Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Рудаков, Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 7, 91–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:57:09

УДК 517.956.35

И. А. Рудаков

Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами

Доказывается существование периодических по времени решений квазилинейного уравнения колебаний неоднородной струны с однородными граничными условиями 3-го рода. Нелинейное слагаемое либо удовлетворяет условию нерезонансности, либо имеет степенной рост.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Постановка задачи

В работе исследуется задача о периодических по времени решениях уравнения колебаний ограниченной неоднородной струны с однородными граничными условиями 3-го рода:

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x, t, u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (1.1)$$

$$u(0, t) - h_1 u'_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) + h_2 u'_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (1.2)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Здесь $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$, $T = 2\pi b/a$, где a , b – взаимно простые натуральные числа. Коэффициент $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям (см. [1]):

$$p(x) \in C^2[0, \pi], \quad p(x) \geq d > 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \quad \rho = \min_{[0, \pi]} \eta_p(x) > 0, \quad (1.4)$$

где

$$\eta_p(x) = \frac{1}{2} \frac{p''}{p} - \frac{1}{4} \left(\frac{p'}{p} \right)^2$$

имеет ограниченную вариацию. В качестве примера такой функции можно взять $p(x) = (C_1 x + C_2)^3$, где $C_1, C_2 \geq 1$. Правая часть $f(x, t)$ является заданной T -периодической по t функцией.

Заметим, что в [1] показано, что уравнение более общего вида $\rho(z)u_{tt} - (\mu(z)u_z)_z + h(z, t, u) = f(z, t)$ можно привести к виду (1.1) с помощью замены переменной $z \rightarrow x$, где

$$x = \int_0^z \left(\frac{\rho(s)}{\mu(s)} \right)^{1/2} ds.$$

Задача о периодических решениях волнового уравнения с постоянными коэффициентами ($p(x) \equiv 1$) и однородными граничными условиями Дирихле ($h_1 = h_2 = 0$) исследована в работах [2]–[7]. В работах [8]–[10] изучалась задача

о вынужденных и свободных колебаниях однородной струны ($p(x) \equiv 1$) с однородными граничными условиями 3-го рода (1.2). Задача о периодических по времени решениях уравнения с непостоянными по x коэффициентами (1.1) и с нулевыми граничными условиями Дирихле ($h_1 = h_2 = 0$) рассмотрена в работах [1], [11], [12]. Целью настоящей работы является доказательство существования периодических по времени решений задачи (1.1)–(1.3) в случаях, когда одновременно $p(x) \neq \text{const}$, $h_1 + h_2 > 0$, а нелинейное слагаемое либо удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности, либо имеет степенной рост по u .

Обозначим

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, T],$$

$$D = \{u(x, t) \in C^\infty(\Omega) \mid u(x, t) \text{ удовлетворяет (1.2), (1.3) и } u_t(x, 0) = u_t(x, T)\}.$$

Определим

$$\|u\|_{L_r(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} p(x) |u(x, t)|^r dx dt \right\}^{1/r} \quad \forall u \in D, \quad \text{где } r \geq 1.$$

Пространство $L_r(\Omega)$ является замыканием D по норме $\|\cdot\|_{L_r(\Omega)}$. В дальнейшем будем обозначать $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r(\Omega)}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Пусть числа $r', r'' \in (1, +\infty)$ и $1/r' + 1/r'' = 1$. Для функций $u \in L_{r'}(\Omega)$ и $v \in L_{r''}(\Omega)$ определим

$$(u, v) = \int_{\Omega} p(x) u(x, t) v(x, t) dx dt.$$

§ 2. Свойства спектра линейной части уравнения

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям линейной части уравнения. Для построения ортонормированной системы рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$-(p \varphi'_x)_x = p \lambda^2 \varphi, \quad (2.1)$$

$$\varphi(0) - h_1 \varphi'(0) = \varphi(\pi) + h_2 \varphi'(\pi) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $\varphi' = \varphi'_x = d\varphi/dx$. В работе [13] доказано, что собственные значения задачи (2.1), (2.2) положительные. Поэтому для удобства они обозначены здесь через λ^2 . Пусть $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, суть последовательности собственных функций и собственных значений задачи (2.1), (2.2). Известно, что λ_n можно занумеровать так, что $\lambda_n \uparrow +\infty$. Согласно теореме В. А. Стеклова [13] можно считать, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная в $L_2(0, \pi)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{[0, \pi]} p(x) \varphi(x) \psi(x) dx, \quad \varphi, \psi \in L_2(0, \pi).$$

В [14] доказано, что существует константа C_0 , не зависящая от n , такая, что

$$|\varphi_n(x)| \leq C_0 \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Сделаем стандартную замену неизвестной функции $z(x) = \sqrt{p(x)}\varphi(x)$. Тогда задача (2.1), (2.2) будет равносильна следующей задаче с постоянным множителем при z'' :

$$z'' + (\lambda^2 - \eta_p(x))z = 0, \quad (2.3)$$

$$z(0) - h'_1 z'(0) = z(\pi) + h'_2 z'(\pi) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь

$$h'_1 = \frac{2p(0)h_1}{2p(0) + h_1 p'(0)}, \quad h'_2 = \frac{2p(\pi)h_2}{2p(\pi) - h_2 p'(\pi)}.$$

Обозначим $\eta_2 = \max_{[0, \pi]} \eta_p(x)$, $\eta_1 = \rho$ и рассмотрим уравнения с постоянными коэффициентами

$$z'' + (\lambda^2 - \eta_1)z = 0, \quad (2.5)$$

$$z'' + (\lambda^2 - \eta_2)z = 0, \quad (2.6)$$

$$z'' + \bar{\lambda}^2 z = 0. \quad (2.7)$$

Рассмотрим вначале случай I: $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. Потребуем, чтобы функция $p(x)$ удовлетворяла дополнительному условию

$$\frac{p'(0)}{p(0)} > -\frac{2}{h_1}, \quad \frac{p'(\pi)}{p(\pi)} < \frac{2}{h_2}. \quad (2.8)$$

