Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Рахманов, Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 8, 109–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:21:02

УДК 517.53+517.58

Е. А. Рахманов

Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной

В работе исследована задача о предельном распределении нулей многочлена, экстремального в метрике пространства L^2 относительно меры с конечным числом точек роста, при условии, что степень n этого многочлена и число точек роста меры N , $N > n$, одновременно стремятся к бесконечности так, что $n/N \rightarrow c \in (0, 1)$.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение. Предельное распределение нулей многочленов Чебышёва дискретной переменной

Пусть $n < N$ — натуральные числа,

$$\xi_{k,n} = -1 + 2 \frac{k-1}{N-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

— точки, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$, и $T_{n,N}(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{k,n})$ — многочлены, определяемые соотношениями ортогональности

$$\int T_{n,N}(x) T_{m,N}(x) d\sigma_N(x) = 0, \quad n \neq m, \quad n, m \leq N-1, \quad (1.2)$$

относительно меры $\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\xi_{k,N})$ (здесь и в дальнейшем $\delta(x)$ — единая мера с носителем в точке x).

При линейной замене переменной и перенормировке многочлены $T_{n,N}(x)$ переходят в классические многочлены $t_{n,N}(x) = n! \binom{x}{n} \binom{x-N}{n}$, которые называют многочленами Чебышёва дискретной переменной ($t_{n,N}$ ортогональны относительно меры $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(k)$).

Ортогональные многочлены дискретной переменной имеют многочисленные приложения, и им посвящена обширная литература (см., например [2], где имеются дальнейшие ссылки). В то же время вопрос об асимптотическом поведении этих многочленов изучен сравнительно мало. Отметим здесь недавнюю работу [3], где получены, в частности, асимптотические формулы для $T_{n,N}(x)$ при условии $n, N \rightarrow \infty$, $n = O(\sqrt{N})$. Поведение $T_{n,N}(x)$ вдоль лучей $n/N \rightarrow c \in (0, 1)$, по-видимому, ранее не рассматривалось.

В настоящей работе приводится сравнительно общая теорема о предельном распределении нулей многочленов степени n , минимизирующих весовую L_p -норму

Работа выполнена при поддержке гранта National Science Foundation (DMS 950-1130).

на множестве, состоящем из N_n точек, зависящих от n , в предположении, что $n/N_n \rightarrow c \in (0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$ (теорема 2, § 2 ниже).

Прямым следствием этой теоремы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow c \in (0, 1)$. Тогда последовательность мер

$$\mu_{n,N} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x_{k,n}),$$

ассоциированных с многочленами $T_{n,N}(x)$, слабо сходится к абсолютно непрерывной мере $d\lambda(x) = f_c(x) dx$, производная которой $f_c(x)$, $x \in [-1, 1]$, определяется формулой

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi c} \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2}}, & x \in [-r, r], \\ \frac{1}{2c}, & |x| \in [r, 1], \end{cases} \quad (1.3)$$

где $r = \sqrt{1 - c^2}$. Кроме того, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int |T_{n,N}(x)|^2 d\sigma_N \right\}^{1/n} = e^{-w}, \quad (1.4)$$

где

$$w_c = 1 + \log \frac{2}{\sqrt{1 - c^2}} - \frac{1}{2c} \log \frac{1 + c}{1 - c}. \quad (1.5)$$

Отметим, что при $c \rightarrow 1$ имеем $r \rightarrow 0$ и $f_c(x) \rightarrow f_1(x) = 1/2$. Результат, относящийся к случаю $c = 1$, является простым следствием теоремы о разделении нулей ортогональных многочленов точками носителя меры.

При $c \rightarrow 0$ имеем $r \rightarrow 1$ и $f_c(x) \rightarrow f_0(x) = 1/(\pi\sqrt{1 - x^2})$. Теорема 1 справедлива и в случае $c = 0$ (т.е. когда $n/N \rightarrow 0$). Этот случай требует, однако, отдельного рассмотрения и в настоящей работе не обсуждается.

