Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 1, 59–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:15:36

УДК 517.956.4

Л. М. Кожевникова

Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях

В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$, где Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}_{n+1}$, рассматривается эволюционное уравнение $u_t = Lu$, правая часть которого – квазиэллиптический оператор со старшими производными порядка $2k, 2m_1, \dots, 2m_n$ по переменным $y_0, y_1, \dots, y_n$ соответственно. Для смешанной задачи с условием Дирихле на боковой границе области D^T установлен класс единственности тэклиндовского типа.

Для сужающихся на бесконечности областей Ω выделен другой класс единственности – геометрического типа, более широкий, чем класс тэклиндовского типа. Показано, что для областей с нерегулярным поведением границы этот класс шире, чем класс, установленный для параболического уравнения второго порядка в работе О. А. Олейник, Г. А. Иосифьяна (УМН, 1976). В широком классе сужающихся областей построены примеры неединственности решений первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности, подтверждающие точность геометрического класса единственности.

Библиография: 33 названия.

Введение

Пусть $\bar{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}_{n+1}$. Координату y_0 будем выделять обозначением $x = y_0$. Положим также $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$, $\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y})$. Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}_{n+1}$, не лежащая в полупространстве вида $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x < r\}$. В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$ рассматривается уравнение

$$u_t + \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} (-1)^{|\bar{\alpha}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} (a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u) = 0. \quad (0.1)$$

Здесь $\bar{\alpha} = (i, \alpha) = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндексы с целыми неотрицательными числами i, α_s , $s = \overline{1, n}$, $|\bar{\alpha}| = i + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $(\bar{\alpha}) = i/k + \alpha_1/m_1 + \dots + \alpha_n/m_n$; k, m_s , $s = \overline{1, n}$ – натуральные числа.

Для уравнения (0.1) ставится первая смешанная задача

$$D_x^i u|_{S^T} = 0, \quad i < k, \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u|_{S^T} = 0, \quad \alpha_s < m_s, \quad s = \overline{1, n}, \quad S^T = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (0.2)$$

$$u(0, \bar{\mathbf{y}}) = \varphi(\bar{\mathbf{y}}). \quad (0.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00354-а).

Функции $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}})$ – измеримые, ограниченные для п.в. $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D^T$:

$$|a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}})| \leq \bar{a}. \quad (0.4)$$

Легко видеть, что при $k = m_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, уравнение (0.1) и граничные условия (0.2) принимают вид

$$u_t = \sum_{i,j=0}^n (a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}}) u_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=0}^n \{b_i(t, \bar{\mathbf{y}}) u_{y_i} + (c_i(t, \bar{\mathbf{y}}) u)_{y_i}\} + d(t, \bar{\mathbf{y}}) u, \quad (0.1')$$

$$u|_{S^T} = 0. \quad (0.2')$$

Отметим, что в цитируемых ниже работах рассматривается случай $c_i(t, \bar{\mathbf{y}}) = 0$, $i = \overline{0, n}$.

Работа посвящена исследованию классов единственности решений задачи (0.1)–(0.3) с локально суммируемой начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}})$.

К настоящему времени установлено большое количество разных классов единственности решений начально-краевых задач и задачи Коши для параболических уравнений и систем в классах растущих функций. Мы предлагаем разделить эти классы единственности на две группы. Первую группу составляют тэклиндовские классы единственности, установленные для задачи Коши, но пригодные также для смешанных задач в неограниченных областях. Во вторую группу отнесем геометрические классы единственности, определяемые ограничениями, выражающимися через геометрические характеристики области. Мы надеемся, что цитируемые ниже результаты уточнят довольно нечеткое разделение классов единственности на две группы. Как правило, геометрические классы уже тэклиндовских, и лишь в случае быстросужающихся неограниченных областей и краевого условия Дирихле первые могут оказаться шире вторых.

Установленные нами тэклиндовский и геометрический классы единственности (теоремы 1, 2) в ряде случаев шире известных. В теореме 3 доказывается точность геометрического класса единственности из теоремы 2 для решений уравнения теплопроводности. Нам не известны работы, в которых подтверждалась бы точность геометрических классов единственности.

Теоремы единственности решения задачи Коши ($\Omega = \mathbb{R}$) для уравнения теплопроводности в классах растущих функций были впервые доказаны Е. Хольмгреном [1], А. Н. Тихоновым [2].

В работе Е. Хольмгрена [1] 1924 года, в частности, было доказано, что если решение задачи

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0 \quad (0.1^*)$$

удовлетворяет для всех $t \in (0, T)$ и достаточно больших $|x|$, $x \in \mathbb{R}$, оценке

$$|u(t, x)| \leq \exp(\kappa x^2 (\ln |x|)^\alpha),$$

в которой $\alpha \in [0, 1]$, а κ – положительная постоянная, то $u \equiv 0$ в полосе $D^T = (0, T) \times \mathbb{R}$.

А. Н. Тихоновым [2] было установлено, что если решение задачи (0.1*) в D^T подчиняется неравенству

$$|u(t, x)| \leq C \exp(\kappa |x|^2)$$

с положительной постоянной κ , то $u \equiv 0$ в D^T . Доказано также, что показатель 2 здесь не может быть увеличен. А именно, для любого положительного ε существует отличное от тождественного нуля решение этой задачи, удовлетворяющее в D^T оценке

$$|u(t, x)| \leq C \exp(\kappa |x|^{2+\varepsilon}).$$

Предельно широкие классы функций, в которых имеет место единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, были найдены в работе С. Тэклинда [3]. Он показал, что если решение $u(t, \bar{y})$ задачи (0.1*) в $D^T = (0, T) \times \mathbb{R}_{n+1}$ удовлетворяет неравенству

$$|u(t, \bar{y})| \leq \exp(|\bar{y}|h(|\bar{y}|)), \quad (0.5)$$

то $u(t, \bar{y}) = 0$. Здесь $h(r)$ – неубывающая положительная функция такая, что

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty. \quad (0.6)$$

Если же функция $h(r)$ такова, что интеграл (0.6) сходится, то построены решения $u(t, \bar{y})$ задачи (0.1*), отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условию (0.5). Аналогичные теоремы доказаны в дальнейшем и для некоторых классов параболических систем (см. [4], [5]).

Обобщение теоремы Тэклинда на случай первой смешанной задачи и задачи Коши для общего вырождающегося параболического уравнения второго порядка и параболических систем проведено О. А. Олейник, Е. В. Радкевичем в работах [6], [7]. Доказательства в них получены методом введения параметра. Сформулируем установленную в работе [7] теорему единственности, аналогичную теореме Тэклинда. В области $\omega \subset (0, T) \times \mathbb{R}_{n+1}$ рассматривается первая краевая задача для уравнения вида (0.1') ($c_i = 0$, $i = \overline{0, n}$) с некоторыми довольно естественными условиями на коэффициенты. Пусть $\gamma = \partial\omega \cap \{(t, \bar{y}) \mid 0 < t < T\}$, $\omega_0 = \partial\omega \cap \{(t, \bar{y}) \mid t = 0\}$, $\omega(R) = \omega \cap \{(t, \bar{y}) \mid |y_j| < R, j = \overline{0, n}\}$. Доказано, что если для обобщенного решения $u(t, \bar{y})$ уравнения (0.1') в ω с граничным условием $u = 0$ на γ и начальным условием $u = 0$ на ω_0 существует функция $h(r)$, удовлетворяющая условию (0.6), такая, что при любых целых $m > M$ выполнено неравенство

$$\int_{\omega(2^m)} u^2 dt d\bar{y} \leq 2 \exp(2^m h(2^m)), \quad (0.7)$$

то $u = 0$ почти всюду в ω .

В работах А. Г. Гагнидзе [8], [9] методом введения параметра для уравнения вида (0.1') ($c_i = 0$, $i = \overline{0, n}$) получены теоремы единственности решений второй и третьей смешанных задач.

Для равномерно параболического уравнения второго порядка (0.1') ($b_i = c_i = d = 0$, $i = \overline{0, n}$) А. К. Гузиным [10] в случае второй смешанной задачи, Ф. Х. Мукминовым [11] – для первой смешанной задачи выделены классы единственности, близкие к классу Тэклинда. А именно, если для обобщенного решения задачи (0.1'), (0.3) с нулевой начальной функцией и однородным условием Неймана (или Дирихле) на боковой границе D^T существует такая

монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что выполнено условие (0.6) и для всех $r \geq 1$

$$\int_0^T \int_{\Omega \cap \{|\bar{\mathbf{y}}| < r\}} u^2(t, \bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{y}} dt \leq \exp(rh(r)),$$

то оно тождественно равно нулю.

В работе [12] в близкой форме получен класс единственности для некоторого вида квазилинейных параболических систем.

С нашей точки зрения, интегральная запись ограничений, выделяющих класс единственности, более адекватна, чем ограничения в терминах нормы пространства L_∞ . Так, например, в работе Е. М. Ландиса [13] найден следующий геометрический класс единственности. В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$ – неограниченная область, для уравнения (0.1') ($b_i = c_i = d = 0$, $i = \overline{0, n}$) рассматривается вторая начально-краевая задача. Пусть $F(r)$ – произвольная монотонно возрастающая положительная функция. Пусть $\{r'_m, r''_m\}$, $m = \overline{1, \infty}$, $0 < r'_m < r''_m < r'_{m+1}$, – последовательность пар чисел такая, что $r''_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Обозначим через Ω''_m множество $\{\bar{\mathbf{y}} \in \Omega \mid r'_m < |\bar{\mathbf{y}}| < r''_m\}$. Пусть Ω удовлетворяет условию

$$\text{mes } \Omega''_m \frac{F^2(r''_m)}{(r''_m - r'_m)^2} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (0.8)$$

Тогда если в D^T выполнено неравенство $|u(t, \bar{\mathbf{y}})| \leq F(|\bar{\mathbf{y}}|)$, то $u \equiv 0$. Если переписать ограничения (0.8) в интегральном виде, то обнаружится, что класс единственности (0.8) уже класса единственности, полученного в работе [7]:

$$\int_{\Omega''_m} u^2 d\bar{\mathbf{y}} \leq F^2(r''_m) \text{mes } \Omega''_m = \varepsilon(m)(r''_m - r'_m)^2,$$

где $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Интересный геометрический класс единственности получен в работе [14]. Приведем характерное следствие из теорем 1, 2 работы [14] для уравнения (0.1') ($b_i = c_i = d = 0$, $i = \overline{0, n}$) в форме, позволяющей сравнивать его с некоторыми результатами настоящей работы.

Рассмотрим трубчатую область

$$\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > d, |\mathbf{y}| < f(x)\} \quad (0.9)$$

с положительной функцией $f(x)$ ($d \in (-\infty, 0]$). От функции f будем требовать только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью. В частности, это влечет ее измеримость. Кроме того, на любом конечном отрезке $[a, b]$ такая функция в некоторой точке отрезка принимает свое минимальное значение. Это сразу следует из замкнутости надграфика функции.

Из результатов работы [14] следует, что обобщенное решение $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1'), (0.2'), (0.3) с нулевой начальной функцией в области $D^T(f) = (0, T) \times \Omega(f)$ подчиняется оценке

$$\int_0^T \int_{\Omega^r} \mathcal{Q}(u) dt d\bar{\mathbf{y}} \leq C \exp\left(-\int_r^R \frac{ds}{f(s)}\right) \int_0^T \int_{\Omega^R} \mathcal{Q}(u) dt d\bar{\mathbf{y}}, \quad r < R,$$

где

$$\mathcal{Q}(u) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}}) u_{y_i} u_{y_j} + u^2, \quad \Omega^r = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega \mid x < r\}.$$

Отсюда вытекает следующая теорема единственности. Если для некоторой последовательности $R_N \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\int_0^T \int_{\Omega^{R_N}} \mathcal{Q}(u) dt d\bar{\mathbf{y}} \leq \varepsilon(R_N) \exp\left(\int_1^{R_N} \frac{ds}{f(s)}\right), \quad (0.10)$$

где $\varepsilon(R_N) \rightarrow 0$ при $R_N \rightarrow \infty$, то $u \equiv 0$ в $D^T(f)$. Отметим, что в (0.10) выражение $\mathcal{Q}(u)$ может быть заменено на u^2 .

Таким образом, выбирая достаточно быстро убывающую при $s \rightarrow \infty$ функцию $f(s)$, мы получаем области, для которых класс единственности решения задачи (0.1'), (0.2'), (0.3) содержит функции наперед заданного роста при $|x| \rightarrow \infty$. В частности, существуют области, для которых класс единственности вида (0.10) шире любого тэклиндовского класса единственности вида (0.7). Очевидно, что эти классы единственности тем шире, чем быстрее область “сужается” на бесконечности. Этим же свойством обладает задача Дирихле для эллиптических уравнений в неограниченной области (см. [15], [16]).

Кроме приведенного результата в работе О. А. Олейник, Г. А. Иосифьяна [14] для решения параболического уравнения второго порядка (0.1') со смешанными граничными условиями получены априорные оценки, соответствующие принципу Сен-Венана в теории упругости. Рассматривается смешанная задача с начальными и граничными условиями в неограниченной нецилиндрической области, когда на одной части задано условие Дирихле, а на другой ее части задано условие Неймана или третье краевое условие. Классы функций, в которых краевая задача в неограниченной области может иметь лишь единственное решение, определяются с помощью собственных значений некоторых эллиптических краевых задач, рассматриваемых на сечениях этой области некоторым семейством гиперповерхностей. Также получены априорные оценки решения параболического уравнения (0.1'), из которых вытекают теоремы единственности для задачи без начальных условий.

Для эллиптического уравнения второго порядка аналогичные оценки и теоремы единственности решений краевых задач в неограниченных областях установлены в работах [17], [15] близкими методами. На основе оценок, полученных в работах [14], [17], [15], в работе [18] доказаны теоремы об устранимых особенностях в точках границы области для решений краевых задач, а также теоремы единственности в классах функций с неограниченным интегралом энергии.

В [19] построены примеры уравнений вида (0.1') в неограниченной области, “сужающейся” не быстрее, чем экспоненциально, подтверждающие, что классы единственности решений второй смешанной задачи не шире класса единственности решения задачи Коши. Аналогичный пример построен А. Г. Гагнидзе в [8], [9] для третьей краевой задачи. Тезис О. А. Олейник (см. [19]) о том, что “в случае задачи Неймана для параболического уравнения второго порядка полученные в [7] теоремы единственности не могут быть усилены в зависимости от геометрических свойств неограниченной области”, не опровергается примерами работы Е. М. Ландиса [13] для второй начально-краевой задачи и работ

А. Г. Гагнидзе [8], [9] для третьей начально-краевой задачи, если ограничения на рост функции формулировать в интегральном виде.

Теоремы единственности решения задачи Коши в классах экспоненциально растущих функций были получены в работе О. А. Ладыженской [20] для параболического уравнения высокого порядка

$$u_t = \sum_{k=0}^{2p} \sum_{|\bar{\alpha}|=k} a_{\bar{\alpha}}(t) D_{\bar{y}}^{\bar{\alpha}} u, \quad (0.11)$$

коэффициенты которого $a_{\bar{\alpha}}(t)$ непрерывны на $[0, T]$ и при всевозможных $\bar{z} \in \mathbb{R}_{n+1}$ и любом $t \in [0, T]$ удовлетворяют условию

$$(-1)^p \sum_{|\bar{\alpha}|=2p} a_{\bar{\alpha}}(t) \bar{z}^{\bar{\alpha}} \leq -\delta \sum_{i=0}^n z_i^{2p}, \quad \delta > 0.$$

Доказано, что если решение задачи (0.11), $u|_{t=0} = 0$, удовлетворяет неравенству

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t, \bar{y})| \leq \exp(\kappa |\bar{y}|^{2p/(2p-1)}), \quad \bar{y} \in \mathbb{R}_{n+1},$$

то $u(t, \bar{y})$ тождественно равно нулю в $D^T = (0, T) \times \mathbb{R}_{n+1}$. Аналогичный результат для параболических по Петровскому систем установлен тем же методом в работе С. Д. Эйдельмана [21].

На основе априорной оценки аналитического продолжения по одному из независимых переменных решения некоторой специальной вспомогательной параболической системы в работах О. А. Олейник [22], [23] в классах растущих функций установлены теоремы единственности решения задачи Коши и краевых задач в неограниченных областях для общих параболических систем, рассмотренных В. А. Солонниковым [24].

Теорема единственности для задачи без начальных условий для общих параболических систем с общими краевыми условиями доказана в работе [25]. В работах [26], [27] теоремы о поведении решений (в неограниченных областях) общих параболических систем дифференциальных уравнений, зависящих от комплексного параметра, аналогичные классическим теоремам Лиувилля и Фрагмена–Линделёфа, получены на основе некоторых теорем об аналитичности по пространственным переменным решений параболических систем.

Далее в работе положим

$$\mathcal{D}(g) = \sum_{s=1}^n |D_{y_s}^{m_s} g|^2 + |D_x^k g|^2.$$

Будем предполагать, что существуют положительные числа $\hat{a}$, $\hat{A}$ такие, что для п.в. $t \in (0, T)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \left(\hat{A} g^2 + \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta})=1} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{y}) D_{\bar{y}}^{\bar{\alpha}} g D_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} g \right) d\bar{y} \geq \hat{a} \int_{\Omega} \mathcal{D}(g) d\bar{y}, \quad g(\bar{y}) \in C_0^\infty(\Omega). \quad (0.12)$$

Если коэффициенты $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{y})$ при $(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) = 1$ симметричны по $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и равномерно непрерывны по $(t, \bar{y}) \in D^T$, то для выполнения (0.12) достаточно (см.,

например, [28]), чтобы существовала положительная постоянная c_0 такая, что для любых $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}_{n+1}$ и $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D^T$ справедливо неравенство

$$\sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta})=1} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) \bar{\mathbf{z}}^{\bar{\alpha}} \bar{\mathbf{z}}^{\bar{\beta}} \geq c_0 \left(z_0^{2k} + \sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} \right).$$

В случае уравнения второго порядка (0.1') для выполнения (0.12) с $\hat{A} = 0$ достаточно, чтобы существовала положительная постоянная $\hat{a}$ такая, что для любых $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}_{n+1}$ и $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D^T$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=0}^n a_{ij}(t, \bar{\mathbf{y}}) z_i z_j \geq \hat{a} |\bar{\mathbf{z}}|^2.$$

Введем обозначения:

$$\Omega_{r_1}^{r_2} = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega \mid r_1 < x < r_2\}, \quad J_{r_1}^{r_2}(u, \Omega) = \int_0^T \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} u^2 d\bar{\mathbf{y}} dt,$$

причем значения $r_1 = -\infty$, $r_2 = \infty$ могут быть опущены. Далее рассматривается обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3), определенное в § 1.

