Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, О линейной независимости значений E -функций, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 8, 93–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:01:43

УДК 511.36

Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский

О линейной независимости значений E -функций

Доказана общая теорема, устанавливающая связь между линейной и алгебраической независимостью значений в алгебраических точках E -функций и свойствами идеала, образованного всеми алгебраическими уравнениями, связывающими эти функции над полем рациональных функций. С помощью этой теоремы устанавливаются достаточные условия линейной независимости значений E -функций, а также алгебраической независимости значений их подсовокупности. Основным результатом является утверждение о том, что во всех алгебраических точках за исключением конечного числа значения E -функций линейно независимы над полем всех алгебраических чисел, если соответствующие функции линейно независимы над полем рациональных функций. Теорема применена к конкретным E -функциям.

Библиография: 6 названий.

В статье доказываются теоремы о линейной и алгебраической независимости значений в алгебраических точках совокупности E -функций, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Определение E -функции было дано К. Зигелем в 1929 году (см. [1]). Основными примерами E -функций являются $e^{\alpha z}$ при алгебраическом числе α и целые обобщенные гипергеометрические функции, параметры которых есть рациональные числа.

Зигель в работе [1] рассматривал функцию

$$K_{\lambda}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (\lambda + 1) \cdots (\lambda + n)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots, \quad (1)$$

являющуюся решением линейного дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2\lambda + 1}{z} y' + y = 0, \quad (2)$$

и доказал алгебраическую независимость совокупности чисел $K_{\lambda_i}(\xi_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, при различных значениях $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ и $\xi_j \in \mathbb{A}$, удовлетворяющих некоторым естественным ограничениям (здесь и далее $\mathbb{A}$ – поле всех алгебраических чисел).

Зигель указывал на общность предложенного им подхода и впоследствии опубликовал соответствующую общую теорему. В 1954 году А. Б. Шидловский существенно ослабил условия Зигеля и доказал теорему, по существу сводящую

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00739) и Международного научного фонда (грант № MHS 300).

проблему исследования алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках к исследованию алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ самих функций. В последующие годы рядом авторов было получено много различных результатов об арифметических свойствах значений E -функций. С определением E -функции, историей вопроса и основными результатами этой тематики можно ознакомиться по книге [2].

Рассмотрим совокупность E -функций

$$f_1(z), \dots, f_m(z), \quad m \geq 2, \quad (3)$$

составляющую решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{ki} y_i, \quad 1 \leq k \leq m, \quad Q_{ki} \in \mathbb{C}(z), \quad (4)$$

и пусть $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ обозначает наименьший общий знаменатель всех функций Q_{ki} .

Задачи о трансцендентности и алгебраической независимости совокупности чисел

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi), \quad (5)$$

$\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, или ее подсовокупностей в основном решены (см. [2]). Задача же о линейной независимости чисел (5) решена лишь в некоторых частных случаях. Первым результатом такого типа была известная теорема Линдемана–Вейерштрасса о линейной независимости над $\mathbb{A}$ чисел $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ при различных $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{A}$. Некоторые результаты о линейной независимости чисел содержатся в книге [2].

В статье [3] доказано несколько теорем о линейной независимости чисел (5) и высказана следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА А. *При указанных выше условиях числа (5) линейно независимы над $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда функции (3) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Это утверждение доказано в следующих случаях:

- 1) когда функции (3) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$;
- 2) когда любое подмножество функций (3), однородно алгебраически независимое над $\mathbb{C}$, будет также однородно алгебраически независимым над $\mathbb{C}(z)$, т.е. когда степень однородной трансцендентности множества функций (3) над $\mathbb{C}(z)$ равна степени однородной трансцендентности этих функций над $\mathbb{C}$,

$$\text{tr deg}_{\mathbb{C}}^0 \{f_1(z), \dots, f_m(z)\} = \text{tr deg}_{\mathbb{C}(z)}^0 \{f_1(z), \dots, f_m(z)\}; \quad (6)$$

- 3) когда $m = 2$.

В настоящей работе устанавливаются условия линейной независимости чисел (5) над $\mathbb{A}$ (следствие 1 из теоремы 1), а также алгебраической независимости подсовокупностей чисел (5) (следствие 2 из теоремы 1). В частности, эти условия позволяют доказать, что гипотеза А имеет место для всех точек $\xi \in \mathbb{A}$ за исключением, быть может, конечного числа из них (теорема 2). Теорема 3 представляет собой реализацию общего утверждения следствия 1 применительно к конкретным функциям. Она устанавливает, что гипотеза А выполняется для совокупности

функций $K_{\lambda_i}(\xi_j z)$ (см. (1)) при $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $\xi_j \in \mathbb{A}$ и $f_1(z) = 1$. Перейдем теперь к формулировкам утверждений.

Пусть $\xi \in \mathbb{C}$ и $\varphi_\xi: \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ — гомоморфизм, представляющий собой замену в многочленах кольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ переменной z на ξ . Для каждого идеала I кольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ будем обозначать $I_\xi = \varphi_\xi(I)$ — идеал в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E -функции (3) составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (4), $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$, порожденный всеми однородными по переменным x_i многочленами, обращающимися в нуль при подстановке функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, соответственно, вместо переменных $x_1, \dots, x_m$, а алгебраическое число ξ отлично от нуля, особых точек системы (4) и таково, что идеал $\mathfrak{P}_\xi$ прост.

Тогда для любого однородного многочлена $P = P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_m]$ с условием $P \notin \mathfrak{P}_\xi$ имеем

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Если при условиях теоремы 1 функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ однородно алгебраически независимы, то полагаем $\mathfrak{P} = (0)$.

Отметим, что если многочлены $P_i(z, x_1, \dots, x_m)$, $1 \leq i \leq M$, составляют базис идеала $\mathfrak{P}$, то

$$\mathfrak{P}_\xi = (P_1(\xi, x_1, \dots, x_m), \dots, P_M(\xi, x_1, \dots, x_m)),$$

и простота идеала $\mathfrak{P}_\xi$ может быть эффективно проверена (см. [4]).