В этом случае $h'_1, h'_2 > 0$. Пусть $\{\lambda'_n\}$, $\{\lambda''_n\}$, $\{\bar{\lambda}_n\}$ суть последовательности собственных значений задач Штурма–Лиувилля (2.5), (2.4); (2.6), (2.4) и (2.7), (2.4) соответственно. Из теорем сравнения (см. [14; гл. III, § 26]) следуют неравенства

$$\lambda'_n \leq \lambda_n \leq \lambda''_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

В работах [8], [9] доказано, что существуют положительные константы b_0, b_1 такие, что

$$\bar{\lambda}_n = n - 1 + \bar{\theta}_n, \quad 0 < b_0 \frac{1}{n} \leq \bar{\theta}_n \leq b_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Учитывая, что $(\lambda'_n)^2 = \bar{\lambda}_n^2 + \eta_1$, $(\lambda''_n)^2 = \bar{\lambda}_n^2 + \eta_2$, из (2.9) получим

$$\sqrt{\bar{\lambda}_n^2 + \eta_1} \leq \lambda_n \leq \sqrt{\bar{\lambda}_n^2 + \eta_2}. \quad (2.11)$$

Обозначим $\theta_n = \lambda_n - (n - 1)$. Поскольку $\lambda_n > \bar{\lambda}_n$, из (2.10) следует, что $\theta_n > 0$. Воспользовавшись формулами (2.10), (2.11), получим

$$\frac{\eta_1 + 2b_0}{n} \frac{1 - 2b_0(\eta_1 + 2b_0)^{-1}/n}{\sqrt{(\bar{\lambda}_n/n)^2 + \eta_1/n^2 + 1}} < \theta_n < \frac{\eta_2 + 3b_1}{n} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\lambda}_n/n)^2 + \eta_2/n^2 + 1 - 1/n}}. \quad (2.12)$$

Из (2.10) легко вывести, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\lambda}_n}{n} = 1. \quad (2.13)$$

Из (2.12), (2.13) следует существование положительных констант c_0, c_1 таких, что

$$c_0 \frac{1}{n} < \theta_n < c_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим отдельно случай II:

$$h_1 = h > 0, \quad h_2 = 0, \quad (2.15)$$

$$h_1 = 0, \quad h_2 = h > 0. \quad (2.16)$$

При выполнении (2.15) потребуем выполнения условия

$$\frac{p'(0)}{p(0)} > -\frac{2}{h}, \quad (2.17)$$

а при выполнении (2.16) потребуем, чтобы

$$\frac{p'(\pi)}{p(\pi)} < \frac{2}{h}. \quad (2.18)$$

Нетрудно проверить, что в случаях (2.15), (2.17) или (2.16), (2.18) задачи Штурма–Лиувилля (2.7), (2.4) имеют одинаковые собственные числа $\bar{\lambda}_n$, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg}(\bar{\lambda}_n \pi) = -h \bar{\lambda}_n. \quad (2.19)$$

Представим $\bar{\lambda}_n$ в виде

$$\bar{\lambda}_n = n - \frac{1}{2} + \bar{\theta}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Простые рассуждения показывают, что $0 < \bar{\theta}_n < 1/2$. Из равенств (2.19), (2.20) выразим $\bar{\theta}_n$:

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{n} \frac{1}{h\pi} \frac{\bar{\theta}_n \pi}{\operatorname{tg}(\bar{\theta}_n \pi)} \frac{1}{1 - 1/(2n) + \bar{\theta}_n/n}. \quad (2.21)$$

Отсюда нетрудно доказать, что если обозначить

$$b_0 = \frac{\bar{\theta}_1}{h \operatorname{tg}(\pi \bar{\theta}_1)(1 + \bar{\theta}_1)}, \quad b_1 = \frac{2}{h\pi},$$

то получим

$$b_0 \frac{1}{n} < \bar{\theta}_n < b_1 \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Пусть, как и выше, $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\lambda_n\}$ – соответственно собственные функции и собственные значения задач Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2) при выполнении (2.15), (2.17) или (2.16), (2.18). Обозначим $\theta_n = \lambda_n - (n - 1/2)$. Как и выше, из теоремы сравнения и (2.11) получим

$$\frac{\eta_1 + b_0}{n} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\lambda}_n/n)^2 + \eta_1/n^2 + 1}} < \theta_n < \frac{\eta_2 + 2b_1}{n} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\lambda}_n/n)^2 + \eta_2/n^2 + 1 - 1/(2n)}}.$$

Отсюда следует (2.14) с некоторыми положительными константами c_0, c_1 .

Таким образом, для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2) в случае I ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$) справедливо представление

$$\lambda_n = n - 1 + \theta_n, \quad (2.23)$$

а в случае II (при выполнении (2.15), (2.17) или (2.16), (2.18)) имеет место равенство

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \theta_n. \quad (2.24)$$

При этом в обоих случаях выполнены неравенства (2.14). Положительные константы c_0 , c_1 в (2.14) мы можем считать одними и теми же в обоих случаях.

Рассмотрим полную, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{a}{b} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right\}_{m,n \in \mathbb{N}}. \quad (2.25)$$

Определим оператор $A_0: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого

$$D(A_0) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right), M, N \in \mathbb{N} \right\}$$

и $A_0\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Пусть $\overline{A}_0\varphi = (1/p)A_0\varphi \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Множество функций $D(A_0) = D(\overline{A}_0)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Обозначим буквой A оператор в $L_2(\Omega)$, являющийся замыканием по графику оператора $\overline{A}_0$. Система функций (2.25) является системой собственных функций операторов $\overline{A}_0$ и A с собственными значениями $\mu_{nm} = \lambda_n^2 - ((a/b)m)^2$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обозначим через $N(A)$ и $R(A)$ ядро и образ A соответственно. Стандартно доказывается [1], что:

- а) оператор A самосопряжен в $L_2(\Omega)$;
- б) $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$;
- в) $L_2(\Omega) = N(A) \oplus R(A)$.

Функция

$$u = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right) \in D(A)$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \mu_{nm}^2 (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) < \infty.$$

При этом

$$Au = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \mu_{nm} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b} mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \right).$$

Покажем еще некоторые свойства оператора A .

