Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Шананин, О разрешимости на компактных подмножествах дифференциальных уравнений с вещественнозначным главным пучком символов, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 2, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:40:30

УДК 517.85

Н. А. Шананин

О разрешимости на компактных подмножествах дифференциальных уравнений с вещественнозначным главным пучком символов

Основным результатом статьи является теорема о разрешимости на компактных подмножествах линейных дифференциальных уравнений квазиглавногo типа с вещественным главным пучком символов. В основе доказательства лежит исследование микролокальной структуры особенностей решений рассматриваемого класса уравнений.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Основные результаты

Пусть в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определен линейный анизотропный дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами

$$P(x, D) = \sum_{\langle \rho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – неотрицательный целочисленный мультииндекс, $\langle \rho, \alpha \rangle$ – взвешенный порядок производной D^α

$$\langle \rho, \alpha \rangle = \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2 + \dots + \rho_n \alpha_n,$$

веса ρ_j , $j = 1, \dots, n$, – натуральные числа. Если по крайней мере один из коэффициентов $a_\alpha(x)$ при $\langle \rho, \alpha \rangle = m$ отличен от тождественного нуля, то число m называется *взвешенным порядком оператора*.

Введем в $\mathbb{R}^n$ действие мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$

$$\lambda \circ \xi = (\lambda^{\rho_1} \xi_1, \lambda^{\rho_2} \xi_2, \dots, \lambda^{\rho_n} \xi_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется *квазиконическим*, если $\lambda \circ \Gamma \subseteq \Gamma$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Функция $f(\xi)$, определенная на Γ , называется *положительно квазиоднородной степени $m(f)$* , если $f(\lambda \circ \xi) = \lambda^{m(f)} f(\xi)$, $\xi \in \Gamma$. Полный символ дифференциального оператора вида (1) является суммой квазиоднородных по ξ слагаемых

$$p_k(x, \xi) = \sum_{\langle \rho, \alpha \rangle = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00253).

степеней $k = 0, 1, \dots, m$ соответственно. Символ максимальной степени квазиоднородности $p_m(x, \xi)$ называется *взвешенным главным символом*. Множество $\text{Char } P = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid p_m(x, \xi) = 0\}$ называется *характеристическим*.

В соответствии с введенными весами разобьем на две группы полные совокупности координатных функций x и ξ . Пусть

$$J' = \{j \mid \rho_j = \mu\}, \quad J'' = \{j \mid \rho_j > \mu\},$$

где $\mu = \min_j \rho_j$. Положим $x' = \{x_j \mid j \in J'\}$, $x'' = \{x_j \mid j \in J''\}$. Итак, $x = (x', x'')$. Аналогично $\xi = (\xi', \xi'')$. Пусть n' – число координат x' и $n'' = n - n'$. Оператор $P(x, D)$ называется *оператором квазиглавногo типа*, если в каждой точке множества $\text{Char } P$ по крайней мере одна из производных p_{m, x_j} и p_{m, ξ_j} , $j \in J'$, отлична от нуля. Предположим, что взвешенный главный символ $p_m(x, \xi)$ вещественнозначен. Максимальные интегральные кривые системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx'_j}{dt} = p_{m, \xi_j}(x, \xi), & j \in J'; \\ x''_j = x''_j{}^0, & j \in J''; \\ \frac{d\xi'_j}{dt} = -p_{m, x_j}(x, \xi), & j \in J'; \\ \xi''_j = \xi''_j{}^0, & j \in J'', \end{cases}$$

называются *бихарактеристиками символа* p_m . Для любой бихарактеристики γ из $\gamma \cap \text{Char } P \neq \emptyset$ следует $\gamma \subset \text{Char } P$. Бихарактеристики, содержащиеся в характеристическом множестве, называются *нулевыми*.

Для операторов квазиглавногo типа в отличие от операторов главного типа наряду с главным символом влияние на регулярность решений и разрешимость уравнений оказывает часть младших символов. Для учета последней с оператором P свяжем главный пучок символов. Положим

$$\Psi(x, \xi'', \eta) = \sum_{j \in J''} x_j \xi''_j + \langle x, \eta \rangle.$$

Тогда $e^{-i\Psi} P e^{i\Psi}$ есть многочлен по (ξ'', η) с бесконечно дифференцируемыми по x коэффициентами. На $\mathbb{R}_{\xi''}^{n''} \times \mathbb{R}_{\eta}^n$ определим действие $\mathbb{R}_+$: $\lambda \circ (\xi'', \eta) = (\lambda \circ \xi'', \lambda^\mu \eta)$. Относительно него многочлен $e^{-i\Psi} P e^{i\Psi}$ разлагается в сумму квазиоднородных слагаемых степеней $l = 0, 1, \dots, m$. Пусть $H_l(x, \xi'', \eta)$ – слагаемое степени l . *Главным пучком символов оператора* P назовем функцию

$$\sigma_P(x, \xi'', \eta, h) = \sum_{l=m-\mu+1}^m h^{m-l} H_l(x, \xi'', \eta), \quad (x, \xi'', \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n''} \times \mathbb{R}^n, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Главный пучок символов однозначно определяется квазиоднородными составляющими $p_m, p_{m-1}, \dots, p_{m-\mu+1}$ полного символа. Если они являются вещественнозначными функциями, то $\sigma_P(x, \xi'', \eta, h)$ – вещественнозначная функция. В этом случае главные пучки символов исходного и сопряженного операторов равны.

Основной результат статьи относительно разрешимости на компактных подмножествах Ω уравнений вида $Pu = f$ с оператором P квазиглавнового типа с вещественнозначным главным пучком символов содержится в следующих двух теоремах. Для уравнений главного типа с вещественнозначными главными символами этот тип разрешимости исследован Дейстермаатом и Хёрмандером в работе [1]. Используемые обозначения функциональных пространств соответствуют общепринятым [2].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $P(x, D)$ – оператор квазиглавнового типа с вещественнозначным главным пучком символов, K – компактное подмножество в Ω и $K \times \mathbb{R}^n$ не содержит целиком никакой нулевой бихарактеристики. Тогда множество

$$N(K) = \{v \in \mathcal{E}'(K) \mid P^*v = 0\}$$

– конечномерное подпространство в $C_0^\infty(K)$, ортогональное к $P\mathcal{D}'(\Omega)$.

Положим

$$|\xi|_\rho = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^{2M_j} \right)^{1/(2M)}, \quad M = \prod_{j=1}^n \rho_j, \quad M_j = \frac{M}{\rho_j}.$$

Нетрудно проверить, что для любого числа $s \in \mathbb{R}$ функция $k(\xi) = (1 + |\xi|_\rho)^s$ является умеренно растущей весовой функцией в смысле определения 10.1.1 из [2]. Пусть $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Через $\widetilde{\varphi}u$ обозначим преобразование Фурье обобщенной функции $\varphi u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Говорят, что u принадлежит $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, если $(1 + |\xi|_\rho)^s \widetilde{\varphi}u(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть оператор $P(x, D)$ и компактное подмножество K удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда для любой $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ (соответственно $f \in C^\infty(\Omega)$), ортогональной к $N(K)$, существует $u \in H_{\text{loc}}^{s+m-\mu}(\Omega)$ (соответственно $u \in C^\infty(\Omega)$), являющееся решением уравнения $Pu = f$ в некоторой окрестности K .

Отметим, что из доказательства теоремы следует, что окрестность компакта K , в которой решение уравнения существует, не зависит от элемента f и порядка его гладкости s .

Пусть U – открытое подмножество Ω . Будем писать $U \Subset \Omega$, если замыкание $\bar{U}$ есть компактное подмножество в Ω . Пусть $U \Subset \Omega$ и $s \in \mathbb{R}$. Через $H^s(U)$ обозначим пространство обобщенных функций на U , являющихся сужениями функций из $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$. В частном случае, когда $K = \{x^0\}$, а x^0 – точка в Ω , из теоремы 1.2 имеем очевидное следствие:

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 и точка $x^0 \in \Omega$ имеет открытую окрестность $U \Subset \Omega$ такую, что множество $\bar{U} \times \mathbb{R}^n$ не содержит целиком никакой нулевой бихарактеристики. Тогда

- 1) существует окрестность V точки x^0 такая, что для любой функции $f \in C_0^\infty(V)$ найдется $u \in C^\infty(\bar{V})$, являющееся решением уравнения $Pu = f$ в V ;

- 2) для любого s существует окрестность $V \Subset \Omega$ точки x^0 такая, что для любой функции $f \in H^s(V)$ найдется $u \in H^{s+m-\mu}(V)$, являющаяся решением уравнения $Pu = f$ в V .

Рассмотрим в качестве примера определенный в $\mathbb{R}^2$ оператор

$$P = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Относительно весов $\rho = (1, 2)$ его взвешенный главный символ $p_2 = \xi_1^2 + x_1 \xi_2$. Он вещественнозначен, совпадает с главным пучком символов и

$$(p_{2,x_1})^2 + (p_{2,\xi_1})^2 \neq 0$$

на $\text{Char } P$. Проекция на $\mathbb{R}_x^2$ нулевой бихарактеристики, проходящей через точку $(x^0, \xi^0) \in \text{Char } P$, имеет вид

$$x_1(t) = x_1^0 + \xi_1^0 t - \frac{\xi_2^0}{2} t^2, \quad x_2(t) = x_2^0.$$

Символ p_2 не имеет нулевых бихарактеристик, проекции которых целиком содержатся в компактных подмножествах. Следовательно, уравнение $-u_{x_1 x_1} - ix_1 u_{x_2} = f$ обладает свойствами локальной разрешимости, указанными в теореме 1.3, в любой точке $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.3 является одновременно уточнением и обобщением на более широкий класс уравнений теоремы о локальной разрешимости, доказанной автором в [3]. Операторы, отличающиеся от операторов вида (1) тем, что множество мультииндексов, по которому происходит суммирование, задается конечным числом линейных неравенств, исследовались в работах Волевича и Гиндикина [4] и [5]. В них, в частности, получена априорная оценка, обобщающая характерную для операторов главного типа с вещественным главным символом оценку из работы Хёрмандера [6]. На ее основе доказана теорема о локальной разрешимости, близкая к теореме 1.3. Для операторов с одним неравенством, ограничивающим множество мультииндексов, теорема из [4] применима, если $p_{m,\xi'} \neq 0$ на $\text{Char } P$. Область приложения теоремы 1.3 несколько шире, так как для ее применения достаточно, чтобы $p_{m,x',\xi'} \neq 0$ на $\text{Char } P$.