ТЕОРЕМА 1. Если обобщенное решение $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1)–(0.3) с $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ удовлетворяет следующему условию: существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h^{2k-1}(r)} = \infty \quad (0.13)$$

расходится и для всех $r \geq 1$

$$J_r^{r+1}(u, \Omega) \leq \exp(rh(r)), \quad (0.14)$$

то $u(t, \bar{\mathbf{y}}) = 0$ в D^T .

В классе единственности, определяемом условием (0.14), в § 3 доказана теорема существования решения задачи (0.1)–(0.3) с экспоненциально растущей начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}})$.

Кроме класса единственности типа Тэклинда мы устанавливаем также класс единственности решения задачи (0.1)–(0.3), зависящий от геометрии неограниченной области Ω .

Введем обозначение:

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf \left\{ \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} \mid g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} g^2 d\bar{\mathbf{y}} = 1 \right\}, \quad r_1 < r_2. \quad (0.15)$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ назовем λ -последовательностью области Ω с параметрами $k, m_1, \dots, m_n$ (в дальнейшем просто λ -последовательность), если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\Delta_j = x_{j+1} - x_j \leq 1, \quad 1 \leq \theta \lambda(x_j, x_{j+1}) \Delta_j^{2k}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (0.16)$$

Отметим, что в отличие от [29] здесь при определении λ -последовательности использовано дополнительное требование $\Delta_j \leq 1$, $j = \overline{0, \infty}$, с целью выделения класса сужающихся областей. Конечно, утверждение нижеследующей теоремы останется справедливым, если заменить его на требование $\Delta_j \leq c$, $j = \overline{0, \infty}$. Область назовем *сужающейся*, если для нее существует λ -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^\infty$. Примеры таких областей приведены в § 5.

Через $\Xi = \{k, m_1, \dots, m_n, \theta, \hat{A}, \hat{a}, \hat{a}\}$ будем обозначать набор постоянных. Зависимость других постоянных от этого набора будем указывать в круглых скобках.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – λ -последовательность сужающейся области Ω и $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность положительных чисел. Существует положительная постоянная $\kappa(\Xi)$ такая, что если для решения $u(t, \bar{y})$ задачи (0.1)–(0.3) с $\varphi(\bar{y}) = 0$ выполнено условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N^{-2k} \exp(-\kappa N) J_{x_N}^{x_N + \varepsilon_N}(u, \Omega) = 0, \quad (0.17)$$

то $u(t, \bar{y}) = 0$ в D^T .

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для областей, не являющихся сужающимися, но для них, как правило, условие (0.17) выделяет класс единственности уже тэклиндовского.

Конечно, класс единственности (0.17) зависит от выбора λ -последовательности. Назовем $\bar{\lambda}$ -последовательность *оптимальной*, если существует постоянная $D(\Xi)$ такая, что для любой другой λ -последовательности справедлива импликация $(x_L \leq \bar{x}_N) \Rightarrow (L \leq DN)$. Поскольку мы не следим за точным значением κ в (0.17), можно считать, что оптимальная $\bar{\lambda}$ -последовательность обеспечивает “наиболее быстро убывающую” с ростом $x = \bar{x}_N$ экспоненту в (0.17). Вопрос об оптимальности λ -последовательности для трубчатых областей рассмотрен в § 5 (см. также [29]).

Для трубчатых областей вида (0.9), не содержащих полупространство, естественно выразить условие (0.17) в терминах функции $f(x)$. С этой целью определим понятие Π -последовательности.

Зафиксируем положительное число μ . Введем обозначение:

$$\mathcal{P}(\rho, z) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 \mid z \leq x < z + \rho, 0 < y_1 < \rho^{k/\mu}\}$$

– прямоугольник ширины ρ с левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Символ $\Gamma_a^b(f)$ будет обозначать криволинейную трапецию

$$\Gamma_a^b(f) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x < b, 0 < y_1 < f(x)\}, \quad a \geq d,$$

причем параметр $b = \infty$ может быть опущен.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ назовем $\Pi(\mu, k)$ -последовательностью функции f , если справедливы равенства

$$x_{j+1} = \sup\{r \mid f^\mu(x) \geq (r - x_j)^k \quad \forall x \in [x_j, r]\}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (0.18)$$

При этом обозначение $\Pi(\mu, \mu)$ будем сокращать до Π .

Покажем, что $\Pi(\mu, k)$ -последовательность можно построить всегда, начиная с произвольной точки $x_0 > 0$. Выберем максимально возможное число ρ такое, что прямоугольник $\mathcal{P}(\rho, x_0)$ лежит в $\Gamma_{x_0}(f)$. Положим $x_1 = x_0 + \rho$, тогда, очевидно,

$$\inf_{[x_0, x_1]} f^\mu(x) \geq \rho^k = (\Delta_0)^k \geq \inf_{[x_0, x_1]} f^\mu(x).$$

Таким же образом можно построить и остальные элементы $\Pi(\mu, k)$ -последовательности. Очевидно, если для любых $a > 0$ справедливо неравенство

$$\inf_{[a, a+1]} f(x) \leq 1, \quad (0.19)$$

то $\Delta_j \leq 1$, $j = \overline{0, \infty}$. Конечно, условие (0.19) можно несколько ослабить, потребовав существование таких положительных чисел b, c , что для любых $a > 0$ справедливо неравенство $\inf_{[a, a+b]} f(x) \leq c$. Однако это требование растяжением переменных сводится к условию (0.19), и мы ограничиваемся рассмотрением последнего.

Установлено, что для любого $s = \overline{1, n}$ $\Pi(m_s, k)$ -последовательность функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяющей условию (0.19), является λ -последовательностью для области $\Omega(f)$, значит, $\Omega(f)$ является сужающейся областью (см. следствие к утверждению 6).

Положим $m = \max_{s=\overline{1, n}} m_s$. Если для функции $f(x)$ существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f^{m/k}(x), x + f^{m/k}(x)]\} \leq \omega f(x), \quad x > 0, \quad (0.20)$$

то $\Pi(m, k)$ -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяющей условию (0.19), является оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательностью для $\Omega(f)$ (утверждение 7). При этом существует положительная постоянная c такая, что справедливы оценки

$$c^{-1} \int_1^{x_N} \frac{dx}{f^{m/k}(x)} \leq N \leq c \int_1^{x_N} \frac{dx}{f^{m/k}(x)}, \quad N \geq 1 \quad (0.21)$$

(см. следствие к утверждению 7).

Покажем, что для области с нерегулярным поведением границы класс единственности вида (0.10) может становиться неточным. Рассмотрим области вида

$$Q_a = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < \min(1, x^{-a})\}, \\ Q_b = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < \min(1, x^{-b})\},$$

$$\tilde{Q}_b = Q_b \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \ell_j, \quad \ell_j = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x = x_j, x_j^{-a} \leq |\mathbf{y}|\}, \quad 0 < b < a.$$

Здесь $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ — $\Pi(m, k)$ -последовательность функции $f_a(x) = \min(1, x^{-a})$ с $m = \max_{s=\overline{1, n}} m_s$, $x_0 = 1$. Если рассматривать область $\tilde{Q}_b$ как трубчатую с некоторой функцией $\tilde{f}_b(x)$, то имеем равенства $\tilde{f}_b(x) = f_b(x) = \min(1, x^{-b})$ при п.в. $x > 0$, поэтому классы единственности вида (0.10) для областей Q_b и $\tilde{Q}_b$ совпадают. Однако мы устанавливаем для области $\tilde{Q}_b$ существенно более широкий (и точный) класс единственности, такой же, как и для области Q_a .

Легко видеть, что $\Pi(m, k)$ -последовательность функции $f_a(x)$ является $\Pi(m, k)$ -последовательностью функции $\tilde{f}_b(x)$ и λ -последовательностью для областей Q_a , $\tilde{Q}_b$. Действительно, для $\Pi(m, k)$ -последовательности $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ функции $f_a(x)$ получаем равенства

$$(x_{j+1} - x_j)^k = \min_{[x_j, x_{j+1}]} f_a^m(x) = \min(1, x_{j+1}^{-am}) = x_{j+1}^{-am}, \quad j = \overline{0, \infty},$$

из которых следуют соотношения

$$\min_{[x_j, x_{j+1}]} \tilde{f}_b^m(x) = x_{j+1}^{-am} = (x_{j+1} - x_j)^k, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Поэтому, взяв ее в качестве λ -последовательности, по теореме 2 получим класс единственности (0.17), пригодный как для области Q_a , так и для области $\tilde{Q}_b$. Очевидно, для функции $f_a(x)$ выполнено условие (0.20). Поэтому соотношение (0.21) для $\Pi(m, k)$ -последовательности функции $f_a(x)$ принимает вид

$$c^{-1}x_N^{1+am/k} \leq N \leq cx_N^{1+am/k}, \quad N \geq 1. \quad (0.21a)$$

Взяв $\varepsilon_N = 1$, $N = \overline{0, \infty}$, можно переписать класс единственности (0.17) в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-\kappa_a r^{1+am/k}) J_r^{r+1}(u, Q_a) = 0, \quad (0.17a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-\kappa_a r^{1+am/k}) J_r^{r+1}(u, \tilde{Q}_b) = 0, \quad a > 0. \quad (0.17b)$$

При $k = m = 1$ последний класс единственности не может быть существенно расширен ввиду нижеследующей теоремы 4.

Несложным следствием теоремы 2 в случае трубчатой области является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть положительная функция $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяет условию (0.19). Существует положительная постоянная $\kappa(\Xi)$ такая, что если для решения $u(t, \bar{y})$ задачи (0.1)–(0.3) с $\varphi(\bar{y}) = 0$ в области $D^T(f)$ выполнено условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(-\kappa \int_1^r \frac{dx}{f^{m/k}(x)}\right) J_r^{r+1}(u, \Omega(f)) = 0, \quad (0.22)$$

то $u(t, \bar{y}) = 0$ в $D^T(f)$.

Для области Q_a класс единственности (0.22) решения задачи (0.1)–(0.3) приводится к виду (0.17a). Из (0.22) можно сделать вывод, что для сужающихся областей класс единственности расширяется с увеличением m и сужается с увеличением k . Таким образом, для сужающихся областей старшие члены уравнения (0.1) играют определяющую роль в формировании предлагаемого здесь класса единственности.

Из (0.22) следует, что для сужающихся областей класс единственности, определяемый условием (0.17), может быть шире, чем тэклиновский класс единственности, определяемый условием (0.14). В частности, это имеет место для области Q_a (см. (0.17a) при $a > k/(m(2k - 1))$).

При $n = 1$ для уравнений

$$u_t + u_{xxxx} = u_{yy}, \quad u_t + u_{yyyy} = u_{xx}$$

класс единственности (0.22) в области Q_a принимает вид соответственно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-\kappa_a r^{1+a/2}) J_r^{r+1}(u, Q_a) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-\kappa_a r^{1+2a}) J_r^{r+1}(u, Q_a) = 0.$$

Таким образом, класс единственности зависит от направления, в котором расположена область, т.е. классы единственности для одного и того же уравнения анизотропны.

В § 6 в цилиндрической области $D^T(f) = (0, T) \times \Omega(f)$ для задачи (0.1*), (0.2') построен следующий пример неединственности решения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ положительной функции $\bar{f}(x)$, $x \in (d, \infty)$, такой, что

$$\int_{x_0}^\infty \bar{f}(x) dx = C_0 < \infty, \quad (0.23)$$

удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \leq \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (0.24)$$

Тогда для любой положительной функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, такой, что выполнено вложение $\Omega_{x_0}(\bar{f}) \subset \Omega_{x_0}(f)$, для любого $T > 0$ в области $D^T(f)$ существует неотрицательное ненулевое решение задачи (0.1*), (0.2'), подчиняющееся оценке

$$u(t, \bar{y}) \leq \exp(\kappa_* N), \quad (t, \bar{y}) \in D^{T, x_N}(f) = (0, T) \times \Omega^{x_N}(f), \quad N \geq 1, \quad (0.25)$$

с положительной постоянной κ_* , зависящей только от n .

Отметим, что для Π -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $\bar{f}(x)$ условие (0.20) при $m = k = 1$ является достаточным, чтобы она удовлетворяла условию (0.24) (см. ниже неравенства (5.11)). В частности, для Π -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $f_a(x) = \min(1, x^{-a})$, $a > 1$, будут выполняться условия (0.23), (0.24). По теореме 4 получаем существование ненулевых решений задачи (0.1*), (0.2') в $D^T(f_a)$, $D^T(\tilde{f}_b)$, подчиняющихся оценке (0.25) в $D^{T, x_N}(f_a)$, $D^{T, x_N}(\tilde{f}_b)$, $N \geq 1$, соответственно. При $r \geq 1$, выбирая номер N таким, что $r + 1 \in (x_{N-1}, x_N]$, добиваемся включения $\Omega_r^{r+1}(\tilde{f}_b) \subset \Omega^{x_N}(\tilde{f}_b)$. Далее, при помощи оценки (0.21a), пользуясь (0.25), нетрудно установить, что

$$J_r^{r+1}(u, \tilde{Q}_b) \leq M_b \exp(K_a r^{1+a}), \quad r \geq 1.$$

Это доказывает точность класса единственности (0.17b) для области $\tilde{Q}_b$.

Для трубчатых областей $\Omega(f)$ с функцией $f(x)$ и ее Π -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$, удовлетворяющими условиям (0.24), (0.23), в § 6 установлено следствие оценки (0.25):

$$J_{x_N}^{x_{N+1}}(u, \Omega(f)) \leq M_* \exp(K_* N) \Delta_N^2, \quad N \geq 1. \quad (0.26)$$

Чтобы доказать точность класса единственности (0.17) решения уравнения теплопроводности для области $D^T(f)$, применяем теорему 4 в ситуации, когда

$f(x) = \bar{f}(x)$, $x \in (d, \infty)$, и $f(x)$ удовлетворяет условиям (0.19), (0.20), (0.23). Поскольку Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ функции f является λ -последовательностью сужающейся области $\Omega(f)$, то, сравнивая (0.17) при $\varepsilon_N = \Delta_N$, $N = \overline{0, \infty}$, и (0.26), приходим к выводу, что в случае уравнения теплопроводности постоянная κ в классе единственности (0.17) для области $\Omega(f)$ не может быть заменена на неограниченно возрастающую последовательность $\{\kappa_N\}_{N=0}^{\infty}$. В этом смысле построенный пример показывает, что найденный класс единственности для области $D^T(f)$ нельзя существенно расширить.

Отметим, что условие (0.23) является достаточным, чтобы при $k = m = 1$ геометрический класс единственности (0.22) был шире тэклиндовского класса (0.14) с функцией $h(r) = r$, $r \geq 1$. Это легко установить из неравенства

$$(r-1)^2 = \left(\int_1^r dx \right)^2 \leq \int_1^r f(x) dx \int_1^r \frac{dx}{f(x)}.$$

Приведем еще один пример сужающейся трубчатой области $\Omega(f)$, $f_s(x) = x^{2 \sin 2\pi x}$ при $x \geq 1$, $f_s(x) = 1$ при $0 < x < 1$, с нерегулярным поведением границы. Для нее наши теоремы позволяют установить точный класс единственности для уравнения теплопроводности. Рассмотрим еще функцию $\bar{f}_s$, график которой получается следующим образом. Пусть $a_k = 3/4 + k$, $k = \overline{1, \infty}$, — точки минимума функции $\sin 2\pi x$. Функции f_s , $\bar{f}_s$ совпадают на интервалах $(a_k - 1/8, a_k + 1/8)$. На оставшихся интервалах функция $\bar{f}_s$ определяется однозначно линейным и непрерывным образом. Функция $\bar{f}_s$ удовлетворяет соотношению (0.20) при $m = k = 1$. Это легко установить при помощи теоремы Лагранжа, используя тот факт, что ее производная при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Кроме того, несложно заметить, что для функции $\bar{f}_s$ справедливы условия (0.23), (0.19). Пусть $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ — Π -последовательность функции $\bar{f}_s(x)$ с $x_0 = 1$. Покажем, что класс единственности вида (0.22) для уравнения теплопроводности является точным, несмотря на то что условие (0.20) не выполнено для функции f_s . Для этого установим оценки интеграла

$$I(r, f_s) = \int_1^r \frac{dx}{f_s(x)}, \quad r > 1.$$

Легко вычислить (см., например, [30; гл. 2, § 1]), что лапласовский интеграл

$$I_k = \int_{a_k - 1/8}^{a_k + 1/8} x^{-2 \sin 2\pi x} dx$$

имеет асимптотику

$$I_k \approx \frac{a_k^2}{2\sqrt{\pi \ln a_k}}.$$

Теперь нетрудно установить оценки

$$\frac{C^{-1}r^3}{\sqrt{\ln r}} \leq I(r, f_s) \leq I(r, \bar{f}_s) \leq \frac{Cr^3}{\sqrt{\ln r}}, \quad r > 1.$$

Из (0.21) следуют также неравенства

$$\frac{c^{-1}x_N^3}{\sqrt{\ln x_N}} \leq N \leq \frac{cx_N^3}{\sqrt{\ln x_N}}, \quad N \geq 1.$$

По теореме 4 существует нетривиальное решение уравнения Лапласа в $\Omega(f)$, подчиняющееся оценке (0.25), из которой несложно получить неравенство

$$J_r^{r+1}(u, \Omega(f_s)) \leq M_s \exp\left(K_s \frac{cr^3}{\sqrt{\ln r}}\right), \quad r \geq 1.$$

Отсюда следует, что класс единственности (0.22)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(-\kappa_s \frac{r^3}{\sqrt{\ln r}}\right) J_r^{r+1}(u, \Omega(f_s)) = 0$$

для области $\Omega(f_s)$ не может быть существенно расширен.