В следующем § 2 приводится формулировка и обсуждение более общей теоремы 2. Доказательство этой теоремы (§ 4) основано на изучении одной новой задачи равновесия для логарифмического потенциала, которая рассматривается в § 3. Основной результат этого параграфа (теорема 3) устанавливает характеристические свойства равновесного распределения на отрезке при наличии ограничения сверху на плотность распределения.

В § 5 приводится одно новое представление для решения задачи равновесия во внешнем поле (теорема 4). С помощью этого представления вычисляется затем указанный в (1.3) явный вид равновесной меры на $[-1, 1]$ с ограничением сверху $\frac{dx}{2c}$, $c \in (0, 1)$.

§ 2. Равновесие с ограничением сверху.

Формулировка основного результата

Причина, по которой распределение $d\lambda = f_c(x) dx$ описывает предельное распределение нулей многочленов $T_{n,N}(x)$, имеет простое теоретико-потенциальное объяснение. Это распределение является, на самом деле, единственным распределением единичного положительного заряда на “проводнике” $F = [-1, 1]$ при дополнительном условии, что плотность распределения подчинена условию $f_c(x) \leq 1/(2c)$, $x \in F$.

Верхняя грань $1/(2c)$ для плотности распределения определяется плотностью точек носителя меры ортогональности $\sigma_{n,N}$, согласованной со степенью многочлена n , т.е. мерой $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \delta(\xi_{k,n})$, которая слабо сходится к $\frac{dx}{2c}$ при $n \rightarrow \infty$.

Взаимодействие определяется, как обычно, законом логарифмического потенциала, т.е. энергия распределения $d\mu(x)$ на F равна

$$J(\mu) = \iint \log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x) d\mu(y).$$

Таким образом, формальным определением меры $d\lambda(x) = f_c(x) dx$ является равенство

$$J(\lambda) = \min_{\mu \in M^\sigma} J(\mu), \quad (2.1)$$

где M^σ — множество всех мер μ на F , удовлетворяющих условию $d\mu(x) \leq d\sigma(x)$ и $d\sigma(x) = \frac{dx}{2c}$. Вычисления, показывающие, что $d\lambda(x) = f_c(x) dx$, приведены в § 5.

Приведем теперь формулировку общего результата, простым следствием которого является теорема 1. Пусть σ — мера на $F = [-1, 1]$ с непрерывным потенциалом $V^\sigma(x)$ и условием $|\sigma| > 1$. В следующем § 3 мы докажем, что в соответствующем классе M^σ существует единственная мера $\lambda^\sigma \in M^\sigma$, удовлетворяющая условию (2.1); эта мера является также единственной мерой из M^σ , удовлетворяющей соотношениям равновесия

$$V^{\lambda^\sigma}(x) \leq w^\sigma, \quad x \in \text{supp}(\lambda^\sigma), \quad (2.2)$$

$$V^{\lambda^\sigma}(x) \geq w^\sigma, \quad x \in \text{supp}(\sigma - \lambda). \quad (2.3)$$

Постоянная w^σ единственным образом определяется соотношениями (2.2), (2.3) вместе с λ^σ . Мы называем λ^σ *равновесной мерой в классе M^σ* ; w^σ — соответствующая *равновесная постоянная*. В терминах λ^σ и w^σ описывается слабая асимптотика экстремальных многочленов при условии, что точки “носителя нормы” имеют предельное распределение σ . Точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть точки $\xi_{k,n} \in F$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, N_n$, удовлетворяют следующему “условию делимости”

$$|\xi_{k+1,n} - \xi_{k,n}| > \frac{\rho}{n}, \quad k = 1, \dots, N_n - 1, \quad (2.4)$$

где $\rho > 0$, и, кроме того, имеет место слабая сходимость

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_n} \delta(\xi_{k,n}) \xrightarrow{*} \sigma, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Пусть, далее, $\eta_{k,n}$, $k = 1, \dots, N_n$, – положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\eta_{k,n}^{1/n} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по} \quad k = 1, 2, \dots, N_n. \quad (2.6)$$