В рассматриваемом классе уравнений описание свойств микролокальной регулярности решений удобно проводить, учитывая взвешивание производных. Напомним основные понятия. Пусть $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Говорят, что точка $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ не принадлежит взвешенному волновому фронту $\text{WF}_w(u)$, если существуют функция $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и квазиконическая окрестность $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ точки ξ^0 такие, что $\varphi(x^0) \neq 0$ и для любого числа $N \in \mathbb{Z}_+$ найдется константа $C = C(N, \varphi)$, с которой для всех $\xi \in \Gamma$ выполняется оценка

$$|\widetilde{\varphi}u(\xi)| \leq C(1 + |\xi|_\rho)^{-N}.$$

Множество $\text{WF}_w(u)$ – замкнутое квазиконическое подмножество в $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Его проекция на Ω совпадает с сингулярным носителем $u(x)$, $\text{WF}_w(Pu) \subseteq$

$WF_w(u) \subseteq WF_w(Pu) \cup \text{Char } P$. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Говорят, что u принадлежит H_{loc}^s в точке $x^0 \in \Omega$, если $u = u_1 + u_0$, где $u_1 \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ и $u_0 \in C^\infty$ вблизи x^0 . Говорят, что u принадлежит H_{loc}^s в точке $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, если $u = u_1 + u_0$, где $u_1 \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ и $(x^0, \xi^0) \notin WF_w(u_0)$. Следующие свойства эквивалентны:

- 1) $u \in H_{\text{loc}}^s(x^0)$;
- 2) $(\varphi u)(x) \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ для некоторой $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ с $\varphi(x^0) \neq 0$;
- 3) $u \in H_{\text{loc}}^s(x^0, \xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Далее, $u \in H_{\text{loc}}^s(x^0, \xi^0)$ тогда и только тогда, когда существуют $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ с $\varphi(x^0) \neq 0$ и квазиконическая окрестность $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ точки ξ^0 такие, что $(1+|\xi|_\rho)^s \widehat{\varphi u}(\xi) \in L_2(\Gamma)$. Если $(x^0, \xi^0) \notin \text{Char } P$, $\xi^0 \neq 0$, и $P(x, D)u \in H_{\text{loc}}^s(x^0, \xi^0)$, то $u \in H_{\text{loc}}^{s+m}(x^0, \xi^0)$. Указанные микролокальные свойства обобщенных функций хорошо известны (см., например, [7]–[10]).

Характерным свойством решений уравнения $Pu = f$ с оператором P квазиглавного типа и вещественнозначным главным пучком символов является инвариантность микролокальной регулярности относительно сдвигов вдоль нулевых бихарактеристик главного символа, точнее

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $P(x, D)$ – оператор квазиглавного типа с вещественнозначным главным пучком символов, γ – открытый интервал его нулевой бихарактеристики и точка $(x, \xi) \in \gamma$. Тогда из включений $u \in H_{\text{loc}}^s(x, \xi)$ и $P(x, D)u \in H_{\text{loc}}^{s-m+\mu}(\gamma)$ следует $u \in H_{\text{loc}}^s(\gamma)$.

Теоремы 1.1 и 1.2 выводятся из теоремы 1.4 подобно изотропному случаю с помощью функциональных рассуждений. Прямым следствием теоремы 1.4 является грубая теорема о структуре множества микролокальных особенностей решений:

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть оператор $P(x, D)$ и интервал бихарактеристики γ удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Тогда из $(x^0, \xi^0) \notin WF_w(u)$ и $\gamma \cap WF_w(P(x, D)u) = \emptyset$ следует $\gamma \cap WF_w(u) = \emptyset$.

В частности, из теоремы 1.5 имеем: если $\gamma \subset \text{Char } P$, $WF_w(Pu) \cap \gamma = \emptyset$ и $(x^0, \xi^0) \in WF_w(u) \cap \gamma$, то $\gamma \subset WF_w(u)$.

Для рассматриваемого класса операторов теорема 1.5 была доказана в работе Грушина и автора [7]. В [8] Ласкаром развит аппарат карлемановских оценок, приспособленный к исследованию микролокальных особенностей решений (псевдо)дифференциальных уравнений вида $Pu = f$ с операторами P , полные символы которых разлагаются в асимптотические ряды по квазиоднородным функциям целых степеней и не содержат квазиоднородных слагаемых порядков $t-1, \dots, t-\mu+1$, где t – порядок P , а μ – минимальный вес [8; определение 2.4]. В теореме 1.4 последнее требование ослаблено: квазиоднородные составляющие полного символа указанных порядков могут быть нетривиальными вещественнозначными функциями. Для уравнения $Pu = f$ с оператором P квазиглавного типа и вещественным взвешенным главным символом Ласкаром доказано [8; теорема 4.1'] распространение регулярности решений с пренебрежимо малой потерей гладкости: из $u \in H_{\text{loc}}^s(x, \xi)$ и $P(x, D)u \in H_{\text{loc}}^{s-m+\mu}(\gamma)$

следует $u \in H_{\text{loc}}^{s'}(\gamma)$ для всех $s' < s$. Теорема 1.4 ликвидирует “потерю”. Кроме того, в связи с [8] интересно также отметить, что “запрещенные” в ней компоненты полного символа могут, вообще говоря, играть решающую роль в пространстве регулярности решений (см. теорему 5.1 ниже).

§ 2. Вспомогательная оценка

В этом параграфе доказывается одна вспомогательная оценка (теорема 2.2), отражающая влияние микролокальной регулярности обобщенной функции на ее действие на пробную быстро осциллирующую функцию экспоненциального вида.

Предположим, что на открытом квазиконическом множестве $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ определены две бесконечно дифференцируемые квазиоднородные функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ степеней $m(f)$ и $m(g)$ соответственно. Тогда произведение $f(\xi) \cdot g(\xi)$ есть квазиоднородная функция степени $m(f) + m(g)$, производная $\partial_\xi^\alpha f(\xi)$ – квазиоднородная функция степени $m(f) - \langle \rho, \alpha \rangle$. Справедливо тождество Эйлера:

$$\mathfrak{E}_\rho f(\xi) = m(f) \cdot f(\xi), \quad \mathfrak{E}_\rho = \sum_{j=1}^n \rho_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Введенная функция $|\cdot|_\rho$ обладает следующими легко доказываемыми свойствами.

ЛЕММА 2.1. *Функция $|\cdot|_\rho$ положительно квазиоднородна степени 1 и удовлетворяет неравенствам*

$$|\xi + \eta|_\rho \leq |\xi|_\rho + |\eta|_\rho, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{1/\rho_j} \leq |\xi|_\rho \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{1/\rho_j}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Пусть Γ_j – открытые квазиконические подмножества в $\mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$, и $\lambda \circ_j : \Gamma_j \rightarrow \Gamma_j$ – действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$, определенные на них. Если отображение $\varkappa : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ перестановочно с действием группы $\mathbb{R}_+$ в том смысле, что $\varkappa(\lambda \circ_1 \xi) = \lambda \circ_2 \varkappa(\xi)$ для всех $\xi \in \Gamma_1$, и $f(\xi)$ – квазиоднородная функция на Γ_2 , то композиция $f(\varkappa(\xi))$ является квазиоднородной функцией степени $m(f)$. Конечная сумма квазиоднородных функций различных степеней называется *поликвазиоднородной*. Старшая степень квазиоднородности ненулевых слагаемых называется *порядком поликвазиоднородной функции*.

Будем писать $\Gamma_1 \Subset \Gamma$, если $\bar{\Gamma}_1 \cap \{\xi \mid |\xi|_\rho = 1\} \subset \Gamma$. С учетом взвешивания классы символов хёрмандеровского типа определяются следующим образом. Говорят, что функция $p(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \Gamma)$ принадлежит классу $S^m(\Omega \times \Gamma)$, $m \in \mathbb{R}$, если для любых компактного подмножества $K \subset \Omega$, квазиконического множества $\Gamma_1 \Subset \Gamma$ и любых мультииндексов α и $\beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ с некоторой константой $C_{\alpha, \beta} = C(K, \Gamma_1, \alpha, \beta)$ выполняется оценка

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|_\rho)^{m - \langle \rho, \alpha \rangle}, \quad x \in K, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad |\xi|_\rho \geq 1. \quad (4)$$

В том случае, когда константы $C_{\alpha,\beta}$ в оценке (4) можно выбрать не зависящими от K и Γ_1 , будем писать, что $p(x, \xi) \in S^m(\bar{\Omega} \times \bar{\Gamma})$. Очевидно, если $p(x, \xi) \in S^m(\Omega \times \Gamma)$, то $p(x, \xi) \in S^m(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Gamma}_1)$ для любых $\Omega_1 \Subset \Omega$ и $\Gamma_1 \Subset \Gamma$. Пусть I – открытый интервал в $\mathbb{R}$. Будем писать $f(t, x, \xi) \in C(\bar{I}; S^m(\bar{\Omega} \times \bar{\Gamma}))$, если f – непрерывная функция $t \in I$ со значениями в $S^m(\bar{\Omega} \times \bar{\Gamma})$ и оценки (4) выполняются равномерно по t .

Перейдем к описанию фазовых функций. Пусть I – открытый интервал в $\mathbb{R}$, U – открытое подмножество в Ω , Γ – открытое квазиконическое подмножество в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и (t^0, x^0, ξ^0) – точка в $I \times U \times \Gamma$. Предположим, что на $I \times U \times \Gamma$ определена вещественнозначная функция $\varphi(t, x, \xi) \in C(I; C^\infty(U \times \Gamma))$, удовлетворяющая следующим условиям:

P1) в пространстве $C(I; C^\infty(U \times \Gamma))$ существует предел

$$\phi(t, x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\mu} \varphi(t, x, \lambda \circ \xi);$$

P2) $\det \|\phi_{x_i, \xi_j}(t^0, x^0, \xi^0)\|_{i,j \in J'} \neq 0$.

Очевидно, функция $\phi(t, x, \xi) \in C(I; C^\infty(U \times \Gamma))$ вещественнозначна и положительно квазиоднородна по ξ степени μ . Из условия P1) следует, что исходная функция $\varphi(t, x, \xi)$ является непрерывной функцией переменной t со значениями в $S^\mu(U \times \Gamma)$.