В § 7 доказана теорема существования решения задачи (0.1)–(0.3) с экспоненциально растущей начальной функцией $\varphi(\bar{y})$, принадлежащего классу единственности, определяемому условием (0.17).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{D}(v, w) = D_x^k v D_x^k w + \sum_{s=1}^n D_{y_s}^{m_s} v D_{y_s}^{m_s} w,$$

$$\mathcal{F}^t(v, w) = \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{y}) D_{\bar{y}}^{\bar{\alpha}} v D_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} w(\bar{y}), \quad v, w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}), \quad t \in [0, T],$$

$$(v, w)_Q = \int_Q v w d\bar{y}, \quad (v, w)_{\mathcal{D}, Q} = \int_Q \mathcal{D}(v, w) d\bar{y}, \quad (v, w)_{\mathcal{F}^t, Q} = \int_Q \mathcal{F}^t(v, w) d\bar{y}.$$

Будем обозначать через $\|\cdot\|_Q$ норму в $L_2(Q)$, через $\|v\|_{\mathcal{D}, Q}$ обозначим полунорму, порождаемую соответствующей билинейной формой. Если $Q = \Omega$, то индекс Q опускаем.

Через $D_{t_1, r_1}^{t_2, r_2} = (t_1, t_2) \times \Omega_{r_1}^{r_2}$ обозначим цилиндр, причем значения $t_1 = 0$, $r_1 = -\infty$, $r_2 = \infty$ могут быть опущены. Гильбертово пространство $\dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^T)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ по норме

$$\|g\|_{W_{\mathcal{D}}^0(D^T)} = \left(\int_0^T (\|g(t)\|^2 + \|g(t)\|_{\mathcal{D}}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Через $\dot{V}_{\mathcal{D}}(D^T)$ обозначим банахово пространство, состоящее из элементов пространства $\dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^T)$, непрерывных по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$, с нормой

$$\|g\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T)} = \left(\max_{[0, T]} \|g(t)\|^2 + \int_0^T \|g(t)\|_{\mathcal{D}}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пространство $L_{2, \text{lc}}(\Omega)$ составим из функций $g(\bar{y})$, определенных в Ω , для которых при любом $r > 0$ найдется функция из пространства $L_2(\Omega)$, совпадающая с функцией $g(\bar{y})$ в Ω^r . Пространство $\dot{V}_{\mathcal{D}, \text{lc}}(D^T)$ состоит из таких функций $g(t, \bar{y})$, определенных в D^T , для которых при каждом $r > 0$ найдется функция из пространства $\dot{V}_{\mathcal{D}}(D^T)$, совпадающая с $g(t, \bar{y})$ в $D^{T, r}$. Поскольку локальность мы понимаем здесь в необычном смысле, то индекс lc заменен на lc .

Обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) \in L_{2,lc}(\Omega)$ назовем функцию $u(t, \bar{\mathbf{y}}) \in \dot{V}_{\mathcal{D},lc}(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \{-(u, v_t) + (u, v)_{\mathcal{D}^t}\} dt = (\varphi, v(0)) \quad (1.1)$$

для любой функции $v(t, \bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Данное определение подразумевает конечность величины $\int_0^T (u, v)_{\mathcal{D}^t} dt$ для функций из пространства $\dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^T)$. Этот факт следует из приведенных ниже лемм 1, 2.

ЛЕММА 1. Для любой функции $g(x) \in C^\infty[a, b]$ и любого $\varepsilon \leq (b - a)^2$ справедливы неравенства

$$\int_a^b (D_x^p g)^2 dx \leq \varepsilon^{-p} \int_a^b [\varepsilon^i (D_x^i g)^2 + G_i g^2] dx, \quad p = \overline{0, i}, \quad (1.2)$$

где $G_i \geq 1$ – постоянная, зависящая только от i , причем $G_{i+1} \geq G_i$. Здесь i – произвольное натуральное число.

Доказательство леммы см. в работе [29].

Из (1.2) при $\varepsilon = \hat{\varepsilon} \Delta^2$, $\Delta = b - a \leq 1$, $\hat{\varepsilon} \in (0, 1]$, следуют неравенства

$$\int_a^b \frac{(D_x^p g)^2}{\Delta^{2i-2p}} dx \leq \hat{\varepsilon}^{k-p} \int_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\hat{\varepsilon}^p \Delta^{2k}} \int_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{0, i}, \quad i = \overline{0, k}.$$

Делая в них замену $\epsilon = \hat{\varepsilon}^{k-p}$, $\epsilon \in (0, 1]$, выводим неравенства

$$\int_a^b \frac{(D_x^p g)^2}{\Delta^{2i-2p}} dx \leq \epsilon \int_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{\tilde{C}\epsilon}{\epsilon^{k/(i-p)} \Delta^{2k}} \int_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{0, i-1}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (1.3)$$

$$\int_a^b (D_x^i g)^2 dx \leq \epsilon \int_a^b (D_x^k g)^2 dx + \frac{\tilde{C}\epsilon}{\epsilon^k \Delta^{2k}} \int_a^b g^2 dx, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (1.3')$$

ЛЕММА 2. Пусть $\Delta = b - a \leq 1$, $\Pi = (a, b) \times \mathbb{R}_n$, $\bar{\alpha} = (i, \alpha)$, $|\alpha| \neq 0$. Существуют положительные постоянные

$$\tilde{C}(k, m_1, m_2, \dots, m_n), \quad \gamma(\alpha, k, m_1, m_2, \dots, m_n)$$

такие, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ при любом $\epsilon \in (0, 1]$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2i-2p}} \leq \epsilon \|g\|_{\mathcal{D}, \Pi}^2 + \frac{\epsilon \tilde{C} \|g\|_{\Pi}^2}{\epsilon^{k/(i-p)} \Delta^{2k}}, \quad p = \overline{0, i-1}, \quad (\bar{\alpha}) \leq 1, \quad (1.4)$$

$$\|D_x^i D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2 \leq \epsilon \|g\|_{\mathcal{D}, \Pi}^2 + \frac{\epsilon \tilde{C} \|g\|_{\Pi}^2}{\epsilon^\gamma \Delta^{2k}}, \quad (\bar{\alpha}) < 1, \quad \gamma > 0, \quad (1.4')$$

$$\|D_x^i D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2 \leq \tilde{C} \left(\|g\|_{\mathcal{D}, \Pi}^2 + \frac{\|g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2k}} \right), \quad (\bar{\alpha}) = 1. \quad (1.4'')$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что, вообще говоря, различные постоянные $\tilde{C}$ в неравенствах (1.3), (1.3'), (1.4), (1.4'), (1.4'') далее считаем одинаковыми, выбирая наибольшую из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i' – такое число (не всегда целое), что

$$\frac{i'}{k} + \frac{\alpha_1}{m_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m_n} = 1, \quad i' \geq i, \quad i' < k.$$

Сначала для $\hat{\Pi} = (0, 1) \times \mathbb{R}_n$ при произвольном $\Delta \leq 1$ установим неравенства

$$\frac{\|D_x^p D_y^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2i}} \leq \epsilon \left(\sum_{s=1}^n \|D_{y_s}^{m_s} g\|_{\hat{\Pi}}^2 + \frac{\|D_x^k g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} \right) + \frac{\epsilon \tilde{C} \|g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\epsilon^\gamma \Delta^{2k}}, \quad (1.5)$$

$$p = \overline{0, i}, \quad p < i', \quad \gamma = \frac{k}{i' - p},$$

$$\frac{\|D_x^i D_y^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2i}} \leq \tilde{C} \left(\sum_{s=1}^n \|D_{y_s}^{m_s} g\|_{\hat{\Pi}}^2 + \frac{\|D_x^k g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} + \frac{\|g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} \right), \quad (\bar{\alpha}) = 1. \quad (1.5'')$$

Далее, чтобы получить (1.4), (1.4'), (1.4''), достаточно сделать замену переменной $z = a + x\Delta$ в (1.5), (1.5'') соответственно.

На первом шаге будем рассматривать функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\hat{\Pi})$. Для них справедливы разложение в ряд Фурье

$$g(x, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\mathbf{y}) \sin j\pi x, \quad a_j(\mathbf{y}) = 2 \int_0^1 g(x, \mathbf{y}) \sin j\pi x \, dx,$$

и равенства Парсеваля

$$\int_0^1 (D_x^p D_y^\alpha g)^2 \, dx = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} (D_y^\alpha a_j(\mathbf{y}))^2, \quad p = \overline{0, i}.$$

Интегрируя их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$, получаем

$$\|D_x^p D_y^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}_n} (D_y^\alpha a_j(\mathbf{y}))^2 \, d\mathbf{y}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.6)$$

К функциям $a_j(\mathbf{y})$ применим преобразование Фурье: $\tilde{a}_j(\mathbf{z}) = F[a_j(\mathbf{y})]$. Пользуясь равенством Планшереля, перепишем (1.6) в виде

$$\|D_x^p D_y^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}_n} |F[D_y^\alpha a_j(\mathbf{y})]|^2 \, d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.7)$$

Поскольку $|F[D_y^\alpha a_j(\mathbf{y})]| = |\mathbf{z}^\alpha F[a_j(\mathbf{y})]| = |\mathbf{z}^\alpha \tilde{a}_j(\mathbf{z})|$, то (1.7) принимает вид

$$\|D_x^p D_y^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbf{z}^{2\alpha} |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 \, d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.8)$$

Используя многомерное неравенство Юнга, при $k > i' > 0$ выводим неравенство

$$\frac{j^{2p} z_1^{2\alpha_1} \dots z_n^{2\alpha_n}}{\Delta^{2i}} \leq \hat{\epsilon} \sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} + \frac{j^{2pk/i'}}{\Delta^{2ik/i'} \hat{\epsilon}^{(k-i')/i'}}, \quad \hat{\epsilon} \in (0, 1]. \quad (1.9)$$

Аналогично, при $(\bar{\alpha}) = 1$, $i = i'$ имеем

$$\frac{j^{2i} \mathbf{z}^{2\alpha}}{\Delta^{2i}} \leq \sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} + \frac{j^{2k}}{\Delta^{2k}}.$$

Подставляя это в (1.8) с $p = i$, получаем (1.5'') для функций $g \in C_0^\infty(\hat{\Pi})$. Применяя еще раз неравенство Юнга, для $\hat{\delta} \in (0, 1]$ установим справедливость неравенства

$$\frac{j^{2pk/i'}}{\Delta^{2ik/i'}} \leq \chi_p \hat{\delta}^{i'/p} \frac{j^{2k}}{\Delta^{2k}} + \frac{1}{\hat{\delta}^{i'/(i'-p)} \Delta^{2(i-p)k/(i'-p)}}, \quad p < i'. \quad (1.10)$$

Здесь $\chi_p = 0$ при $p = 0$ и $\chi_p = 1$ при $p \neq 0$. Положим $\hat{\delta}^{i'/p} = \hat{\epsilon}^{k/i'}$. Тогда

$$\frac{\hat{\delta}^{i'/p}}{\hat{\epsilon}^{(k-i')/i'}} = \hat{\epsilon}, \quad \hat{\delta}^{i'/(i'-p)} \hat{\epsilon}^{(k-i')/i'} = \hat{\epsilon}^{k/(i'-p)-1} = \hat{\epsilon}^{\gamma-1}.$$

Очевидно, для $p = \overline{0, i-1}$ $\gamma \geq k/(i-p)$. Соединяя (1.9) и (1.10), получим при $\Delta \leq 1$

$$\frac{j^{2p} \mathbf{z}^{2\alpha}}{\Delta^{2i}} \leq \hat{\epsilon} \sum_{s=1}^n z_s^{2m_s} + \hat{\epsilon} \frac{j^{2k}}{\Delta^{2k}} + \frac{\hat{\epsilon}}{\hat{\epsilon}^\gamma \Delta^{2k}}. \quad (1.11)$$

Подставляя последнее в (1.8), выводим неравенство (1.5) (с постоянными $\tilde{C} = 1$, $\epsilon = \hat{\epsilon}$) для функций $g \in C_0^\infty(\hat{\Pi})$.

Докажем теперь неравенство (1.5) для функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$. Для этого построим продолжение $\bar{g}(x, \mathbf{y})$ на $\bar{\Pi} = (-1, 2) \times \mathbb{R}_n$ такое, что $\bar{g}|_{\hat{\Pi}} = g$ и справедливы неравенства

$$\|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} \bar{g}\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq C_{\bar{\alpha}} \|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g\|_{\hat{\Pi}}^2. \quad (1.12)$$

Построение такого продолжения описано, например, в [31; гл. III, § 4, п. 2].

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(-1, 2)$ – срезающая функция, не превосходящая единицы, равная единице на $[0, 1]$. Тогда для функции $v = \bar{g}\eta$, принадлежащей $C_0^\infty(\bar{\Pi})$, при помощи (1.5) можно установить, что

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha v\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2i}} \leq \hat{\epsilon} \left(3^{2k} \frac{\|D_x^k v\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} + \sum_{s=1}^n \|D_{y_s}^{m_s} v\|_{\bar{\Pi}}^2 \right) + \frac{\hat{\epsilon} \|v\|_{\bar{\Pi}}^2}{\hat{\epsilon}^\gamma \Delta^{2k}}. \quad (1.13)$$

Поскольку срезающая функция $\eta(x)$ зависит только от x и не превосходит единицы, то из (1.12) при любом α следуют неравенства

$$\|D_{\mathbf{y}}^\alpha v\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq C_{0,\alpha} \|D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2. \quad (1.14)$$

Кроме того, пользуясь (1.12), выводим соотношения

$$\|D_x^i v\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq \left(\sum_{s=0}^i C_i^s \|D_x^{i-s} \eta D_x^s \bar{g}\|_{\bar{\Pi}} \right)^2 \leq E_1(i) \sum_{s=0}^i \|D_x^s \bar{g}\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq E_1(i) \sum_{s=0}^i C_{s,0} \|D_x^s g\|_{\hat{\Pi}}^2, \\ 0 \leq i \leq k.$$

Далее, применим неравенство (1.2) с $\varepsilon = 1$:

$$\|D_{x\bar{\Pi}}^s g\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq \|D_{x\bar{\Pi}}^i g\|_{\bar{\Pi}}^2 + G_i \|g\|_{\bar{\Pi}}^2, \quad s = \overline{0, i}.$$

В результате получаем

$$\|D_{x\bar{\Pi}}^i v\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq E_2(i) (\|D_{x\bar{\Pi}}^i g\|_{\bar{\Pi}}^2 + \|g\|_{\bar{\Pi}}^2), \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14), (1.15) в (1.13), выводим неравенство

$$\frac{\|D_{x\bar{\Pi}}^p D_{\mathbf{y}\bar{\Pi}}^\alpha g\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2i}} \leq \widehat{C}_1 \widehat{\epsilon} \left(\sum_{s=1}^n \|D_{\mathbf{y}\bar{\Pi}}^{m_s} g\|_{\bar{\Pi}}^2 + \frac{\|D_{x\bar{\Pi}}^k v\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} \right) + \widehat{C}_2 \frac{\widehat{\epsilon} \|g\|_{\bar{\Pi}}^2}{\widehat{\epsilon}^\gamma \Delta^{2k}},$$

где $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ – положительные постоянные, зависящие от $k, m_1, \dots, m_n$. Делая замену $\epsilon = \widehat{\epsilon} \widehat{C}_1$, установим неравенство (1.5). Итак, (1.5) доказано в общей ситуации. Аналогичным образом доказывается неравенство (1.5'').

ЗАМЕЧАНИЕ. При помощи неравенств (1.3'), (1.4'), (1.4'') нетрудно доказать, что билинейная форма $\int_0^T (v, w)_{\mathcal{F}^i} dt$ является непрерывной в пространстве $\dot{W}_{\mathcal{Q}}^0(D^T)$.

Определим невозрастающую функцию $\eta(x) \in C^\infty(-\infty, b)$, равную 1 и 0 при $x \leq a$ и $x \geq b$ соответственно и равную $(b-x)/(b-a)$ на интервале $((a+b)/2, b)$. Для $x \in (a, b)$ справедливы неравенства

$$|D^s \eta| \leq \frac{\widehat{c}_s}{\Delta^s}, \quad s = \overline{0, \infty}. \quad (1.16)$$

Нетрудно показать, что

$$D^p \eta^k = \sum_{s=1}^p B_{sp}^{p_0 p_1 \dots p_s} \prod_{\substack{p_0 + 2p_1 + \dots + (s+1)p_s = p+k \\ p_0 + p_1 + \dots + p_s = k}} \eta^{p_0} (D\eta)^{p_1} \dots (D^s \eta)^{p_s}, \quad p = \overline{1, k-1},$$

где $B_{sp}^{p_0 p_1 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа. Очевидно, $p_1 \geq k-p$.

