Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, Аналог теоремы Воронина для периодических дзета-функций Гурвица, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 2, 91–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:39:22

УДК 511.331

А. Лауринчикас

Аналог теоремы Воронина для периодических дзета-функций Гурвица

Получена теорема о приближении заданного набора аналитических функций сдвигами дзета-функций Гурвица с трансцендентным параметром. Этот результат является аналогом теоремы Воронина о совместной универсальности L -функций Дирихле.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества соответственно всех целых положительных, целых неотрицательных, действительных и комплексных чисел, а $s = \sigma + it$ – комплексная переменная. В 1975 г. С. М. Воронин открыл замечательное свойство универсальности для дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Он доказал в [1] (см. также [2]–[6]), что если $0 < r < 1/4$, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в круге $|s| \leq r$ и аналитична внутри этого круга, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Теорему Воронина можно формулировать и в более общем виде. Пусть при $T > 0$

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \dots\},$$

где $\text{meas}\{A\}$ означает меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, а вместо многоточия записывается условие, которому удовлетворяет τ . Тогда (см., например, [7]) если K – компактное подмножество полосы $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K , то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Теорема Воронина об универсальности дзета-функции Римана многими авторами была обобщена для других дзета и L -функций и некоторых классов рядов Дирихле (см. обзорные статьи [8]–[10]).

Первый результат о совместной универсальности – приближение набора аналитических функций сдвигами L -функций Дирихле – также принадлежит С. М. Воронину [3]–[6].

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда науки и высшего образования Литвы и фонда INTAS (грант № 03-51-5070).

ТЕОРЕМА А. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_n$ – попарно неэквивалентные характеры Дирихле, $K_1, \dots, K_n$ – компактные подмножества полосы $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающие связным дополнением, а функции $f_1(s), \dots, f_n(s)$ непрерывны, не имеют нулей соответственно в $K_1, \dots, K_n$ и аналитичны внутри $K_1, \dots, K_n$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K} |L(s + iT, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Результаты, аналогичные теореме А, независимо также были получены С. М. Gonekom [11] и Б. Багчи [12], [13]. Отметим, что совместная универсальность рядов Дирихле является более сложной проблемой, чем универсальность одного ряда. При доказательстве теоремы А существенно используется ортогональность характеров Дирихле. Поэтому результатов о совместной универсальности не так много. Совместная универсальность дзета-функций Лерха была доказана в [14], а дзета-функций Матсумото (определение см. в [15]) – в [16]. В [17] рассматривалась совместная универсальность дзета-функций некоторых параболических форм. Для сверток рядов Дирихле с характером Дирихле совместная универсальность была получена в [18] и [19]: в [18] – для одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, а в [19] – для автоморфных L -функций. Работы [20] и [21] посвящены совместной универсальности общих рядов Дирихле.

В настоящей статье мы докажем совместную универсальность периодических дзета-функций Гурвица. Напомним определение периодической дзета-функции Гурвица. Пусть $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а α , $0 < \alpha \leq 1$, – фиксированное число. Периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Если $\mathbf{a} = \{1\}$ и $k = 1$, то мы получаем классическую дзета-функцию Гурвица $\zeta(s, \alpha)$, которая имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с простым полюсом $s = 1$ и вычетом 1. Легко видеть, что при $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_l}{(mk + l + \alpha)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + (l + \alpha)/k)^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{k}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Равенство (1) дает аналитическое продолжение функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ на всю комплексную плоскость. Положим

$$a = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} a_m.$$

Если $a = 0$, то функция $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ является целой, а если $a \neq 0$, то она в точке $s = 1$ имеет простой полюс с вычетом a .

Универсальность функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ рассматривалась в [22] и [23]. В [22] предполагалось, что $\min_{0 \leq m \leq k-1} |a_m| > 0$, а в [23] удалось отказаться от этого условия.

ТЕОРЕМА Б (см. [23]). Пусть α – трансцендентное число, K – компактное подмножество полосы $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Теперь пусть $\mathbf{a}_j = \{a_{mj} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, α , $0 < \alpha \leq 1$, – фиксированное число и при $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}}{(m + \alpha)^s}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Через $k = [k_1, \dots, k_n]$ обозначим наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_n$ и определим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Положим $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что $\text{rank}(A) = n$. Пусть α – трансцендентное число, $K_1, \dots, K_n$ – компактные подмножества полосы D , обладающие связным дополнением, а функции $f_1(s), \dots, f_n(s)$ непрерывны, не имеют нулей соответственно в $K_1, \dots, K_n$ и аналитичны внутри $K_1, \dots, K_n$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

§ 2. Оценки роста функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$

Для дальнейшего нам будут нужны оценки функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ при $|t| \rightarrow \infty$ и ее среднего квадратического.