Определим на пространстве $C(F)$ “норму”

$$\|f\|_n = \left(\sum_{k=1}^{N_n} \eta_{k,n} |f(\xi_{k,n})|^p \right)^{1/p}, \quad p \in (0, +\infty). \quad (2.7)$$

Пусть $T_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})$ – многочлен, минимизирующий норму в классе $\mathbb{P}_n^1$ многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом:

$$\|T_n\|_n = \min_{P \in \mathbb{P}_n^1} \|P\|_n. \quad (2.8)$$

Тогда имеем

$$\chi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta(x_{j,n}) \xrightarrow{*} \lambda^\sigma, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_n^{1/n} = e^{-w^\sigma}. \quad (2.10)$$

§ 3. Задача равновесия с ограничением сверху

Приведем сначала основные обозначения, которые используются в дальнейшем.

Под мерой понимается конечная положительная борелевская мера с компактным носителем. Через S_μ обозначается (замкнутый) носитель меры μ и через $|\mu|$ – ее норма ($|\mu| = \mu(S_\mu)$). Потенциал меры μ обозначается через $V^\mu(z)$ или $V(z, \mu)$, т. е.

$$V^\mu(z) = V(z, \mu) = \int \log \frac{1}{|z - x|} d\mu(x). \quad (3.1)$$

Потенциал меры является гармонической функцией в $\mathbb{C} \setminus S_\mu$ и супергармонической в $\mathbb{C}$. В частности, функция $V^\mu(z)$ полунепрерывна снизу. Там, где это удобно, мы обозначаем меру μ ее дифференциалом $d\mu$. В частности, dx – мера Лебега на $\mathbb{R}$ и $f(x) dx$ – абсолютно непрерывная мера, плотность которой (производная по мере Лебега) равна $f(x)$.

Далее,

$$J(\mu) = \iint \log \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y) \quad (3.2)$$

– энергия меры μ .

Пусть σ – мера на $F = [-1, 1]$ такая, что $|\sigma| > 1$. Через M^σ будем обозначать множество всех единичных мер μ на F , удовлетворяющих условию $d\mu(x) \leq d\sigma(x)$ (другими словами, разность $\sigma - \mu$ – мера).

Отметим, что если потенциал $V^\sigma(x)$ непрерывен на F , то же самое верно и для потенциала $V^\mu(x)$ любой меры $\mu \in M^\sigma$. В самом деле, $V^\mu(x) = V^\sigma(x) - V^{\sigma-\mu}(x)$, откуда следует, что $V^\mu(x)$ полунепрерывна сверху и, тем самым, непрерывна.

Наконец, для $\mu \in M^\sigma$ в предположении непрерывности V^σ мы используем обозначение

$$w(\mu) = \min_{x \in S_{\sigma-\mu}} V^\mu(x). \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть σ — мера на отрезке $F = [-1, 1]$ с непрерывным потенциалом и $|\sigma| > 1$. Каждое из условий (i)–(vi) ниже единственным образом определяет одну и ту же меру $\lambda = \lambda^\sigma \in M^\sigma$. Более того, каждое из условий (iii) и (iv) единственным образом определяет пару $\lambda^\sigma \in M^\sigma$, $w^\sigma \in \mathbb{R}$. Мы называем λ^σ равновесной мерой в классе M^σ , w^σ — соответствующая равновесная постоянная.

$$(i) \quad J(\lambda) = \min_{\mu \in M^\sigma} J(\mu);$$

$$(ii) \quad \int V^\lambda d(\mu - \lambda) \geq 0 \quad \forall \mu \in M^\sigma;$$

$$(iii) \quad (a) \quad \lambda(E^+) = 0, \quad \text{где } E^+ = \{x \in F : V^\lambda(x) > w\},$$

$$(b) \quad (\sigma - \lambda)(E^-) = 0, \quad \text{где } E^- = \{x \in F : V^\lambda(x) < w\};$$

$$(iv) \quad (a) \quad V^\lambda(x) \leq w, \quad x \in S_\lambda,$$

$$(b) \quad V^\lambda(x) \geq w, \quad x \in S_{\sigma-\lambda};$$

$$(v) \quad w(\lambda) = \max_{\mu \in M^\sigma} w(\mu);$$

$$(vi) \quad w(\lambda) - V^\lambda(z) \geq w(\mu) - V^\mu(z) \quad \forall \mu \in M^\sigma, \quad z \in \mathbb{C},$$