Ввиду (1.16) при $x \in (a, b)$ справедливы неравенства

$$|D^p \eta^k| \leq \sum_{s=1}^p B_{sp}^{p_0 p_1 \dots p_s} \prod_{\substack{p_0 + 2p_1 + \dots + (s+1)p_s = p+k \\ p_0 + p_1 + \dots + p_s = k}} \eta^{p_0} \left(\frac{\widehat{c}_1}{\Delta} \right)^{p_1} \left(\frac{\widehat{c}_s}{\Delta^s} \right)^{p_s} \leq \frac{c_p \eta^{k-p}}{\Delta^p}, \quad (1.17)$$

$$|D^p \eta^{2k}| \leq \frac{2^p c_p^2 \eta^{2k-p}}{\Delta^p}, \quad p = \overline{1, k-1}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\Delta = b-a \leq 1$, $\Pi = (a, b) \times \mathbb{R}_n$, $(\bar{\alpha}) = ((i, \alpha)) \leq 1$. Существует положительная постоянная $C(k, m_1, m_2, \dots, m_n)$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1})$ при любом $\delta \in (0, 1]$ справедливы неравенства

$$\frac{\|\eta^{(k-i+p)} D_{\mathbf{y}\bar{\Pi}}^\alpha D_{x\bar{\Pi}}^p g\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2(i-p)}} \leq \delta \int_{\Pi} \eta^{2k} \mathcal{Q}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{C\delta}{\delta^{k/(i-p)}} \frac{\|g\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}}, \quad p = \overline{0, i-1}, \quad (1.18)$$

$$\|\eta^k D_{\mathbf{y}\bar{\Pi}}^\alpha D_{x\bar{\Pi}}^i g\|_{\bar{\Pi}}^2 \leq C \left(\int_{\Pi} \eta^{2k} \mathcal{Q}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{\|g\|_{\bar{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} \right). \quad (1.18')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\pi_s = (b - \Delta/2^s, b - \Delta/2^{s+1})$, $\Pi_s = \pi_s \times \mathbb{R}_n$, $s = \overline{0, \infty}$. Для функции $\eta(x)$ справедливы равенства

$$\max_{\pi_s} \eta(x) = \frac{1}{2^s}, \quad \min_{\pi_s} \eta(x) = \frac{1}{2^{s+1}}, \quad s = \overline{0, \infty}. \quad (1.19)$$

Сначала выведем неравенства (1.18). Применяя (1.19), (1.3), (1.4), оценим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_s} \frac{\eta^{2(k-i+p)} |D_{\mathbf{y}}^{\alpha} D_x^p g|^2}{\Delta^{2(i-p)}} dx d\mathbf{y} \\ & \leq 2^{-2s(k-i+p)} \left(\epsilon \int_{\Pi_s} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{\epsilon \tilde{C}}{\epsilon^{k/(i-p)} \Delta^{2k}} \int_{\Pi_s} g^2 d\bar{\mathbf{y}} \right) \\ & \leq \epsilon 2^{2s(i-p)+2k} \int_{\Pi_s} \eta^{2k} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{\epsilon \tilde{C} 2^{-2s(k-i+p)}}{\epsilon^{k/(i-p)} \Delta^{2k}} \int_{\Pi_s} g^2 d\bar{\mathbf{y}}, \\ & \quad p = \overline{0, i-1}, \quad s = \overline{0, \infty}. \end{aligned}$$

Положим $\epsilon = \delta / (2^{2k} 2^{2s(i-p)})$, $\delta \in (0, 1]$. Для $p = \overline{0, i-1}$, $s = \overline{0, \infty}$ имеем

$$\epsilon \leq \frac{\delta}{2^{2k}}, \quad \frac{\epsilon 2^{-2s(k-i+p)}}{\epsilon^{k/(i-p)}} = \left(\frac{2^{2k}}{\delta} \right)^{k/(i-p)-1} \leq \left(\frac{2^{2k}}{\delta} \right)^{k-1}.$$

Таким образом, установлены неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_s} \frac{\eta^{2(k-i+p)} |D_{\mathbf{y}}^{\alpha} D_x^p g|^2}{\Delta^{2(i-p)}} dx d\mathbf{y} \leq \delta \int_{\Pi_s} \eta^{2k} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{C\delta}{\Delta^{2k} \delta^{k/(i-p)}} \int_{\Pi_s} g^2 d\bar{\mathbf{y}}, \\ & \quad p = \overline{0, i-1}, \quad s = \overline{0, \infty}. \end{aligned}$$

Суммируя их по $s = \overline{0, \infty}$, выводим (1.18).

Применяя (1.3'), (1.4') с $\epsilon = 1$ и (1.4''), выводим неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_s} \eta^{2k} |D_{\mathbf{y}}^{\alpha} D_x^i g|^2 dx d\mathbf{y} \leq \max_{\pi_s} \eta^{2k}(x) \tilde{C} \left(\int_{\Pi_s} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \int_{\Pi_s} \frac{g^2}{\Delta^{2k}} d\bar{\mathbf{y}} \right) \\ & \leq 2^{2k} \tilde{C} \int_{\Pi_s} \eta^{2k} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + \tilde{C} \int_{\Pi_s} \frac{g^2}{\Delta^{2k}} d\bar{\mathbf{y}}, \quad s = \overline{0, \infty}. \end{aligned}$$

Суммируя их по $s = \overline{0, \infty}$, выводим (1.18').

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если выполнено условие (0.12), то существует положительная постоянная A такая, что для п.в. $t \in (0, T)$ справедливо следующее неравенство Гординга:

$$\int_{\Omega} (Ag^2 + \mathcal{F}^t(g, g)) d\bar{\mathbf{y}} \geq \frac{\hat{a}}{2} \int_{\Omega} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}}, \quad g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (1.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$I = \int_{\Omega} \left(\sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) < 1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g| |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g| + 2 \sum_{(\bar{\alpha})=1, (\bar{\beta}) < 1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g| |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g| \right) d\bar{\mathbf{y}}.$$

Применяя (1.3'), (1.4') с $\Delta = 1$, оценим интегралы

$$I_1 = \int_{\Omega} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g|^2 d\bar{\mathbf{y}} \leq \epsilon \int_{\Omega} \left(\mathcal{D}(g) + \frac{\tilde{C}}{\epsilon^{\gamma}} g^2 \right) d\bar{\mathbf{y}}, \quad (\bar{\alpha}) < 1. \quad (1.21)$$

Далее,

$$I_2 = 2 \int_{\Omega} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g| |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g| d\bar{\mathbf{y}} \leq \epsilon \int_{\Omega} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g|^2 d\bar{\mathbf{y}} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g|^2 d\bar{\mathbf{y}}, \quad (\bar{\alpha}) = 1, \quad (\bar{\beta}) < 1.$$

Используя для первого слагаемого (1.4'') при $\Delta = 1$, для второго (1.21) с $\epsilon = \epsilon^2$, выводим неравенство

$$I_2 \leq 2\epsilon \int_{\Omega} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + C_1(\epsilon) \int_{\Omega} g^2 d\bar{\mathbf{y}}.$$

Пользуясь (0.4), (1.21) с $\epsilon = \epsilon$ и последним неравенством, выбирая подходящее ϵ , нетрудно установить оценку

$$- \int_{\Omega} \sum_{\substack{(\bar{\alpha}) + (\bar{\beta}) < 2 \\ (\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g d\bar{\mathbf{y}} \leq \widehat{a} I \leq \frac{\widehat{a}}{2} \int_{\Omega} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}} + C_2 \int_{\Omega} g^2 d\bar{\mathbf{y}}.$$

Комбинируя это с (0.12), получаем (1.20).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ – обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальной функцией $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ в Ω^b , $b > 0$. Тогда существует положительная постоянная $\widehat{M}$ такая, что для всех $t \in (0, T]$ и $a \in [0, b)$ справедливо неравенство

$$H^{t,a}(u) = \|u(t)\|_{\Omega^a}^2 + \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathcal{D}, \Omega^a}^2 d\tau \leq \frac{\widehat{M}}{\Delta^{2k}} \int_0^t \|u(\tau)\|_{\Omega_a^b}^2 d\tau, \quad \Delta = b - a. \quad (1.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $f_h(t)$ обозначим осреднение Стеклова

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau.$$

В тождестве (1.1) возьмем функцию $v = \omega_{-h}$, $0 < h \leq \delta$, $\omega \in C_0^\infty(D^{T-\delta})$. После простых преобразований придем к соотношению

$$\int_{D^{T-\delta}} \{(u_h)_t \omega + \mathcal{F}_h^t(u, \omega)\} dt = 0, \quad \mathcal{F}_h^t(u, \omega) = \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} [a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(t, \bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u]_h D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} \omega, \quad (1.23)$$

которое справедливо также для $\omega \in \dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^{T-\delta})$. Далее, ввиду произвольности $\delta \in (0, T)$ можем считать, что (1.23) справедливо в D^t , $t \in (0, T)$, при $\omega \in \dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^t)$ и малых h .

Пусть $\xi(x) \in C^\infty(-\infty, b)$ – неотрицательная срезающая функция, равная 1 и 0 при $x \leq a$ и $x \geq b$ соответственно. Положим в (1.23) $\omega = u_h \xi^2(x) \in \dot{W}_{\mathcal{D}}^0(D^t)$, $\text{supp } \omega \subset D^{t,b}$. Интегрирование первого слагаемого приводит к равенству

$$(u_h(t), u_h(t) \xi^2) + 2 \int_{D^t} \mathcal{F}_h^\tau(u(\tau), u_h(\tau) \xi^2) d\tau = (u_h(0), u_h(0) \xi^2).$$

После предельного перехода при $h \rightarrow 0$ получаем (с учетом того, что $\xi\varphi \equiv 0$)

$$(u(t), u(t)\xi^2) + 2 \int_0^t (u(\tau), u(\tau)\xi^2)_{\mathcal{F}\tau} d\tau = 0. \quad (1.24)$$

Используя (1.20), при п.в. $t \in (0, T)$ устанавливаем неравенство

$$(u(t), u(t)\xi^2)_{\mathcal{F}t} \geq \frac{\widehat{a}}{2} (u(t)\xi, u(t)\xi)_{\mathcal{D}} - A(u(t)\xi, u(t)\xi) + \{(u(t), u(t)\xi^2)_{\mathcal{F}t} - (u(t)\xi, u(t)\xi)_{\mathcal{F}t}\}.$$

Принимая во внимание последнее соотношение, из (1.24) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t)\xi^2 d\bar{\mathbf{y}} + \widehat{a} \int_{D^t} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} d\tau &\leq 2A \int_{D^t} u^2 \xi^2 d\bar{\mathbf{y}} d\tau + I, \\ I &\equiv \widehat{a} \int_{D^t} \{\xi^2 \mathcal{D}(u) - \mathcal{D}(\xi u)\} d\bar{\mathbf{y}} d\tau + 2 \int_{D^t} \{\mathcal{F}^\tau(u\xi, u\xi) - \mathcal{F}^\tau(u, u\xi^2)\} d\bar{\mathbf{y}} d\tau. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Оценим интегралы в I с учетом того, что $D_x^p \xi \equiv 0$, $D_x^p(\xi^2) \equiv 0$, $p \in \mathbb{N}$, вне промежутка $[a, b]$. На промежутке $[a, b]$, используя (0.4), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} I &\leq C_1 \int_{D_a^{t,b}} \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\alpha D_x^p u| |D^{i-p} \xi| \sum_{q=0}^{j-1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\beta D_x^q u| |D^{j-q} \xi| dx d\mathbf{y} d\tau \\ &+ C_1 \int_{D_a^{t,b}} \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\alpha D_x^p u| |D^{i-p} \xi| |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\beta D_x^j u| \xi dx d\mathbf{y} d\tau \\ &+ C_1 \int_{D_a^{t,b}} \sum_{(\bar{\alpha}), (\bar{\beta}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\alpha D_x^p u| |D^{i-p} \xi^2| |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\beta D_x^j u| dx d\mathbf{y} d\tau. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Далее положим $\xi = \eta^k$. Пользуясь оценками (1.17), из (1.26) выводим неравенство

$$I \leq C_2 \int_{D_a^{t,b}} \left[\widehat{\mu} \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u|^2 \eta^{2k} + \frac{1}{\widehat{\mu}} \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^\alpha D_x^p u|^2 \frac{\eta^{2(k-i+p)}}{\Delta^{2(i-p)}} \right] dx d\mathbf{y} d\tau, \quad (1.27)$$

где $\widehat{\mu} \in (0, 1]$ – произвольное число. Далее, применяя неравенства (1.18') для оценки первого слагаемого и (1.18) с $\delta = \widehat{\mu}^2$ для второго, устанавливаем соотношение

$$I \leq C_3 \widehat{\mu} \int_{D_a^{t,b}} \eta^{2k} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} d\tau + \frac{C_3 \widehat{\mu}}{\widehat{\mu}^{2k}} \int_{D_a^{t,b}} \frac{u^2}{\Delta^{2k}} d\bar{\mathbf{y}}.$$

Соединяя последнюю оценку с (1.25) и выбирая $\widehat{\mu} \in (0, C_4]$, $C_4 = \min(\widehat{a}/(2C_3), 1)$, выводим неравенство

$$\int_{\Omega} \xi^2 u^2(t) d\bar{\mathbf{y}} + \frac{\widehat{a}}{2} \int_{D^t} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} d\tau \leq 2A \int_{D^t} u^2 \xi^2 d\bar{\mathbf{y}} d\tau + \frac{C_3 \widehat{\mu}}{\widehat{\mu}^{2k}} \int_{D_a^{t,b}} \frac{u^2}{\Delta^{2k}} d\bar{\mathbf{y}} d\tau, \quad (1.28)$$

из которого несложно установить соотношение

$$z(t) \equiv \int_{\Omega} \xi^2 u^2(t) d\bar{y} + \int_{D^t} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{y} d\tau \leq C_5 \int_{D^t} u^2 \xi^2 d\bar{y} d\tau + C_5 \int_{D^{t,a}} \frac{u^2}{\Delta^{2k}} d\bar{y} d\tau. \quad (1.29)$$

Введем обозначение

$$y(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad \mathcal{E}(t) = C_5 \int_{D^{t,a}} \frac{u^2}{\Delta^{2k}} d\bar{y} d\tau.$$

Тогда неравенство (1.29) перепишется в виде

$$y'(t) \leq C_5 y(t) + \mathcal{E}(t), \quad t \in (0, T). \quad (1.30)$$

Подставляя в последнее неравенство $y(t) = e^{C_5 t} c(t)$, $c(0) = 0$, выводим соотношение

$$c'(t) \leq \mathcal{E}(t) e^{-C_5 t} \leq \mathcal{E}(t), \quad t \in (0, T).$$

После его интегрирования получаем неравенство $c(t) \leq t \mathcal{E}(t)$, соединяя которое с (1.30) выводим

$$H^{t,a}(u) \leq z(t) = y'(t) \leq \mathcal{E}(t)(1 + C_5 T e^{C_5 T}) = \widehat{M} \int_{D^{t,a}} \frac{u^2}{\Delta^{2k}} d\bar{y} d\tau.$$

Таким образом, неравенство (1.22) установлено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если выполнены условия (0.4), (0.12), то задача (0.1)–(0.3) с начальной функцией $\varphi(\bar{y}) \in L_2(\Omega)$ имеет единственное обобщенное решение $u \in \dot{V}_{\mathcal{D}}(D^T)$, удовлетворяющее при любом $t \in (0, T]$ равенству

$$\|u(t)\|^2 + 2 \int_0^t (u(\tau), u(\tau))_{\mathcal{D}} d\tau = \|\varphi\|^2. \quad (1.31)$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как для линейного параболического уравнения второго порядка [32; гл. III], с использованием аналога неравенства Гординга (1.20).

§ 2. Класс единственности тэклиндовского типа

Следующее утверждение обобщает неравенство, полученное в работе [10] для уравнения второго порядка, на случай уравнения (0.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $u(t, \bar{y})$ – обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) в D^T , $T \leq 1$, с начальной функцией $\varphi(\bar{y}) = 0$ в Ω^R при некотором $R > 0$. Тогда существуют положительные постоянные $\kappa_1(\Xi)$, $M_1(\Xi)$ такие, что для всех $t \in (0, T]$ и $r \in [0, R)$ справедливо неравенство

$$E^{t,r}(u) \leq M_1 \exp\left(-\kappa_1 \frac{(R-r)^{2k/(2k-1)}}{t^{1/(2k-1)}}\right) \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u), \quad (2.1)$$

где $E^{t,r}(u) = \|u(t)\|_{\Omega^r}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения $u(t, \bar{y})$ задачи (0.1)–(0.3) воспользуемся неравенством (1.28) при $a = r$, $b = r + \rho$, $\Delta = \rho$ и $\mu = \hat{\mu}/C_4 \in (0, 1]$:

$$\int_{\Omega^r} u^2(t) d\bar{y} + \frac{\hat{a}}{2} \int_{D^{t,r}} \mathcal{D}(u) d\bar{y} d\tau \leq 2A \int_{D^{t,r+\rho}} u^2 d\bar{y} d\tau + C_5 \mu \int_{D^{t,r+\rho}} \frac{u^2}{(\mu\rho)^{2k}} d\bar{y} d\tau. \quad (2.2)$$

Из последнего, полагая $\mu = \varepsilon/\rho$, для $\varepsilon \leq \rho$, $\rho \leq 1$ следует соотношение

$$\int_{\Omega^r} u^2(t) d\bar{y} + \int_{D^{t,r}} \mathcal{D}(u) d\bar{y} d\tau \leq C_6 \frac{\varepsilon}{\rho} \int_{D^{t,r+\rho}} \frac{u^2}{\varepsilon^{2k}} d\bar{y} d\tau,$$

из которого выводим

$$E^{t,r}(u) \leq C_6 \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \int_0^t E^{\tau,r+\rho}(u) d\tau, \quad \varepsilon \leq \rho, \quad \rho \leq 1. \quad (2.3)$$

Далее, индукцией по i установим неравенство

$$E^{t,R-i\rho}(u) \leq \left(\frac{C_6}{\rho}\right)^i t^{i/(2k)} \prod_{s=0}^{i-1} \left(1 + \frac{s}{2k}\right)^{-1/(2k)} \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u), \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.4)$$

При $i = 0$ неравенство $E^{t,R}(u) \leq \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u)$, очевидно, справедливо. Далее предположим, что неравенство (2.4) справедливо для некоторого целого $i \geq 0$. Тогда согласно (2.3) имеем

$$E^{t,R-(i+1)\rho}(u) \leq C_6 \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{C_6}{\rho}\right)^i \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \frac{t^{1+i/(2k)}}{1+i/(2k)} \prod_{s=0}^{i-1} \left(1 + \frac{s}{2k}\right)^{-1/(2k)} \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u),$$

$$\varepsilon \leq \rho, \quad \rho \leq 1.$$

Полагая

$$\varepsilon = \left(\frac{t}{1+i/(2k)}\right)^{1/(2k)} \leq 1,$$

получим в случае $\varepsilon \leq \rho$

$$E^{t,R-(i+1)\rho}(u) \leq \left(\frac{C_6}{\rho}\right)^{i+1} t^{(i+1)/(2k)} \prod_{s=0}^i \left(1 + \frac{s}{2k}\right)^{-1/(2k)} \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u), \quad \rho \leq 1. \quad (2.5)$$

Если же $\varepsilon > \rho$, то из монотонности функции $E^{t,r}(u)$ по переменной r следует, что

$$E^{t,R-(i+1)\rho}(u) \leq E^{t,R-i\rho}(u) \leq C_6 \frac{\varepsilon}{\rho} E^{t,R-i\rho}(u) = \frac{C_6}{\rho} \frac{t^{1/(2k)}}{(1+i/(2k))^{1/(2k)}} E^{t,R-i\rho}(u).$$

Здесь без ограничения общности считаем, что $C_6 \geq 1$. Далее, из (2.4) получим соотношение (2.5) и в этом случае. Таким образом, индукция завершена, неравенство (2.4) доказано.