ЛЕММА 1. При $\sigma > 1/2$ и $|t| \geq t_0 > 0$ имеет место оценка

$$\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a}) \ll_{\alpha, \mathbf{a}} |t|^\delta$$

с некоторым $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см., например, [24]), что при $\sigma > 1/2$ и $|t| \geq t_0$

$$\zeta(\sigma + it, \alpha) = \alpha^{-s} + O(|t|^{\delta_1})$$

с некоторым $\delta_1 > 0$. Отсюда и из равенства (1) получаем требуемую оценку леммы.

ЛЕММА 2. При $\sigma > 1/2$

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} T, \quad T \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теорем 3.3.1 и 3.3.2 из [25] при $\sigma > 1/2$

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it, \alpha)|^2 dt \ll_{\sigma, \alpha} T, \quad T \rightarrow \infty.$$

Следовательно, утверждение леммы является следствием равенства (1).

§ 3. Совместная предельная теорема для функций $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_j)$

Доказательство теоремы 1 основано на совместной предельной теореме в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций для $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_j)$.

Пусть G – область на комплексной плоскости. Через $H(G)$ обозначим пространство аналитических в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть

$$H^n(G) = \underbrace{H(G) \times \cdots \times H(G)}_n.$$

Через $\mathcal{B}(S)$ будем обозначать класс борелевских множеств пространства S . Докажем предельную теорему о слабой сходимости при $T \rightarrow \infty$ вероятностной меры

$$P_T(A) = \nu_T((\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_n)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^n(D)),$$

с явным видом предельной меры.

Пусть $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ – единичная окружность на комплексной плоскости и

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. В силу теоремы Тихонова Ω является компактной топологической абелевой группой. Поэтому на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует единственная вероятностная мера Хаара m_H . Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(m)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_m . При $s \in D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1/2\}$ положим

$$\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = (\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_n)),$$

где

$$\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}\omega(m)}{(m + \alpha)^s}, \quad j = 1, \dots, n.$$

ЛЕММА 3. $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ является $H^n(D_0)$ -значным случайным элементом, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из работы [22] следует, что $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_j)$ для каждого $j = 1, \dots, n$ является $H(D_0)$ -значным случайным элементом. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Через $M(G)$ обозначим пространство мероморфных на G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть

$$M^n(G) = \underbrace{M(G) \times \dots \times M(G)}_n,$$

а $\hat{P}_\zeta$ – распределение случайного элемента $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, т.е.

$$\hat{P}_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^n(D_0)).$$

ЛЕММА 4. *Вероятностная мера*

$$\nu_T((\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_n)) \in A), \quad A \in M^n(D_0),$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $\hat{P}_\zeta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку α – трансцендентное число, система

$$\{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$$

линейно независима над полем рациональных чисел. Кроме того, при $m \geq 1$

$$\log(m + \alpha) \geq \log m.$$

Поэтому ввиду лемм 1 и 2 лемма 4 является следствием более общей теоремы 2 из [26], доказанной для общих рядов Дирихле.

ЛЕММА 5. *Вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере P_ζ , где P_ζ – сужение меры $\hat{P}_\zeta$ на $H^n(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $h: M^n(D_0) \rightarrow M^n(D)$, определенная покоординатным сужением, непрерывна. Поэтому лемма вытекает из леммы 4 и свойств слабой сходимости вероятностных мер (см., например, [27; § 5]).

§ 4. О плотности одного множества

При $s \in D$ и $a(m) \in \gamma$ рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{m1}a(m)}{(m + \alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn}a(m)}{(m + \alpha)^s} \right). \quad (2)$$

При доказательстве того, что $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_j)$, $j = 1, \dots, n$, является $H(D_0)$ -значным случайным элементом, в [22] было установлено, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}\omega(m)}{(m + \alpha)^s}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ относительно меры Хаара m_H сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости D_0 . Отсюда вытекает существование последовательности $\{b_m : b_m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0\}$ такой, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{m1}b_m}{(m+\alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn}b_m}{(m+\alpha)^s} \right)$$

сходится в $H^n(D)$.