Примером функции, удовлетворяющей условию P1), является вещественнозначная поликвазиоднородная по ξ функция

$$\varphi(t, x, \xi) = \sum_{l=1}^{\mu} \varphi_l(t, x, \xi),$$

где $\varphi_l(t, x, \xi) \in C(I; C^\infty(U \times \Gamma))$ – вещественнозначные квазиоднородные по ξ функции степеней l соответственно. В этом случае

$$\phi(t, x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\mu} \varphi(t, x, \lambda \circ \xi) = \varphi_\mu(t, x, \xi),$$

а условие P2) имеет вид

$$\det \|\varphi_{\mu, x_i, \xi_j}(t^0, x^0, \xi^0)\|_{i,j \in J'} \neq 0.$$

Пусть

$$\Phi(t, x, \xi) = \sum_{j \in J''} x_j \xi_j + \varphi(t, x, \xi).$$

Определим на Γ перестановочное с действием группы $\mathbb{R}_+$ отображение $\xi \mapsto \theta(\xi)$, положив $\theta_j(\xi) = \xi_j$ при $j \in J''$ и $\theta_j(\xi) = \phi_{x_j}(t^0, x^0, \xi)$ при $j \in J'$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u \in H_{\text{loc}}^s(x^0, \theta(\xi^0))$ и φ удовлетворяет условиям P1) и P2). Тогда существуют число $s_0 \in \mathbb{R}$, функция $\psi_u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, окрестность U_φ точки x^0 , квазиконические окрестности Γ_φ точки ξ^0 и Γ_u точки $\theta(\xi^0)$ и число $\delta_\varphi > 0$ такие, что

- 1) $\psi_u(x) = 1$ в некоторой окрестности точки x^0 , $\psi_u(x)u(x) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ и $(1 + |\theta|_\rho)^s \widetilde{\psi_u u}(\theta) \in L_2(\Gamma_u)$;
- 2) для любой функции $f \in C([t^0 - \delta_f, t^0 + \delta_f]; S^m(\overline{U}_\varphi \times \overline{\Gamma}_f))$, у которой $\text{supp}_x f \subseteq U_\varphi$ при $(t, \xi) \in [t^0 - \delta_f, t^0 + \delta_f] \times \overline{\Gamma}_f$, $\Gamma_f \subseteq \Gamma_\varphi$ и $0 < \delta_f < \delta_\varphi$, и для любого $\tilde{\Gamma} \Subset \Gamma_f$ с некоторой константой C при всех $t \in (t^0 - \delta_f, t^0 + \delta_f)$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \| (1 + |\xi|_\rho)^{s-m} (u(x), f(t, x, \xi)) e^{i\Phi(t, x, \xi)} \|_{L_2(\{\xi \in \tilde{\Gamma} \mid |\xi|_\rho \geq 1\})}^2 \\ & \leq C (\| \psi_u u \|_{H^{s_0}(\mathbb{R}^n)}^2 + \| (1 + |\theta|_\rho)^s \widetilde{\psi_u u}(\theta) \|_{L_2(\Gamma_u)}^2). \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Существование срезающей функции $\psi_u(x)$ с указанными свойствами вытекает из локальной конечности порядка обобщенной функции и включения $u \in H_{\text{loc}}^s(x^0, \theta(\xi^0))$. Заменяя функцию $u(x)$ на $\psi_u(x)u(x)$, при доказательстве второго утверждения можно считать, что $u(x)$ имеет компактный носитель и ее преобразование Фурье $\tilde{u}(\theta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией $\theta \in \mathbb{R}^n$, причем $(1 + |\theta|_\rho)^{s_0} \tilde{u}(\theta) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $(1 + |\theta|_\rho)^s \tilde{u}(\theta) \in L_2(\Gamma_u)$.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $t^0 = 0$, $x^0 = 0$ и $|\theta(\xi^0)|_\rho = 1$. Окрестности U_φ и Γ_φ будем искать в виде $U_\varphi = \{x \mid |x| < \delta_\varphi\}$ и $\Gamma_\varphi = \{\xi \neq 0 \mid |(\xi|_\rho^{-1}) \circ \xi - (\xi^0|_\rho^{-1}) \circ \xi^0|_\rho < \delta_\varphi\}$, зависящими от одного параметра $\delta_\varphi > 0$.

Пусть $\tau(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – вещественнозначная невозрастающая функция, причем $\tau(s) = 1$ при $s \leq 2^{-3/4}$ и $\tau(s) = 0$ при $s \geq 2^{-1/4}$. Положим $\chi(s) = \tau(2^{-1}s) - \tau(s)$. Тогда $0 \leq \chi(s) \leq 1$ для всех $s \in \mathbb{R}^1$, $\text{supp } \chi(s) \subseteq [2^{-3/4}, 2^{3/4}]$ и $\tau(2^{-k}s) + \sum_{l=k}^{+\infty} \chi(2^{-l}s) = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $s \in \mathbb{R}^1$. Предположим, что $\tilde{\Gamma} \Subset \Gamma_f \subseteq \Gamma_\varphi$. Пусть $\chi_0(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ – вещественнозначная неотрицательная положительно квазиоднородная степени 0 функция, причем $\chi_0(\xi) = 1$ при $\xi \in \tilde{\Gamma}$ и $\chi_0(\xi) = 0$ при $\xi \notin \Gamma_f$.

Левая часть неравенства (5) не превосходит величины

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau(2^{-k}|\xi|_\rho) F(t, \xi) d\xi + \sum_{l=k}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(2^{-l}|\xi|_\rho) F(t, \xi) d\xi, \quad (6)$$

где $F(t, \xi) = (1 + |\xi|_\rho)^{2(s-m)} \chi_0(\xi) |(u, f e^{i\Phi})(t, \xi)|^2$ и $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что при достаточно больших k и малых δ_φ указанная величина оценивается правой частью неравенства (5). Каждый член ряда в выражении (6) мажорируется произведением не зависящей от номера константы на соответствующий член ряда

$$\sum_{l=k}^{+\infty} 2^{(2(s-m)+|\rho|)l} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(|\xi|_\rho) \chi_0(\xi) |(u, f e^{i\Phi})|^2(t, (2^l) \circ \xi) d\xi, \quad (7)$$

где $|\rho| = \rho_1 + \dots + \rho_n$. Заметим, что номер k , с которого начинается суммирование, может быть выбран произвольно большим. Положим $\chi_1(\xi) = \chi(|\xi|_\rho) \chi_0(\xi)$ и рассмотрим интеграл

$$a(t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1(\xi) |(u, f e^{i\Phi})|^2(t, \lambda \circ \xi) d\xi.$$

ЛЕММА 2.3. *Существуют такие числа $\delta_0 > 0$ и $d > 1$, что при $0 < \delta_\varphi < \delta_0$ для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется константа C (не зависящая от u), с которой для всех $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ и $|t| < \delta_f$ выполняется оценка*

$$a(t, \lambda) \leq C \left(\lambda^{-N} \|u\|_{H^{s_0}}^2 + \lambda^{2(m-s)-|\rho|} \|(1 + |\eta|)^s \tilde{u}(\eta)\|_{L_2(\Gamma_u \cap \{d^{-1} < \lambda^{-1} |\eta|_\rho < d\})}^2 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Из равенства Парсеваля получаем

$$(u, f e^{i\Phi})(t, \lambda \circ \xi) = (2\pi)^{-n} \lambda^{|\rho|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(\lambda \circ \eta) F(t, \lambda \circ \eta, \lambda \circ \xi) d\eta,$$

где $F(t, \eta, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(t, x, \xi) e^{i(\langle x, \eta \rangle - \Phi(t, x, \xi))} dx$ и черта над функцией означает комплексное сопряжение. На носителе подынтегрального выражения, определяющего $a(t, \lambda)$, $\xi \in \Upsilon_\varphi = \{\xi \in \Gamma_\varphi \mid 2^{-3/4} \leq |\xi|_\rho \leq 2^{3/4}\}$. Если δ_φ достаточно мало, то на Γ_φ с некоторой постоянной $C > 1$ выполняется неравенство

$$C^{-1} |\xi|_\rho \leq |\theta(\xi)|_\rho \leq C |\xi|_\rho.$$

Поэтому при малых δ_φ на Υ_φ с некоторым $R > 1$ справедливо неравенство $R^{-1} \leq |\theta(\xi)|_\rho \leq R$. Пусть $\Gamma'_\delta = \{\eta \neq 0 \mid |(|\eta|_\rho^{-1}) \circ \eta - \theta(\xi^0)|_\rho < \delta\}$ – квазиконическая окрестность точки $\theta(\xi^0)$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $\Gamma'_{2\delta} \subseteq \Gamma_u$. Будем предполагать, что δ_φ столь мало, что $\theta(\Gamma_\varphi) \subset \Gamma'_\delta$. Нетрудно показать, что для выбранного δ найдется положительная константа C , с которой

$$|\eta - \theta|_\rho \geq C(|\eta|_\rho + |\theta|_\rho), \quad \theta \in \bar{\Gamma}'_\delta, \quad \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{2\delta}.$$

В силу леммы 2.1

$$|\eta - (\lambda^{-1}) \circ \Phi_x(t, x, \lambda \circ \xi)|_\rho \geq |\eta - \theta(\xi)|_\rho - |\phi_{x'}(t^0, x^0, \xi) - (\lambda^{-1}) \circ \varphi_x(t, x, \lambda \circ \xi)|_\rho.$$

Пусть $\mathcal{H} = \{\eta \in \Gamma'_{2\delta} \mid d^{-1} < |\eta|_\rho < d\}$, $d = 4R$, и $\mathcal{H}^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}$. При достаточно малом δ_φ для $(t, x, \xi) \in [-\delta_\varphi, \delta_\varphi] \times U_\varphi \times \Upsilon_\varphi$, $\eta \in \mathcal{H}^c$ и $\lambda \geq (\delta_\varphi)^{-1}$ с некоторой положительной константой C справедливо неравенство

$$\zeta(t, x, \xi, \eta, \lambda) = |\eta - (\lambda^{-1}) \circ \Phi_x(t, x, \lambda \circ \xi)|_\rho \geq C(|\eta|_\rho + |\xi|_\rho).$$

Положим $\zeta_j(t, x, \xi, \eta, \lambda) = \eta_j - \lambda^{-\rho_j} \Phi_{x_j}(t, x, \lambda \circ \xi)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и определим на U_φ векторное поле

$$X = \zeta(t, x, \xi, \eta, \lambda)^{2M} \sum_{j=1}^n (\zeta_j(t, x, \xi, \eta, \lambda))^{2M/\rho_j - 1} \lambda^{-\rho_j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad M = \prod_{j=1}^n \rho_j,$$

зависящее от параметров $(t, \xi) \in [-\delta_\varphi, \delta_\varphi] \times \Upsilon_\varphi$, $\eta \in \mathcal{H}^c$ и $\lambda \geq \delta_\varphi^{-1}$. Используя равенство $X e^{i(\langle x, \lambda \circ \eta \rangle - \Phi(t, x, \lambda \circ \xi))} = i e^{i(\langle x, \lambda \circ \eta \rangle - \Phi(t, x, \lambda \circ \xi))}$ и интегрируя по частям, нетрудно доказать, что для любых натуральных чисел N_1 и N_2 существует константа C , с которой для всех $(t, \xi) \in [-\delta_f, \delta_f] \times \Upsilon_\varphi$, $\eta \in \mathcal{H}^c$ и $\lambda \geq \delta_\varphi^{-1}$ выполняется оценка

$$|F(t, \lambda \circ \eta, \lambda \circ \xi)| \leq C \lambda^{-N_1} (1 + |\eta|_\rho)^{-N_2}.$$