ЛЕММА 2.1. *Ядро $N(A)$ конечномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай I. Тогда равенство $\mu_{nm} = 0$ равносильно соотношению $n - 1 + \theta_n - (a/b)m = 0$, $b\theta_n = am - b(n - 1)$. Из (2.14) следует, что данное уравнение имеет не более конечного числа пар решений $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+$, поскольку $a, b \in \mathbb{N}$. В случае II равенство $\mu_{nm} = 0$ равносильно уравнению $2b\theta_n = am - b(2n - 1)$, которое также имеет конечное число решений. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Существует наибольшее отрицательное собственное значение η оператора A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\eta = \sup \{\mu_{nm} \mid \mu_{nm} < 0\}$. Предположим, что $\eta = 0$. Тогда существуют последовательности $\{n_k\}, \{m_k\} \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\mu_{n_k m_k} < 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k m_k} = 0. \quad (2.26)$$

Но в случае I

$$|\mu_{n_k m_k}| = \frac{b(n_k - 1) + b\theta_{n_k} + am_k}{b^2} |b(n_k - 1) - am_k + b\theta_{n_k}|.$$

Если $b(n_k - 1) = am_k$, то $n_k \geq 2$ и из (2.14) следует

$$|\mu_{n_k m_k}| > 2(n_k - 1)\theta_{n_k} > c_0.$$

Если $b(n_k - 1) \neq am_k$, то

$$|\mu_{n_k m_k}| > \frac{a}{b^2} |l_k + b\theta_{n_k}|,$$

где $l_k = b(n_k - 1) - am_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Если $n_k > 2bc_1$, то

$$|\mu_{n_k m_k}| > \frac{a}{2b^2}.$$

Если $n_k \in [1, 2bc_1]$, то

$$|\mu_{n_k m_k}| > \frac{a}{b^2} \min(b, f),$$

где

$$f = \min_{(n_k, m_k) \in [1, 2bc_1] \times [1, M]} |l_k + b\theta_{n_k}|, \quad M = 2b^2c_1 + bc_1.$$

Получили противоречие с (2.26).

В случае II аналогично доказывается, что ненулевые собственные значения отделены от нуля. Остается только заметить, что множество $\{\mu_{nm} \mid \mu_{nm} < 0\}$ является дискретным и не имеет конечных предельных точек. Лемма доказана.

Заметим, что одновременно мы доказали

$$г) \quad A^{-1} \in L(R(A), R(A)), \quad \|A^{-1}\|_{R(A)} = d^{-1}, \quad \text{где } d = \inf\{|\mu_{nm}| : \mu_{nm} \neq 0\} > 0.$$

Выделим в системе функций (2.25) важные подмножества. Для этого рассмотрим отдельно случаи I, II. В случае I обозначим

$$\begin{aligned} M &= \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \mu_{nm} \neq 0, b(n-1) \neq am\}, \\ \Lambda_1 &= \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos((n-1)t), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin((n-1)t) \mid n, \frac{n-1}{a} \in \mathbb{N} \right\}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\frac{a}{b} mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\frac{a}{b} mt\right) \mid (n, m) \in M, m \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Пусть $N_1 = N(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ (замыкание в $L_2(\Omega)$ линейной оболочки), $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$. На подпространстве N_2 собственные значения A равны $2(n-1)\theta_n + \theta_n^2$. Из неравенств (2.14) следует, что

$$2(n-1)\theta_n + \theta_n^2 \in [\eta_1, \eta_2], \quad (2.28)$$

где $\eta_1 = \min(c_0, \theta_1^2)$, $\eta_2 = 2c_1 + c_1^2$.

В случае II обозначим

$$M = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \mid \mu_{nm} \neq 0, b(2n-1) \neq 2am\},$$

подмножество Λ_2 определим как в (2.27). При четном b обозначим

$$\Lambda_1 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right) \mid n, \frac{2n-1}{a} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Подпространства N_1 , N_3 определим так же, как и выше. При нечетном b уравнение $b(2n-1) = 2am$ решений не имеет. В этом случае положим $N_2 = \{0\}$. При четном b обозначим $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$. В этом случае Λ_1 есть подмножество (2.25) и $\dim N_2 = \infty$ (см. [10]). Из (2.14) следует, что при четном b на подпространстве N_2 собственные значения оператора A ограничены:

$$(2n-1)\theta_n + \theta_n^2 \in [\eta_1, \eta_2], \quad (2.29)$$

где $\eta_1 = c_0$, $\eta_2 = 2c_1 + c_1^2$. Обозначим $\sigma = \{\mu_{nm} \mid (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+\}$. В случае I и в случае II при четном b множество σ имеет предельную точку на отрезке $[2c_0, 2c_1]$. В случае II при нечетном b множество σ не имеет конечных предельных точек.

Для случаев I, II справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. *Если либо $\lambda \notin \sigma$, либо $\lambda = 0$, то оператор $(A - \lambda)^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным.*

Доказательство леммы 2.3 приведено в [8; лемма 2]. Из лемм 2.1, 2.3 вытекает

ЛЕММА 2.4. *В случае II при нечетном b и $\lambda \notin \sigma$ оператор $(A - \lambda)^{-1}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным.*

ЛЕММА 2.5. В случае II при нечетном b оператор $A^{-1}: R(A) \rightarrow C(\Omega)$ является вполне непрерывным.

Доказательство леммы 2.5 полностью повторяет доказательство леммы 2 из [9].