Ниже (см. §1, лемма 2) будет доказано, что множество точек ξ , для которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не прост, конечно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены условия теоремы 1 и функции (3) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то числа (5) линейно независимы над $\mathbb{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что числа (3) линейно зависимы над $\mathbb{A}$, т.е. существуют не все равные нулю алгебраические числа $c_1, \dots, c_m$ такие, что

$$c_1 f_1(\xi) + \dots + c_m f_m(\xi) = 0. \quad (7)$$

Положим $L = c_1 x_1 + \dots + c_m x_m \neq 0$. Если $L \in \mathfrak{P}_\xi$, то в силу однородности идеала $\mathfrak{P}$ по переменным $x_1, \dots, x_m$ находим

$$L = (z - \xi) \cdot L_1 + L_2, \quad L_2 \in \mathfrak{P}, \quad (8)$$

где $L_1, L_2 \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ — линейные формы от переменных x_i . Поскольку функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ согласно условию следствия 1 линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, включение $L_2 \in \mathfrak{P}$ возможно лишь в случае $L_2 = 0$. Но тогда (8) приводит к противоречию, поскольку по определению $L \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$. Итак, $L \notin \mathfrak{P}_\xi$, и по теореме 1 равенство (7) невозможно.

Аналогично доказывается, что если в условиях теоремы 1 функции (3) не связаны над $\mathbb{C}(z)$ однородным уравнением степени r , то и числа (5) не связаны над $\mathbb{A}$ однородным уравнением степени r .

Отметим, что утверждение следствия 1 остается справедливым, если ослабить требование простоты идеала $\mathfrak{P}_\xi$ до условия, что этот идеал не имеет линейных делителей, т.е. что для любой линейной формы $L = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ выполняется равенство $\mathfrak{P}_\xi : L = \mathfrak{P}_\xi$. Это легко следует из доказательства теоремы 1 (см. (23) и далее).

Рассмотрим конкретный пример, связанный с функциями (1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, а ξ – отличное от нуля алгебраическое число. Числа

$$1, K_\lambda(\xi), K'_\lambda(\xi), K_{-\lambda}(\xi), K'_{-\lambda}(\xi) \quad (9)$$

линейно независимы над полем $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда $\lambda \neq k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\lambda = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$, то функции

$$K_\lambda(z), K'_\lambda(z), K_{-\lambda}(z), K'_{-\lambda}(z) \quad (10)$$

линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$. В силу соотношений

$$2\lambda K_\lambda(z) + zK'_\lambda(z) = 2\lambda K_{\lambda-1}(z), \quad zK_\lambda(z) = -2\lambda K'_{\lambda-1}(z) \quad (11)$$

(см. [2, гл. 6, §2, соотношения (42), (43)]), справедливых при любом $\lambda \neq 0, -1, -2, \dots$, это утверждение достаточно доказать для $\lambda = 1/2$. Но в этом случае оно, очевидно, выполняется в силу (11). Итак, с некоторыми многочленами $P_i(z) \in \mathbb{A}[z]$, $1 \leq i \leq 4$, имеет место равенство

$$P_1(z)K_\lambda(z) + P_2(z)K'_\lambda(z) + P_3(z)K_{-\lambda}(z) + P_4(z)K'_{-\lambda}(z) = 0.$$

Не уменьшая общности можно считать, что многочлены $P_i(z)$ в совокупности взаимно просты. Отсюда, поскольку $\xi \in \mathbb{A}$, получаем линейное соотношение между числами (9) над $\mathbb{A}$.

В случае $\lambda \neq k + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$, любые три из функций $K_\lambda(z)$, $K'_\lambda(z)$, $K_{-\lambda}(z)$, $K'_{-\lambda}(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ (см. [2, гл. 9, §7, теорема 8]) и имеет место соотношение

$$K_\lambda(z)K'_{-\lambda}(z) - K'_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) - 2\frac{\lambda}{z}K_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) + 2\frac{\lambda}{z} = 0$$

(см. [2, гл. 9, §7, (73)]).

Следовательно, в обозначениях теоремы 1 для совокупности функций

$$1, K_\lambda(z), K'_\lambda(z), K_{-\lambda}(z), K'_{-\lambda}(z)$$

идеал $\mathfrak{P}$ есть главный идеал, порожденный неприводимым многочленом

$$zx_1x_4 - zx_2x_3 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_0^2. \quad (12)$$

При любом $\xi \neq 0$ многочлен $\xi x_1x_4 - \xi x_2x_3 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_0^2$, как легко видеть, неприводим. Поэтому идеал

$$\mathfrak{P}_\xi = (\xi x_1x_4 - \xi x_2x_3 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_0^2)$$

прост и согласно следствию 1 числа (9) линейно независимы над $\mathbb{A}$.

Более общее утверждение будет доказано ниже в теореме 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполнены условия теоремы 1, и при некотором целом r , $1 \leq r < m$, функции

$$f_1(z), \dots, f_r(z)$$

однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, а числа

$$f_1(\xi), \dots, f_r(\xi) \quad (13)$$

однородно алгебраически зависимы над полем $\mathbb{A}$, то существует однородный по переменным $x_1, \dots, x_m$ неприводимый многочлен $Q = Q(z, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}[z, x_1, \dots, x_m]$ с условиями

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0 \quad \text{и} \quad Q(\xi, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_r].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = P(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_r]$ — однородный неприводимый многочлен, для которого выполнено равенство

$$P(f_1(\xi), \dots, f_r(\xi)) = 0.$$

По теореме 1 имеем $P \in \mathfrak{P}_\xi$, так что

$$P = (z - \xi) \cdot P_1 + Q_1, \quad Q_1 \in \mathfrak{P},$$

где $P_1, Q_1 \in \mathbb{A}[z, x_1, \dots, x_m]$ — многочлены, однородные по переменным x_i , $Q_1(\xi, x_1, \dots, x_m) \neq 0$. Из неприводимости P следует, что $Q_1 = a(z)Q$, где $a(z) \in \mathbb{A}[z]$, $Q \in \mathbb{A}[z, x_1, \dots, x_m]$, причем многочлен Q неприводим. Равенство

$$Q(\xi, x_1, \dots, x_m) = a(\xi)^{-1} \cdot P(x_1, \dots, x_r)$$

завершает доказательство следствия 3.