Заметим, что при $i \geq 1$ ввиду неравенства Стирлинга справедливы соотношения

$$\prod_{s=0}^{i-1} \left(1 + \frac{s}{2k}\right) \geq \frac{i!}{(2k)^i} \geq C_7 \sqrt{2\pi i} \left(\frac{i}{2ke}\right)^i \geq C_7 \left(\frac{i}{2ke}\right)^i.$$

Теперь из (2.4) выводим соотношения

$$\begin{aligned}
 E^{t,R-i\rho}(u) &\leq C_7^{-1/(2k)} \left(\frac{C_6}{\rho} \right)^i \left(\frac{et2k}{i} \right)^{i/(2k)} \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u) \\
 &= C_7^{-1/(2k)} \left(\frac{C_6^{2k} et2k}{\rho^{2k} i} \right)^{i/(2k)} \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u) \\
 &= C_7^{-1/(2k)} \exp \left(-\frac{i}{2k} \ln \frac{i\rho^{2k}}{C_8 t} \right) \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u), \quad \rho \leq 1, \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

где $C_8 = C_6^{2k} e2k$.

Перейдем к доказательству неравенства (2.1). Предположим сначала, что число

$$B = \frac{(R-r)^{2k}}{C_8 t e} \leq (i+1)^{2k-1}, \quad i = [2^{2k-1} C_8 e].$$

Тогда (2.1) будет следовать из неравенства $H^{t,r}(u) \leq \max_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(u)$, если выбрать число $M_1 > \exp(\kappa_1(i+1)(C_8 e)^{1/(2k-1)})$. Пусть теперь $B > (i+1)^{2k-1}$ и $j = [B^{1/(2k-1)}]$ – натуральное число, очевидно, большее чем i . Положим $\rho = (R-r)/j$ и покажем, что неравенство $\rho > 1$ ведет к противоречию. Имеем при $t \leq 1$:

$$1 < \rho^{2k} = \frac{BC_8 t e}{j^{2k}} < \frac{(j+1)^{2k-1}}{j^{2k}} C_8 e \leq \frac{2^{2k-1} C_8 e}{j}.$$

Отсюда следует неравенство $j \leq i$, что невозможно. Итак, $\rho \leq 1$. Поскольку $j\rho^{2k}/(C_8 t) = Be/j^{2k-1} \geq e$, то из (2.6) получим

$$\begin{aligned}
 E^{t,r}(u) &\leq C_7^{-1/(2k)} \exp \left(-\frac{j}{2k} \right) \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u) \\
 &\leq C_7^{-1/(2k)} \exp \left(-\frac{1}{2k} (B^{1/(2k-1)} - 1) \right) \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u),
 \end{aligned}$$

откуда следует (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, для любой функции $u \in \dot{V}_{\mathcal{D},lc}(D^T)$ при любом $r > 0$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T,r)}^2 \leq 2 \max_{t \in [0,T]} H^{t,r}(u), \quad (2.7)$$

$$\max_{t \in [0,T]} H^{t,r}(u) \leq \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T,r)}^2. \quad (2.8)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u(t, \bar{y})$ – обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) в D^T , $T \leq 1$. Тогда существуют постоянные $\bar{C}(A, \hat{a}, T)$, $M_1(\Xi, T)$ такие, что для всех $t \in (0, T]$, $r \in [0, R)$, справедливо неравенство

$$E^{t,r}(u) \leq 8\bar{C}M_1 \exp \left(-\kappa_1 \frac{(R-r)^{2k/(2k-1)}}{t^{1/(2k-1)}} \right) \max_{\tau \in [0,t]} E^{\tau,R}(u) + 2\bar{C} \|\varphi\|_{\Omega^R}^2. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t, \bar{y}) \in \dot{V}_{\mathcal{D}}(D^T)$ – решение задачи (0.1)–(0.3) с начальной функцией $\varphi(\bar{y})\chi_{\Omega^R} \in L_2(\Omega)$, где χ_{Ω^R} – характеристическая функция множества Ω^R . Для $v(t, \bar{y})$ верно равенство (1.31), из которого, применяя (1.20), выводим

$$H^t(v) = \|v(t)\|^2 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{\mathcal{D}}^2 d\tau \leq A_1 \int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau + A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2. \quad (2.10)$$

Введем обозначение

$$y(t) = \int_0^t H^\tau(v) d\tau.$$

Тогда неравенство (2.10) перепишется в виде

$$y'(t) \leq A_1 y(t) + A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2, \quad t \in (0, T]. \quad (2.11)$$

Подставляя в последнее неравенство $y(t) = e^{A_1 t} c(t)$, $c(0) = 0$, выводим соотношение

$$c'(t) \leq e^{-A_1 t} A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2 \leq A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2, \quad t \in (0, T].$$

После его интегрирования получаем неравенство $c(t) \leq t A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2$, соединяя которое с (2.11) выводим

$$E^{t,R}(v) \leq E^t(v) \leq H^t(v) = y'(t) \leq A_2 \|\varphi\|_{\Omega^R}^2 (1 + A_1 T e^{A_1 T}) = \bar{C} \|\varphi\|_{\Omega^R}^2. \quad (2.12)$$

Кроме того, очевидно, справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{\Omega^R}^2 \leq \max_{\tau \in [0, t]} E^{\tau,R}(u), \quad t \in (0, T]. \quad (2.13)$$

Функция $w(t, \bar{y}) = u(t, \bar{y}) - v(t, \bar{y})$ удовлетворяет условию утверждения 4, следовательно, в силу (2.1) для $t \in (0, T]$, $r \in [0, R)$ имеем

$$\begin{aligned} E^{t,r}(u) &\leq 2E^{t,r}(w) + 2E^{t,r}(v) \\ &\leq 4M_1 \exp\left(-\kappa_1 \frac{(R-r)^{2k/(2k-1)}}{t^{1/(2k-1)}}\right) \left\{ \max_{\tau \in [0, t]} E^{\tau,R}(u) + \max_{\tau \in [0, t]} E^{\tau,R}(v) \right\} \\ &\quad + 2E^t(v). \end{aligned}$$

Используя (2.12), (2.13), из последнего соотношения выводим неравенство (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $T_* = \min(1, T)$. Зафиксируем произвольное $t \in (0, T_*]$. Возьмем произвольное $R_0 \geq 1$ и оценим интеграл $\|u(t)\|_{\Omega_{R_0}}^2$ следующим образом. Рассмотрим последовательности

$$R_s = 2^s R_0, \quad \Delta t_s = \frac{\kappa_1^{2k-1} R_{s-1}^{2k}}{(2R_s h(R_s))^{2k-1}}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

В силу монотонности функции $h(r)$ и условия (0.13) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^p \Delta t_s &= \left(\frac{\kappa_1}{2}\right)^{2k-1} \sum_{s=1}^p \frac{R_{s-1}^{2k}}{(R_s h(R_s))^{2k-1}} = \left(\frac{\kappa_1}{2}\right)^{2k-1} \sum_{s=1}^p \frac{R_s^{2k}}{2^{2k} (R_s h(R_s))^{2k-1}} \\ &= \left(\frac{\kappa_1}{4}\right)^{2k-1} \sum_{s=1}^p \frac{R_s}{2h^{2k-1}(R_s)} \geq \left(\frac{\kappa_1}{4}\right)^{2k-1} \sum_{s=1}^p \int_{R_s}^{R_{s+1}} \frac{dr}{2h^{2k-1}(r)} \\ &= \left(\frac{\kappa_1}{4}\right)^{2k-1} \int_{R_1}^{R_{p+1}} \frac{dr}{2h^{2k-1}(r)} \rightarrow \infty \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом выборе числа R_0 найдется такой номер p , что

$$\sum_{s=1}^{p+1} \Delta t_s \geq t. \quad (2.15)$$

Пусть $p = p(R_0)$ – наименьший из номеров p , удовлетворяющий неравенству (2.15), так что $\sum_{s=1}^p \Delta t_s < t$. Переопределим Δt_{p+1} равенством

$$\Delta t_{p+1} = t - \sum_{s=1}^p \Delta t_s \leq \frac{\kappa_1^{2k-1} R_p^{2k}}{(2R_{p+1}h(R_{p+1}))^{2k-1}}. \quad (2.16)$$

Определим убывающую последовательность времен $t_0 = t$, $t_1 = t_0 - \Delta t_1$, $t_2 = t_1 - \Delta t_2, \dots, t_{p+1} = t_p - \Delta t_{p+1} = 0$. Очевидно, ввиду (2.14), (2.16) справедливы неравенства

$$\frac{\kappa_1(R_s - R_{s-1})^{2k/(2k-1)}}{(t_{s-1} - t_s)^{1/(2k-1)}} = \frac{\kappa_1 R_{s-1}^{2k/(2k-1)}}{\Delta t_s^{1/(2k-1)}} \geq 2R_s h(R_s), \quad s = \overline{1, p+1}. \quad (2.17)$$

Из (0.14), применяя (1.22) при $a = r$, $b = r + 1$, выводим

$$\|u(t)\|_{\Omega^r}^2 \leq \widehat{M} \int_0^T \|u(t)\|_{\Omega_{r+1}}^2 dt \leq \widehat{M} \exp(rh(r)), \quad t \in (0, T], \quad r \geq 1. \quad (2.18)$$

Рассматривая функцию $u(t, \bar{y})$ как решение задачи (0.1)–(0.3) с начальными данными при $t = t_1$, с помощью неравенства (2.9) выводим соотношение

$$\begin{aligned} \|u(t_0)\|_{\Omega^{R_0}}^2 &\leq 8M_1 \overline{C} \exp\left(-\kappa_1 \frac{(R_1 - R_0)^{2k/(2k-1)}}{(t_0 - t_1)^{1/(2k-1)}}\right) \max_{t \in [t_1, t_0]} \|u(t)\|_{\Omega^{R_1}}^2 \\ &\quad + 2\overline{C} \|u(t_1)\|_{\Omega^{R_1}}^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами (2.18), (2.17):

$$\begin{aligned} \|u(t_0)\|_{\Omega^{R_0}}^2 &\leq 8M_1 \widehat{M} \overline{C} \exp\left(R_1 h(R_1) - \kappa_1 \frac{(R_1 - R_0)^{2k/(2k-1)}}{(t_0 - t_1)^{1/(2k-1)}}\right) + 2\overline{C} \|u(t_1)\|_{\Omega^{R_1}}^2 \\ &\leq 8M_1 \widehat{M} \overline{C} \exp(-R_1 h(R_1)) + 2\overline{C} \|u(t_1)\|_{\Omega^{R_1}}^2. \end{aligned} \quad (2.19_1)$$

Совершенно аналогично выводятся неравенства при $s = \overline{2, p}$:

$$\|u(t_{s-1})\|_{\Omega^{R_{s-1}}}^2 \leq 8M_1 \widehat{M} \overline{C} \exp(-R_s h(R_s)) + 2\overline{C} \|u(t_s)\|_{\Omega^{R_s}}^2. \quad (2.19_s)$$

Поскольку $t_{p+1} = 0$, то, применяя (2.1), (2.18), (2.17), находим, что

$$\|u(t_p)\|_{\Omega^{R_p}}^2 \leq M_1 \widehat{M} \exp(-R_{p+1} h(R_{p+1})). \quad (2.19_{p+1})$$

Умножая (2.19_s), $s = \overline{1, p+1}$, на $2^{s-1} \overline{C}^{s-1}$ и складывая, получаем при $R_0 \geq 1$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\Omega^{R_0}}^2 &\leq 4M_1 \widehat{M} \{2\overline{C} \exp(-R_1 h(R_1)) + \dots + 2^{p+1} \overline{C}^{p+1} \exp(-R_{p+1} h(R_{p+1}))\} \\ &\leq 4M_1 \widehat{M} \sum_{s=1}^{\infty} (2\overline{C})^s e^{-R_s h(R_s)} \leq 4M_1 \widehat{M} \sum_{s=1}^{\infty} (2\overline{C})^s e^{-2^s R_0 h(1)} \\ &\leq 8M_1 \widehat{M} \overline{C} e^{-R_0 h(1)} \sum_{s=0}^{\infty} (2\overline{C})^s e^{-2^s h(1)} \leq M_2 e^{-R_0 h(1)}. \end{aligned}$$

Итак, установлено, что монотонно неубывающая неотрицательная функция $\|u(t)\|_{\Omega_{R_0}}^2$ от аргумента R_0 стремится к нулю при $R_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|u(t)\|_{\Omega_{R_0}}^2 = 0$ при любом $R_0 > 0$. Ввиду произвольности $t \in (0, T_*]$ решение $u(t, \bar{y}) = 0$ в D^{T*} . Если $T > 1$, то интервал $(0, T]$ можно разбить на интервалы $(0, 1], (1, 2], \dots$ и последовательно доказать равенство нулю функции $u(t, \bar{y})$ в каждом интервале.

§ 3. Теорема существования в классе единственности тэклиндовского типа

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $\varphi(\bar{y}) \in L_{2,lc}(\Omega)$ удовлетворяет следующему условию: при любом $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $C(\varepsilon)$ такая, что при каждом $r \geq 1$ имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{\Omega_{r-1}}^2 \leq C(\varepsilon) \exp(\varepsilon r^{2k/(2k-1)}). \quad (3.1)$$

Тогда существует решение задачи (0.1)–(0.3), удовлетворяющее условию (0.14) с функцией $h(r) = \varpi r^{1/(2k-1)}$, где ϖ – положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство теоремы для $T \leq 1$. Если $T > 1$, то, делая замену переменных $t = \tau T$ в уравнении (0.1), приходим к задаче в цилиндре D^1 . Пусть $u^N(t, \bar{y})$ – решения задачи (0.1)–(0.3) с функциями $\varphi^N(\bar{y}) = \varphi(\bar{y})\chi_{\Omega_{N-1}^N} \in L_2(\Omega)$, $N = \overline{0, \infty}$. Если $N = 0$, то полагаем $\Omega_{-1}^0 = \Omega^0$. Здесь χ_Q – характеристическая функция множества Q . Такие решения существуют, единственны, для них справедлива оценка (2.12), и ввиду (3.1) при $t \in (0, T]$ они удовлетворяют неравенствам

$$E^t(u^N) \leq \bar{C} \|\varphi^N\|^2 = \bar{C} \|\varphi\|_{\Omega_{N-1}^N}^2 \leq \bar{C} C(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon N^{2k/(2k-1)}\right), \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{N=0}^{\infty} u^N(t, \bar{y}). \quad (3.3)$$

Покажем, что ряд сходится в пространстве $V_{\mathcal{Q}}(D^{T,r})$ для любого $r \geq 0$. Применяя (2.7), (1.22) при $a = \nu$, $b = \nu + 1$, (2.1) при $r = \nu + 1$, $R = N - 1$ и (3.2), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{V_{\mathcal{Q}}(D^{T,\nu})}^2 &\leq 2\widehat{M} \int_0^T \|u^N(t)\|_{\Omega_{\nu+1}^N}^2 dt \\ &\leq 2M_1 \widehat{M} T \exp\left(-\kappa_1 \frac{(N - \nu - 2)^{2k/(2k-1)}}{T^{1/(2k-1)}}\right) \max_{t \in [0, T]} E^{t, N-1}(u^N) \\ &\leq 2M_1 \widehat{M} T \bar{C} C(\varepsilon) \exp\left(-\kappa_1 \frac{(N - \nu - 2)^{2k/(2k-1)}}{T^{1/(2k-1)}}\right) \exp(\varepsilon N^{2k/(2k-1)}), \\ &\quad \nu = \overline{0, N-3}, \quad N \geq 3. \end{aligned}$$

Выбирая

$$\varepsilon = \frac{\kappa_1}{2 \cdot 2^{2k/(2k-1)} T^{1/(2k-1)}},$$

установим, что остаток ряда (3.3) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\begin{aligned} \sum_{N=2\nu+4}^{\infty} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})} &\leq C_1 \sum_{N=2\nu+4}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2T^{1/(2k-1)}}\left(\frac{N}{2}\right)^{2k/(2k-1)} + \frac{\varepsilon}{2}N^{2k/(2k-1)}\right) \\ &= C_1 \sum_{N=2\nu+4}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa_1 N^{2k/(2k-1)}}{4 \cdot 2^{2k/(2k-1)} T^{1/(2k-1)}}\right) \leq C_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следовательно, при любом целом $\nu \geq 0$ ряд (3.3) сходится в пространстве $V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})$ к функции $u \in \dot{V}_{\mathcal{D},lc}(D^T)$.