ЛЕММА 6. Множество всех сходящихся рядов (2) всюду плотно в $H^n(D)$.

Для доказательства леммы 6 мы воспользуемся следующими утверждениями.

ЛЕММА 7. Пусть $\{(f_{m1}(s), \dots, f_{mn}(s)) : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность в $H^n(D)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) если $\mu_1, \dots, \mu_n$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} f_{mj}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu_j(s) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad r \in \mathbb{N}_0;$$

- 2) ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} (f_{m1}(s), \dots, f_{mn}(s))$$

сходится в $H^n(D)$;

- 3) для любого компакта $K \subset D$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sup_{s \in K} |f_{mj}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a(m)f_{m1}(s), \dots, a(m)f_{mn}(s)), \quad a(m) \in \gamma,$$

всюду плотно в $H^n(D)$.

Лемма 7 является частным случаем леммы 6 работы [17].

ЛЕММА 8. Пусть μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$,

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{sr} d\mu(s), \quad z \in \mathbb{C},$$

и $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(r)|}{r} > \sigma_0.$$

Доказательство см. в [7; лемма 6.4.10].

Теперь пусть A – подмножество множества натуральных чисел, обладающее положительной плотностью, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{m \in A : m \leq x\} > 0.$$

ЛЕММА 9. Пусть $f(s)$ – функция экспоненциального типа и

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(r)|}{r} > -1.$$

Тогда

$$\sum_{m \in A} |f(\log m)| = \infty.$$

Доказательство дано в [14; лемма 5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Ясно, что достаточно доказать, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_{m1} b_m a(m)}{(m + \alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn} b_m a(m)}{(m + \alpha)^s} \right) \quad (3)$$

с $a(m) \in \gamma$ всюду плотно в $H^n(D)$. Для этой цели проверим условия леммы 7 для последовательности

$$\left\{ \left(\frac{a_{m1} b_m}{(m + \alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn} b_m}{(m + \alpha)^s} \right) : m \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (4)$$

Условие 2) леммы 7 имеет место в силу выбора $\{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$. Пусть K – любой компакт полосы D . Так как для точек $s \in D$ выполняется неравенство $\sigma > 1/2$, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sup_{s \in K} \left| \frac{a_{mj} b_m}{(m + \alpha)^s} \right|^2 < \infty.$$

Таким образом, остается проверить условие 1) леммы 7.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{mj} b_m}{(m + \alpha)^s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (5)$$

Если k – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_n$, то оно является периодом всех последовательностей $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Следовательно, ввиду периодичности коэффициентов a_{mj} заключаем из (5), что для $r = 1, \dots, k$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv r \pmod{k}}}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n a_{rj} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu_j(s)}{(m + \alpha)^s} \right| < \infty. \quad (6)$$

Положим

$$\nu_r(s) = \sum_{j=1}^n a_{rj} \mu_j(s).$$

Тогда $\nu_r(s)$ является комплекснозначной мерой на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в D , $r = 1, \dots, k$. Отсюда и из неравенства (6) имеем, что для всех $r = 1, \dots, k$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv r \pmod{k}}}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu_r(s)}{(m+\alpha)^s} \right| < \infty. \quad (7)$$

Пусть

$$A_r = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv r \pmod{k}\}$$

и

$$\rho_r(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_r(s), \quad z \in \mathbb{C}, \quad r = 1, \dots, k.$$

Тогда множество A_r имеет положительную плотность. Нетрудно видеть, что функция $\rho_r(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, $r = 1, \dots, k$. Поэтому лемма 8 показывает, что или $\rho_r(z) \equiv 0$, или же

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |\rho_r(x)|}{x} > -1, \quad r = 1, \dots, k. \quad (8)$$

Здесь мы воспользовались определением полосы D и наличием знака минус в определении $\rho_r(z)$, $r = 1, \dots, k$. Если имеет место неравенство (8), то в силу леммы 9

$$\sum_{m \in A_r} |\rho_r(\log m)| = \infty, \quad r = 1, \dots, k. \quad (9)$$

Хорошо известно, что для всех $s \in \mathbb{C}$

$$e^s = 1 + O(|s|e^{|s|}).$$

Отсюда находим, что при $m \geq 2$

$$\begin{aligned} (m+\alpha)^s &= m^{-s} \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^s = m^{-s} \exp \left\{ -s \log \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right) \right\} \\ &= m^{-s} \exp \left\{ \frac{O(|s|)}{m} \right\} = m^{-s} \left(1 + \frac{O(|s|)}{m} e^{O(|s|)}\right) \\ &= m^{-s} + m^{-1-\sigma} O(|s|) e^{O(|s|)}. \end{aligned}$$