Предположим теперь, что функции (1) дополнительно удовлетворяют условию (6). В этом случае идеал $\mathfrak{P}$ порождается однородными многочленами кольца $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ и для любой точки $\xi \in \mathbb{C}$ имеем $\mathfrak{P}_\xi = \mathfrak{P} \cap \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ — простой идеал. Таким образом, при условии (6) утверждение теоремы 1 выполняется для любого алгебраического числа ξ , отличного от нуля и особых точек системы (4). В частности, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть E -функции (3) составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (4) и удовлетворяют условию (6).

Тогда для любого алгебраического числа ξ , отличного от нуля и особых точек системы (4):

- 1) из линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций (3) следует линейная независимость над $\mathbb{A}$ их значений (5);
- 2) числа (13) однородно алгебраически зависимы над полем $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда существует однородный по переменным $x_1, \dots, x_m$ неприводимый многочлен $Q(z, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}[z, x_1, \dots, x_m]$, удовлетворяющий условиям

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \equiv 0 \quad \text{и} \quad Q(\xi, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_r].$$

Отметим, что первое утверждение доказано так же в книге [2] (см. [2, гл. 4, §8, теорема 9]).

Условиям следствия 4 удовлетворяют функции $e^{\alpha_i z}$, $1 \leq i \leq m$, при различных алгебраических α_i . Взяв в этом случае $\xi = 1$, получаем из 1) утверждение теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

Как указывалось выше, множество точек ξ , для которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не является простым, конечно. Это дает возможность доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E -функции (3) составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (4) и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда существует конечное и эффективно определяемое множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такое, что для любого алгебраического числа $\xi \notin \Lambda$ числа

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$$

линейно независимы над полем всех алгебраических чисел.

Аналогичное утверждение имеет место и в ситуации, описываемой следствием 3.

Для конкретных совокупностей функций, в случае, когда могут быть явно указаны многочлены, порождающие идеал $\mathfrak{P}$, множество точек ξ , в которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не является простым, может быть явно указано. В качестве примера приведем здесь следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – рациональные числа, отличные от отрицательных целых, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – отличные от нуля алгебраические числа, квадраты которых различны. В этих условиях эквивалентны следующие три утверждения:

1) числа

$$1, K_{\lambda_1}(\xi_j), K'_{\lambda_1}(\xi_j), \dots, K_{\lambda_m}(\xi_j), K'_{\lambda_m}(\xi_j), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (14)$$

линейно независимы над полем $\mathbb{A}$;

2) функции

$$1, K_{\lambda_1}(\xi_j z), K'_{\lambda_1}(\xi_j z), \dots, K_{\lambda_m}(\xi_j z), K'_{\lambda_m}(\xi_j z), \quad 1 \leq j \leq n,$$

линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$;

3) не существует двух параметров λ_i, λ_j с условием $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$.

Эта теорема обобщает теорему Линдемана–Вейерштрасса. Действительно, при $m = 1$ и $\lambda_1 = -1/2$ имеем

$$K_{-1/2}(z) = \cos z, \quad K'_{-1/2}(z) = -\sin z,$$

так что

$$e^{iz} = K_{-1/2}(z) - iK'_{-1/2}(z), \quad e^{-iz} = K_{-1/2}(z) + iK'_{-1/2}(z). \quad (15)$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – различные алгебраические числа. Расширив, если нужно, это множество чисел, можно, не уменьшая общности, считать, что $\alpha_1 = 0$, $s = 2n + 1$, $\alpha_{n+j} = -\alpha_j$, $j = 2, \dots, n + 1$. Положив теперь $\xi_j = i\alpha_{j+1}$, $j = 1, \dots, n$, согласно теореме 3 получаем, что числа $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_s}$ линейно независимы над $\mathbb{A}$, т.е. утверждение теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

§1. Сведение теоремы 2 к теореме 1

Теорема 2 может быть выведена из теоремы 1 с помощью следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. *Идеал $\mathfrak{P}$ абсолютно прост, т.е. остается простым при расширении в любое кольцо $K[x_1, \dots, x_m]$, где K – поле, содержащее $\mathbb{C}(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F(\mathfrak{P})$ поле частных факторкольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]/\mathfrak{P}$. Из определения идеала $\mathfrak{P}$ следует, что $F(\mathfrak{P})$ изоморфно полю $\mathbb{C}(z, tf_1(z), \dots, tf_m(z))$, где t – независимая от z переменная. Это поле имеет характеристику 0 и потому сепарабельно над $\mathbb{C}(z)$. Для доказательства леммы теперь достаточно установить, что поле $\mathbb{C}(z)$ алгебраически замкнуто в $F(\mathfrak{P})$ (см. [5, т. 2, гл. 7, §12, теорема 39]). Пусть $S \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_m)$ и $\varphi = S(z, tf_1(z), \dots, tf_m(z))$ – алгебраическая функция от z . Эта функция однозначна, ведь $f_i(z)$ – целые функции. Следовательно, $\varphi \in \mathbb{C}(z)$, т.е. $\mathbb{C}(z)$ алгебраически замкнуто в $F(\mathfrak{P})$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ линейно независимы над полем всех алгебраических функций $\mathbb{B}$.*

Действительно, если существует линейное соотношение

$$\alpha_1(z)f_1(z) + \dots + \alpha_m(z)f_m(z) = 0, \quad \alpha_i(z) \in \mathbb{B},$$

то идеал $\mathfrak{P}^e$ – расширение $\mathfrak{P}$ в кольцо $\mathbb{B}[x_1, \dots, x_m]$ – содержит линейную форму. Но из однородности идеалов следует, что и $\mathfrak{P}$ должен содержать линейную форму, вопреки предположению о линейной независимости $f_i(z)$ над полем $\mathbb{C}(z)$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{P}$ – абсолютно простой идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$. Существует только конечное множество точек $\xi \in \mathbb{C}$, для которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не является простым.*

Доказательство этой леммы (см. [4, теорема 16]) дает также эффективную процедуру для нахождения всех точек ξ с условием, что идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не прост.

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях теоремы 2 множество точек ξ , для которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не является простым, конечно.*

Это утверждение в силу леммы 1 является прямым следствием леммы 2.