Покажем, что $u(t, \bar{y})$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3). Для этого запишем интегральные тождества (1.1) для функций u^N , $N = \overline{0, L}$, и сложим их. В результате для любого натурального L получим равенство

$$\int_0^T \left\{ -\left(\sum_{N=0}^L u^N, v_t \right) + \left(\sum_{N=0}^L u^N, v \right)_{\mathcal{F}^t} \right\} d\tau = \left(\sum_{N=0}^L \varphi^N, v(0) \right),$$

справедливое для любой функции $v(t, \bar{y}) \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Выполнив в последнем тождестве предельный переход при $L \rightarrow \infty$, установим тождество (1.1) для суммы ряда (3.3). Значит, $u(t, \bar{y})$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3).

Для построенного решения $u(t, \bar{y})$ установим принадлежность классу единственности, т.е. неравенство (0.14) с функцией $h(r) = \varpi r^{1/(2k-1)}$. Применяя (2.7), (1.22) при $a = \nu$ и $b = \nu + 1$, (3.2), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{2\nu+3} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})} &\leq (2\widehat{M})^{1/2} \sum_{N=0}^{2\nu+3} \|u^N\|_{D_{\nu}^{T,\nu+1}} \\ &\leq (2\widehat{M}TC(\varepsilon)\overline{C})^{1/2} \sum_{N=0}^{2\nu+3} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}N^{2k/(2k-1)}\right) \\ &= C_3 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}(2\nu+3)^{2k/(2k-1)}\right) \sum_{N=0}^{2\nu+3} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}[(2\nu+3)^{2k/(2k-1)} - N^{2k/(2k-1)}]\right). \end{aligned}$$

Далее, легко установить, что последняя сумма ограничена, поэтому

$$\sum_{N=0}^{2\nu+3} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})} \leq C_4 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}(2\nu+3)^{2k/(2k-1)}\right). \quad (3.5)$$

Выберем произвольное $r \geq 1$. Положим $\nu = [r] + 2$, тогда, соединяя (3.4), (3.5), получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,r+1})} &\leq \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})} \leq \sum_{N=0}^{\infty} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,\nu})} \\ &\leq C_2 + C_4 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}(2r+7)^{2k/(2k-1)}\right) \leq C_5 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}(9r)^{2k/(2k-1)}\right), \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\|u\|_{D_{r,r+1}^T}^2 \leq T \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T,r+1})}^2 \leq TC_5^2 \exp(\varepsilon(9r)^{2k/(2k-1)}), \quad r \geq 1.$$

Таким образом, неравенство (0.14) установлено.

§ 4. Геометрический класс единственности

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть область Ω удовлетворяет (0.16), $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – λ -последовательность, $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность положительных чисел. Тогда найдутся положительные постоянные $\kappa(\Xi)$ и $M(\Xi, T)$ такие, что если при некотором натуральном $N \geq 1$ $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ в $\Omega^{x_N + \varepsilon_N}$, то решение $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1)–(0.3) при всех $\nu = \overline{0, N-1}$, $t \in (0, T]$ удовлетворяет оценкам

$$H^{t, x_\nu}(u) \leq M \frac{\exp(-\kappa(N - \nu))}{\varepsilon_N^{2k}} \int_0^t \|u(\tau)\|_{\Omega^{x_N + \varepsilon_N}}^2 d\tau. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим срезающую функцию $\xi(x)$. Пусть $\varrho(t)$ – убывающая функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, равная 0 и 1 при $t \leq 0$ и $t \geq 1$ соответственно. Пусть

$$\widehat{a}_i = \max_{t \in [0, 1]} |D^i \varrho(t)|, \quad a_i = \widehat{a}_i 3^i, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (4.2)$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $\widehat{a}_{i+1} \geq \widehat{a}_i$, тем более $a_{i+1} \geq a_i$.

Определим дифференциальные полиномы P_p от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0 = 1$, $P_p = (D - \alpha)P_{p-1}$. Тогда для $p = \overline{1, \infty}$ имеем

$$\begin{aligned} P_p &= (D - \alpha)^{p-1}(-\alpha) \\ &= \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} (-1)^{p_1 + p_2 + \dots + p_s} \alpha^{p_1} (D\alpha)^{p_2} (D^{s-1}\alpha)^{p_s}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа. Положим

$$b_p = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} a_0^{p_1} a_1^{p_2} \dots a_{s-1}^{p_s}; \quad (4.4)$$

очевидно, $b_{p+1} \geq b_p \geq 1$, $p = \overline{0, \infty}$.

Выберем число $e_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2C_3(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \leq e_* \widehat{a}, \quad (4.5)$$

где C_3 – постоянная, определяемая ниже и зависящая только от Ξ .

Зафиксируем целое число $\nu \geq 0$. Рассмотрим кусочно постоянной функцию $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такую, что $\beta(x) = \delta_j$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $\delta_j^{-1} = e_* \Delta_j$, $j = \nu, \overline{\nu, N-1}$, где $\Delta_j = x_{j+1} - x_j$ и $\beta(x) = 0$ при $x \notin [x_\nu, x_N]$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{j-1} < \delta_j$, то на отрезке $[x_j, x_j + \Delta_j/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется так:

$$\alpha(x) = \delta_{j-1} + (\delta_j - \delta_{j-1}) \varrho\left(\frac{3(x - x_j)}{\Delta_j}\right).$$

Если же $\delta_j > \delta_{j+1}$, то на отрезке $[x_{j+1} - \Delta_j/3, x_{j+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_j - (\delta_j - \delta_{j+1}) \varrho\left(1 + \frac{3(x - x_{j+1})}{\Delta_j}\right).$$

В оставшихся точках считаем $\alpha(x) = \beta(x)$.

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|D^i \alpha(x)| \leq \left(\frac{3}{\Delta_j} \right)^i \delta_j \max_{t \in [0,1]} |D^i \varrho(t)| \leq \frac{a_i \delta_j}{\Delta_j^i} = \frac{a_i}{e_* \Delta_j^{i+1}}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

при $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{\nu, N-1}$. Следовательно, согласно (4.3), (4.6), (4.4) полиномы P_p удовлетворяют неравенствам

$$|P_p| \leq \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_j} \right)^{p_1} \dots \left(\frac{a_{s-1}}{e_* \Delta_j^s} \right)^{p_s} \leq \frac{b_p}{e_* \Delta_j^p}, \quad (4.7)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = \overline{\nu, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Очевидны следующие оценки интеграла $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt$, $j = \overline{\nu, N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_j \Delta_j}{3} = \int_{x_j + \Delta_j/3}^{x_j + 2\Delta_j/3} \delta_j dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \delta_j dt = \delta_j \Delta_j = \frac{1}{e_*}. \quad (4.8)$$

Обозначим через $\eta(x)$ функцию, определенную в § 1, при $a = x_N$, $b = x_N + \varepsilon_N$. Определим невозрастающую гладкую функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_\nu, \\ \exp\left(-\int_{x_\nu}^x \alpha(t) dt\right), & x_\nu \leq x \leq x_N, \\ \xi(x_N) \eta^k(x), & x_N \leq x \leq x_N + \varepsilon_N, \\ 0, & x \geq x_N + \varepsilon_N. \end{cases}$$

На промежутке $[x_\nu, x_N]$ справедливо уравнение $\xi' = -\alpha\xi$ и ввиду (4.8) имеют место неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_j)}{\xi(x_{j+1})} \leq \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (4.9)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что

$$\exp\left(\frac{N - \nu}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_\nu)}{\xi(x_N)}$$

и

$$\xi(x_N) \leq \exp\left(-\frac{N - \nu}{3e_*}\right). \quad (4.10)$$

Нетрудно доказать, что на промежутке $[x_\nu, x_N]$ справедливы соотношения

$$D^p \xi = \xi P_p, \quad D^p \xi^2 = \xi^2 \sum_{l=0}^p C_p^l P_l P_{p-l}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Отсюда с помощью (4.7) выводим

$$\begin{aligned} |D^p \xi| &\leq \xi \frac{b_p}{e_* \Delta_j^p}, & |D^p \xi^2| &\leq \xi^2 \frac{2^p b_p^2}{e_* \Delta_j^p}, \\ x &\in [x_j, x_{j+1}], & j &= \overline{\nu, N-1}, & p &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из неравенств (1.17) следует, что

$$\begin{aligned} |D^p \xi(x)| &\leq \xi(x_N) \frac{c_p \eta^{k-p}(x)}{\varepsilon_N^p}, & |D^p \xi^2(x)| &\leq \xi^2(x_N) \frac{2^p c_p^2 \eta^{2k-p}}{\varepsilon_N^p}, \\ x &\in [x_N, x_N + \varepsilon_N], & p &= \overline{1, k-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из неравенства (1.26), записанного для $a = x_\nu$, $b = x_N + \varepsilon_N$, пользуясь (4.11) на промежутках $[x_j, x_{j+1}]$, $j = \nu, N-1$, и (4.12) на отрезке $[x_N, x_N + \varepsilon_N]$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} I &\leq C_2 \sum_{j=\nu}^{N-1} \int_{D_{x_j}^{t, x_{j+1}}} \xi^2 \left[\mu \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|^2}{e_*^2 \Delta_j^{2i-2p}} \right] d\bar{\mathbf{y}} d\tau \\ &+ C_2 \int_{D_{x_N}^{t, x_N + \varepsilon_N}} \xi^2(x_N) \\ &\times \left[\mu \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} \eta^{2k} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} u|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{(\bar{\alpha}) \leq 1} \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|^2}{\varepsilon_N^{2i-2p}} \eta^{2(k-i+p)} \right] d\bar{\mathbf{y}} d\tau, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\mu \in (0, 1]$ – произвольное число.

Пользуясь неравенствами (1.3), (1.3'), (1.4), (1.4') с $\epsilon = 1$, $\Delta = \Delta_j$ и (1.4''), находим для $j = \overline{\nu, N-1}$, что

$$\begin{aligned} J_j &= \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|^2}{\Delta_j^{2i-2p}} dx d\mathbf{y} \leq \tilde{C} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left(\mathcal{D}(u) + \frac{u^2}{\Delta_j^{2k}} \right) dx d\mathbf{y}, \\ p &= \overline{0, i}, & (\bar{\alpha}) &= ((i, \alpha)) \leq 1. \end{aligned}$$

Применив определение λ -последовательности (0.16), (0.15), получим неравенства

$$J_j \leq \tilde{C}(1 + \theta) \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (4.14)$$

Ввиду (4.9) из (4.14) сразу следует, что

$$\int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|^2}{\Delta_j^{2i-2p}} dx d\mathbf{y} \leq \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (4.15)$$

Теперь, выбрав $\mu = 1/e_*$, применив (4.15) и (1.18), (1.18') с $\delta = 1/e_*^2$, $\Delta = \varepsilon_N$, из (4.13) выводим

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{C_3(1 + \theta)}{e_*} \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \sum_{j=\nu}^{N-1} \int_{D_{x_j}^{t, x_{j+1}}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} d\tau \\ &+ \frac{C_3}{e_*} \int_{D_{x_N}^{t, x_N + \varepsilon_N}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} d\tau + C_3 \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^{2k}} \int_{D_{x_N}^{t, x_N + \varepsilon_N}} u^2 d\bar{\mathbf{y}} d\tau. \end{aligned}$$

Соединяя последнюю оценку с (1.25) и выбирая e_* согласно (4.5), заключаем, что

$$\begin{aligned} z(t) &\equiv \int_{\Omega} \xi^2 u^2(t) d\bar{y} + \int_{D^t} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{y} d\tau \\ &\leq C_4 \int_{D^t} \xi^2 u^2 d\bar{y} d\tau + C_4 \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^{2k}} \int_{D_{x_N}^{t, x_N + \varepsilon_N}} u^2 d\bar{y} d\tau. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так же как в утверждении 2, выводим

$$H^{t, x_N}(u) \leq z(t) \leq M \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^{2k}} \int_{D_{x_N}^{t, x_N + \varepsilon_N}} u^2 d\bar{y} d\tau.$$

Таким образом, согласно (4.10) установлено неравенство (4.1) с $\kappa = 2/(3e_*) < 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $\nu = \overline{0, N-1}$, $N \geq 1$, из утверждения 5 вытекает справедливость неравенств

$$\|u(t)\|_{\Omega^{x_N}}^2 \leq M \frac{\exp(-\kappa(N-\nu))}{\varepsilon_N^{2k}} \int_0^T \|u(\tau)\|_{\Omega_{x_N}^{x_N + \varepsilon_N}}^2 d\tau, \quad t \in (0, T].$$

Переходя в правой части к пределу при $N \rightarrow \infty$ на основе (0.17), выводим равенства

$$\|u(t)\|_{\Omega^{x_N}}^2 = 0, \quad \nu = \overline{0, \infty}, \quad t \in (0, T],$$

из которых следует утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В (0.22) положим $r = x_N$, где $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ — $\Pi(m, k)$ -последовательность функции $f(x)$. Получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\kappa \int_1^{x_N} \frac{dx}{f^{m/k}(x)}\right) J_{x_N}^{x_N+1}(u, \Omega(f)) = 0. \quad (4.17)$$

Для $\Pi(m, k)$ -последовательности, очевидно, справедливы неравенства

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{f^{m/k}(x)} \leq \frac{\Delta_j}{\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f^{m/k}(x)} \leq 1, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (4.18)$$

суммируя которые выводим

$$\int_{x_0}^{x_N} \frac{dx}{f^{m/k}(x)} \leq N. \quad (4.19)$$

Соединяя (4.17) и (4.19), несложно установить соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\kappa N\right) J_{x_N}^{x_N+1}(u, \Omega(f)) = 0.$$

Поскольку $\Pi(m, k)$ -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является λ -последовательностью сужающейся области $\Omega(f)$, то согласно теореме 2 с $\varepsilon_N = 1$, $N = \overline{0, \infty}$, получаем $u = 0$ для п.в. $(t, x) \in D^T(f)$.

§ 5. λ -последовательности для трубчатых областей

Для каждого $s = \overline{1, n}$ рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f, s] = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x > d, |y_s| < f(x)\} \quad (5.1)$$

с положительной измеримой функцией $f(x)$ ($d \in (-\infty, 0]$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для любого $s = \overline{1, n}$ $\Pi(m_s, k)$ -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяющей условию (0.19), является λ -последовательностью для любой области $\Omega \subset \Omega[f, s]$, $s = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО выведем из следующего утверждения.

ЛЕММА 4 [29]. Рассмотрим область $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid 0 < x < r, y > 0\}$ и функцию $g(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$, равную нулю в окрестности луча $\{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid x = 0, y > h\}$. Справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова:

$$\int_Q g^2(x, y) dx dy \leq E_p \left\{ r^{2i} \int_Q (D_x^i g)^2 dx dy + h^{2p} \int_Q (D_y^p g)^2 dx dy \right\}, \quad p, i \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

E_p – положительная постоянная, зависящая от p .

Функцию $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[f, s])$ продолжим на все $\mathbb{R}_{n+1}$ нулем за пределы $\Omega[f, s]$. Обозначим через $\hat{x}_j$ любую точку отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ такую, что $\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) = f(\hat{x}_j)$. Тогда согласно определению $\Pi(m_s, k)$ -последовательности имеем

$$f^{m_s}(\hat{x}_j) = \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f^{m_s}(x) \leq \Delta_j^k. \quad (5.3)$$

Рассмотрим область $Q = \{(x, y_s) \in \mathbb{R}_2 \mid x_j < x < x_{j+1}, |y_s| < f(x)\}$. Положим

$$\begin{aligned} Q_1^\pm &= \{(x, y_s) \in \mathbb{R}_2 \mid x_j < x < \hat{x}_j, \pm y_s > 0\}, \\ Q_2^\pm &= \{(x, y_s) \in \mathbb{R}_2 \mid \hat{x}_j < x < x_{j+1}, \pm y_s > 0\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (5.2) для полуполосы Q_1^+ , получим

$$\int_{Q_1^+} g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_s \leq E_{m_s} \left\{ \Delta_j^{2k} \int_{Q_1^+} (D_x^k g)^2 dx dy_s + f^{2m_s}(\hat{x}_j) \int_{Q_1^+} (D_{y_s}^{m_s} g)^2 dx dy_s \right\}.$$

Аналогичные неравенства установим для Q_1^- , Q_2^+ , Q_2^- . Сложив четыре неравенства и воспользовавшись неравенством (5.3), будем иметь

$$\int_Q g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_s \leq E_{m_s} \Delta_j^{2k} \int_Q \{(D_x^k g)^2 + (D_{y_s}^{m_s} g)^2\} dx dy_s.$$

Проинтегрируем последнее по $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{n-1}$:

$$\int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f, s]} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq E_{m_s} \Delta_j^{2k} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f, s]} \mathcal{D}(g) dx d\mathbf{y}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$1 \leq E_{m_s} \Delta_j^{2k} \lambda(x_j, x_{j+1}; \Omega[f, s]). \quad (5.4)$$

Заметим теперь, что если $Q \subset \Omega$, то

$$\lambda(a, b; \Omega) \leq \lambda(a, b; Q).$$

Это следует из того, что для Q сужается множество, по которому берется инфимум в (0.15). Утверждение 6 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Через s_* обозначим номер, на котором достигается максимум $m = \max_{s=\overline{1, n}} m_s = m_{s_*}$. Ввиду вложения $\Omega(f) \subset \Omega[f, s_*]$ согласно утверждению 6 $\Pi(m, k)$ -последовательность функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяющей условию (0.19), является λ -последовательностью трубчатой области $\Omega(f)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если выполнено условие (0.20), то $\Pi(m, k)$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, удовлетворяющей условию (0.19), является оптимальной λ -последовательностью для $\Omega(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{x}_\nu$ любую точку отрезка $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что

$$\inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) = f(\hat{x}_\nu).$$

Из определения $\Pi(m, k)$ -последовательности функции f следует неравенство

$$f^{m/k}(\hat{x}_\nu) \leq \bar{\Delta}_\nu. \quad (5.5)$$

Пользуясь (0.20), находим вблизи $\hat{x}_\nu$ точку $\bar{x}_\nu^* \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что

$$f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega f(\hat{x}_\nu). \quad (5.6)$$

Очевидно также, что

$$\bar{\Delta}_\nu \leq f^{m/k}(\bar{x}_\nu^*). \quad (5.7)$$

Соединяя (5.6), (5.7), выводим

$$\bar{\Delta}_\nu \leq \omega^{m/k} f^{m/k}(\hat{x}_\nu). \quad (5.8)$$

Из неравенства (0.20) находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]\} \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*).$$

Поскольку справедливы включения $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}] \subset [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]$, то

$$f(\hat{x}_\nu) \leq f(x) \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega^2 f(\hat{x}_\nu), \quad x \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]. \quad (5.9)$$

Для любого отрезка $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ докажем неравенства

$$\delta_1 f^{-2m}(\hat{x}_\nu) \leq \lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \delta_2 f^{-2m}(\hat{x}_\nu). \quad (5.10)$$

Для доказательства левого неравенства положим $h = \omega^2 f(\hat{x}_\nu)$. Из (5.9) следуют неравенства

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \geq \lambda(a, b; \Omega[f, s_*]) \geq \lambda(a, b; \Omega[h, s_*]).$$

Совершая замену переменных $\mathbf{y} = h\mathbf{z}$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}\lambda(a, b; \Omega[h, s^*]) &= \inf_{g(x, \mathbf{z}) \in C_0^\infty(\Omega[1, s^*])} \frac{\int_{\Omega_a^b[1, s^*]} h^{-2m} (D_{z_s}^m g)^2 dx d\mathbf{z}}{\int_{\Omega_a^b[1, s^*]} g^2 dx d\mathbf{z}} \\ &= \delta_3 h^{-2m} = \delta_1 f^{-2m}(\widehat{x}_\nu).\end{aligned}$$

Для доказательства правого неравенства возьмем $h = f(\widehat{x}_\nu)$. Тогда при $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ справедливы неравенства

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \lambda(a, b; \Omega(h)).$$

Поскольку $h \leq 1$, то, совершая замену переменных $\mathbf{y} = h\mathbf{z}$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}\lambda(a, b; \Omega(h)) &= \inf_{g(x, \mathbf{z}) \in C_0^\infty(\Omega(1))} \frac{\int_{\Omega_a^b(1)} \sum_{s=1}^n h^{-2m_s} (D_{z_s}^{m_s} g)^2 dx d\mathbf{z}}{\int_{\Omega_a^b(1)} g^2 dx d\mathbf{z}} \\ &\leq h^{-2m} \delta_4 = \delta_2 f^{-2m}(\widehat{x}_\nu).\end{aligned}$$

Тем самым, (5.10) установлено.

Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ – произвольная λ -последовательность. Для вложенных отрезков $[x_j, x_{j+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ из (5.8), (5.10) и определения λ -последовательности (0.16) следуют неравенства

$$\overline{\Delta}_\nu \leq (\omega f)^{m/k}(\widehat{x}_\nu) \leq \left(\frac{\delta_2 \omega^{2m}}{\lambda(x_j, x_{j+1})} \right)^{1/(2k)} \leq (\omega^{2m} \theta \delta_2)^{1/(2k)} \Delta_j = D \Delta_j.$$

Тогда на $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ расположится не более D целых отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Всего отрезок $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[x_j, x_{j+1}]$, поэтому из $x_L \leq \bar{x}_N$ следует $L \leq (D+1)N$. Утверждение 7 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для положительной функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, выполнено условие (0.20), то для ее $\Pi(m, k)$ -последовательности справедливо соотношение (0.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть неравенства (0.21) является следствием оценки (4.19). Докажем правую часть неравенства (0.21). Применяя (5.9), (5.5), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}} \frac{dx}{f^{m/k}(x)} \geq \frac{\overline{\Delta}_\nu}{\omega^{2m/k} f^{m/k}(\widehat{x}_\nu)} \geq \frac{1}{\omega^{2m/k}}, \quad \nu = \overline{0}, \overline{\infty}.$$

Просуммировав последние неравенства, устанавливаем соотношение

$$\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_N} \frac{dx}{f^{m/k}(x)} \geq \frac{N}{\omega^{2m/k}}.$$

Правая часть неравенства (0.21) является следствием последней оценки.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для положительной функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, выполнено условие (0.20), то для ее $\Pi(m, k)$ -последовательности справедливы неравенства (0.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, справедливы неравенства $f(\widehat{x}_{\nu+1}) \leq f(\bar{x}_{\nu+1})$, поэтому из (5.9) имеем

$$f(\widehat{x}_{\nu+1}) \leq \omega^2 f(\widehat{x}_\nu), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Легко видеть, что верны и симметричные неравенства

$$f(\widehat{x}_\nu) \leq \omega^2 f(\widehat{x}_{\nu+1}), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Используя неравенства (5.5), (5.8), оцениваем отношения

$$\bar{\omega}^{-1} = \omega^{-3m/k} \leq \frac{\bar{\Delta}_{\nu+1}}{\bar{\Delta}_\nu} \leq \omega^{3m/k} = \bar{\omega}, \quad \nu = \overline{0, \infty}. \quad (5.11)$$

§ 6. Пример неединственности решения для уравнения теплопроводности

Доказательство теоремы 4 основано на неравенстве Гарнака, установленном Ю. Мозером в [33]. Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас частном виде: для неотрицательного в цилиндре $D = (0, 9\rho^2] \times B(2\rho, \bar{\mathbf{w}}) \subset \mathbb{R}_{n+2}$ решения уравнения теплопроводности справедливо неравенство

$$\max_{D^-} u(t, x, \mathbf{y}) \leq H \min_{D^+} u(t, x, \mathbf{y}),$$

в котором постоянная $H \geq 1$ зависит только от n ,

$$D^- = [\rho^2, 2\rho^2] \times B(\rho, \bar{\mathbf{w}}), \quad D^+ = [8\rho^2, 9\rho^2] \times B(\rho, \bar{\mathbf{w}}).$$

Из неравенства Гарнака вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть $Q = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid 0 < x < 1, |\mathbf{y}| < 1\}$ – цилиндр и $\widehat{Q} = Q \cup B(2\rho, (0, \mathbf{0})) \cup B(2\rho, (1, \mathbf{0}))$, $\rho = 1/(2\bar{\omega})$. Тогда существуют $\widehat{H} \geq 1$, $h > 0$ такие, что неотрицательное в $\widehat{D}^T = (0, T] \times \widehat{Q}$, $T \geq 2h$, решение $u(t, x, \mathbf{y})$ уравнения теплопроводности удовлетворяет неравенству

$$u(T - h, (1, \mathbf{0})) \leq \widehat{H} u(T, (0, \mathbf{0})). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h \geq 9\rho^2/2$, то цилиндр $(T - 9\rho^2, T] \times B(2\rho, (0, \mathbf{0}))$ лежит в $\widehat{D}$. Положим $t_0 = T$, $t_1 = t_0 - 8\rho^2$, $\bar{\mathbf{v}}_0 = (0, \mathbf{0})$, $\bar{\mathbf{v}}_1 = (\rho, \mathbf{0})$. Очевидно, что $(t_0, \bar{\mathbf{v}}_0) \in \widehat{D}^+$ и $(t_1, \bar{\mathbf{v}}_1) \in \widehat{D}^-$. Тогда согласно неравенству Гарнака имеем

$$u(t_1, \bar{\mathbf{v}}_1) \leq \max_{D^-} u(t, x, \mathbf{y}) \leq H \min_{D^+} u(t, x, \mathbf{y}) \leq H u(t_0, \bar{\mathbf{v}}_0). \quad (6.2)$$

Далее остается построить последовательность касающихся шаров $B(\rho, \bar{\mathbf{w}}_i)$, первым и последним из которых являются соответственно шары $B(\rho, (0, \mathbf{0}))$ и $B(\rho, (1, \mathbf{0}))$, а затем записать неравенства, аналогичные (6.2), взяв за $\bar{\mathbf{v}}_i$ точки

касания шаров, полагая $t_i = t_{i-1} - 8\rho^2$. В случае, когда $(1 - 2\rho)/(2\rho)$ не является целым числом, одна пара шаров будет пересекаться, и в качестве точки $\bar{\mathbf{v}}_i$ возьмем их общую точку. Очевидно, при переходе к каждому следующему цилиндру происходит опускание по времени на величину $8\rho^2$. Обозначая через h суммарное опускание по времени для всей цепочки цилиндров, завершаем доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Выберем произвольное $T \geq hC_0$ и положим $t_0 = 2T$. В этом параграфе для удобства изложения обобщенное решение задачи (0.1*), (0.2') определим следующим образом. Гильбертово пространство $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{t_0+1})$ по норме

$$\|g\|_{\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})} = \left(\int_0^{t_0} (\|g(t)\|^2 + \|\nabla g(t)\|^2) dt \right)^{1/2}.$$

Пространство $\dot{W}_{2,\text{lc}}^{0,1}(D^{t_0})$ состоит из таких функций $g(t, \bar{\mathbf{y}})$, определенных в D^{t_0} , для которых при каждом $r > 0$ найдется функция из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$, совпадающая с $g(t, \bar{\mathbf{y}})$ в $D^{t_0,r}$. Обобщенным решением задачи (0.1*), (0.2') в D^{t_0} назовем функцию $u(t, \bar{\mathbf{y}}) \in \dot{W}_{2,\text{lc}}^{0,1}(D^{t_0})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D^{t_0}} (-uv_t + \nabla u \nabla v) dt d\bar{\mathbf{y}} = 0 \quad (6.3)$$

для любой функции $v(t, \bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0})$.

При каждом натуральном K в области $D^{t_0, x_K}(f)$ рассмотрим задачу (0.1*), (0.2') с граничным условием

$$u|_{x=x_K} = A_K t \zeta(|\mathbf{y}|). \quad (6.4)$$

Здесь $\zeta(t) \in C_0^\infty(-f(x_K), f(x_K))$ – четная неотрицательная функция типа шапочки. Постоянную A_K подберем так, чтобы

$$u(t_0, x_0, \mathbf{0}) = 1. \quad (6.5)$$

Обобщенным решением задачи (0.1*), (0.2'), (6.4) в $D^{t_0, x_K}(f)$ назовем функцию $u_K(t, \bar{\mathbf{y}}) \in \dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0, x_K})$, совпадающую в D^{t_0, x_K} с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$, удовлетворяющую граничному условию (6.4) и интегральному тождеству (6.3) для любой функции $v \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0, x_K})$. Для любого натурального $K \geq 1$ обобщенное решение задачи (0.1*), (0.2'), (6.4) существует и единственно. Доказательство проводится обычными методами (см., например, [32]).

Далее покажем, что существует функция $u(t, \bar{\mathbf{y}})$ из пространства $\dot{W}_{2,\text{lc}}^{0,1}(D^{t_0})$ такая, что $u_K \rightharpoonup u$ в $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0, x_N})$ при $K \rightarrow \infty$ и любом фиксированном N , $N \geq 1$. Для каждого $K \geq 1$ найдем числа μ_K^1 :

$$\|\mu_K^1 u_K\|_{\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0, x_1})} = 1.$$

Ввиду этого равенства существует подпоследовательность u_{K_i} такая, что $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0, x_1})$. Для решений уравнения теплопроводности слабая

сходимость в $L_2(D^{t_0, x_1})$ влечет поточечную сходимость этой последовательности, в частности в точке $(t_0, x_0, \mathbf{0})$: $\mu_{K_i}^1 u_{K_i}(t_0, x_0, \mathbf{0}) \rightarrow v^1(t_0, x_0, \mathbf{0}) = \mu^1$. Ввиду (6.5) имеем $\mu_{K_i}^1 \rightarrow \mu^1$ при $i \rightarrow \infty$, следовательно, $u_{K_i} \rightharpoonup v^1/\mu^1$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0, x_1})$. При этом предельная функция v^1 совпадает в D^{t_0, x_1} с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$. Подпоследовательность u_{K_i} переобозначим через u_K^1 .

Затем числа μ_K^2 выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\|\mu_K^2 u_K^1\|_{W_2^{0,1}(D^{t_0, x_2})} = 1.$$

Из последовательности u_K^1 выберем подпоследовательность $u_{K_i}^1$ (переобозначим ее через u_K^2) такую, что $\mu_K^2 u_K^2 \rightharpoonup v^2$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0, x_2})$. Повторяя предыдущие рассуждения, установим, что $u_K^2 \rightharpoonup v^2/\mu^2$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0, x_2})$. Функция v^2 совпадает в D^{t_0, x_2} с некоторой функцией из пространства $\dot{W}_2^{0,1}(D^{t_0})$. Ввиду единственности предела имеем равенство $v^1/\mu^1 = v^2/\mu^2$ в D^{t_0, x_1} . Продолжая это построение, выберем диагональную подпоследовательность u_K^K . Для нее имеет место слабая сходимость: $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \rightarrow \infty$ в $W_2^{0,1}(D^{t_0, x_N})$ при каждом фиксированном N , $N \geq 1$. Из слабой сходимости в $L_2(D^{t_0, x_N})$ следует поточечная сходимость $u_K^K(t, \bar{y}) \rightarrow u(t, \bar{y})$ при $K \rightarrow \infty$ для $(t, \bar{y}) \in D^{t_0}$. Предельная функция $u(t, \bar{y})$ принадлежит $\dot{W}_{2,lc}^{0,1}(D^{t_0})$.

Покажем, что $u(t, \bar{y})$ является обобщенным решением задачи (0.1*), (0.2'). По определению обобщенного решения задачи (0.1*), (0.2'), (6.4) при каждом $N \geq 1$ для любой функции $v \in C_0^\infty(D_{-1}^{t_0, x_N})$ справедливо интегральное тождество (6.3)

$$\int_{D^{t_0}} (-u_K^K v_t + \nabla u_K^K \nabla v) dt d\bar{y} = 0, \quad K \geq N.$$

Перейдя в нем к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим (6.3) для предельной функции $u(t, \bar{y})$.

Из принципа максимума следует, что $u_K(t, \bar{y}) \geq 0$, $(t, \bar{y}) \in \overline{D^{t_0, x_K}}(f)$,

$$u_{Kt}(t, \bar{y}) \geq 0, \quad u_{Kr}(t, \bar{y}) \leq 0, \quad (t, \bar{y}) \in \overline{D^{t_0, x_K}}(f), \quad (6.6)$$

где индексы t и r означают производные по t и радиусу $r = |\mathbf{y}|$ цилиндрической системы координат $(x, r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$. Поясним, например, последнее неравенство.

Отметим, что из единственности решения первой смешанной задачи следует осесимметричность функции $u_K(t, x, \mathbf{y})$. Действительно, в противном случае, повернув график функции u_K на ненулевой угол вокруг оси Ox , мы получили бы новое решение задачи (0.1*), (0.2'), (6.4). Таким образом, в цилиндрических координатах функция $u_K(t, x, r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{Kxx} + u_{Krr} + \frac{n-1}{r} u_{Kr} = u_{Kt}$$

при $t \in (0, t_0]$ и $(x, r) \in \Gamma_d^{x_K}(f)$. Продифференцировав уравнение по r , получаем

$$u_{Krxx} + u_{Krrr} + \frac{n-1}{r} u_{Krr} = \frac{n-1}{r^2} u_{Kr} + u_{Ktr}. \quad (6.7)$$

Предположим сначала, что $f(x) \in C^2(d, \infty)$. Тогда на границе $r = f(x)$ определены значения производной u_{Kr} . Поскольку функция u_K положительна внутри области, то $u_{Kr}(t, x, r)|_{r=f(x)} \leq 0$. Ввиду четности по аргументу r выполнено

однородное условие на оси симметрии: $u_{Kr}(t, x, r)|_{r=0} = 0$. По выбору функции $\zeta(x)$ имеем неравенство $u_{Kr}(t, x_K, r) \leq 0$. Очевидно, что $u_{Kr}(t, d, r) = 0$, из начального условия находим, что $u_{Kr}(0, x, r) = 0$. Если u_{Kr} достигает максимума в $(0, t_0) \times \Gamma_d^{x_K}(f)$, то этот максимум положителен и из уравнения (6.7) в точке максимума получаем $u_{Krrxx} + u_{Krrrr} > 0$, что невозможно. В случае области $\Omega^{x_K}(f)$ с негладкой функцией $f(x)$ следует приблизить ее изнутри последовательностью гладких областей, сходящейся к $\Omega^{x_K}(f)$, и перейти к поточечному пределу решений в этих областях, сохраняющему монотонность по r предельной функции.

Положим $\bar{\mathbf{v}}_j = (x_j, \mathbf{0})$, $\rho_j = (x_{j+1} - x_j)\rho$, $t_{j+1} = t_j - h(x_{j+1} - x_j)^2$, $j = \overline{0, \infty}$, где h, ρ — числа из леммы 5. Покажем справедливость неравенств

$$t_j \geq 2h(x_{j+1} - x_j)^2, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (6.8)$$

Очевидно равенство $t_j - h(x_{j+1} - x_j)^2 = t_0 - h \sum_{l=0}^j (x_{l+1} - x_l)^2$. При построении последовательности точек $(t_j, \bar{\mathbf{v}}_j)$, $j = \overline{0, \infty}$, происходит спуск по времени на величину $\Delta t = \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j)^2 h$, оценим ее. Согласно определению (0.18) с $\mu = k = 1$ число $(x_{j+1} - x_j)^2$ равно площади вложенного квадрата под графиком функции $\bar{f}(x)$. Поэтому

$$\Delta t \leq h \int_{x_0}^{\infty} \bar{f}(x) dx \leq hC_0 \leq T.$$

Неравенства (6.8) вытекают теперь из следующей цепочки:

$$t_j - h(x_{j+1} - x_j)^2 \geq t_0 - \Delta t \geq \Delta t \geq h(x_{j+1} - x_j)^2, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Согласно (0.24), (0.18) с $\mu = k = 1$ выполняются включения

$$\bar{\mathbf{v}}_j + (x_{j+1} - x_j)\hat{Q} \subset \Omega(\bar{f}), \quad j = \overline{0, \infty}.$$

По лемме 5 для пар $(t_j, \mathbf{v}_j)$, $(t_{j+1}, \mathbf{v}_{j+1})$, $j = \overline{0, \infty}$, устанавливаем неравенства

$$u_K(t_{j+1}, \bar{\mathbf{v}}_{j+1}) \leq \hat{H}u_K(t_j, \bar{\mathbf{v}}_j). \quad (6.9)$$

Конечно, при $j = 0$ включение может не выполняться, но тем не менее точка $(x_0, \mathbf{0})$ является внутренней для области $\Omega(\bar{f})$, поэтому неравенство (6.9) будет также выполняться и при $j = 0$, возможно, с другой постоянной $\hat{H}$.