причем, если равенство имеет место хотя бы в одной точке $z \neq S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}$, то $\mu = \lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие непрерывности потенциала σ можно заменить на условие конечности энергии σ . При этом условие (iv b) будет иметь место приблизительно всюду (кроме, быть может, множества нулевой внутренней емкости) на $S_{\sigma-\lambda}$. Функционал $w(\mu)$ должен быть определен в этом случае как

$$\operatorname{ess\,inf}_{S_{\sigma-\mu}} V^\mu(x) = \sup\{w : V^\mu(x) > w \text{ приблизительно всюду на } S_{\sigma-\lambda}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Множество M^σ является выпуклым и компактным в слабой топологии. Поэтому существование и единственность меры λ , удовлетворяющей условию (i), вытекает из строгой выпуклости функционала энергии и принципа понижения для функционала энергии (так же как при доказательстве существования и единственности классического распределения Робэна).

Далее, для любой меры $\mu \in M^\sigma$ и любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ имеем тождество, вытекающее из определения энергии,

$$J(\varepsilon\mu + (1 - \varepsilon)\lambda) - J(\lambda) = 2\varepsilon I(\mu) + \varepsilon^2 J(\mu - \lambda), \quad (3.4)$$

где

$$I(\mu) = \int V^\lambda(x) d(\mu - \lambda).$$

Пусть λ удовлетворяет (i). Тогда правая часть (3.4) неотрицательна при любых $\varepsilon \in [0, 1]$, $\mu \in M^\sigma$, и, следовательно, $I(\mu) \geq 0$ для любой меры $\mu \in M^\sigma$. Тем самым, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Пусть, наоборот, λ удовлетворяет условию (ii). Тогда для любой меры $\mu \in M^\sigma$ из (3.4) с $\varepsilon = 1$ следует, что $J(\mu) - J(\lambda) \geq J(\mu - \lambda) \geq 0$ и, тем самым, λ удовлетворяет условию (i).

Пусть теперь λ удовлетворяет условию (ii). Покажем, что для этой меры выполняются условия (iii a) и (iii b) с $w = w(\lambda)$.

Справедливость условия (iii b) вытекает непосредственно из определения $w(\lambda) = \min_{S_{\sigma-\lambda}} V^\lambda$.

Для доказательства (iii a) нам потребуются следующие обозначения:

$$E^+(w) = \{x \in F : V^\lambda(x) > w\},$$

$$E^-(w) = \{x \in F : V^\lambda(x) < w\}.$$

Предположим, что (iii a) не выполняется, т.е. $\lambda(E^+(w(\lambda))) > 0$. Тогда найдется $w_1 > w(\lambda)$ такое, что $\lambda(E^+(w_1)) > 0$. С другой стороны, поскольку $w(\lambda) = \min_{S_{\sigma-\lambda}} V^\lambda$, мы имеем $(\sigma - \lambda)(E^-(w_1)) > 0$.

Положим

$$\mu = \lambda|_{E^+(w_1)} + \alpha(\sigma - \lambda)|_{E^-(w_1)},$$

где $\lambda|_E$ — сужение меры λ на множество E и $\alpha = \lambda(E^+(w_1))/(\sigma - \lambda)(E^-(w_1))$. Непосредственно проверяется, что $\mu \in M^\sigma$. Вместе с этим имеем

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \int V^\lambda d(\mu - \lambda) = \int (V^\lambda - w_1) d(\mu - \lambda) \\ &= - \int_{E^+(w_1)} (V^\lambda - w_1) d\lambda + \alpha \int_{E^-(w_1)} (V^\lambda - w_1) d(\sigma - \lambda) < 0, \end{aligned}$$

что противоречит (ii).

Таким образом, мы показали, что (ii) $\Rightarrow$ (iii) с $w = w(\lambda)$.