Обозначим буквой Λ множество, содержащее 0, все особые точки системы дифференциальных уравнений (4) и точки $\xi \in \mathbb{A}$, для которых идеал $\mathfrak{P}_\xi$ не является простым. В силу следствия из леммы 2 множество Λ конечно. Теорема 2 теперь немедленно вытекает из следствия 1 теоремы 1.

§2. Доказательство теоремы 1

Введем некоторые обозначения и определения необходимые для доказательства теоремы. Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{C}(z)$ – поле рациональных функций, R – подкольцо $\mathbb{k}$, состоящее из всех рациональных функций, не имеющих особенностей в точке ξ .

Для каждого натурального числа N и однородного идеала $I \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ обозначим $\mathcal{L}_I(N)$ линейное пространство над $\mathbb{k}$, порожденное вычетами по модулю

I однородных многочленов кольца $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$, имеющих степень N . Заметим, что если $J \subset I$ — два однородных простых идеала, то можно считать $\mathfrak{L}_I(N) \subset \mathfrak{L}_J(N)$.

Пусть также $\chi_I(N) = \dim \mathfrak{L}_I(N)$. Согласно теореме, доказанной Гильбертом, при всех достаточно больших N величина $\chi_I(N)$ является многочленом от N (см. [5, т. 2, гл. 7, § 12, теорема 41]). Степень этого многочлена равна проективной размерности идеала I (там же, теорема 42). Таким образом,

$$\chi_I(N) = \alpha N^d + O(N^{d-1}), \quad d = \dim I, \quad \alpha > 0. \quad (16)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем ξ -базисом линейного пространства $\mathfrak{L}_I(N)$ любую совокупность элементов

$$b_1, \dots, b_q \quad (17)$$

этого пространства, удовлетворяющую следующим трем условиям:

- 1) элементы (17) являются вычетами по модулю I некоторых однородных многочленов степени N кольца $\mathbb{C}[z][x_1, \dots, x_m]$;
- 2) вычет по модулю I каждого однородного многочлена степени N кольца $R[x_1, \dots, x_m]$ является линейной комбинацией элементов (17) с коэффициентами из R ;
- 3) элементы (17) линейно независимы над $\mathbb{K}$.

Заметим, что любой ξ -базис является базисом в обычном смысле линейного пространства $\mathfrak{L}_I(N)$.

ЛЕММА 3. Для любого однородного идеала $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ и натурального числа N пространство $\mathfrak{L}_I(N)$ имеет ξ -базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют совокупности элементов (17), обладающие свойствами 1) и 2). Например, совокупность вычетов по модулю I всех произведений степеней

$$x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}, \quad k_i \geq 0, \quad k_1 + \dots + k_m = N.$$

Пусть (17) одна из таких совокупностей, имеющая наименьшее возможное количество элементов q . Докажем, что определенная таким образом совокупность (17) обладает и свойством 3). Действительно, в противном случае существуют многочлены $p_1(z), \dots, p_q(z) \in \mathbb{C}[z]$ такие, что

$$p_1(z)b_1 + \dots + p_q(z)b_q = 0.$$

При этом не уменьшая общности можно считать, что $p_q(\xi) \neq 0$. Тогда $p_i(z)/p_q(z) \in R$, $i = 1, \dots, q-1$, и

$$b_q = -\frac{p_1(z)}{p_q(z)} \cdot b_1 - \dots - \frac{p_{q-1}(z)}{p_q(z)} \cdot b_{q-1},$$

вопреки определению q . Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Для каждого идеала $\mathfrak{A}$ кольца $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ будем в дальнейшем обозначать $\mathfrak{A}^e$ его расширение в кольцо $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$.

Обозначим буквой s степень данного в условии теоремы 1 многочлена P по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$. Пусть также $A_1, \dots, A_u$ – совокупность однородных многочленов кольца $\mathbb{C}[z][x_1, \dots, x_m]$ степени $N - s$, вычеты которых по модулю $\mathfrak{P}^e$ образуют некоторый ξ -базис линейного пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{P}^e}(N - s)$. Если $d = \dim \mathfrak{P}^e$ – проективная размерность идеала $\mathfrak{P}^e$, то согласно (16) имеем

$$u = \chi_{\mathfrak{P}^e}(N - s) = \alpha(N - s)^d + O((N - s)^{d-1}) = \alpha N^d + O(N^{d-1}). \quad (18)$$

Допустим теперь, что утверждение теоремы 1 неверно, т. е.

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0.$$

Обозначим $J = (P, \mathfrak{P})$ однородный идеал, порожденный в кольце $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ многочленом P и многочленами идеала $\mathfrak{P}$. Так как $P \notin \mathfrak{P}$, иначе $P \in \mathfrak{P}_\xi$, то $\dim J \leq d - 1$ (см. [5, т. 2, гл. 7, § 7, следствие из теоремы 21]). Обозначим $B_1, \dots, B_v$ совокупность однородных многочленов степени N кольца $\mathbb{C}[z][x_1, \dots, x_m]$, вычеты которых по модулю J образуют некоторый ξ -базис линейного пространства $\mathfrak{L}_J(N)$. Из (16) следует, что

$$v = \chi_J(N) = O(N^{d-1}). \quad (19)$$

ЛЕММА 4. В условиях теоремы 1 вычеты многочленов $P \cdot A_1, \dots, P \cdot A_u, B_1, \dots, B_v$ по модулю идеала $\mathfrak{P}^e$ образуют ξ -базис пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{P}^e}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$a_1, \dots, a_u, b_1, \dots, b_v, \quad (20)$$

соответственно, вычеты многочленов $P \cdot A_1, \dots, P \cdot A_u, B_1, \dots, B_v$ по модулю идеала $\mathfrak{P}^e$.