§ 3. Нелинейное уравнение с нелинейным слагаемым, удовлетворяющим условию нерезонансности

Запишем уравнение (1.1) в виде

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = g(x, t, u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Пусть функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(x, t, u) \text{ непрерывна на } [0, \pi] \times \mathbb{R}^2 \text{ и } T\text{-периодична по } t; \quad (3.2)$$

$$\alpha(x, t) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(x, t, u)}{p(x)u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(x, t, u)}{p(x)u} \leq \beta(x, t) \quad (3.3)$$

равномерно по $(x, t) \in \Omega$, где $\alpha(x, t), \beta(x, t) \in L^\infty(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $u \in L_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) или задачи (3.1)–(1.3), если соответственно

$$\int_{\Omega} u A_0 \varphi \, dx \, dt \pm \int_{\Omega} g(x, t, u) \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \, dt \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены либо условия (2.15), (2.17), либо (2.16), (2.18), а также условия (1.4), (3.2), (3.3), где $\alpha \leq \alpha(x, t) \leq \beta(x, t) \leq \beta$ почти всюду в Ω и

$$[\alpha, \beta] \cap \sigma = \emptyset. \quad (3.4)$$

Если b является нечетным числом, то для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (3.1), (1.2), (1.3) имеет обобщенное решение $u \in C(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция u является обобщенным решением задачи (3.1), (1.2), (1.3) тогда и только тогда, когда

$$Au = \frac{1}{p} g(x, t, u) + \frac{1}{p} f. \quad (3.5)$$

Из (3.3), (3.4) следует, что существуют константы $C_1, C_2, \alpha_1, \beta_1, \lambda, \gamma$ такие, что $C_1, C_2 > 0$, $[\alpha_1, \beta_1] \cap \sigma = \emptyset$, $[\alpha, \beta] \subseteq (\alpha_1, \beta_1)$, $\lambda \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\gamma \in (0, \beta_1 - \lambda)$ и $g(x, t, u)/p(x) = \lambda u + h(x, t, u)$, где

$$h(x, t, u)u \geq -C_1, \quad |h(x, t, u)| \leq \gamma|u| + C_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) можно переписать в виде $u = T(u)$, где

$$T(u) = (A - \lambda)^{-1} \left(h(x, t, u) + \frac{1}{p(x)} f(x, t) \right).$$

В работе [10] с использованием принципа Лере–Шаудера доказано (теорема 4.1), что при выполнении неравенств (3.6) оператор T имеет неподвижную точку $u \in L_2(\Omega)$. Воспользовавшись свойством в), представим ее в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in N(A)$, $u_2 \in R(A)$. Тогда из уравнения (3.5) можно выразить u_2 :

$$u_2 = A^{-1}P\left(\frac{1}{p}g(x, t, u) + \frac{1}{p}f\right),$$

где P – ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $R(A)$. Отсюда, из леммы 2.5 и конечномерности $N(A)$ следует $u \in C(\Omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай I ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$) и случай II с четным b . Поскольку при этом $\dim N_2 = \infty$, то оператор $(A - \lambda)^{-1}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ не является вполне непрерывным и метод доказательства теоремы 3.1 не проходит. Докажем вначале теорему о существовании решения операторного уравнения в гильбертовом пространстве.

Пусть H – действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Для любого подмножества $M \subset H$ будем обозначать через $\overline{M}$ и $L(M)$ соответственно замыкание M по норме H и множество конечных линейных комбинаций элементов множества M .

Свойство I. Пусть $A: H \rightarrow H$ – такой линейный самосопряженный оператор, что $D(A)$ всюду плотно в H . Пусть существует полная ортонормированная в H система

$$\Lambda = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \quad (3.7)$$

собственных векторов оператора A , и пусть $\{\lambda_n\}$ – последовательность соответствующих собственных значений такая, что $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что оператор A , удовлетворяющий всем этим условиям, *обладает свойством I*.

Свойство II. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, где подмножества Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 попарно не пересекаются, подмножества Λ_2 , Λ_3 бесконечные и:

- 1) $\overline{L(\Lambda_1)} = N(A)$;
- 2) существуют положительные константы a, b такие, что для любого $e \in \Lambda_2$ соответствующее e собственное значение λ принадлежит $[a, b]$;
- 3) на подпространстве $N_3 \equiv \overline{L(\Lambda_3)}$ обратный оператор $A^{-1}: N_3 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным.

Заметим, что если для оператора A выполнено условие 3) свойства II, то все собственные векторы A из Λ_3 имеют конечную кратность.

Обозначим $\sigma(A) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $N_1 = N(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_2)}$. Множества N_1 , N_2 , N_3 являются попарно ортогональными замкнутыми подпространствами H . Пусть P_1 , P_2 , P_3 – ортогональные проекторы на N_1 , N_2 , N_3 соответственно. Для любого элемента $u \in H$ будем обозначать $u_i = P_i u$, $i \in \{1, 2, 3\}$, так что $u = u_1 + u_2 + u_3$, $u_i \in H_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Пусть $B: H \rightarrow H$ – (нелинейный) оператор, для которого существуют константы $C, \gamma \in (0, +\infty)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что (см. [15])

$$(B(u) - \lambda u, u) \geq \frac{1}{\gamma} \|B(u) - \lambda u\|^2 - C \quad \forall u \in H. \quad (3.8)$$

Рассмотрим в H уравнение

$$Au + B(u) = f. \quad (3.9)$$

Здесь f – заданный элемент из H .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для оператора $A: H \rightarrow H$ выполнены свойства *I*, *II*. Предположим, что $B: H \rightarrow H$ – деминепрерывный оператор (т.е. B непрерывен из сильной топологии H в слабую топологию H), для которого выполнено (3.8), где

$$\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}), \quad \gamma \in (0, \bar{\lambda} - \lambda), \quad \underline{\lambda} \geq 0, \quad -\underline{\lambda}, -\bar{\lambda} \in \sigma(A), \quad (-\bar{\lambda}, -\underline{\lambda}) \cap \sigma(A) = \emptyset. \quad (3.10)$$

Если $B + a$ (где $(B + a)(u) = B(u) + au$) является монотонным оператором, то для любого $f \in H$ уравнение (3.9) имеет решение в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале, как и в [15], вспомогательное уравнение

$$\varepsilon u_{2\varepsilon} + Au_\varepsilon + B(u_\varepsilon) = f. \quad (3.11)$$