Покажем, что из (iii) с произвольным w вытекает (ii). Пусть $\mu \in M^\sigma$, из (iii a) и (iii b) получаем

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \int (V^\lambda - w) d(\mu - \lambda) = \left(\int_{E^+(w)} + \int_{E^-(w)} \right) (V^\lambda - w) d(\mu - \lambda) \\ &= \int_{E^+(w)} (V^\lambda - w) d\mu + \int_{E^-(w)} (V^\lambda - w) d(\mu - \sigma) \leq 0 \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\lambda = 0$ на $E^+(w)$ и $\lambda = \sigma$ на $E^-(w)$). Тем самым, λ удовлетворяет условию (ii).

Далее, из непрерывности $V^\lambda(x)$ вытекает эквивалентность условий (iii) и (iv). Условия (iv) однозначно определяют величину w , поскольку из неравенства $V^\lambda(x) \leq w$, $x \in S_\lambda$, и принципа максимума следует, что $V^\lambda \leq w$ всюду в $\mathbb{C}$ и, тем самым, $V^\lambda(x) = w$, $x \in S_{\sigma-\lambda}$.

Таким образом, каждая пара соотношений (iii) и (iv) однозначно определяет пару $\lambda = \lambda^\sigma$, $w = w(\lambda^\sigma)$.

Покажем, что $\lambda = \lambda^\sigma$ является единственной мерой из M^σ , удовлетворяющей условию (v).

Пусть $\mu \in M^\sigma$. Функция $h(z) = V^{\mu-\lambda}(z)$ супергармонична в дополнении к $S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}$, поскольку $\sigma = \mu$ на дополнении к $S_{\sigma-\mu}$, и, следовательно, $\mu - \lambda = \sigma - \lambda \geq 0$ на этом множестве. Учитывая непрерывность $h(z)$ в $\overline{S}$ и соотношение (iv a), из принципа минимума для супергармонических функций получаем

$$\begin{aligned} 0 = h(\infty) &\geq \min_{S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}} h(x) \geq \min_{S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}} (V^\mu(x) - w(\lambda)) \\ &= \min_{S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}} V^\mu(x) - w(\lambda) \geq \min_{S_{\sigma-\mu}} V^\mu(x) - w(\lambda) \\ &= w(\mu) - w(\lambda). \end{aligned}$$

Предположим, что имеет место равенство $w(\mu) = w(\lambda)$. Тогда равенство имеет место в каждом нестрогом неравенстве выше. Но уже первое из них $h(\infty) = \min_{S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}} h(x)$ означает, что $h(z) \equiv 0$, и, следовательно, $\mu = \lambda$.

Наконец, (vi) вытекает из доказанного выше неравенства

$$\min_{S_\lambda \cap S_{\sigma-\mu}} h(z) \geq w(\mu) - w(\lambda)$$

и принципа минимума для супергармонических функций. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Мы используем обозначения, введенные в § 2, где приведена формулировка теоремы 2.

ЛЕММА 4.1. В условиях и обозначениях теоремы 2 имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_n^{1/n} \leq e^{-w^\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно при любом $\varepsilon > 0$ построить последовательность многочленов $Q_n(x) = x^n + \dots$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_n^{1/n} \leq e^{-w^\sigma + \varepsilon}. \quad (4.1)$$

Далее мы опускаем индекс σ в обозначениях равновесной меры и равновесной постоянной, так что $w = w^\sigma$ и $\lambda = \lambda^\sigma$. Из условий $d\lambda \leq d\sigma \leq dx/\rho$ вытекает, что $V^\lambda(x)$ — непрерывная функция на $F = [-1, 1]$. Отсюда следует, что $S_{\sigma-\lambda}$ можно покрыть конечным числом интервалов l_j , $j = 1, 2, \dots, m$, замыкания $\bar{l}_j$ которых не пересекаются, таким образом, что выполняется неравенство

$$V^\lambda(x) \geq w - \varepsilon, \quad x \in E = \bigcup_{j=1}^m \bar{l}_j.$$

Пусть $\mu|_E$ — сужение меры μ на множество E и $E^c = F \setminus E$; положим

$$\lambda' = \lambda|_E, \quad \lambda^2 = \lambda|_{E^c}, \quad \sigma_n^1 = \sigma_n|_E, \quad \sigma_n^2 = \sigma_n|_{E^c}.$$

Имеем

$$\sigma_n^2 \xrightarrow{*} \sigma^2 = \lambda^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

σ совпадает с λ на $S_{\sigma-\lambda}^c$ и, тем самым, на E^c .