Если с некоторыми многочленами $\gamma_1, \dots, \gamma_u, \delta_1, \dots, \delta_v \in \mathbb{C}[z]$ выполняется равенство

$$\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_u a_u + \delta_1 b_1 + \dots + \delta_v b_v = 0,$$

то

$$\gamma_1 P A_1 + \dots + \gamma_u P A_u + \delta_1 B_1 + \dots + \delta_v B_v \in \mathfrak{P}^e, \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\delta_1 B_1 + \dots + \delta_v B_v \in J.$$

Но это включение в силу того, что элементы $b_1, \dots, b_v$ образуют базис $\mathfrak{L}_J(N)$, означает $\delta_1 = \dots = \delta_v = 0$. Теперь из (21) следует

$$P \cdot (\gamma_1 A_1 + \dots + \gamma_u A_u) \in \mathfrak{P}^e$$

и, поскольку $\mathfrak{P}$ – простой идеал, $P \notin \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \cap \mathbb{C}[z] = \{0\}$, то

$$\gamma_1 A_1 + \dots + \gamma_u A_u \in \mathfrak{P}^e.$$

Вычеты многочленов A_j по модулю $\mathfrak{P}^e$ образуют базис пространства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{P}^e}(N - s)$, поэтому $\gamma_1 = \dots = \gamma_u = 0$. Итак, элементы (20) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Докажем теперь выполнимость для (20) второго условия в определении ξ -базиса. Так как элементы $b_1, \dots, b_v$ образуют ξ -базис пространства $\mathfrak{L}_J(N)$, то для любого многочлена $H \in R[x_1, \dots, x_m]$ с некоторым набором рациональных функций $\beta_1, \dots, \beta_v \in R$ имеем включение

$$P_1 = H - \beta_1 B_1 - \dots - \beta_v B_v \in J.$$

Отсюда следует, что существуют многочлен $b(z) \in \mathbb{C}[z]$, $b(\xi) \neq 0$, и целое число $n \geq 0$ такие, что $b(z) \cdot P_1 \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ и с некоторым $Q(z, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ имеем

$$(z - \xi)^n \cdot b(z) \cdot P_1 \equiv P \cdot Q \pmod{\mathfrak{P}}. \quad (22)$$

Пусть n — наименьшее число, для которого существует такое представление.

Предположим, что $n \geq 1$. Тогда из (22) следует

$$P(x_1, \dots, x_m) \cdot Q(\xi, x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{P}_\xi. \quad (23)$$

Идеал $\mathfrak{P}_\xi$, согласно условию теоремы 1, прост и $P \notin \mathfrak{P}_\xi$. Поэтому $Q(\xi, x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{P}_\xi$ и с некоторым многочленом $G \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ справедливо сравнение

$$Q(z, x_1, \dots, x_m) \equiv (z - \xi)G(z, x_1, \dots, x_m) \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Теперь из (22) находим

$$(z - \xi)^n \cdot b(z) \cdot P_1 \equiv (z - \xi) \cdot G \cdot P \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Но идеал $\mathfrak{P}$ прост и $z - \xi \notin \mathfrak{P}$. Следовательно,

$$(z - \xi)^{n-1} \cdot b(z) \cdot P_1 \equiv G \cdot P \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Получившееся противоречие с определением n доказывает, что в действительности $n = 0$, т.е.

$$b(z) \cdot P_1 \equiv P \cdot Q \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Многочлен Q/b принадлежит кольцу $R[x_1, \dots, x_m]$. Согласно определению ξ -базиса, с некоторыми элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_u \in R$ в кольце $R[x_1, \dots, x_m]$ имеем сравнение

$$Q/b \equiv \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_u A_u \pmod{\mathfrak{P}^e}$$

и, следовательно, сравнение

$$H \equiv \beta_1 B_1 + \dots + \beta_v B_v + \alpha_1 P A_1 + \dots + \alpha_u P A_u \pmod{\mathfrak{P}^e}.$$

Этим завершается доказательство леммы 4.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Обозначим $\mathbb{K}$ конечное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее коэффициенты всех E -функций $f_j(z)$, коэффициенты многочлена P и число ξ . Пусть также $\bar{f} = (f_1(z), \dots, f_m(z))$,

$$\begin{aligned} F_i(z) &= P(\bar{f})A_i(\bar{f}), & i &= 1, \dots, u, \\ F_{j+u}(z) &= B_j(\bar{f}), & j &= 1, \dots, v, \end{aligned}$$

и $M = u + v$. Согласно (18), (19) можно утверждать, что $M = \alpha N^d + O(N^{d-1})$. Обозначим

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m Q_{kj} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

дифференциальный оператор, соответствующий системе (4). Поскольку ξ отлична от особых точек (4), то дифференциальный оператор D действует в кольце $R[x_1, \dots, x_m]$. Это, в частности, означает, что все многочлены $D(PA_i)$, $D(B_j)$ принадлежат кольцу $R[x_1, \dots, x_m]$ и в силу леммы 4 каждый из них сравним по модулю $\mathfrak{P}$ с некоторой линейной комбинацией многочленов $P \cdot A_1, \dots, P \cdot A_u, B_1, \dots, B_v$, имеющей коэффициенты в R . Это же, в свою очередь, означает, что совокупность E -функций $F_1(z), \dots, F_M(z)$ составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, причем ξ не является особой точкой этой системы. Функции $F_i(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, в противном случае некоторая линейная комбинация многочленов $P \cdot A_1, \dots, P \cdot A_u, B_1, \dots, B_v$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ принадлежала бы идеалу $\mathfrak{P}$, что противоречит лемме 4. В этих условиях можно утверждать (см. [2, гл. 3, §11, лемма 17]), что ρ – максимальное количество линейно независимых над $\mathbb{K}$ среди чисел $F_i(\xi)$ – удовлетворяет неравенству

$$\rho = \text{rg}(F_1(\xi), \dots, F_M(\xi)) \geq \frac{M}{h} = \frac{\alpha}{h} \cdot N^d + O(N^{d-1}),$$

где $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

Но так как $P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$, то

$$\rho = \text{rg}(F_{u+1}(\xi), \dots, F_M(\xi)) \leq v = O(N^{d-1}).$$

Полученные оценки для ρ противоречат друг другу, что и завершает доказательство теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 мы установим следующие зависимости ее утверждений: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Это утверждение доказывается так же, как и следствие 2 из теоремы 1.

$2) \Rightarrow 3)$. Если существуют параметры λ_i, λ_j с условием $\lambda_i - \lambda_j = k \in \mathbb{Z}$, то согласно (11) функции $K_{\lambda_i}(z), K'_{\lambda_i}(z), K_{\lambda_j}(z), K'_{\lambda_j}(z)$ линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Отсюда следует, что функции, входящие во второе утверждение теоремы 3, линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$.