Теперь, применяя неравенство Коши–Буняковского для оценки величины $\left| \int_{\mathcal{H}^c} \tilde{u}(\lambda \circ \eta) F(t, \lambda \circ \eta, \lambda \circ \xi) d\eta \right|$, после несложных преобразований получаем, что если δ_φ достаточно мало, то при $|t| < \delta_f$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ для любого N $a(t, \lambda)$ при подходящем выборе константы C можно оценить сверху произведением этой константы на

$$\lambda^{-N} \|u\|_{H^{s_0}}^2 + \lambda^{2|\rho|} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1(\xi) \left| \int_{\mathcal{H}} \tilde{u}(\lambda \circ \eta) F(t, \lambda \circ \eta, \lambda \circ \xi) d\eta \right|^2 d\xi.$$

Изменив порядок интегрирования в последнем интеграле, преобразуем его к виду

$$I = \int_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} K_\lambda(\lambda \circ \eta, \lambda \circ \zeta) \tilde{u}(\lambda \circ \eta) \overline{\tilde{u}}(\lambda \circ \zeta) d\eta d\zeta,$$

где через $K_\lambda(\eta, \zeta)$ обозначено ядро

$$\begin{aligned} K_\lambda(\eta, \zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1(\xi) F(t, \eta, \lambda \circ \xi) \overline{F}(t, \zeta, \lambda \circ \xi) d\xi \\ &= \int_{U_\varphi \times U_\varphi} e^{i(\langle x, \eta \rangle - \langle y, \zeta \rangle)} \left(\int_{\mathcal{G}_{3/4}} \chi_1(\xi) \bar{f}(t, x, \lambda \circ \xi) f(t, y, \lambda \circ \xi) \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\Phi(t, y, \lambda \circ \xi) - i\Phi(t, x, \lambda \circ \xi)} d\xi \right) dx dy, \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_R = \{\xi \in \Gamma_\varphi \mid R^{-1} < |\xi|_\rho < R\}$. Если δ_φ достаточно мало, то при любых фиксированных $x, y \in U_\varphi$, $|t| < \delta_\varphi$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ отображение $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$, определенное по правилу

$$\tilde{\xi}_j = \lambda^{-\rho_j} \int_0^1 \Phi_{x_j}(t, x + s(y - x), \lambda \circ \xi) ds, \quad j = 1, \dots, n,$$

является диффеоморфизмом области $\mathcal{G}_{3/4}$ на некоторое открытое подмножество в шаровом слое $\mathcal{S}_R = \{\tilde{\xi} \mid R^{-1} < |\tilde{\xi}|_\rho < R\}$ (число R зависит от φ и δ_φ). Поскольку $\chi_1(\xi) \bar{f}(t, x, \lambda \circ \xi) f(t, y, \lambda \circ \xi) \in C_0^\infty(U_\varphi \times U_\varphi \times \mathcal{G}_{3/4})$ при $|t| < \delta_f$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$, то можно считать, что полученная заменой переменных $\xi = \xi(t, x, y, \tilde{\xi}, \lambda)$ функция принадлежит $C_0^\infty(U_\varphi \times U_\varphi \times \mathcal{S}_R)$. Отсюда для ядра $K_\lambda(\eta, \zeta)$ получаем представление

$$K_\lambda(\eta, \zeta) = \int_{\mathcal{S}_R} K_\lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta) d\tilde{\xi},$$

где

$$K_\lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta) = \int_{U_\varphi \times U_\varphi} e^{i(\langle x, \eta - \lambda \circ \tilde{\xi} \rangle - \langle y, \zeta - \lambda \circ \tilde{\xi} \rangle)} F_1(t, x, y, \tilde{\xi}, \lambda) dx dy.$$

При $|t| < \delta_f$, $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}_R$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ функция $F_1(t, x, y, \tilde{\xi}, \lambda) \in C_0^\infty(U_\varphi \times U_\varphi)$ и для любых $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_+)^n$ найдутся константы $C_{\alpha, \beta}$, с которыми при $|t| < \delta_f$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ справедливы оценки

$$\sup_{U_\varphi \times U_\varphi \times \mathcal{S}_R} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta F_1(t, x, y, \tilde{\xi}, \lambda)| \leq C_{\alpha, \beta} \lambda^{2m}.$$

Положим $\Lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta) = |\eta - \tilde{\xi}|_\rho + |\zeta - \tilde{\xi}|_\rho + |\eta - \zeta|_\rho$. Интегрируя по частям, нетрудно доказать, что для любого неотрицательного числа r существует константа C_r , с которой выполняется оценка

$$|K_\lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta)| \leq C_r \lambda^{2m} (1 + \Lambda(\lambda \circ \tilde{\xi}, \eta, \zeta))^{-r}, \quad \tilde{\xi} \in \mathcal{S}_R, \quad \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем число r так, чтобы $r > 2(|\rho| + |s|)$. Из неравенства треугольника для функции $|\cdot|_\rho$ вытекает, что для любого $l \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$(1 + |\eta|_\rho)^l \leq (1 + \Lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta))^{|l|} (1 + |\tilde{\xi}|_\rho)^l, \quad \tilde{\xi}, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда при $\tilde{\xi} \in \mathcal{S}_R$ и $\lambda > \delta_\varphi^{-1}$ получаем

$$(1 + \lambda|\eta|_\rho)^l \leq C \lambda^l (1 + \lambda \Lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta))^{|l|}, \quad \tilde{\xi}, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

где C – некоторая константа. Положим $\tilde{u}_0(\eta) = (1 + |\eta|_\rho)^s \tilde{u}(\eta)$. Тогда, оценивая сверху I , с некоторой другой константой C справедливо

$$I \leq C \lambda^{2(m-s)} \int_{\mathcal{S}_R \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}} \frac{|\tilde{u}_0(\lambda \circ \eta)| |\tilde{u}_0(\lambda \circ \zeta)| d\xi d\eta d\zeta}{(1 + \lambda \Lambda(\tilde{\xi}, \eta, \zeta))^{r-2|s|}}. \quad (8)$$

Следующая лемма есть вариант известной леммы Шура.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\xi, \eta, \zeta)$ – непрерывная неотрицательная функция на $\mathcal{S}_R \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, причем величины

$$\mathcal{M}_1 = \sup_{\eta \in \mathcal{H}} \int_{\mathcal{S}_R \times \mathcal{H}} \mathcal{K} d\xi d\zeta, \quad \mathcal{M}_2 = \sup_{\zeta \in \mathcal{H}} \int_{\mathcal{S}_R \times \mathcal{H}} \mathcal{K} d\xi d\eta$$

конечны. Тогда для любых $v_j \in L_2(\mathcal{H})$, $j = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\int_{\mathcal{S}_R \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}} \mathcal{K}(\xi, \eta, \zeta) |v_1(\eta)| |v_2(\zeta)| d\xi d\eta d\zeta \leq \sqrt{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2} \|v_1\|_{L_2(\mathcal{H})} \|v_2\|_{L_2(\mathcal{H})}.$$

Применим лемму 2.4 для оценки правой части (8). Ввиду симметрии

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \leq \lambda^{-2|\rho|} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|_\rho + |\zeta - \eta|_\rho)^{-r+2|s|} d\xi d\zeta \leq C \lambda^{-2|\rho|},$$

где C – некоторая константа. Применение леммы 2.4, очевидно, завершает доказательство леммы 2.3.

Продолжим доказательство теоремы 2.2. Выберем номер k , с которого начинается суммирование ряда (7), так, чтобы $2^l > \delta_\varphi$ при $l \geq k$. Тогда из леммы 2.3, выбрав $N = 2(s - m) + |\rho| + 1$, получаем, что l -й член ряда (7) с точностью до постоянного множителя оценивается сверху выражением

$$2^{-l} \|u\|_{H^{s_0}}^2 + \|(1 + |\eta|)^s \tilde{u}(\eta)\|_{L_2(\Gamma_u \cap \{d^{-1} < 2^{-l} |\eta|_\rho < d\})}^2.$$

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $2^q \geq d$. Заметим, что при фиксированном q произвольная точка $\eta \in \mathbb{R}^n$ не может принадлежать более чем $2q + 1$ множеству $V_l = \{\zeta \mid 2^{-q} \leq$

$2^{-l}|\xi|_\rho \leq 2^q\}$, где $l \in \mathbb{Z}$. В самом деле, $\eta \in V_l$ тогда и только тогда, когда $-q + \log_2 |\eta|_\rho \leq l \leq q + \log_2 |\eta|_\rho$, но в любом числовом интервале длины $2q$ количество точек l с целыми координатами не превышает $2q + 1$. Кроме того, заметим, что $V_l \cap V_{l'} = \emptyset$ при $|l - l'| > 2q$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{l=k}^{+\infty} \|(1 + |\eta|)^s \tilde{u}(\eta)\|_{L_2(\Gamma_u \cap \{d^{-1} < 2^{-l}|\eta|_\rho < d\})}^2 \leq (2q + 1) \|(1 + |\eta|)^s \tilde{u}(\eta)\|_{L_2(\Gamma_u)}^2.$$

Таким образом, ряд в (6) оценивается правой частью неравенства (5). Для оценки первого слагаемого в (6) удобно воспользоваться следующей легко доказываемой леммой.

ЛЕММА 2.5. Пусть $u(x) \in H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$, $K \in \mathbb{R}^n$ и целое неотрицательное число $m \geq -s_0$. Тогда существует константа $C = C(s, m, K)$, с которой для любых функций $v(x) \in C_0^\infty(K)$ справедливо неравенство

$$|(u, v)| \leq C \|u\|_{H^{s_0}(\mathbb{R}^n)} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha v(x)|.$$

Носитель подынтегральной функции первого слагаемого в (6) содержится в компактном множестве $\Gamma_f \cap \{|\xi|_\rho \leq 2^{k-1/4}\}$. Применяя лемму 2.5 для оценки $|(u, f e^{i\Phi})(t, \xi)|$, получаем, что при $|t| < \delta_f$ в точках этого множества выполняется неравенство

$$|(u, f e^{i\Phi})(t, \xi)| \leq C \|u\|_{H^{s_0}(\mathbb{R}^n)},$$

где C – некоторая константа. Отсюда следует, что первое слагаемое в (6) также оценивается правой частью неравенства (5). Теорема доказана.

§ 3. Построение асимптотического решения

Настоящий параграф посвящен построению приближенного решения параметрического семейства задач Коши

$$\begin{cases} (|\xi|_\rho^{m-\mu} D_t - P^*(x, D_x))u = 0; \\ u|_{t=0} = g(x) e^{i\langle x, \xi \rangle}, \end{cases}$$

с финитной функцией g в начальном условии. Доказывается, что для операторов P квазиглавногo типа с вещественным главным пучком символов локальное асимптотическое решение может быть найдено в виде произведения экспоненты от поликвазиоднородной по параметру ξ фазовой функции на формальный ряд из квазиоднородных функций убывающих степеней.