Здесь и далее $\varepsilon > 0$, $u_{2\varepsilon} = P_2 u_\varepsilon$, $u_{1\varepsilon} = P_1 u_\varepsilon$, $u_{3\varepsilon} = P_3 u_\varepsilon$. Спроектировав (3.11) на N_2 и $N_1 \oplus N_3$ и опустив для упрощения записи индекс ε , получим систему

$$\varepsilon u_2 + Au_2 + P_2 B(u_1 + u_2 + u_3) = f_2, \quad (3.12)$$

$$Au_3 + (P_1 + P_3)B(u_1 + u_2 + u_3) = f_1 + f_3. \quad (3.13)$$

При фиксированных $u_1 \in N_1$, $u_3 \in N_3$ обозначим через $S_{u_1+u_3}: N_2 \rightarrow N_2$ оператор, действующий по формуле $S_{u_1+u_3}(v) = \varepsilon v + Av + P_2 B(u_1 + v + u_3)$ $\forall v \in N_2$. Воспользовавшись условием 2) свойства *II* и монотонностью $B + a$, получим

$$\begin{aligned} & (S_{u_1+u_3}(v) - S_{u_1+u_3}(w), v - w) = \varepsilon \|v - w\|^2 + (A(v - w), v - w) \\ & \quad + (B(u_1 + v + u_3) - B(u_1 + w + u_3), v - w) \\ & \geq \varepsilon \|v - w\|^2 + a \|v - w\|^2 \\ & \quad + (B(u_1 + v + u_3) - B(u_1 + w + u_3), u_1 + v + u_3 - (u_1 + w + u_3)) \\ & = \varepsilon \|v - w\|^2 + ((B + a)(u_1 + v + u_3) \\ & \quad - (B + a)(u_1 + w + u_3), u_1 + v + u_3 - (u_1 + w + u_3)) \\ & \geq \varepsilon \|v - w\|^2 \quad \forall v, w \in N_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_{u_1+u_3}$ является сильно монотонным деминепрерывным оператором, и для каждого $u_1 \in N_1$, $u_3 \in N_3$ уравнение (3.12) имеет единственное решение $u_2 = u_2(u_1 + u_3)$.

Докажем, что оператор $u_2: N_1 \oplus N_3 \rightarrow N_2$ ($u_1 + u_3 \rightarrow u_2(u_1 + u_3)$) непрерывен в H . Возьмем последовательность $\{u_{1n} + u_{3n}\} \in N_1 \oplus N_3$ такую, что $u_{1n} + u_{3n} \rightarrow u_1 + u_3$. Покажем, что $u_2(u_{1n} + u_{3n}) \rightarrow u_2(u_1 + u_3)$. Элементы $u_{2n} = u_2(u_{1n} + u_{3n})$ определяются из уравнения

$$\varepsilon u_{2n} + Au_{2n} + P_2 B(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}) = f_1 + f_2.$$

Вычтем из этого уравнения равенство (3.12), полученное соотношение умножим скалярно в H на $u_{2n} - u_2$ и воспользуемся монотонностью $B + a$:

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \varepsilon \|u_{2n} - u_2\|^2 + (A(u_{2n} - u_2), u_{2n} - u_2) \\
 &\quad + (B(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}) - B(u_1 + u_2 + u_3), u_{2n} - u_2) \\
 &\geq \varepsilon \|u_{2n} - u_2\|^2 + ((B + a)(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}) \\
 &\quad - (B + a)(u_1 + u_2 + u_3), u_{1n} + u_{2n} + u_{3n} - u_1 - u_2 - u_3) \\
 &\quad - ((B + a)(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}) - (B + a)(u_1 + u_2 + u_3), u_{1n} + u_{3n} - u_1 - u_3) \\
 &\geq \varepsilon \|u_{2n} - u_2\|^2 - (\|(B + a)(u_{1n} + u_{2n} + u_{3n})\| + C_1) \|u_{1n} + u_{3n} - u_1 - u_3\|.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь и в дальнейшем константы будем обозначать $C_1, C_2, \dots$. Из (3.8) следует $\|B(u)\| \leq (|\lambda| + \gamma)\|u\| + C_2 \quad \forall u \in H$. Отсюда и из (3.14) вытекает ограниченность последовательности $\{\|u_{2n}\|\}$ и то, что $u_{2n} \rightarrow u_2$. Непрерывность доказана.

Подставим в (3.13) $u_2 = u_2(u_1 + u_3)$:

$$Au_3 + (P_1 + P_3)B(u_1 + u_2(u_1 + u_3) + u_3) = f_1 + f_3.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$u_1 + u_3 = T(u_1 + u_3), \tag{3.15}$$

где

$$T(u_1 + u_3) = (A + \lambda)^{-1}(-(P_1 + P_3)B(u_1 + u_2(u_1 + u_3) + u_3) + \lambda(u_1 + u_3) + f_1 + f_3).$$

Умножив (3.12) скалярно в H на u_2 и воспользовавшись монотонностью $B + a$ и (3.8), докажем ограниченность T . Так как $-\lambda \notin \sigma$, то из условия 3) свойства II следует (см. [16]) вполне непрерывность оператора $(A + \lambda)^{-1}: N_1 \oplus N_3 \rightarrow N_1 \oplus N_3$. Таким образом, оператор T вполне непрерывен.

Доказательство существования неподвижной точки оператора T проведем, воспользовавшись принципом Лере–Шаудера. Для этого рассмотрим уравнение

$$u_1 + u_3 = \mu T(u_1 + u_3) \tag{3.16}$$

с параметром $\mu \in (0, 1]$. Чтобы проверить условие Лере–Шаудера, перепишем уравнение (3.16) в следующей форме:

$$\frac{1}{\mu}(A + \lambda)(u_1 + u_3 - \mu w) + (P_1 + P_3)B(u) - \lambda(u_1 + u_3) = 0. \tag{3.17}$$

Здесь $u = u_1 + u_2(u_1 + u_3) + u_3$, $w = (A + \lambda)^{-1}(f_1 + f_3)$. Легко видеть, что $\lambda - \bar{\lambda}$ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора $A + \lambda$. Обозначим $\bar{B}(u) = B(u) - \lambda u$, умножим (3.17) скалярно в H на $(u_1 + u_3 - \mu w)$ и воспользуемся стандартным неравенством с наибольшим отрицательным собственным значением (см. [15]):

$$\begin{aligned}
 0 &\geq (\bar{B}(u), u_1 + u_3 - \mu w) - \frac{1}{\mu(\bar{\lambda} - \lambda)} \|(A + \lambda)(u_1 + u_3 - \mu w)\|^2 \\
 &= (\bar{B}(u), u) - \frac{\mu}{(\bar{\lambda} - \lambda)} \|(P_1 + P_3)\bar{B}(u)\|^2 - \mu(\bar{B}(u), w) - (\bar{B}(u), u_2).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Умножив (3.12) скалярно в H на u_2 , выразим

$$(\overline{B}(u), u_2) = (f_2, u_2) - (\varepsilon + \lambda)\|u_2\|^2 - (Au_2, u_2).$$