3) $\Rightarrow$ 1). В доказательстве этого утверждения будет использовано следствие 1 из теоремы 1. Предположим, что выполнено условие $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$, $1 \leq i < j \leq m$. Добавив к совокупности $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, если это необходимо, числа $-1/2$ и 0 , а также $-\lambda_j$ для некоторых j , и расширив тем рассматриваемую совокупность функций, можно в силу соотношений (11), не уменьшая общности, считать, что $m = 2r - 2$, $r \geq 2$, $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_i + \lambda_j &\notin \mathbb{Z}, & 1 \leq i < j \leq r, \\ \lambda_{r+i} &= -\lambda_{i+2}, & i = 1, \dots, r-2. \end{aligned}$$

В силу (15) для завершения доказательства теоремы 3 достаточно установить линейную независимость над $\mathbb{A}$ совокупности значений в точке $z = 1$ функций

$$\begin{aligned} &1, e^{\xi_j z}, e^{-\xi_j z}, K_0(\xi_j z), K'_0(\xi_j z), \\ &K_{\lambda_i}(\xi_j z), K'_{\lambda_i}(\xi_j z), K_{-\lambda_i}(\xi_j z), K'_{-\lambda_i}(\xi_j z), \quad 3 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (24)$$

Эти функции составляют решение системы из $1 + 2mn$ линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющих единственную особую точку $z = 0$.

Обозначим $\xi_{n+j} = -\xi_j$, $j = 1, \dots, n$, $d = 2n$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ и буквой L — решетку в $\mathbb{Z}^d$, состоящую из векторов $\bar{a} \in \mathbb{Z}^d$ с условием $(\bar{a}, \bar{\xi}) = 0$.

Для каждого вектора

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d, \quad \lambda_j \geq 0,$$

будем обозначать

$$\bar{x}^{\bar{\lambda}} = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d} \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_d].$$

ЛЕММА 5. *Обозначим буквой $\mathfrak{I}$ идеал, порожденный в кольце $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_d]$ многочленами $\bar{x}^{\bar{\lambda}} - \bar{x}^{\bar{\mu}}$ с условиями $\bar{\lambda} - \bar{\mu} \in L$. Тогда $\mathfrak{I}$ — простой идеал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом $\mathfrak{P}_1$ простой идеал, порожденный всеми многочленами $P \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_d]$ с условием

$$P(z, e^{\xi_1 z}, \dots, e^{\xi_d z}) = 0.$$

Из определения решетки L следует, что $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}_1$. Рассмотрим произвольный многочлен $P \in \mathfrak{P}_1$. Его можно представить в виде $P = Q + R$, где $Q \in \mathfrak{I}$ и

$$R = \sum_{\bar{\lambda} \in \mathcal{N}} p_{\bar{\lambda}}(z) \bar{x}^{\bar{\lambda}}, \quad p_{\bar{\lambda}} \in \mathbb{C}[z],$$

а для любых двух векторов $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathcal{N}$ выполняется условие $\bar{\lambda} - \bar{\mu} \notin L$ и $p_{\bar{\lambda}}(z) \neq 0$. Так как $R = P - Q$ и $P \in \mathfrak{P}_1$, $Q \in \mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}_1$, то $R \in \mathfrak{P}_1$. Следовательно,

$$\sum_{\bar{\lambda} \in \mathcal{N}} p_{\bar{\lambda}}(z) e^{(\bar{\xi}, \bar{\lambda})z} = 0. \quad (25)$$

Так как для любых двух векторов $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathcal{N}$ выполняется условие $\bar{\lambda} - \bar{\mu} \notin L$, то все числа $(\bar{\xi}, \bar{\lambda}), \bar{\lambda} \in \mathcal{N}$, различны. Из (25) теперь следует, что $p_{\bar{\lambda}}(z) = 0, \bar{\lambda} \in \mathcal{N}$. Получившееся противоречие означает, что $R = 0$, т.е. $P \in \mathcal{J}$. Таким образом, доказано равенство $\mathcal{J} = \mathfrak{P}_1$, т.е. идеал $\mathcal{J}$ прост. Лемма 5 доказана.

В дальнейшем нам понадобится понятие высоты идеала нётерова кольца. Для простых идеалов соответствующее определение можно найти, например, в [5, т. 1, гл. 4, §14]. Для произвольного идеала $\mathcal{U}$ высота определяется как наименьшая из высот простых идеалов, содержащих $\mathcal{U}$. Высоту идеала $\mathcal{U}$ мы будем обозначать $\text{rg } \mathcal{U}$.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathfrak{R}$ – нётерово кольцо, A и B – элементы кольца $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$ – простой идеал в $\mathfrak{R}$, $\mathcal{U}$ – идеал кольца многочленов $\mathfrak{R}[y]$, порожденный элементами $\mathfrak{B}$ и многочленом $Bu - A$, т.е. $\mathcal{U} = (\mathfrak{B}, Bu - A) \subset \mathfrak{R}[y]$. Если

$$\text{rg}(\mathfrak{B}, A, B) \geq \text{rg } \mathfrak{B} + 2, \quad (26)$$

то $\mathcal{U}$ – простой идеал кольца $\mathfrak{R}[y]$ и $\text{rg } \mathcal{U} \geq \text{rg } \mathfrak{B} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (26) следует, что $B \notin \mathfrak{B}$ и расширение $\mathfrak{B}^*$ идеала $\mathfrak{B}$ в кольцо $\mathfrak{R}[B^{-1}]$ есть простой идеал. Обозначим через $\mathfrak{M}$ идеал кольца $\mathfrak{R}[y]$, порожденный всеми многочленами $P \in \mathfrak{R}[y]$ с условием $P|_{y=A/B} \in \mathfrak{B}^*$. Идеал $\mathfrak{M}$, очевидно, прост. Имеем включение $\mathcal{U} \subset \mathfrak{M}$. Для любого многочлена $P \in \mathfrak{M}$ с некоторым натуральным числом r имеет место включение $B^r \cdot P \in \mathcal{U}$. Поскольку идеал $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис, можно найти натуральное число r , для которого $B^r \cdot \mathfrak{M} \subset \mathcal{U}$.