Поскольку компактные носители мер $\nu_1, \dots, \nu_k$ содержатся в D , отсюда и из неравенства (6) получаем, что

$$\sum_{m \in A_r} |\rho_r(\log m)| < \infty, \quad r = 1, \dots, k,$$

что противоречит (9). Следовательно,

$$\rho_r(z) \equiv 0, \quad r = 1, \dots, k.$$

Отсюда и из определений $\rho_r(z)$ и ν_r получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad r = 1, \dots, k.$$

Поскольку $\text{rank}(A) = n$, то эта система имеет только нулевое решение

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда, дифференцируя r раз и полагая $z = 0$, получаем, что

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu_j(s) = 0$$

для всех $j = 1, \dots, n$ и $r \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, условие 1) леммы 7 также выполняется для последовательности (4). Следовательно, из леммы 7 заключаем, что множество всех сходящихся рядов (3) с $a(m) \in \gamma$ всюду плотно в $H^n(D)$. Лемма 6 доказана.

§ 5. Носитель меры P_ζ

Напомним, что носителем меры P_ζ является минимальное замкнутое множество S_{P_ζ} из $H^n(D)$ такое, что $P_\zeta(S_{P_\zeta}) = 1$. Множество S_{P_ζ} состоит из всех таких точек $\underline{g} \in H^n(D)$, что для всякой окрестности G элемента $\underline{g}$ выполняется неравенство $P_\zeta(G) > 0$.

Носителем S_X случайного элемента X называется носитель распределения элемента X .

Для нахождения носителя меры P_ζ нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 10. Пусть $\{X_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых $H^n(D)$ -значных случайных элементов таких, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} X_m$$

сходится почти наверное. Тогда носителем суммы этого ряда является замыкание множества всех таких $\underline{g} \in H^n(D)$, которые могут быть записаны в виде сходящегося ряда:

$$\underline{g} = \sum_{m=0}^{\infty} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_m \in S_{X_m}.$$

Доказательство см. в [17; лемма 5].

ЛЕММА 11. Носителем случайного элемента $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ является все пространство $H^n(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения тора Ω вытекает, что $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых комплекснозначных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Носителем каждой случайной величины $\omega(m)$ является единичная окружность γ . Отсюда имеем, что

$$\left\{ \left(\frac{a_{m1}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn}\omega(m)}{(m+\alpha)^s} \right) : m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

– последовательность независимых $H^n(D)$ -значных случайных элементов на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ и носителем каждого элемента

$$\left(\frac{a_{m1}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn}\omega(m)}{(m+\alpha)^s} \right)$$

является множество

$$\left\{ \underline{g} \in H^n(D) : \underline{g}(s) = \left(\frac{a_{m1}a}{(m+\alpha)^s}, \dots, \frac{a_{mn}a}{(m+\alpha)^s} \right), a \in \gamma \right\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Следовательно, в силу леммы 10 носителем элемента $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ является замыкание множества всех сходящихся рядов (2). Отсюда и из леммы 6 получаем утверждение леммы 11.

Из леммы 11 и определения носителя случайного элемента получаем, что носителем меры P_ζ также является все пространство $H^n(D)$.

§ 6. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на леммах 5 и 11, а также на следующем утверждении.

ЛЕММА 12. Пусть K – компактное подмножество комплексной плоскости, обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна на K и аналитична внутри K . Тогда $f(s)$ равномерно на K приближается полиномами от s .

Лемма 12 является теоремой Мергеляна, ее доказательство см., например, в [28].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы применяем следующие рассуждения. Сначала предположим, что функции $f_1(s), \dots, f_n(s)$ аналитически продолжаются на всю полосу D . Пусть

$$G = \left\{ (g_1, \dots, g_n) \in H^n(D) : \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |g_j(s) - f_j(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда множество G открыто, поэтому из лемм 5 и 11 и свойств слабой сходимости вероятностных мер (см. [21; теорема 2.1]) получаем, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) \geq P_\zeta(G) > 0. \quad (10)$$

Теперь пусть функции $f_1(s), \dots, f_n(s)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда в силу леммы 12 существуют полиномы $p_1(s), \dots, p_n(s)$ такие, что

$$\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11)$$

Так как полиномы – целые функции, то из (10) имеем, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_j) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0. \quad (12)$$

Однако ввиду (11)

$$\left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_j) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ \subseteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\},$$

что вместе с (12) влечет за собой утверждение теоремы 1.