Отсюда и из (3.18), (3.8) получим

$$0 \geq \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} \right) \|\overline{B}(u)\|^2 + (\varepsilon + \lambda + a)\|u_2\|^2 - \|u_2\| \|f_2\| - \|\omega\| \|\overline{B}(u)\| - C.$$

Из этого неравенства и (3.10) следуют оценки

$$\|\overline{B}(u)\| \leq C_3, \quad \|u_2\| \leq C_3. \quad (3.19)$$

Из (3.19), (3.17) выведем

$$\|(A + \lambda)(u_1 + u_3)\| \leq \|f_1 + f_3\| + C_3, \quad \|u_1\| \leq C_4, \quad \|u_3\| \leq C_4. \quad (3.20)$$

Константы C_3, C_4 не зависят от μ и ε . Отсюда и из принципа Лере–Шаудера следует существование решения уравнения (3.15).

Перейдем к пределу в (3.11) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (3.19), (3.20) следует, что найдется последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ слабо в H и $Au_{3\varepsilon_n} \rightarrow \eta$ слабо в H . Из условия 3) свойства II следует $u_{3\varepsilon_n} \rightarrow A^{-1}\eta$ сильно в H , $\eta = Au_3$ и $(Au_{3\varepsilon_n}, u_{3\varepsilon_n}) \rightarrow (Au_3, u_3)$. Воспользовавшись монотонностью $B + a$ и условием 2) свойства II, запишем неравенство

$$(B(u_{\varepsilon_n}) + Au_{2\varepsilon_n} - B(\xi) - A\xi_2, u_{\varepsilon_n} - \xi) + a(\|u_{1\varepsilon_n} - \xi_1\|^2 + \|u_{3\varepsilon_n} - \xi_3\|^2) \geq 0 \\ \forall \xi \in H.$$

Отсюда и из (3.11) получим

$$(f - \varepsilon u_{2\varepsilon_n} - Au_{3\varepsilon_n} - A\xi_2 - B(\xi), u_{\varepsilon_n} - \xi) + a(\|u_{1\varepsilon_n} - \xi_1\|^2 + \|u_{3\varepsilon_n} - \xi_3\|^2) \geq 0 \\ \forall \xi \in H. \quad (3.21)$$

Так как $\dim N_1 < \infty$, из (3.20) следует, что из последовательности $\{u_{1\varepsilon_n}\}$ можно выбрать подпоследовательность (которую также обозначим $\{u_{1\varepsilon_n}\}$) такую, что $\{u_{1\varepsilon_n}\} \rightarrow u_1$ сильно в H . Перейдем в () к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$(f - Au_3 - A\xi_2 - B(\xi), u - \xi) + a(\|u_1 - \xi_1\|^2 + \|u_3 - \xi_3\|^2) \geq 0 \quad \forall \xi \in H.$$

Подставим в данное неравенство $\xi = u + \tau\psi$, где $\tau > 0$, $\psi \in H$:

$$-\tau(f - Au - \tau A\psi_2 - B(u + \tau\psi), \psi) + \tau^2 a\|\psi_1 + \psi_3\|^2 \geq 0 \quad \forall \psi \in H.$$

Сократим на τ и, воспользовавшись деминепрерывностью B , перейдем к пределу при $\tau \rightarrow 0$: $(A(u) + B(u) - f, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in H$. Отсюда следует (3.9). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ и выполнены условия (1.4), (2.8), (3.3), где

$$0 < \alpha \leq \alpha(x, t) \leq \beta(x, t) \leq \beta \quad \text{почти всюду в } \Omega \text{ и } [-\beta, -\alpha] \cap \sigma = \emptyset. \quad (3.22)$$

Предположим дополнительно, что $g_u(x, t, u)$ непрерывна в $\Omega \times \mathbb{R}$ и

$$g_u(x, t, u) \geq -\eta_1 p(x) \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1.1)–(1.3) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется установить существование решения уравнения

$$Au + \frac{1}{p} g(x, t, u) = \frac{1}{p} f. \quad (3.24)$$

Обозначим

$$H = L_2(\Omega), \quad B(u) = \frac{1}{p} g(x, t, u(x, t)).$$

Проверим выполнение условий теоремы (3.2). В § 2 показано, что для оператора A выполнены свойства I, II с $a = \eta_1$, $b = \eta_2$. Из (3.3), (3.22) следует существование положительных констант $C_1, C_2, \alpha_1, \beta_1, \lambda, \gamma$ таких, что

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &\subseteq (\alpha_1, \beta_1), & [-\beta_1, -\alpha_1] \cap \sigma &= \emptyset, & \lambda &\in (\alpha_1, \beta_1), & \gamma &\in (0, \beta_1 - \lambda), \\ \frac{g(x, t, u)}{p(x)} &= \lambda u + h(x, t, u) \end{aligned}$$

и выполнены неравенства (3.6). Следовательно,

$$\begin{aligned} (B(u) - \lambda u, u) &= \int_{\Omega} h(x, t, u) u p(x) dx dt = \int_{\Omega} |h(x, t, u) u + C_1| p(x) dx dt - C_5 \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \|h(x, t, u)\|^2 - \frac{1}{\gamma} C_2 \int_{\Omega} |h(x, t, u)| p(x) dx dt - C_6 \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \|h(x, t, u)\|^2 - C_7 \|h(x, t, u)\| - C_6 \\ &\geq \left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \right) \|h(x, t, u)\|^2 - C_6 - \frac{1}{\varepsilon} C_8. \end{aligned}$$

Здесь $C_5, C_6, C_7, C_8, \varepsilon$ – некоторые положительные константы. При достаточно малом ε условие (3.8) будет выполнено. Из (3.23) следует монотонность оператора $B + a$. Условия теоремы 3.2 выполнены. Из теоремы 3.2 следует существование решения уравнения (3.24). Теорема доказана.