Пусть Ω – простой идеал кольца $\mathfrak{R}[y]$, ассоциированный с идеалом $\mathcal{U}$. Тогда $\text{rg } \Omega \leq \text{rg } \mathfrak{B} + 1$ (см. [5, гл. 4, §14, теорема 30]). Если $B \in \Omega$, то из включений $Bu - A \in \mathcal{U} \subset \Omega, \mathfrak{B} \subset \mathcal{U} \subset \Omega$ следует, что $(\mathfrak{B}, A, B) \subset \Omega$ и, следовательно, $\text{rg}(\mathfrak{B}, A, B) \leq \text{rg } \Omega \leq \text{rg } \mathfrak{B} + 1$ вопреки условию (26). Получившееся противоречие означает, что $B \notin \Omega$, т.е. многочлен B не содержится ни в одном простом идеале, ассоциированном с $\mathcal{U}$. Из включения $B^r \cdot \mathfrak{M} \subset \mathcal{U}$ теперь следует, что $\mathfrak{M} \subset \mathcal{U}$, т.е. $\mathfrak{M} = \mathcal{U}$, и, следовательно, $\mathcal{U}$ – простой идеал.

Неравенство для высот очевидно имеет место, так как многочлен $Bu - A$ принадлежит идеалу $\mathcal{U}$ и не содержится в простом идеале $\mathfrak{B}^e$ – расширении идеала $\mathfrak{B}$ в кольцо $\mathfrak{R}[y]$. Лемма доказана полностью.

ЛЕММА 7. Пусть в обозначениях леммы 6 $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной над нётеровым кольцом $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \supset \mathbb{C}$, и $A = A(x) \in \mathfrak{D}[x]$, $B \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ – расширение некоторого простого идеала $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{D}$ в кольцо $\mathfrak{R}$, $A(x) \notin \mathfrak{B}$, $B \notin \mathfrak{B}$. Предположим также, что идеал в кольце $\mathfrak{D}$, порожденный элементами $\mathfrak{B}_0$, коэффициентами многочлена $A(x)$ и B , совпадает с $\mathfrak{D}$. Тогда

$$\text{rg}(\mathfrak{B}, A(x), B) \geq \text{rg } \mathfrak{B} + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к факторкольцам по модулю идеалов $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}$, мы можем, не уменьшая общности считать, что $\mathfrak{B}_0 = (0), \mathfrak{B} = (0)$. Если утверждение леммы неверно, то существует $\mathfrak{P}$ – простой идеал кольца $\mathfrak{D}[x]$, ассоциированный с идеалом $(A(x), B) \subset \mathfrak{D}[x]$ такой, что $\text{rg } \mathfrak{P} \leq 1$. Так как $B \in \mathfrak{P}$, то существует

простой идеал $\mathfrak{f}$ в кольце $\mathfrak{D}$, ассоциированный с главным идеалом (B) и такой, что расширение $\mathfrak{f}^e$ идеала $\mathfrak{f}$ в кольцо $\mathfrak{D}[x]$ содержится в идеале $\mathfrak{P}$, т.е. $\mathfrak{f}^e \subset \mathfrak{P}$. Так как B не есть делитель нуля в $\mathfrak{D}$, то справедливо неравенство $\text{rg } \mathfrak{f} \geq 1$. Тогда имеем неравенства $1 \leq \text{rg } \mathfrak{f} \leq \text{rg } \mathfrak{f}^e \leq \mathfrak{P}$. Это доказывает, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{f}^e$, т.е. идеал $\mathfrak{P}$ имеет базис, состоящий из элементов кольца $\mathfrak{D}$. Из включения $A(x) \in \mathfrak{P}$ следует, что все коэффициенты многочлена $A(x)$ содержатся в идеале $\mathfrak{P}$. Но согласно условию идеала, порожденный B и коэффициентами многочлена A , содержит 1. Следовательно, $1 \in \mathfrak{P}$. Получившееся противоречие доказывает, что $\text{rg } \mathfrak{P} \geq 2$. Лемма 7 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим теперь частный случай, связанный с функциями $K_\lambda(z)$. Пусть ξ, λ – ненулевые комплексные числа. Пусть $\mathfrak{D}$ – нётерово кольцо, содержащее кольцо многочленов $\mathbb{C}[z, x_1, x_2]$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}[x_3]$ и пусть (см. (12))

$$R = \xi z(x_1 x_4 - x_2 x_3) - 2\lambda(x_1 x_3 - 1) = Bx_4 - A,$$

где

$$B = \xi z x_1, \quad A = (\xi z x_2 + 2\lambda x_1)x_3 - 2\lambda,$$

– многочлены кольца $\mathfrak{R}$. Коэффициенты $\xi z x_2 + 2\lambda x_1$ и 2λ многочлена A порождают в кольце $\mathfrak{D}$ идеал, совпадающий со всем кольцом $\mathfrak{D}$. Поэтому для любого простого идеала $\mathfrak{B}_0$ кольца $\mathfrak{D}$ согласно лемме 7 в кольце $\mathfrak{R}$ выполняется неравенство $\text{rg}(\mathfrak{B}, A, B) \geq \text{rg } \mathfrak{B} + 2$, а по лемме 6 получаем, что идеал $(\mathfrak{B}_0, R) \subset \mathfrak{D}[x_3, x_4]$ прост.

Мы ниже будем применять это рассуждение индуктивно, добавляя многочлены, отвечающие различным значениям ξ и λ .

Рассмотрим в кольце $\mathbb{W}$ многочленов от переменных $x_{u,v}$, $1 \leq u \leq 2m$, $1 \leq v \leq n$, с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ простой идеал $\mathfrak{P}$, порожденный многочленами, обращающимися в нуль при подстановке $e^{\xi_j z}$ вместо $x_{1,j}$, $e^{-\xi_j z}$ вместо $x_{2,j}$, $K_0(\xi_j z)$ вместо $x_{3,j}$, $K'_0(\xi_j z)$ вместо $x_{4,j}$, функций $K_{\lambda_i}(\xi_j z)$, $K'_{\lambda_i}(\xi_j z)$, $K_{-\lambda_i}(\xi_j z)$, $K'_{-\lambda_i}(\xi_j z)$ вместо $x_{4i-7,j}$, $x_{4i-6,j}$, $x_{4i-5,j}$, $x_{4i-4,j}$, соответственно ($3 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$).