Приведем пример периодических дзета-функций Гурвица, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Пусть $a_{01} = 2$, $a_{11} = 3$, $a_{02} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 3$ и последовательность $\mathbf{a}_1 = \{a_{m1} : m \in \mathbb{N}_0\}$ периодична с периодом 2, а последовательность $\mathbf{a}_2 = \{a_{m2} : m \in \mathbb{N}\}$ – с периодом 3. В этом случае $k = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\text{rank}(A) = 2$. Пусть $\alpha = e^{-1}$. Тогда функции $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_1)$ и $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}_2)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Список литературы

- [1] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486; англ. пер.: S. M. Voronin, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 443–453.
- [2] С. М. Воронин, “Теорема о распределении дзета-функции Римана”, *Докл. АН СССР*, **221**:4 (1975), 771; англ. пер.: S. M. Voronin, “A theorem on the distribution of values of the Riemann zeta-function”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:2 (1975), 410.
- [3] С. М. Воронин, *Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МИАН, М., 1977.
- [4] С. М. Воронин, “Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 897–884; англ. пер.: S. M. Voronin, “Analytic properties of Dirichlet generating functions of arithmetic objects”, *Math. Notes*, **24**:5–6 (1979), 966–969.
- [5] С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27**:2 (1975), 493–503.
- [6] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [7] A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [8] K.-G. Grosse-Erdmann, “Universal families and hypercyclic operators”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36** (1999), 345–381.
- [9] A. Laurinćikas, “The universality of zeta-functions”, *Acta Appl. Math.*, **78**:1–3 (2003), 251–271.

- [10] K. Matsumoto, “Probabilistic value-distribution theory of zeta functions”, *Sugaku Expositions*, **17**:1 (2004), 51–71.
- [11] S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Thesis, Univ. Michigan, 1979.
- [12] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Thesis, Indian Statist. Inst., Calcutta, 1981.
- [13] B. Bagchi, “A joint universality theorem for Dirichlet L -functions”, *Math. Z.*, **181** (1982), 319–334.
- [14] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, “The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions”, *Nagoya Math. J.*, **157** (2000), 211–227.
- [15] K. Matsumoto, “Value-distribution of zeta-functions”, *Analytic number theory* (Tokyo, 1988), Lecture Notes in Math., **1434**, 1990, 178–187.
- [16] А. Лауринчикас, “О нулях линейных комбинаций Матсумото дзета-функций”, *Литовский матем. сб.*, **38** (1998), 185–204; англ. пер.: A. Laurinčikas, “On zeros of linear combinations of the Matsumoto zeta functions”, *Lithuanian Math. J.*, **38** (1998), 144–159.
- [17] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, “The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms”, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5** (2002), 58–75.
- [18] R. Šleževičienė, “The joint universality for twists of Dirichlet series with multiplicative coefficients by characters”, *Analytic and probabilistic methods in number theory* (Palanga, 2001), TEV, Vilnius, 2002, 309–319.
- [19] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, “The joint universality of twisted automorphic L -functions”, *J. Math. Soc. Japan*, **56**:3 (2004), 923–939.
- [20] A. Laurinčikas, “The joint universality for general Dirichlet series”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, **22** (2003), 235–251.
- [21] А. Лауринчикас, “Совместная универсальность общих рядов Дирихле”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 133–144; англ. пер.: A. Laurinčikas, “Joint universality of general Dirichlet series”, *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 131–142.
- [22] A. Javtokas, A. Laurinčikas, *On the periodic Hurwitz zeta-function*, Hardy-Ramanujan J. (to appear).
- [23] A. Javtokas, A. Laurinčikas, “The universality of the periodic Hurwitz zeta-function”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **17**:10 (2006), 711–722.
- [24] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [25] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch zeta-function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [26] J. Genys, A. Laurinčikas, “On joint limit theorem of general Dirichlet series”, *Non-linear Anal. Model. Control*, **8**:2 (2003), 27–39.
- [27] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.
- [28] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **20**, 1960.

А. Лауринчикас (A. Laurinčikas)

Вильнюсский университет, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступила в редакцию

25.01.2006