Точно так же доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть b является четным числом и выполнены либо условия (2.15), (2.17), либо условия (2.16), (2.18), а также условия (1.4), (3.2), (3.3), (3.22), (3.23). Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1.1)–(1.3) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Легко видеть, что утверждения теорем 3.3, 3.4 останутся в силе, если вместо (3.2) потребовать выполнения условия Каратеодори в $\Omega \times \mathbb{R}$ (измеримости по $(x, t) \in \Omega$ при каждом u и непрерывности по u почти всюду в Ω), а вместо условия (3.23) потребовать неубывания по u функции $g(x, t, u)/p(x) + \eta_1 u$ почти всюду в Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в условиях теорем 3.1, 3.3, 3.4 дополнительно потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \alpha(u - v)^2 &\leq \frac{1}{p(x)} (g(x, t, u) - g(x, t, v))(u - v) \leq \beta(u - v)^2 \\ \forall (x, t) &\in \Omega, \quad u, v \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

то полученные в этих теоремах решения будут единственными. Если условия (3.25) не выполнены, то в условиях теоремы 3.1 при $g(x, t, 0) = 0$ может быть два решения [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если условие нерезонансности (3.3), (3.4) не выполняется, то нетрудно привести пример, когда задача (3.1), (1.2), (1.3) не имеет решения.

Рассмотрим, как в [1], и [11], случай наибольшего отрицательного собственного значения оператора A и запишем (1.1) в виде

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(u) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ и выполнены условия (2.8), (1.4), где $d \geq 1$. Предположим, что функция $g(u)$ непрерывна, не убывает на $\mathbb{R}$ и существуют константы $C > 0$, $\gamma \in (0, |\eta|)$ такие, что

$$\delta|u| - C \leq |g(u)| \leq \gamma|u| + C \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Тогда для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (3.26), (1.2), (1.3) имеет обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$.

Доказательство теоремы 3.5 полностью повторяет доказательство теоремы в [11].

Аналогичный результат справедлив для случая II при четном b . При нечетном b условие монотонности можно опустить.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть выполнены либо условия (2.15), (2.17), либо условия (2.16), (2.18), а также условия (1.4) с $d \geq 1$. Предположим, что функция $g(u)$ непрерывна и существует $\alpha \in (0, |\eta|)$ такое, что

$$0 < \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} \leq \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} < \alpha. \quad (3.28)$$

Тогда при нечетном b для любой T -периодической по t функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (3.26), (1.2), (1.3) имеет обобщенное решение $u \in C(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$Au + \frac{1}{p}g(u) = \frac{1}{p}f. \quad (3.29)$$

Из (3.28) следует существование констант $\lambda > 0$, $C > 0$ и $\alpha_1 \in (\alpha, |\eta|)$ таких, что

$$(g(u) - \lambda u)u \geq -C, \quad |g(u)| \leq \alpha_1|u| + C \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Пусть $d_1 = \max_{[0, \pi]} p(x)$. Тогда при достаточно малом положительном числе

$$\lambda_1 < \min\left(\frac{\lambda}{d_1}, \frac{|\eta| - \alpha_1}{2}\right)$$

для функции $h(x, u) = (1/p(x))g(u) - \lambda_1 u$ справедливы оценки

$$h(x, u)u \geq -C, \quad |h(x, u)| \leq \beta|u| + C \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

где $\beta \in (\alpha_1, |\eta| - \lambda_1)$. Перепишем (3.29) в следующем виде:

$$(A + \lambda_1)u + h(x, u) = \frac{1}{p} f. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) равносильно уравнению $u = T(u)$, где

$$T(u) = (A + \lambda_1)^{-1} \left(\frac{1}{p} f - h(x, u) \right).$$

Из условий теоремы и леммы 2.4 следует, что оператор $T: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ вполне непрерывен.

Доказательство существования неподвижной точки оператора T проведем, воспользовавшись принципом Лере–Шаудера. Для этого возьмем параметр $\mu \in (0, 1]$ и рассмотрим уравнение $u = \mu T(u)$, которое перепишем в виде

$$\frac{1}{\mu} (A + \lambda_1)(u - \mu w) + h(x, u) = 0, \quad (3.32)$$

где $w = (A + \lambda_1)^{-1}((1/p)f)$. Умножим (3.32) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u - \mu w$ и воспользуемся (3.30) и (3.32):

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{1}{\mu(|\eta| - \lambda_1)} \|(A + \lambda_1)(u - \mu w)\|^2 + \int_{\Omega} p(x)h(x, u)(u - \mu w) dx dt \\ &\geq -\frac{1}{|\eta| - \lambda_1} \|h(x, u)\|^2 + \int_{\Omega} p(x)h(x, u)u dx dt - C_9 \|h(x, u)\| \\ &\geq -\frac{1}{|\eta| - \lambda_1} \|h(x, u)\|^2 + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} p(x)h^2(x, u) dx dt - C_{10} \|h(x, u)\| - C_{10} \\ &= \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{|\eta| - \lambda_1} \right) \|h(x, u)\|^2 - C_{10} \|h(x, u)\| - C_{10}. \end{aligned}$$

Так как $\beta \in (\alpha_1, |\eta| - \lambda_1)$, то существует не зависящая от μ положительная константа C_{11} такая, что $\|h(x, u)\| \leq C_{11}$. Отсюда и из (3.32) выведем

$$\|(A + \lambda_1)(u - \mu w)\| \leq C_{11}, \quad \|(A + \lambda_1)u\| \leq C_{11} + \left\| \frac{1}{p} f \right\|, \quad \|u\| \leq C_{12}.$$

Из последнего неравенства и принципа Лере–Шаудера вытекает существование решения уравнения (3.31). Включение $u \in C(\Omega)$ доказывается с помощью леммы 2.5 точно так же, как в теореме 3.1. Теорема доказана.

§ 4. Волновое уравнение с суперлинейной нелинейностью

Запишем волновое уравнение в следующем виде:

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x, t, u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

- i) $g(x, t, u)$ непрерывна на $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ и T -периодична по t ;
- ii) $g(x, t, u)$ не убывает по u при всех $(x, t) \in \Omega$.

Как и в § 1–3, период $T = 2\pi b/a$, где a, b – взаимно простые натуральные числа.