Применяя неравенство (6.9) N раз, находим, что

$$u_K(t_N, x_N, \mathbf{0}) \leq \hat{H}^N u_K(t_0, x_0, \mathbf{0}), \quad N \geq 1. \quad (6.10)$$

Согласно принципу максимума, условиям (0.2'), (0.1*), (6.4) и соотношениям (6.6) при любом $N \geq 1$ для любой точки $(t, \bar{\mathbf{y}}) \in D^{T, x_N}$ при всех $K \geq N$ выводим неравенства

$$u_K(t, \bar{\mathbf{y}}) \leq \max_{S^{T, x_N}(f)} u_K(t, \bar{\mathbf{y}}) \leq u_K(t_N, x_N, \mathbf{0}), \quad S^{T, x}(f) = (0, T) \times \partial\Omega^x(f).$$

Далее, применяя (6.10), (6.5), заключаем, что

$$u_K(t, \bar{\mathbf{y}}) \leq \hat{H}^N, \quad (t, \bar{\mathbf{y}}) \in D^{T, x_N}(f), \quad K \geq N.$$

Отсюда предельным переходом при $K \rightarrow \infty$ для фиксированного N получаем (0.25). Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если для положительной функции $\bar{f}(x)$, $x \in (d, \infty)$, справедливо условие (0.23) и ее Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ подчиняется неравенствам (0.24), то для решения $u(x, \mathbf{y})$ задачи (0.1*), (0.2') в $D^T(f)$, построенного в теореме 4 ($f = \bar{f}$), справедлива оценка (0.26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$V_{h,R} = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid 0 < x < h, |\mathbf{y}| > R\}, \quad n \geq 2,$$

слой с отверстием. Случай $n = 1$ рассматривается аналогично. В области $V_{h,R}$ рассмотрим гармоническую функцию $v_{h,R}(x, \mathbf{y})$, удовлетворяющую граничным условиям $v|_{0 < x < h, |\mathbf{y}|=R} = 1$, $v|_{x=0, h, |\mathbf{y}| > R} = 0$. Согласно принципу максимума при $R \geq h$ для $(x, \mathbf{y}) \in V_{h,R}$ справедливо неравенство $v_{h,R}(x, \mathbf{y}) \leq v_{R,R}(x, \mathbf{y})$, поэтому имеет место оценка

$$\int_{V_{h,R}} v_{h,R}^2 dx d\mathbf{y} \leq \int_{V_{R,R}} v_{R,R}^2 dx d\mathbf{y} = R^{n+1} \int_{V_{1,1}} v_{1,1}^2 dx d\mathbf{y} = C_1 R^{n+1}. \quad (6.11)$$

Обозначим через $\hat{x}_j$ любую точку отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ такую, что

$$\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) = f(\hat{x}_j).$$

Считая $u(t, x, \mathbf{y})$ продолженной нулем за пределы $D^T(f)$, оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx d\mathbf{y} dt &\leq \int_0^T \int_{x_N}^{x_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| \leq R} u^2 dx d\mathbf{y} dt + \int_0^T \int_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\hat{x}_N}^{\hat{x}_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Положим $R = (1 + \bar{\omega}) \max\{f(\hat{x}_{N-1}), f(\hat{x}_N)\}$ и оценим каждый из интегралов I_1, I_2, I_3 правой части последнего неравенства. Для первого интеграла получим

$$I_1 = \int_0^T \int_{x_N}^{x_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| \leq R} u^2 dx d\mathbf{y} dt \leq T \max_{D_{x_N}^{T, x_{N+1}}(f)} u^2 C_2 R^n \Delta_N.$$

Считая $v_{h,R}(x - \hat{x}_{N-1}, \mathbf{y})$, $h = \hat{x}_N - \hat{x}_{N-1}$, решением уравнения теплопроводности и применяя принцип максимума в области интегрирования I_2 , установим неравенство

$$u^2(t, x, \mathbf{y}) \leq v_{h,R}^2(x - \hat{x}_{N-1}, \mathbf{y}) \max_{D_{\hat{x}_{N-1}}^{T, \hat{x}_N}(f)} u^2(t, x, \mathbf{y}).$$

Ввиду (0.24), выбора R и (0.18) при $\mu = k = 1$ справедливы неравенства

$$h = \hat{x}_N - \hat{x}_{N-1} \leq \Delta_{N-1} + \Delta_N \leq (1 + \bar{\omega}) \min(\Delta_{N-1}, \Delta_N) \leq (1 + \bar{\omega}) f(\hat{x}_{N-1}) \leq R.$$

Следовательно, согласно (6.11) справедливо неравенство

$$I_2 = \int_0^T \int_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} dt \leq T \max_{D_{\hat{x}_{N-1}}^{T, \hat{x}_N}(f)} u^2(t, x, \mathbf{y}) C_1 R^{n+1}.$$

Аналогично оценивается интеграл I_3 . Из (6.12) и оценок интегралов I_1 – I_3 , пользуясь (0.25), находим, что

$$\int_0^T \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx dy dt \leq C_3 \exp(2\kappa_* N) (\Delta_N + R) R^n.$$

Используя неравенство (5.5) и условие (0.24), для $N \geq 1$ выводим неравенства $R \leq C_4 \Delta_N$, $\Delta_N \leq \Delta_0 \bar{\omega}^N$. Тогда при $N \geq 1$ имеем оценки

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx dy dt &\leq C_5 \Delta_N^2 \bar{\omega}^{N(n-1)} \exp(2\kappa_* N) \\ &\leq C_6 \Delta_N^2 \exp(\{2\kappa_* + (n-1) \ln \bar{\omega}\} N), \end{aligned}$$

из которых следует неравенство (0.26).

§ 7. Теорема существования в геометрическом классе единственности

ТЕОРЕМА 6. Пусть область Ω удовлетворяет условию (0.16) и $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – λ -последовательность. Если функция $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) \in L_{2,\text{lc}}(\Omega)$ удовлетворяет следующему условию: существуют $\hat{\kappa} \in (0, \kappa)$ и положительная постоянная $\hat{C}$ такие, что при каждом целом $N \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 \leq \hat{C} \exp(\hat{\kappa} N), \quad (7.1)$$

то существует решение задачи (0.1)–(0.3), подчиняющееся (0.17) с $\varepsilon_N = \Delta_N$, $N = \overline{0, \infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u^N(t, \bar{\mathbf{y}})$ – решения задачи (0.1)–(0.3) с функциями $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = \varphi^N(\bar{\mathbf{y}}) = \varphi(\bar{\mathbf{y}}) \chi_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}$, $N = \overline{0, \infty}$. При $N = 0$ полагаем $\Omega_{x_{-1}}^{x_0} = \Omega^{x_0}$, $\Delta_{-1} = 1$. Согласно утверждению 3 такое решение существует, единственно, подчиняется оценке (2.12) и ввиду (7.1) удовлетворяет неравенству

$$H^t(u^N) \leq \bar{C} \|\varphi^N\|^2 = \bar{C} \|\varphi\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 \leq \bar{C} \hat{C} \exp(\hat{\kappa} N). \quad (7.2)$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{N=0}^{\infty} u^N(t, \bar{\mathbf{y}}). \quad (7.3)$$

Покажем, что он сходится в пространстве $V_{\mathcal{D}}(D^{T,r})$ для любого $r > 0$. Согласно (2.7), (4.1), применяя (0.16), для $\nu = -1$, $N - 4$, $N \geq 3$, $t \in (0, T]$ при $\varepsilon_N = \Delta_N$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^{T, x_{\nu+1}})}^2 &\leq 2M \exp(-\kappa(N - \nu - 3)) \Delta_{N-2}^{-2k} \int_0^T \|u^N(\tau)\|_{\Omega_{x_{N-2}}^{x_{N-1}}}^2 d\tau \\ &\leq 2M\theta \exp(-\kappa(N - \nu - 3)) \int_0^T \|u^N(\tau)\|_{\mathcal{D}, \Omega_{x_{N-2}}^{x_{N-1}}}^2 d\tau, \end{aligned}$$

из которых, применяя (7.2), получим

$$\|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})}^2 \leq C_1 \exp(-\kappa(N - \nu - 3)) \exp(\widehat{\kappa}N). \quad (7.4)$$

Таким образом, остаток ряда (7.3) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\begin{aligned} \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})} &\leq C_2 \exp\left(\frac{\widehat{\kappa}}{2}\nu\right) \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa - \widehat{\kappa}}{2}(N - \nu)\right) \\ &\leq C_3 \exp\left(\frac{\widehat{\kappa}}{2}\nu\right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Следовательно, при любом целом $\nu \geq -1$ ряд (7.3) сходится в пространстве $V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})$ к функции $u \in \dot{V}_{\mathcal{D}, \text{lc}}(D^T)$.

Покажем, что $u(t, \bar{y})$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3). Для этого запишем интегральные тождества (1.1) для функций u^N , $N = 0, \overline{L}$, и сложим их. Тогда для любого целого $L \geq 0$ получим равенство

$$\int_0^T \left\{ -\left(\sum_{N=0}^L u^N, v_t \right) + \left(\sum_{N=0}^L u^N, v \right)_{\mathcal{D}^t} \right\} dt = \left(\sum_{N=0}^L \varphi^N, v(0) \right),$$

справедливое для любой функции $v(t, \bar{y}) \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Выполнив в последнем тождестве предельный переход при $L \rightarrow \infty$, установим тождество (1.1) для суммы ряда (7.3). Значит, $u(t, \bar{y})$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3).

Для построенного решения $u(t, \bar{y})$ установим равенство (0.17). Применяя (2.7), (7.2), выводим неравенство

$$\sum_{N=0}^{\nu+3} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})} \leq C_4 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left(\frac{\widehat{\kappa}}{2}N\right). \quad (7.6)$$

Соединяя (7.5), (7.6), получим

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\frac{\kappa}{2}\nu\right) \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})} \\ &\leq \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\nu\right) \left\{ \sum_{N=0}^{\nu+3} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})} + \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \|u^N\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})} \right\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\nu\right) \left\{ C_4 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left(\frac{\widehat{\kappa}}{2}N\right) + C_3 \exp\left(\frac{\widehat{\kappa}}{2}\nu\right) \right\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{\kappa - \widehat{\kappa}}{2}\nu\right) \left\{ C_5 \sum_{i=0}^{\nu+3} \exp\left(-\frac{\widehat{\kappa}}{2}i\right) + C_3 \right\} \leq C_6 \exp\left(-\frac{\kappa - \widehat{\kappa}}{2}\nu\right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Далее, пользуясь определением λ -последовательности (0.16), из (7.7) выводим

$$\begin{aligned} &\exp(-\kappa\nu) \Delta_\nu^{-2k} \int_0^T \|u(t)\|_{\Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}}^2 dt \leq \theta \exp(-\kappa\nu) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{D}, \Omega_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}}^2 dt \\ &\leq \theta \exp(-\kappa\nu) \|u\|_{V_{\mathcal{D}}(D^T, x_{\nu+1})}^2 \leq C_7 \exp(-(\kappa - \widehat{\kappa})\nu). \end{aligned}$$

Ввиду того что правая часть последнего неравенства при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к нулю, равенство (0.17) доказано. Теорема 6 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф.Х. Мукминову и А.К. Гушчину за стимулирующие обсуждения и полезные замечания, способствующие улучшению результата.

Список литературы

- [1] E. Holmgren, “Sur les solutions quasi analytiques de l’équations de la chaleur”, *Ark. Mat. Astronom. Fys.*, **18**:9 (1924), 64–95.
- [2] А. Н. Тихонов, “Теоремы единственности для уравнения теплопроводности”, *Матем. сб.*, **42(84)**:2 (1935), 199–216.
- [3] S. Täcklind, “Sur les class quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique”, *Nova Acta Reg. Soc. Schi. Uppsal. Ser. 4*, **10**:3 (1936), 3–55.
- [4] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, М., 1964.
- [5] Г. Н. Золотарев, “О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1958, №2, 118–135.
- [6] О. А. Олейник, “Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений”, *УМН*, **33**:3 (1978), 126.
- [7] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений”, *УМН*, **33**:5 (1978), 7–76; англ. пер.: О. А. Oleinik, E. V. Radkevich, “The method of introducing a parameter in the study of evolutionary equations”, *Russ. Math. Surv.*, **33**:5 (1978), 7–84.
- [8] А. Г. Гагнидзе, “О классах единственности решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка в неограниченной области”, *УМН*, **39**:6 (1984), 193–194; англ. пер.: A. G. Gagnidze, “On uniqueness classes of the solutions of boundary-value problems for second-order parabolic equations in an unbounded domain”, *Russ. Math. Surv.*, **39**:6 (1984), 209–210.
- [9] А. Г. Гагнидзе, “О единственности решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **13** (1988), 123–126; англ. пер.: A. G. Gagnidze, “Uniqueness of solutions of boundary value problems in unbounded domains for parabolic equations”, *J. Sov. Math.*, **50**:2 (1990), 1437–1446.
- [10] А. К. Гушин, “О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **119(161)**:4 (1982), 451–508; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the uniform stabilization of solutions of the second mixed problem for a parabolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **47(2)** (1984), 439–498.
- [11] Ф. Х. Мукминов, “О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **181**:11 (1990), 1486–1509; англ. пер.: F. Kh. Mukminov, “On uniform stabilization of solutions of the first mixed problem for a parabolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:2 (1992), 331–353.
- [12] Л. М. Кожевникова, “О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области”, *Изв. РАН*, **65**:3 (2001), 51–66; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “On uniqueness classes of solutions of the first mixed problem for a quasi-linear second-order parabolic system in an unbounded domain”, *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 469–484.
- [13] Е. М. Ландис, “О зависимости классов единственности решения второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в неограниченной области от геометрии области”, *Докл. АН СССР*, **275** (1984), 790–793; англ. пер.: E. M. Landis, “On the dependence on the geometry of the domain of the uniqueness classes of the solution to the second initial-boundary value problem for the heat equation in an unbounded domain”, *Soviet Math. Dokl.*, **29** (1984), 292–295.

- [14] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений”, *УМН*, **31**:6 (1976), 142–166; англ. пер.: О. А. Oleinik, G. A. Iosif’yan, “An analogue of Saint-Venant’s principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains”, *Russ. Math. Surv.*, **31**:6 (1976), 153–178.
- [15] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения”, *Докл. АН СССР*, **232**:6 (1977), 1257–1260; англ. пер.: О. А. Oleinik, G. A. Iosif’yan, “Energy estimates for generalized solutions of boundary value problems for second-order elliptic equations and their applications”, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 241–244.
- [16] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптического уравнения второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112**:4 (1980), 588–610; англ. пер.: О. А. Oleinik, G. A. Iosif’yan, “On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:4 (1981), 527–548.
- [17] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях”, *УМН*, **31**:4 (1976), 261–262.
- [18] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “Об устранимых особенностях на границе и единственность решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:3 (1977), 54–67.
- [19] О. А. Олейник, “О примерах неединственности решения краевой задачи для параболического уравнения в неограниченной области”, *УМН*, **38**:1 (1983), 183–184; англ. пер.: О. А. Oleinik, “Examples of the non-uniqueness of the solution of the boundary-value problem for a parabolic equation in an unbounded domain”, *Russ. Math. Surv.*, **38**:1 (1983), 209–210.
- [20] О. А. Ладъженская, “О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **27(69)**:2 (1950), 175–184.
- [21] С. Д. Эйдельман, “Оценки решений параболических систем и некоторые их применения”, *Матем. сб.*, **33** (1954), 57–72.
- [22] О. А. Олейник, “О единственности решения задачи Коши для общих параболических систем в классах быстро растущих функций”, *УМН*, **29**:5 (1974), 229–230.
- [23] О. А. Олейник, “О единственности решения краевых задач и задачи Коши для общих параболических систем”, *Докл. АН СССР*, **220**:6 (1975), 1274–1277; англ. пер.: О. А. Oleinik, “On the uniqueness of the solution of boundary-value problems and the Cauchy problem for general parabolic systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **16** (1975), 247–251.
- [24] В. А. Солонников, *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. МИАН, **83**, Наука, М., Л., 1965.
- [25] О. А. Олейник, “О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях”, *УМН*, **30**:2 (1975), 219–220.
- [26] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:4 (1974), 59–70; англ. пер.: О. А. Oleinik, E. V. Radkevich, “Analyticity and theorems of Liouville and Phragmen–Lindelöf type for general parabolic systems of differential equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **8** (1974), 322–330.
- [27] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “О поведении решений общих параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях”, *Докл. АН СССР*, **220**:5 (1975), 1027–1030; англ. пер.: О. А. Oleinik, E. V. Radkevich,

- “On the behavior of solutions of general parabolic systems of differential equations in unbounded domains”, *Soviet Math. Dokl.*, **16** (1975), 203–207.
- [28] В. П. Михайлов, “Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипотэллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **64(106):1** (1964), 10–51.
- [29] Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196:7** (2005), 67–100; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation”, *Sb. Math.*, **196:7** (2005), 999–1032.
- [30] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [31] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
- [32] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [33] J. A. Moser, “Harnack inequality for parabolic differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17:1** (1964), 101–134.

Л. М. Кожевникова (L. M. Kozhevnikova)

Стерлитамакский государственный
педагогический институт
E-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию
30.01.2006 и 31.08.2006