Пусть $m_n = \sigma_n^2(E^c)$ и λ_n^1 — произвольная последовательность мер на E вида

$$\lambda_n^1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-m_n} \delta(y_{k,n}),$$

удовлетворяющая условию $\lambda_n^1 \xrightarrow{*} \lambda^1$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $\lambda_n = \lambda_n^1 + \sigma_n^2$. Из сказанного выше следует, что $\lambda_n \xrightarrow{*} \lambda$ при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(\tilde{y}_{k,n})$, где $\tilde{y}_{k,n}$, $k = 1, \dots, n$, — некоторые точки, принадлежащие F .

Пусть $Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - \tilde{y}_{k,n})$. Из способа построения Q_n вытекает, что

$$\|Q_n\|_n = \left(\sum_{\xi_{k,n} \in E} \eta_{k,n} |Q_n(\xi_{k,n})|^p \right)^{1/p}$$

(точки $\xi_{k,n}$ из E^c являются нулями Q_n) и, далее,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_n^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-\min_E V(x, \lambda_n)} (\eta_n N_n)^{1/(np)}\}, \quad (4.2)$$

где $\eta_n = \max_k \eta_{k,n}$.

Из условий теоремы 2 следует, что $N_n^{1/(np)} \rightarrow 1$, $\eta_n^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, из свойств сходимости потенциала следует, что

$$\min_E V(x, \lambda_n) \rightarrow \min_E V(x, \lambda) \geq w - \varepsilon.$$

С учетом этого соотношение (4.1) вытекает из (4.2) и лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть последовательность мер

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_n} \delta(\xi_{k,n})$$

удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть, далее, последовательность многочленов $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{k,n})$ такова, что их нули $x_{k,n}$ принадлежат отрезку F и разделяются точками $\xi_{k,n}$. Пусть, наконец, для некоторой подпоследовательности Λ натуральных чисел имеет место сходимость

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x_{k,n}) \xrightarrow{*} \mu.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{n \in \Lambda} \|P_n\|_n^{1/n} \geq e^{-w(\mu)},$$

где $\|\cdot\|_n$ — норма, определенная в условиях теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Фиксируем $x_0 \in S_{\sigma-\mu}$ с условием $V^\mu(x_0) = w(\mu)$. Далее через Δ_r обозначается r -окрестность x_0 , т.е. $\Delta_r = [x_0 - r, x_0 + r]$, $X_n = \{x_{k,n}, k = 1, 2, \dots, n\}$ — множество нулей P_n . Всюду в дальнейшем предполагается также, что $n \in \Lambda$.

Фиксируем $\delta \in (0, 1/2)$.

Из условия $x_0 \in S_{\sigma-\mu}$ следует, что $\sigma(\Delta_\delta) > \mu(\Delta_\delta)$. Тем самым, при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$n\sigma_n(\Delta_\delta) - n\mu_n(\Delta_\delta) \rightarrow \infty$$

(другими словами, число точек $\xi_{k,n}$ на Δ_δ при больших n много больше числа точек $x_{k,n}$ на Δ_δ). Поскольку минимальное расстояние между точками $\xi_{k,n}$ равно ρ/n , среди интервалов $(\xi_{k,n} - \rho/(2n), \xi_{k,n} + \rho/(2n))$, принадлежащих Δ_δ при больших n , найдется по меньшей мере один, не содержащий точек из X_n . Центр $\xi_n = \xi_{l_n,n}$ этого интервала удовлетворяет условию

$$\text{dist}(\xi, X_n) \geq \frac{\rho}{2n}. \quad (4.3)$$

Фиксируем $\varepsilon \in (\delta, 1/2)$ и положим

$$P_{n,1}(x) = \prod_{x_{k,n} \in \Delta_\varepsilon} (x - x_{k,n}), \quad P_{n,2}(x) = \prod_{x_{k,n} \notin \Delta_\varepsilon} (x - x_{k,n}).$$