Пусть $P(x, D)$ – дифференциальный оператор вида (1) и $p_l(x, \xi)$ – квазиоднородные составляющие его полного символа степеней $l = 0, 1, \dots, m$ соответственно. Нетрудно проверить, что функции $H_k(x, \xi'', \eta)$, участвующие в определении пучка σ_P , выражаются через $p_l(x, \xi)$ по формулам

$$H_k(x, \xi'', \eta) = \sum_{\{l, \alpha'' \mid l - \langle \rho, \alpha'' \rangle + \mu |\alpha''| = k\}} \frac{1}{\alpha''!} p_l^{(\alpha'')}(x, \xi'', \eta') (\eta'')^{\alpha''}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $\alpha'' \in (\mathbb{Z}_+)^n$ – мультииндексы, у которых $\alpha_j = 0$ при $j \in J'$, и

$$p_l^{(\alpha'')}(x, \xi) = (\partial_\xi)^{\alpha''} p_l(x, \xi).$$

Пучок σ_P является (ξ'', η, h) -квазиоднородной функцией:

$$\sigma_P(x, \lambda \circ \xi'', \lambda \circ \eta, \lambda h) = \lambda^m \sigma_P(x, \xi'', \eta, h).$$

Отметим также, что при $j \in J''$ функции $\partial_{\xi_j''} \sigma_P|_{h=1}$ и $(\partial_{\xi_j''} \sigma_P - \partial_{\eta_j} \sigma_P)|_{h=1}$ представляют собой суммы (ξ'', η) -квазиоднородных функций степеней не выше $m - \rho_j$ и $m - 2\mu$ соответственно.

Пусть $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $\delta > 0$. Положим

$$\begin{aligned} I_\delta &= \{t \mid |t| < \delta\}, \\ V_\delta &= \{x \mid |x - x^0| < \delta\}, \\ \Gamma_\delta &= \{\xi \mid \xi \neq 0, \ |(|\xi|_\rho)^{-1} \circ \xi - (|\xi^0|_\rho)^{-1} \circ \xi^0|_\rho < \delta\}, \\ W_\delta &= I_\delta \times V_\delta \times \Gamma_\delta, \end{aligned}$$

W_δ – квазиконическое по $\xi \in \Gamma_\delta$ множество. Пусть Qh_l – совокупность функций $f = f(t, x, \xi) \in C^\infty(W_\delta)$, квазиоднородных по ξ степени l , Ph_l – совокупность поликвазиоднородных функций, порожденных квазиоднородными слагаемыми степеней не превышающих l . Совокупность дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{R} = \sum_{\langle \rho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(t, x, \xi) D_x^\alpha, \quad a_\alpha \in \text{Ph}_l,$$

обозначим через $\text{Op}_{m,l}$. Нетрудно проверить, что

ЛЕММА 3.1. Если $\varphi \in \text{Ph}_\mu$, то $\sigma_P(x, \xi'', \varphi_x, 1) \in \text{Ph}_m$ и $\sigma_{P, \eta_j}(x, \xi'', \varphi_x, 1) \in \text{Ph}_{m-\rho_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\varphi_{\mu-j} \in \text{Ph}_{\mu-j}$, $j = 0, 1, \dots, \mu - 1$, $f_j \in \text{Ph}_{-j}$, где $j = 0, 1, \dots, N$ и $N \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\varphi = \sum_{j=0}^{\mu-1} \varphi_{\mu-j}$, $\Phi = \sum_{j \in J''} x_j \xi_j + \varphi$ и $f = \sum_{j=0}^N f_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Справедливо $e^{-i\Phi} P(x, D) f e^{i\Phi} \in \text{Ph}_m$, причем

$$\begin{aligned} e^{-i\Phi} P(x, D) f e^{i\Phi} &= \sum_{l=0}^N \left(\sigma_P(x, \xi'', \varphi_x, 1) f_l + \sum_{j=1}^n \sigma_{P, \eta_j}(x, \xi'', \varphi_x, 1) D_{x_j} f_l \right. \\ &\quad \left. + q_\Phi(t, x, \xi'') f_l + \sum_{l' \leq l - \mu} L_{\Phi, l', l} f_{l'} \right) + \sum_{l=0}^N r_{\Phi, l, N} f_l, \end{aligned}$$

где $q_\Phi \in \text{Ph}_{m-\mu}$, $L_{\Phi, l', l} \in \text{Op}_{m, m-\mu+l'-l}$ и $r_{\Phi, l, N} \in \text{Op}_{m, m-\mu-N+l-1}$ – дифференциальные операторы с коэффициентами, полиномиально зависящими от производных функции Φ .

Доказательство предложения простое. Оно состоит в последовательном упорядочении по убыванию степеней квазиоднородности слагаемых в выражении

$e^{-i\Phi}P(x, D)f e^{i\Phi} \in \text{Ph}_m$ после выполнения дифференцирования. Следует отметить, что функция q_Φ и операторы $L_{\Phi, l, N}$ не зависят от числа N и в силу леммы 3.1

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{P, \eta_j}(x, \xi'', \varphi_x, 1) D_{x_j} f_l - \sum_{j \in J'} \sigma_{P, \eta_j}(x, \xi'', \varphi_x, 1) D_{x_j} f_l \in \text{Ph}_{m-\mu-l-1}.$$

Кроме того, $r_{\Phi, l, N} f_l \in \text{Ph}_{m-\mu-1-N}$. Поэтому максимальная степень квазиоднородности этих слагаемых не превосходит $m - \mu - 1 - N$.

Если символ p_m вещественнозначен, то задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx'_j}{dt} = -|\xi|_\rho^{\mu-m} p_{m, \xi_j}(y'', x', \xi'', \eta'), & x'_j|_{t=0} = y'_j; \\ \frac{d\eta'_j}{dt} = |\xi|_\rho^{\mu-m} p_{m, x_j}(y'', x', \xi'', \eta'), & \eta'_j|_{t=0} = \xi'_j, \quad j \in J', \end{cases} \quad (9)$$

имеет решение $(x'(t, y, \xi), \eta'(t, y, \xi))$, определенное в некоторой окрестности точки $(0, x^0, \xi^0)$. Вследствие квазиоднородности p_m функции $x'(t, y, \xi)$ ξ -квазиоднородны степени 0, а функции $\eta'(t, y, \xi)$ – степени μ . Поэтому если число δ взять достаточно малым, то можно считать, что в W_δ определены функции $(x'(t, y, \xi), \eta'(t, y, \xi))$, удовлетворяющие (9), причем $x'(t, y, \xi) \in \text{Qh}_0$ и $\eta'(t, y, \xi) \in \text{Qh}_\mu$. Уменьшая в случае необходимости δ еще раз, можно считать, что при всех $(t, \xi) \in I_\delta \times \Gamma_\delta$ отображение $\varkappa_{t, \xi}: y \in V_\delta \mapsto x$, где $x' = x'(t, y, \xi)$, а $x'' = y''$, является диффеоморфизмом. Отметим также, что при $t \in I_\delta$ точка $(x'(t, x^0, \xi^0), x''^0, \xi'(t, x^0, \xi^0), \xi''^0)$ лежит на бихарактеристике символа p_m , проходящей через (x^0, ξ^0) .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть P – оператор квазиглавного типа с вещественным главным пучком символов и $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда существуют число $\delta > 0$ и вещественнозначная функция

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\mu-1} \varphi_{\mu-j}(t, x, \xi), \quad (t, y, \xi) \in W_\delta, \quad \varphi_{\mu-j} \in \text{Qh}_{\mu-j},$$

такие, что $\varphi_{\mu, x'}(t, \varkappa_{t, \xi}(y), \xi) = \eta'(t, y, \xi)$ и для любой $g \in C_0^\infty(V_\delta)$ найдутся $f_j(t, x, \xi) \in \text{Qh}_{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\text{supp}_x f_j \subseteq \varkappa_{t, \xi}(\text{supp } g)$ при всех $(t, \xi) \in I_\delta \times \Gamma_\delta$ и для любого $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{cases} e^{-i\Phi}(|\xi|_\rho^{m-\mu} D_t - P^*) e^{i\Phi} \sum_{l=0}^N f_l = \sum_{l=0}^N \mathcal{R}_{l, N} f_l; \\ e^{i\Phi} \sum_{l=0}^N f_l \Big|_{t=0} = e^{i\langle x, \xi \rangle} g(x), \end{cases} \quad (10)$$

где $\Phi = \sum_{j \in J''} x_j \xi_j + \varphi$ и $\mathcal{R}_{l, N} \in \text{Op}_{m, l+m-\mu-N-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Поскольку $\mathcal{R}_{l, N} f_l \in \text{Ph}_{m-\mu-1-N}$, то с ростом N наибольшая степень квазиоднородности слагаемых в правой части первого из равенств системы (10) убывает.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Включение $\text{supp}_x f_j \subseteq \varkappa_{t,\xi}(\text{supp } g)$ позволяет контролировать x -носители функций f_j . При доказательстве теоремы 1.4 это обстоятельство используется дважды. Во-первых, из непрерывности в точке $(0, \xi^0, x^0)$ отображения $\varkappa_{t,\xi}(y)$ и квазиоднородности степени 0 по ξ вытекает, что для любой наперед заданной окрестности точки x^0 найдутся такие окрестности точки $t = 0$, квазиконическая окрестность точки ξ^0 и окрестность точки x^0 , что если носитель g содержится в последней окрестности, а параметры t и ξ принадлежат подобранным окрестностям точек $t = 0$ и ξ^0 соответственно, то x -носитель любой функции f_j содержится в наперед заданной окрестности. Во-вторых, при фиксированном значении t вследствие непрерывности в точке (t, ξ^0, x^0) отображения $\varkappa_{t,\xi}(y)$ и отмеченной квазиоднородности для любой наперед заданной окрестности точки $\varkappa_{t,\xi^0}(x^0)$ найдутся такие квазиконическая окрестность точки ξ^0 и окрестность точки x^0 , что если носитель g содержится в последней окрестности, а параметр ξ принадлежит подобранной окрестности точки ξ^0 , то x -носитель любой функции f_j содержится в наперед заданной окрестности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Если фазовую функцию $\varphi \in \text{Ph}_\mu$ и амплитудные $f_j \in \text{Qh}_{-\mu}$ подобрать так, чтобы для любого N первая сумма в правой части равенства предложения 3.2 принадлежала $\text{Ph}_{m-\mu-N-1}$, то построенный ряд будет удовлетворять первому из равенств системы (10). Доказательство проводится в два этапа. Сначала доказывается существование фазовой функции, а затем – ряда амплитудных функций. Из условий теоремы следует, что $\sigma_P = \sigma_{P^*}$. Фазовую функцию построим как решение задачи

$$\begin{cases} |\xi|_\rho^{m-\mu} \varphi_t - \sigma_P(x, \xi'', \varphi_x, 1) \in \text{Ph}_{m-\mu}; \\ \varphi|_{t=0} = \sum_{j \in J'} x_j \xi_j. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда из предложения 3.2 с соответственно измененными $q_\Phi \in \text{Ph}_{m-\mu}$, $L_{\Phi,l}, l \in \text{Op}_{m,m-\mu+l'-l}$ и $r_{\Phi,l,N} \in \text{Op}_{m,m-\mu-N+l-1}$ последует равенство

$$\begin{aligned} & e^{-i\Phi} (|\xi|_\rho^{m-\mu} D_t - P^*) e^{i\Phi} \sum_{l=0}^N f_l \\ &= \sum_{l=0}^N \left(\left(|\xi|_\rho^{m-\mu} D_t - \sum_{j=1}^n \sigma_{P,\eta_j} D_{x_j} \right) f_l - q_\Phi f_l - \sum_{l' \leq l-\mu} L_{\Phi,l',l} f_{l'} \right) - \sum_{l=0}^N r_{\Phi,l,N} f_l. \end{aligned} \quad (12)$$