Пусть $\mathfrak{J}$ – идеал в кольце $\mathbb{V} = \mathbb{C}[z, x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{2,n}]$, состоящий из всех многочленов, обращающихся в нуль при подстановке $e^{\xi_j z}$ вместо $x_{1,j}$, $e^{-\xi_j z}$ вместо $x_{2,j}$. Согласно лемме 5 этот идеал имеет базис из многочленов, не зависящих от переменной z . Вид этих многочленов указан в лемме 5. Легко видеть, что идеал $\mathfrak{P}$ содержит все многочлены идеала $\mathfrak{J}$, а также следующие многочлены:

$$Q_{i,j} = \xi_j z(x_{4i-3,j} x_{4i,j} - x_{4i-2,j} x_{4i-1,j}) - 2\lambda_{i+1}(x_{4i-3,j} x_{4i-1,j} - 1), \\ 2 \leq i \leq r-1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Обозначим $\mathfrak{U}$ идеал, порожденный в кольце $\mathbb{W}$ многочленами $Q_{i,j}$, а также многочленами идеала $\mathfrak{J}$. Как указано выше, $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Идеал $\mathfrak{U}$ прост и $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}$.

2) Для любой точки $\xi \in \mathbb{C}$, отличной от нуля, идеал $\mathfrak{U}_\xi$ прост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем в каком-либо порядке четверки переменных $(x_{4i-7,j}, x_{4i-6,j}, x_{4i-5,j}, x_{4i-4,j})$, $3 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$, и будем расширять кольцо $\mathbb{V}$, последовательно прибавляя к нему указанные четверки переменных. Одновременно мы будем расширять идеал $\mathfrak{J}$, добавляя к нему соответствующие многочлены $Q_{i,j}$. При этом, как указывалось в приведенном выше замечании, получится последовательность простых идеалов. Последний ее член совпадает с идеалом $\mathfrak{U}$. Таким образом, идеал $\mathfrak{U}$ прост. Кроме того, из леммы 6 следует, что присоединение каждого многочлена $Q_{i,j}$ увеличивает высоту соответствующего идеала на 1. Поэтому $\text{rg } \mathfrak{U} \geq \text{rg } \mathfrak{J} + n(r-2)$.

Пусть s – максимальное количество линейно независимых над $\mathbb{Q}$ чисел среди $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда $\text{rg } \mathfrak{J} = 2n - s$ и, следовательно,

$$\text{rg } \mathfrak{U} \geq rn - s. \quad (27)$$

По теореме 9 из [2, гл. 7, § 7] функции

$$e^{\xi_k z}, K_0(\xi_j z), K'_0(\xi_j z), K_{\lambda_i}(\xi_j z), K'_{\lambda_i}(\xi_j z), K_{-\lambda_i}(\xi_j z), \\ 1 \leq k \leq s, \quad 3 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq n,$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Поэтому

$$\text{rg } \mathfrak{P} \leq 2mn - s - 2n - 3(r-2)n = rn - s. \quad (28)$$

Из неравенств (27) и (28) в силу включения $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}$ следует, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}$. Первое утверждение доказано.

Доказательство второго утверждения дословно повторяет доказательство простоты идеала $\mathfrak{U}$ с заменой кольца $\mathbb{V}$ на $\mathbb{V} = \mathbb{C}[x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}]$, а многочленов $Q_{i,j}$ на $Q_{i,j}(\xi, x_{4i-3,j}, x_{4i-2,j}, x_{4i-1,j}, x_{4i,j})$. Предложение 1 доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения 3) $\Rightarrow$ 1). Идеал $\mathfrak{U}^h$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[z, x_0, x_{1,1}, \dots, x_{2m,n}]$, порожденный однородными по переменным $x_0, x_{i,j}$ многочленами, обращающимися в нуль при подстановке 1 вместо x_0 , $e^{\xi_j z}$ вместо $x_{1,j}$, $e^{-\xi_j z}$ вместо $x_{2,j}$, $K_0(\xi_j z)$ вместо $x_{3,j}$, $K'_0(\xi_j z)$ вместо $x_{4,j}$, функций $K_{\lambda_i}(\xi_j z)$, $K'_{\lambda_i}(\xi_j z)$, $K_{-\lambda_i}(\xi_j z)$, $K'_{-\lambda_i}(\xi_j z)$, вместо $x_{4i-7,j}, x_{4i-6,j}, x_{4i-5,j}, x_{4i-4,j}$, соответственно ($3 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq n$), является согласно первому утверждению предложения 1 гомогенизацией идеала $\mathfrak{U}$. Для любого числа $\xi \neq 0$ идеал $(\mathfrak{U}^h)_\xi$ является гомогенизацией идеала $\mathfrak{U}_\xi$, который согласно второму утверждению предложения 1 прост. Таким образом, идеал $(\mathfrak{U}^h)_\xi$ прост и для совокупности функций (24) при любом $\xi \neq 0$ и, в частности, для $\xi = 1$ выполнены условия теоремы 1. Функции (24) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Это следует из того, что однородные базисные многочлены идеала $\mathfrak{U}^h$, как доказано выше, все имеют степень по переменным $x_0, x_{i,j}$ не меньшую 2. Таким образом, для совокупности функций (24) и числа $\xi = 1$ выполнены все условия следствия 1 из теоремы 1. По этому следствию значения функций (24) в точке $z = 1$ линейно независимы над $\mathbb{A}$. Как указывалось выше, этого достаточно для завершения доказательства теоремы 3.

Список литературы

1. *Siegel C. L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
2. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
3. *Шидловский А. Б.* О линейной независимости значений E -функций // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 174–185.
4. *Krull W.* Parameterspezialisierung in Polynomringen II // Arch. Math. 1948. V. 1. № 2. P. 129–137.
5. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1963.
6. *Салихов В. Х.* Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E -функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.01.1996