$

$$P'' = \frac{r'^2 - \rho'^2}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}}, \quad Q'' = \frac{r' \rho'}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}} \cos \gamma, \quad R'' = \frac{r' \rho'}{\sqrt{r'^2 + \rho'^2}} \sin \gamma.$$

В координатах $(r, \chi, z, \rho, \omega)$ в области $M_1 \cap M_2 = \{r > 0, \rho > 0\}$ непрерывные симметрии принимают вид:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad Y = r \frac{\partial}{\partial r} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

В координатах (r, χ, P, Q, R) в области M_1 получаем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad Y = r \frac{\partial}{\partial r},$$

поэтому факторпространство M_1'' параметризуется координатами (P, Q, R) . Аналогично в области $M_2 = \{(\rho, \omega, P', Q', R')\}$ имеем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad Y = 3\rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

поэтому $M_2'' = \{(P', Q', R')\}$, а в областях $M_3^\pm = \{z, \chi, P'', Q'', R''\}$ имеем

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad Y = 2z \frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому $M_3^{\pm''} = \{(P'', Q'', R'')\}$.

Рассмотрим разбиение M на инвариантные множества группы непрерывных и дискретных симметрий G :

$$M = \{q_0\} \cup M_1 \cup M_4 \cup M_5^\pm,$$

где область $M_1 = M \setminus \{q_0\} = \{r > 0\}$ была определена выше, а

$$\begin{aligned} M_4 &= M_2 \setminus M_1 = \{r = 0, \rho > 0\}, \\ M_5^\pm &= M_3^\pm \setminus (M_1 \cup M_4) = \{r = 0, \rho = 0, \pm z > 0\}. \end{aligned}$$

Координаты в M_1 и M_1'' описаны выше, а

$$\begin{aligned} M_4 &= \{(\rho > 0, \omega \in S^1, P')\}, & M_4'' &= \{P'\}, \\ M_5^\pm &= \{\pm z > 0\}, & M_5^{\pm''} &= \{z = \pm 1\}. \end{aligned}$$

5.2. Действие отражений в M . Опишем действие отражений

$$\varepsilon^i: M \rightarrow M, \quad q = (x, y, z, v, w) \mapsto q^i = (x^i, y^i, z^i, v^i, w^i)$$

в координатах, введенных в п. 5.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Справедливо*

- 1) $q = q_0 \Rightarrow q^i = q_0, i = 1, 2, 3$;
- 2) $q = (r, \chi, P, Q, R) \in M_1 \Rightarrow q^i = (r, \chi^i, P^i, Q^i, R) \in M_1$, причем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \chi \pmod{2\pi}, & P^1 &= -P, & Q^1 &= Q - 2P, \\ \chi^2 + \chi &= 0 \pmod{2\pi}, & P^2 &= P, & Q^2 &= -Q + 2P, \\ \chi^3 + \chi &= 0 \pmod{2\pi}, & P^3 &= -P, & Q^3 &= Q - 2P; \end{aligned}$$

- 3) $q = (\rho, \omega, P') \in M_4 \Rightarrow q^i = (\rho, \omega^i, P'^i) \in M_4$, причем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \omega \pmod{2\pi}, & P'^1 &= -P', \\ \omega^2 + \omega &= \pi \pmod{2\pi}, & P'^2 &= P', \\ \omega^3 + \omega &= \pi \pmod{2\pi}, & P'^3 &= -P'; \end{aligned}$$

- 4) $q = z \in M_5 \Rightarrow q^i = z^i \in M_5$, причем

$$\begin{aligned} q \in M_5^\pm &\Rightarrow q^1 \in M_5^\mp, q^2 \in M_5^\pm, q^3 \in M_5^\mp, \\ z^1 &= -z, \quad z^2 = z, \quad z^3 = -z. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.5 отражения действуют в M следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz), \\ \varepsilon^2 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, z, -v + xz, w - yz), \\ \varepsilon^3 &: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w).\end{aligned}$$

Утверждение п. 1) очевидно, докажем п. 2). Непосредственно видно, что отражения сохраняют расстояние r , а потому и область M_1 . Далее, отражение ε^1 не изменяет вектор (x, y) , а потому и угол χ . Наконец,

$$\begin{aligned}P^1 &= \frac{-z}{2r^2} = -P, \\ Q^1 &= \frac{x(v - xz) + y(w - yz)}{r^4} = \frac{xv + yw}{r^4} - \frac{(x^2 + y^2)z}{r^4} = Q - 2P, \\ R^1 &= \frac{-y(v - xz) + x(w - yz)}{r^4} = \frac{-yv + xw}{r^4} = R.\end{aligned}$$

Остальные утверждения доказываются аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из п. 2) предложения 5.1 видно, что в области M_1 (открытом всюду плотном подмножестве M) отражения ε^i особенно просто представляются в следующих координатах в факторпространстве M_1'' :

$$P = \frac{z}{2r^2}, \quad Q - P = \frac{xv + yw - zr^2/2}{r^4}, \quad R = \frac{-yv + xw}{r^4},$$

а именно

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: P \mapsto -P, \quad Q - P \mapsto Q - P, \quad R \mapsto R, \\ \varepsilon^2 &: P \mapsto P, \quad Q - P \mapsto -Q + P, \quad R \mapsto R, \\ \varepsilon^3 &: P \mapsto -P, \quad Q - P \mapsto Q - P, \quad R \mapsto R.\end{aligned}$$

То есть в плоскости $(P, Q - P)$ дискретные симметрии ε^i действуют как отражения в осях координат $P = 0$, $Q - P = 0$. Это объясняет ту важную роль, которую будут играть поверхности $z = 0$ и $V = xv + yw - zr^2/2 = 0$ при исследовании стратов Максвелла. Этому исследованию посвящены последующие работы [10], [11].

Список литературы

- [1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1981.
- [2] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы*—7, т. 16, ВИНТИ, М., 1987, 5–85.
- [3] Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 63–90.
- [4] А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, “Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем”, *Докл. АН СССР*, **295**:4 (1987), 777–781.

- [5] A. Bellaïche, “The tangent space in sub-Riemannian geometry”, *Sub-Riemannian geometry*, Progr. Math., **144**, eds. A. Bellaïche and J.-J. Risler, Birkhäuser, Basel, 1996, 1–78.
- [6] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov, “An intrinsic approach to the control of rolling bodies”, *Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control (Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999)*, **1**, IEEE, Piscataway, NJ, 1999, 431–435.
- [7] Yu. L. Sachkov, “Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:2 (2004), 457–494.
- [8] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.
- [9] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [10] Ю. Л. Сачков, “Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб. (в печати)*.
- [11] Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб. (в печати)*.
- [12] S. Wolfram, *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- [13] Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, Мир, М., 1986.
- [14] К. Г. Я. Якоби, *Лекции по динамике*, УРСС, М., 2004.
- [15] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Физматлит, М., 1970.
- [16] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002.

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем РАН,

г. Переславль-Залесский

E-mail: sachkov@sys.botik.ru

Поступила в редакцию

28.03.2005