Построение фазовой функции. Пусть $\tilde{\Gamma}_\delta = \{(\xi, h) \mid \xi \in \Gamma_\delta, |h| < \delta|\xi|_\rho\}$. При достаточно малом δ на $\tilde{W}_\delta = I_\delta \times V_\delta \times \tilde{\Gamma}_\delta$ существует вещественнозначное квазиоднородное по (ξ, h) решение $\psi = \psi(t, x, \xi, h) \in C^\infty(\tilde{W}_\delta)$ задачи Коши

$$\begin{cases} |\xi|_\rho^{m-\mu} \psi_t - \sigma_P(x, \xi'', \psi_x, h) = 0; \\ \psi|_{t=0} = \sum_{j \in J'} x_j \xi_j. \end{cases} \quad (13)$$

Положим

$$\varphi_{\mu-j} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \psi}{\partial h^j}(t, x, \xi, 0).$$

Тогда $\varphi_{\mu-j} \in \text{Qh}_{\mu-j}$ и $\varphi = \sum_{j=0}^{\mu-1} \varphi_{\mu-j} \in \text{Ph}_{\mu}$ есть вещественнозначная функция, удовлетворяющая начальному условию задачи (11). Покажем, что $G(t, x, \xi) = (|\xi|_{\rho}^{m-\mu} \varphi_t - \sigma_P(x, \xi'', \varphi_x, 1)) \in \text{Ph}_{m-\mu}$. Так как

$$\lambda^{\mu} \psi(t, x, \xi, \lambda^{-1}) = \varphi(t, x, \lambda \circ \xi) + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \frac{\partial^{\mu} \psi}{\partial h^{\mu}}(t, x, \xi, s\lambda^{-1}) ds$$

и ψ есть решение дифференциального уравнения задачи Коши (13), то для произвольного компактного подмножества $K \subset W_{\delta}$ найдется константа C_K , с которой при достаточно больших λ справедливо неравенство

$$\sup_{(t,x,\xi) \in K} |G(t, x, \lambda \circ \xi)| \leq C_K \lambda^{m-\mu}.$$

Поскольку G – поликвазиоднородная функция, то $G \in \text{Ph}_{m-\mu}$. Итак, φ есть решение задачи (11).

Заметим, что старшая часть φ_{μ} функции φ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \varphi_{\mu,t} - |\xi|_{\rho}^{\mu-m} p_m(x, \xi'', \varphi_{\mu,x'}) = 0; \\ \varphi_{\mu}|_{t=0} = \sum_{j \in J'} x_j \xi_j. \end{cases}$$

Из теории Гамильтона–Якоби следует, что $\varphi_{\mu,x'}(t, \varkappa_{t,\xi}(y), \xi) = \eta'(t, y, \xi)$.

Построение амплитудных функций. Для вывода уравнений, определяющих члены ряда амплитудных функций, воспользуемся разложением (12). Поскольку $r_{\Phi,l,N} f_l \in \text{Ph}_{m-\mu-N-1}$, то, последовательно в соответствии с убыванием степени квазиоднородности приравнявая к нулю слагаемые в правой части разложения, получим цепочку уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 f_0 + q_0 f_0 = 0; \\ \mathcal{L}_0 f_l + q_0 f_l + \sum_{l' \leq l-1} \mathcal{L}_{l',l} f_{l'} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

где $\mathcal{L}_0 = \partial_t - |\xi|_{\rho}^{\mu-m} \sum_{j \in J'} p_{m,\xi_j}(x, \xi'', \varphi_{\mu,x'}) \partial_{x_j}$, $q_0 = q_0(t, x, \xi) \in \text{Qh}_0$ и $\mathcal{L}_{l',l} = \mathcal{L}_{l',l}(t, x, \xi, D_x) \in \text{Op}_{m,l'-l}$. Заметим, что операторы $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_{l',l}$ и функция q_0 не зависят от N . Дополним цепочку уравнений начальными условиями

$$f_0|_{t=0} = g(x), \quad f_l|_{t=0} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

Замена координат $x_j'' = y_j''$ при $j \in J''$ и $x_j' = x_j'(t, y, \xi)$ при $j \in J'$, где функции $x_j'(t, y, \xi)$ – компоненты решения задачи (9), выпрямляет векторное поле $\mathcal{L}_0$. В новых координатах задача Коши принимает вид

$$\begin{cases} \partial_t f_0 + \tilde{q}_0 f_0 = 0, \quad f_0|_{t=0} = g(y); \\ \partial_t f_l + \tilde{q}_0 f_l + \sum_{l' \leq l-1} \tilde{\mathcal{L}}_{l',l} f_{l'} = 0, \quad f_l|_{t=0} = 0, \quad l \geq 1. \end{cases}$$

Теперь, очевидно, если число δ взять достаточно малым, то для любой функции $g \in C_0^\infty(V_\delta)$ существуют функции $f_j(t, y, \xi) \in \text{Qh}_{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие последней системе задач Коши и включениям $\text{supp}_y f_j \subseteq \text{supp } g$ при $(t, \xi) \in I_\delta \times \Gamma_\delta$. Возвращаясь в исходные координаты, нетрудно завершить доказательство теоремы.

§ 4. Доказательства основных теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Поскольку из $u \in H_{\text{loc}}^s(x, \xi)$ следует, что $u \in H_{\text{loc}}^s$ в некоторой окрестности точки (x, ξ) , то для доказательства теоремы достаточно показать, что множество $\{(x, \xi) \in \gamma \mid u \in H_{\text{loc}}^s(x, \xi)\}$ содержит предельные точки, принадлежащие γ . Пусть (x^0, ξ^0) – такая предельная точка. Достаточно доказать, что для любой функции $g \in C_0^\infty(\Omega)$, носитель которой сосредоточен в достаточно малой окрестности точки x^0 , выполняется включение

$$(1 + |\xi|_\rho)^s(u, ge^{i\langle x, \xi \rangle}) \in L_2(\Gamma \cap \{|\xi|_\rho > 1\}),$$

где Γ – достаточно малая квазиконическая окрестность точки ξ^0 . В силу теоремы 3.3 существует такое число $\delta > 0$, что для каждой функции g с носителем, содержащимся в окрестности V_δ точки x^0 , при $|t| < \delta$ и $\xi \in \Gamma_\delta$ задача Коши (10) имеет асимптотическое решение вида

$$v_g = e^{i\Phi} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t, x, \xi), \quad \Phi = \sum_{j \in J''} x_j \xi_j + \sum_{j=0}^{\mu-1} \varphi_{\mu-j}(t, x, \xi).$$

Здесь и ниже используются обозначения, введенные в теореме 3.3. Выберем число $N \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $N > s + |\rho|/2$. Отображение $\varkappa_{t, \xi}(y)$ непрерывно по t , ξ и y . Поэтому если положительное число δ_1 ($< \delta$) достаточно мало, то носители $\text{supp}_x f_j$ всех функций f_j содержатся при $(t, \xi) \in I_{\delta_1} \times \Gamma_{\delta_1}$ в компактном подмножестве множества Ω , если $\text{supp } g \subset V_{\delta_1}$. Теперь из первого равенства в (10) при $(t_1, \xi) \in I_{\delta_1} \times \Gamma_{\delta_1}$ имеем

$$\begin{aligned} |(u, ge^{i\langle x, \xi \rangle})| &\leq |(u, f^N e^{i\Phi})|_{t=t_1} + |\xi|_\rho^{\mu-m} \left| \int_0^{t_1} |(Pu, f^N e^{i\Phi})| dt \right| \\ &\quad + |\xi|_\rho^{\mu-m} \sum_{l=0}^N \left| \int_0^{t_1} |(u, e^{i\Phi} \mathcal{H}_{l,N} f_l)| dt \right|. \end{aligned} \quad (14)$$

Произведение каждого из слагаемых последней суммы справа на $(1 + |\xi|_\rho)^s$, очевидно, принадлежит $L_2(\Gamma_{\delta_1} \cap \{|\xi|_\rho \geq 1\})$ с равномерной по $t_1 \in [-\delta_1, \delta_1]$ оценкой нормы.

Пусть $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi|_\rho \geq 1$ и $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi|_\rho \leq 1/2$. Тогда $\chi f^N \in C([- \delta_2, \delta_2]; S^0(\mathbb{R}^n \times \bar{\Gamma}_{\delta_2}))$, если $0 < \delta_2 < \delta_1$. По предположению $Pu \in H_{\text{loc}}^{s-m+\mu}(x^0, \xi^0)$. Отсюда и из теоремы 2.2 следует, что найдутся такие положительные числа δ_3 , δ_4 и δ_5 , что

$$(1 + |\xi|_\rho)^{s+\mu-m}(Pu, f^N e^{i\Phi})(\xi) \in L_2(\Gamma_{\delta_5} \cap \{|\xi|_\rho \geq 1\})$$

с равномерной по $t_1 \in [-\delta_4, \delta_4]$ оценкой нормы, если $\text{supp } g \subset V_{\delta_3}$. При таком выборе g произведение второго слагаемого справа в (14) на функцию $(1 + |\xi|_\rho)^s$ также принадлежит $L_2(\Gamma_{\delta_5} \cap \{|\xi|_\rho \geq 1\})$ при всех $t_1 \in [-\delta_4, \delta_4]$ с равномерной оценкой нормы.