Предположим, что существуют положительные константы $A_1, A_2, A_3, A_4, r, \delta$ такие, что при всех $(x, t, u) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$A_3|u|^{r-1} - A_4 \leq |g(x, t, u)| \leq A_1|u|^{r-1} + A_2, \quad (4.2)$$

где

$$r > 2, \quad \frac{A_3}{2} \geq \frac{A_1}{p} + \delta. \quad (4.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Обобщенным решением задачи (4.1), (1.2), (1.3) называется функция $u \in L_r(\Omega)$ такая, что*

$$\int_{\Omega} u A_0 \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} g(x, t, u) \varphi \, dx \, dt = 0 \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Точно так же, как теорема 3.1 в [10], доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $h_1 + h_2 > 0$ и выполнены условия (1.4), (2.8). Предположим также, что функция $g(x, t, u)$ удовлетворяет условиям i), ii), неравенствам (4.2), (4.3) и одному из двух следующих условий:*

- 1) g не зависит от t ;
- 2) $g(x, t, -u) = -g(x, t, u)$, где $(x, t, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Тогда для любого $d > 0$ существует обобщенное решение $u \in L_r(\Omega)$ задачи (4.1), (1.2), (1.3) такое, что $\|u\|_r \geq d$.

Заметим, что если в условиях теоремы 4.1 вместо (2.8) выполнены либо условия (2.15), (2.17), либо (2.16), (2.18), то решение $u \in C(\Omega)$.

Действительно, из (4.1) следует, что

$$u_3 = -A^{-1}P_3\left(\frac{1}{p(x)}g(x, t, u)\right). \quad (4.4)$$

Из теоремы 4.1 и (4.2) следует, что $(1/p(x))g(x, t, u) \in L_q(\Omega)$, где $q = r/(r-1)$. Разложим функцию $(1/p(x))g(x, t, u)$ в ряд Фурье по системе (2.25):

$$\frac{1}{p(x)}g(x, t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right).$$

Тогда

$$u_3 = - \sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{\mu_{nm}} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos\left(\frac{a}{b}mt\right) + b_{nm} \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right). \quad (4.5)$$

Обозначим

$$I = \sum_{(n,m) \in M} \left(\frac{1}{|\mu_{nm}|} \right) (|a_{nm}| + |b_{nm}|).$$

Используя (2.3), неравенства Гёльдера и Хаусдорфа–Юнга, получим

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\sum_{(n,m) \in M} (|a_{nm}|^r + |b_{nm}|^r) \right)^{1/r} \left(\sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{|\mu_{nm}|^q} \right)^{1/q} \\ &\leq C_{12} \left\| \frac{1}{p(x)} g(x, t, u) \right\|_q \left(\sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{|\mu_{nm}|^q} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Сходимость ряда

$$\sum_{(n,m) \in M} \frac{1}{|\mu_{nm}|^q}$$

при $q > 1$ доказывается стандартно. Следовательно, ряд (4.5) сходится равномерно и $u_3 \in C(\Omega)$. Отсюда и из конечномерности N_1 вытекает, что $u \in C(\Omega)$.

Список литературы

- [1] V. Barbu, N. H. Pavel, “Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x -dependent coefficients”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:5 (1997), 2035–2048.
- [2] P. H. Rabinowitz, “Free vibration for a semilinear wave equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 31–68.
- [3] A. Bahri, H. Brézis, “Periodic solutions of a nonlinear wave equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **85**:3–4 (1980), 313–320.
- [4] H. Brézis, L. Nirenberg, “Forced vibrations for a nonlinear wave equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 1–30.
- [5] П. И. Плотников, “Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения”, *Матем. сб.*, **136(178)**:4(8) (1988), 546–560; англ. пер.: P. I. Plotnikov, “Existence of a countable set of periodic solutions of the problem of forced oscillations for a weakly nonlinear wave equation”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 543–556.
- [6] E. Feireisl, “On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term”, *Czechoslovak Math. J.*, **38**:1 (1988), 78–87.
- [7] И. А. Рудаков, “Нелинейные колебания струны”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 2, 9–13; англ. пер.: I. A. Rudakov, “Nonlinear vibrations of a string”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **39**:2 (1984), 10–15.
- [8] И. А. Рудаков, “Периодическое по времени решение уравнения вынужденных колебаний струны с однородными граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **39**:11 (2003), 1550–1555; англ. пер.: I. A. Rudakov, “A time-periodic solution of the equation of forced vibrations of a string with homogeneous boundary conditions”, *Differ. Equ.*, **39**:11 (2003), 1633–1638.
- [9] И. А. Рудаков, “Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **41**:10 (2005), 1392–1399; англ. пер.: I. A. Rudakov, “A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions”, *Differ. Equ.*, **41**:10 (2005), 1467–1475.
- [10] И. А. Рудаков, “Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:1 (2006), 117–128; англ. пер.: I. A. Rudakov, “Periodic solutions of a non-linear wave equation with homogeneous boundary conditions”, *Izv. Math.*, **70**:1 (2006), 109–120.
- [11] И. А. Рудаков, “Нелинейные колебания неоднородной струны”, *Фундам. и прикл. матем.*, **8**:3 (2002), 877–886.

- [12] И. А. Рудаков, “Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 427–438; англ. пер.: I. A. Rudakov, “Periodic solutions of a nonlinear wave equation with nonconstant coefficients”, *Math. Notes*, **76**:3–4 (2004), 395–406.
- [13] В. М. Бабищ, Н. С. Григорьева, *Ортогональные разложения и метод Фурье*, Изд-во ЛГУ, Л., 1983.
- [14] Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, УРСС, М., 2003; пер. с англ.: F. G. Tricomi, *Differential equations*, Hafner Publ., New York; Blackie & Son Ltd., London, 1961.
- [15] Н. Brézis, L. Nirenberg, “Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **5**:2 (1978), 225–326.
- [16] И. А. Рудаков, “Нелинейные задачи с условием нерезонансности на бесконечности”, *Вестн. БГУ*, 2005, № 4, 217–234.

И. А. Рудаков (I. A. Rudakov)

Брянский государственный университет

им. академика И. Г. Петровского

E-mail: rudakov_bgu@mail.ru

Поступила в редакцию

01.02.2006