Далее при достаточно малых t_1 точка

$$\mathbf{p}(t_1) = (x'(t_1, x^0, \xi^0), x''^0, \varphi_{\mu, x'}(t_1, x'(t_1, x^0, \xi^0), x''^0), \xi''^0) \in \gamma.$$

Выберем $t_1 \in I_{\delta_4}$ так, чтобы $u \in H_{\text{loc}}^s(\mathbf{p}(t_1))$. Для оценки первого слагаемого в правой части (14) вновь воспользуемся теоремой 2.2. Пусть U_φ – окрестность точки $(x'(t_1, x^0, \xi^0), x''^0)$, построенная для функции $\varphi(t_1, x, \xi)$ при фиксированном t_1 . Из непрерывности $\varkappa_{t_1, \xi}(y)$ по ξ и y следует, что найдутся такие числа $\delta_3 > 0$ и $\delta_5 > 0$, что $\text{supp}_x f_j(t_1, x, \xi) \subset U_\varphi$, если $\xi \in \Gamma_{\delta_5} \cap \{|\xi|_\rho \geq 1\}$ и $\text{supp } g \subset V_{\delta_3}$. Применяя теорему 2.2, получаем

$$(1 + |\xi|_\rho)^s (u, f^N e^{i\Phi})|_{t=t_1} \in L_2(\Gamma_{\delta_5} \cap \{|\xi|_\rho \geq 1\}).$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Вследствие вещественнозначности главные пучки символов операторов P и P^* равны. Поэтому из теоремы 1.4 следует, что $N(K) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Теперь по теореме о замкнутом графике L_2 -топология и C^∞ -топология на $N(K)$ эквивалентны. Отсюда вытекает компактность множества $\{u \in N(K) \mid \|u\|_{L_2} = 1\}$. Следовательно, размерность пространства $N(K)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 в основном следует схеме доказательства теоремы 26.1.7 из монографии Хёрмандера [2].

Вначале докажем одну вспомогательную оценку. Пусть K – компакт, удовлетворяющий условиям теоремы, и число $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{B}^t (= \mathcal{B}^t(K))$ линейное пространство функций $v \in \mathcal{E}'(K) \cap H^{t+m-\mu-1}(\Omega)$, удовлетворяющих включению $P^*v \in H^t(\Omega)$, $\mathcal{B}^t$ – банахово пространство с нормой $\|P^*v\|_{H^t} + \|v\|_{H^{t+m-\mu-1}}$. Если $v \in \mathcal{B}^t$, то из теоремы 1.4 следует, что $v \in H^{t+m-\mu}(\Omega)$. Тогда в силу теоремы о замкнутом графике с некоторой константой C справедливо неравенство

$$\|v\|_{H^{t+m-\mu}} \leq C(\|P^*v\|_{H^t} + \|v\|_{H^{t+m-\mu-1}}), \quad v \in \mathcal{B}^t. \quad (15)$$

По теореме 1.1 $N(K)$ – конечномерное подпространство в $C_0^\infty(K)$. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ – L_2 -ортонормированный базис в нем. Определим на $\mathcal{B}^t$ линейный непрерывный оператор: $\Pi v = \sum_{j=1}^k (v, e_j) e_j$, отображающий $\mathcal{B}^t$ на $N(K)$. Очевидно, $\Pi v = v$ при $v \in N(K)$. Ядро $V = \{v \in \mathcal{B}^t \mid \Pi v = 0\}$ оператора Π является замкнутым подпространством в $\mathcal{B}^t$ и $\mathcal{B}^t = V \oplus N(K)$. Покажем, что с некоторой константой C_1 выполняется неравенство

$$\|v\|_{H^{t+m-\mu}} \leq C_1 \|P^*v\|_{H^t}, \quad v \in V. \quad (16)$$

В самом деле, в противоположном случае в V найдется последовательность v_j , $j = 1, 2, \dots$, такая, что $\|v_j\|_{H^{t+m-\mu}} = 1$ и $\|P^*v\|_{H^t} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность v_j слабо сходится к некоторому v в $H^{t+m-\mu}$. По теореме 10.1.10 [2] из нее в свою очередь можно выделить подпоследовательность, сильно сходящуюся к v в $H^{t+m-\mu-1}$. Тогда $v \in V$ в силу замкнутости V . Кроме того, из $v \in \mathcal{E}'(K)$ и $P^*v = 0$ следует $v \in N(K)$. Отсюда $v = 0$, так как $V \cap N(K) = \{0\}$. Последнее противоречит неравенству (15), из которого следует, что $1 \leq C\|v\|_{H^{t+m-\mu-1}}$.

Теперь докажем теорему в случае $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$. При достаточно малых положительных числах ε множества $K_\varepsilon = \{x \mid \min_{y \in K} |x - y| \leq \varepsilon\}$ являются компактными подмножествами в Ω . Очевидно, $(x, \xi) \notin K \times \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $x \notin K$. Поэтому если $(x, \xi) \notin K \times \mathbb{R}^n$, то из свойства отделимости точек от компакта следует, что $(x, \xi) \notin K_\varepsilon \times \mathbb{R}^n$ при всех достаточно малых положительных ε . Отсюда следует, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $K_\varepsilon \times \mathbb{R}^n$ не содержит целиком никакой нулевой бихарактеристики при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$. В силу теоремы 1.1 при каждом неотрицательном $\varepsilon < \varepsilon_0$ размерность $d(\varepsilon)$ пространства $N(K_\varepsilon)$ конечна. При $\varepsilon < \varepsilon_0$ функция $d(\varepsilon)$ принимает целые неотрицательные значения и монотонно не убывает. Из компактности носителей функций пространства $N(K_\varepsilon)$ следует непрерывность справа функции $d(\varepsilon)$. Поэтому, уменьшая при необходимости ε_0 , можно считать, что $d(\varepsilon) = d(0)$ и, следовательно, $N(K_\varepsilon) = N(K)$. Выберем компактную окрестность K' компакта K так, чтобы $N(K') = N(K)$. Очевидно, неравенство (16) будет справедливым для компакта K' .

Пусть элемент $f \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ ортогонален $N(K')$. Тогда

$$|(f, v)| \leq C_f \|P^*v\|_{H^{-s-m+\mu}}, \quad v \in C_0^\infty(K'),$$

где C_f – константа, зависящая от f . В самом деле, для $v \in V \cap C_0^\infty(K')$ оценка следует из неравенства (16) и, кроме того, обе ее части не меняются при прибавлении к v функций из $N(K')$. Вследствие оценки по теореме Хана–Банаха антилинейный функционал $P^*v \mapsto (f, v)$ допускает продолжение до антилинейного непрерывного функционала на пространстве $H_{\text{comp}}^{-s-m+\mu}(\Omega)$. Поэтому найдется элемент $u \in H_{\text{loc}}^{s+m-\mu}(\Omega)$, для которого выполняется тождество

$$(f, v) = (u, P^*v), \quad v \in C_0^\infty(K').$$

Предположим теперь, что $f \in C^\infty(\Omega)$. Пусть $\mathcal{M}$ – подпространство в $C^\infty(\Omega)$, состоящее из функций, имеющих нуль бесконечного порядка на K . Факторпространство $C^\infty(K) = C^\infty(\Omega)/\mathcal{M}$ является пространством Фреше с двойственным $\mathcal{E}'(K)$. Композиция $T = \pi \circ P(x, D): C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(K)$, где π – факторотображение, является линейным непрерывным оператором. Достаточно доказать, что образ $R(T) = TC^\infty(\Omega)$ есть ортогональное дополнение ядра $N(T') = \{u \in \mathcal{E}'(K) \mid T'u = 0\}$ сопряженного оператора $T': \mathcal{E}'(K) \rightarrow \mathcal{E}'(\Omega)$. Поскольку замыкание $\overline{R(T)}$ равно ортогональному дополнению $N(T')^\perp$, то достаточно показать, что образ $R(T)$ замкнут в $C^\infty(K)$. В силу теоремы 8.6.13 [11]

последнее равносильно слабой* замкнутости образа сопряженного оператора T' .

Предположим, что $f_l \in R(T')$, $l = 1, 2, \dots$, и $f_l \rightarrow f$ в слабой* топологии. Вследствие теоремы Банаха–Штейнгауза найдется число $t \in \mathbb{R}$ такое, что f и f_l принадлежат H^t , причем $\sup_l \|f_l\|_{H^t} < \infty$. Отсюда вытекает, что $f_l \rightarrow f$ слабо в H^t . Для каждого f_l найдется элемент $v_l \in \mathcal{E}'(K)$ такой, что $P^*v_l = f_l (\in H^t)$. Тогда из теоремы 1.4 имеем $v_l \in H^{t+m-\mu}$ и, следовательно, $v_l \in \mathcal{B}^t$. Положим $v'_l = v_l - Pv_l$. Ясно, что $v'_l \in V$. Теперь из $P^*v'_l = f_l$ и неравенства (16) следует, что $\sup_l \|v'_l\|_{H^{t+m-\mu}} < \infty$. Поэтому из последовательности v'_l можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $H^{t+m-\mu}$ к пределу v' ($\in \mathcal{E}'(K) \cap H^{t+m-\mu}$). Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ в равенстве $(\varphi, f_l) = (P\varphi, v'_l)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, получаем

$$(\varphi, f) = (P\varphi, v').$$

Отсюда $f = P^*v'$ и $f \in R(T')$. Теорема доказана.

§ 5. Дополнение

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P = D_t^3 - D_x^2 - 6itD_tD_x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (17)$$

Введем взвешивание производных, положив $\rho = (2, 3)$. Взвешенный главный символ $p_6 = \tau^3 - \xi^2$ является вещественнозначной функцией. Нулевые бихарактеристики имеют вид $t \in \mathbb{R}$, $x = x^0$, $\xi = \xi^0$, $\tau = (\xi^0)^{2/3}$, где $\xi^0 \neq 0$ и x^0 – произвольные числа. Каждая бихарактеристика пересекает гиперповерхность $\{t = 0\}$. Следующая теорема показывает, что в данном случае микролокальная регулярность решений уравнения $Pu = f$ не распространяется вдоль нулевых бихарактеристик. Следует заметить, что теорема 1.4 не применима в этом случае, поскольку главный пучок символов не является вещественнозначной функцией.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ существует такая функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\{t \neq 0\})$, что $Pu \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\mathbb{R}^2)$ и $u \notin H_{\text{loc}}^{s_2}((0, 0; 1, 1))$.*

Для оператора P и любого натурального числа N последовательно подберем многочлены $\{a_l(t)\}_{l=1}^N$ так, что при всех значениях вещественного параметра $\lambda \geq 1$ будет выполняться равенство

$$Pe^{\Psi(t, x, \lambda)} \left(1 + \sum_{l=1}^N \lambda^{-l} a_l(t) \right) = e^{\Psi(t, x, \lambda)} \sum_{l=N-3}^N \lambda^{-l} r_l(t),$$

где $\Psi(t, x, \lambda) = i(\lambda^3 x + \lambda^2 t) - \lambda t^2$ и $r_{N-3}(t), \dots, r_N(t)$ – многочлены по t , однозначно определяемые многочленами $a_1(t), \dots, a_N(t)$. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks} e^{\Psi(t, x, 2^k)} \left(1 + \sum_{l=1}^N 2^{-lk} a_l(t) \right)$$

сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ и определяет в $\mathbb{R}^2$ обобщенную функцию $u(t, x) \in C^\infty(\{t \neq 0\})$, удовлетворяющую равенству

$$Pu = \sum_{l=N-3}^N r_l(t) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s-l)k} e^{\Psi(t, x, 2^k)}.$$

Функции $u(t, x)$ и $Pu(t, x)$ удобно представить в виде

$$u = u_s(t, x) + \sum_{l=1}^N a_l(t) u_{s-l}(t, x), \quad Pu = \sum_{l=N-3}^N r_l(t) u_{s-l}(t, x),$$

где $u_s(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sk} e^{\Psi(t, x, 2^k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\{t \neq 0\})$.

Доказательству теоремы предположим несколько лемм технического характера. Интегрированием по частям доказывается

ЛЕММА 5.2. Пусть $e(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $\delta \in (0, 1)$. Тогда для любых натуральных чисел N и M найдется константа $C(=C(e, \delta, N, M))$, с которой при $\lambda \geq 1$ на множестве $\{(\tau, \xi) \mid |\tau - \lambda^2| + |\xi - \lambda^3| \geq \delta \lambda^6\}$ выполняется оценка

$$\left| \iint e^{i(\lambda^2 - \tau)t + i(\lambda^3 - \xi)x - \lambda t^2} e(t, x) dt dx \right| \leq C \lambda^{-N} (1 + |\tau|^3 + |\xi|^2)^{-M}.$$

ЛЕММА 5.3. Пусть $e(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $e(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля. Тогда для любого натурального числа N найдется константа $C(=C(e, N))$, с которой при $\lambda \geq 1$ выполняется оценка

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^2 - \tau)t - \lambda t^2} e(t) dt - \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-(\lambda^2 - \tau)^2 / (4\lambda)} \right| \leq C \lambda^{-N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В интеграле

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^2 - \tau)t - \lambda t^2} e(t) dt$$

функцию $e(t)$ разложим в ряд Тейлора в точке $t = 0$ до порядка m : $e(t) = 1 + t^{m+1}g(t)$, и сделаем замену переменной $x = t\sqrt{2\lambda}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^2 - \tau)x / \sqrt{2\lambda} - x^2/2} dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\lambda} \right)^{m/2+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^2 - \tau)x / \sqrt{2\lambda} - x^2/2} x^{m+1} g\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda}} \right) dx. \end{aligned}$$

Очевидно, $g(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| < \infty$. Теперь утверждение леммы легко выводится из свойств преобразования Фурье.

Из леммы 5.3 следует

ЛЕММА 5.4. Пусть $e(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5.3. Тогда для любых числа $\delta \in (0, 1)$ и натурального числа N найдется константа C ($= C(e, \delta, N)$), с которой при $\lambda \geq 1$ выполняется оценка

$$\left| \int_{(1-\delta)\lambda^2}^{(1+\delta)\lambda^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^2-\tau)t-\lambda t^2} e(t) dt \right|^2 d\tau - \pi \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \right| \leq C\lambda^{-N}.$$

Из свойств преобразования Фурье следует

ЛЕММА 5.5. Пусть $e(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда для любых числа $\delta \in (0, 1)$ и натурального числа N найдется константа C ($= C(e, \delta, N)$), с которой при $\lambda \geq 1$ выполняется оценка

$$\left| \int_{|\xi| < \delta\lambda^3} |\tilde{e}(\xi)|^2 d\xi - \|e(x)\|^2 \right| \leq C\lambda^{-N},$$

где $\tilde{e}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $e(x)$.

ЛЕММА 5.6. Если $s_1 < -s + 1/4$, то $u_s \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $u_s \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\{t = 0\})$. Пусть $e(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $e(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля и $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – произвольная функция. Тогда

$$\widetilde{\varphi e u}(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sk} I_k(\tau, \xi), \quad I_k = \iint \varphi(x) e(t) e^{i(2^{3k}-\xi)x + i(2^{2k}-\tau)t - 2^k t^2} dt dx.$$

Пусть $\chi(\theta) = 1$ при $|\theta| \leq 1/3$ и $\chi(\theta) = 0$ при $|\theta| > 1/3$, $\theta \in \mathbb{R}$. Пусть $\sigma_k(\tau, \xi) = \chi(2^{-2k}\tau - 1)\chi(2^{-3k}\xi - 1)$. Тогда на носителе функции $1 - \sigma_k(\tau, \xi)$ выполняется неравенство $|\tau - 2^{2k}|^3 + |\xi - 2^{3k}|^2 \geq 2^{6k}/27$. Поэтому в силу леммы 5.2 для любых натуральных чисел L и M справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sk} (1 - \sigma_k(\tau, \xi)) I_k(\tau, \xi) \right| \leq \frac{C}{(1 + |\tau|^3 + |\xi|^2)^M} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s-L)k}.$$

Для завершения доказательства достаточно обосновать сходимость интеграла

$$\iint (1 + |\tau|^3 + |\xi|^2)^{s_1/3} \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sk} \sigma_k(\tau, \xi) I_k(\tau, \xi) \right|^2 d\tau d\xi.$$

Так как при различных значениях k носители функций $\sigma_k(\tau, \xi)$ не пересекаются и на каждом из них с константой C , не зависящей от k , выполняется оценка

$$C^{-1} 2^{6k} \leq 1 + |\tau|^3 + |\xi|^2 \leq C 2^{6k},$$

то достаточно доказать сходимость числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2(s+s_1)k} \int_{3^{-1}2^{2k+1}}^{3^{-1}2^{2k+2}} \left| \int e^{i(2^{2k}-\tau)t-2^k t^2} e(t) dt \right|^2 d\tau \int_{3^{-1}2^{3k+1}}^{3^{-1}2^{3k+2}} |\tilde{\varphi}(\xi - 2^{3k})|^2 d\xi.$$

В силу леммы 5.4 этот ряд сходится при $s + s_1 < 1/4$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.7. Если $s_2 \geq -s + 1/4$, то $u_s \notin H_{\text{loc}}^{s_2}((0, 0; 1, 1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $u_s \in H_{\text{loc}}^{s_2}((0, 0; 1, 1))$. Тогда найдутся окрестность $U \subset \mathbb{R}_{t,x}^2$ начала координат и квазиконус $\Gamma \subset \mathbb{R}_{\tau,\xi}^2$ вида $\{(\tau, \xi) \mid \tau > 0, (1 - \delta_1) \leq \xi\tau^{-3/2} \leq (1 + \delta_1)\}$, где число $\delta_1 \in (0, 1)$, такие, что

$$(1 + |\tau|^3 + |\xi|^2)^{s_2} \widetilde{\varphi u_s}(\tau, \xi) \in L_2(\Gamma) \quad (18)$$

для любой функции $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ с $\text{supp } \varphi \subset U$. Выберем функцию $e(t)$ так, чтобы $e(t)e(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $e(t) = 1$ в некоторой окрестности нуля. Пусть $\delta_2 \in (0, 1)$, $\chi(\tau) = 1$ при $|\tau| \leq \delta_2$ и $\chi(\tau) = 0$ при $|\tau| > \delta_2$. Если $\delta_2 < 7/9$, то при различных $k = 0, 1, 2, \dots$ носители функций $\sigma_k(\tau, \xi) = \chi(2^{-2k}\tau - 1)\chi(2^{-3k}\xi - 1)$ не пересекаются. Если $(1 - \delta_2)(1 + \delta_2)^{-3/2} \geq (1 - \delta_1)$ и $(1 + \delta_2)(1 - \delta_2)^{-3/2} \leq (1 + \delta_1)$, то носители всех этих функций содержатся в Γ . Выбирая δ_2 достаточно малым, можно считать, что выполняются оба свойства. Повторяя соответствующую часть доказательства леммы 5.6, нетрудно убедиться, что из (18) вытекает сходимость числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2(s+s_2)k} \int_{(1-\delta_2)2^{2k}}^{(1+\delta_2)2^{2k}} \left| \int e^{i(2^{2k}-\tau)t-2^k t^2} e(t) dt \right|^2 d\tau \int_{(1-\delta_2)2^{3k}}^{(1+\delta_2)2^{3k}} |\tilde{e}(\xi - 2^{3k})|^2 d\xi.$$

Тогда вследствие лемм 5.4 и 5.5 должен сходиться числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2(s+s_2-1/4)k}.$$

Следовательно, при $s + s_2 - 1/4 \geq 0$ включение (18) ложно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть $s = -s_2 + 1/4$ и N – целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $N > s_1 - s_2 + 3$. В силу леммы 5.6 $u_{s-l}(t, x) \in H_{\text{loc}}^{s_2}(\mathbb{R}^2)$ при $l = 1, 2, \dots$. В силу леммы 5.7 $u_s(t, x) \notin H_{\text{loc}}^{s_2}((0, 0; 1, 1))$. Поскольку $a_l(t)$ – многочлены, то $u = u_s + a_1 u_{s-1} + \dots + a_N u_{s-N} \notin H_{\text{loc}}^{s_2}((0, 0; 1, 1))$. В силу леммы 5.6 $u_{s-l}(t, x) \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\mathbb{R}^2)$ при $l = N-3, N-2, \dots$. Отсюда $Pu = r_{N-3}(t)u_{s-N+3}(t, x) + \dots + r_N(t)u_{s-N}(t, x) \in H_{\text{loc}}^{s_1}(\mathbb{R}^2)$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] J. J. Duistermaat, L. Hörmander, “Fourier integral operators, II”, *Acta Math.*, **128**:3–4 (1972), 183–269.
- [2] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1–4, Мир, М., 1986–1988.
- [3] Н. А. Шананин, “О локальной разрешимости уравнений квазиглавногo типа”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4 (1975), 503–516.
- [4] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, “Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в частных производных”, *Труды ММО*, **48** (1985), 211–262.

- [5] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных*, УРСС, М., 2002.
- [6] Л. Хёрмандер, *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, ИЛ, М., 1959.
- [7] В. В. Грушин, Н. А. Шананин, “Некоторые теоремы об особенностях решений дифференциальных уравнений со взвешенными главными символами”, *Матем. сб.*, **103(145)**:1 (1977), 37–51.
- [8] R. Lascar, “Propagation des singularités des solutions d’équations pseudo-différentielles quasi homogènes”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **27**:2 (1977), 79–123.
- [9] T. Sakurai, “Propagation of regularities of solutions to semilinear partial differential equations of quasi homogeneous type”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **33**:2 (1986), 347–378.
- [10] C. Parenti, F. Sigala, “Propagation and reflection of singularities for a class of evolution equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **6**:7 (1981), 741–782.
- [11] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ: теория и приложения*, Мир, М., 1969.

Н. А. Шананин (N. A. Shananin)

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: nashanin@inbox.ru

Поступила в редакцию

29.10.2004