Пусть $m_n = \deg P_{n,1}$. При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{m_n}{n} \rightarrow \theta = \mu(\Delta_\varepsilon). \quad (4.4)$$

Отметим, что $\theta = \theta(\varepsilon)$ и $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{n,1}(\xi_n)|^{1/n} \geq \left(\frac{\rho\theta}{2e} \right)^{2\theta}. \quad (4.5)$$

Пусть $x'_k, k = 1, \dots, p$, — точки из $X_n \cap [\xi_n, x_0 + \varepsilon]$, занумерованные в порядке возрастания, т.е.

$$\xi_n < x'_1 < \dots < x'_p \leq x_0 + \varepsilon$$

(индекс, указывающий зависимость от n , опускаем).

Из (4.3) следует, что $|\xi_n - x'_1| > \rho/(2n)$. Из условия разделимости для точек из X_n следует, что $|\xi_n - x'_2| > \rho/n$, и, кроме того, $|x'_{k+2} - x'_k| \geq \rho/n$. Отсюда получаем $|\xi_n - x'_k| \geq (k\rho)/(2n)$. Поскольку $p \leq m_n$ отсюда, в свою очередь, вытекает, что

$$\prod_{k=1}^p |\xi_n - x'_k| \geq \prod_{k=1}^p \frac{k\rho}{2n} \geq \prod_{k=1}^{m_n} \frac{k\rho}{2n} = \left(\frac{\rho}{2n} \right)^{m_n} m_n!$$

(не ограничивая общности можно считать, что $\rho \leq 1$, и, следовательно, $k\rho/(2n) < 1$ при $k = p+1, \dots, m_n$). Согласно формуле Стирлинга $(m_n)! \geq (m_n/e)^{m_n}$ при достаточно больших n , так что из предыдущей оценки получаем

$$\prod_{k=1}^p |\xi_n - x'_k| \geq \left(\frac{\rho}{2e} \frac{m_n}{n} \right)^{m_n}.$$

Та же оценка, очевидно, справедлива для произведения по нулям $P_{n,1}$, лежащим слева от ξ_n , и мы окончательно получаем

$$|P_{n,1}(\xi_n)| \geq \left(\frac{\rho}{2e} \frac{m_n}{n} \right)^{2m_n}.$$

С учетом (4.4) отсюда следует (4.5).

Положим $\mu^1 = \mu|_{\Delta_\varepsilon}$, $\mu^2 = \mu|_{F \setminus \Delta_\varepsilon}$, $\mu_n^1 = \mu_n|_{\Delta_\varepsilon}$, $\mu_n^2 = \mu_n|_{F \setminus \Delta_\varepsilon}$.

При $n \rightarrow \infty$ имеем $\mu_n^2 \xrightarrow{*} \mu^2$, так что последовательность потенциалов $V(x, \mu_n^2)$ равномерно сходится к $V(x, \mu^2)$ на Δ_δ ; в частности,

$$V(\xi_n, \mu_n^2) - V(\xi_n, \mu^2) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

С другой стороны, для производной потенциала меры μ^2 справедлива стандартная оценка

$$|V'(x, \mu^2)| \leq \int_{F \setminus \Delta_\varepsilon} |x - t|^{-1} d\mu^2(t) \leq \frac{1}{\varepsilon - \delta}, \quad x \in \Delta_\delta.$$

Отсюда получаем

$$|V(\xi_n, \mu^2) - V(x_0, \mu^2)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon - \delta}. \quad (4.7)$$

Поскольку $|P_{n,2}(x)|^{1/n} = \exp\{-V(x, \mu_n^2)\}$, из (4.6) и (4.7) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{n,2}(x)|^{1/n} \geq \exp\left\{-V(x_0, \mu^2) - \frac{\delta}{\varepsilon - \delta}\right\} \geq \exp\left\{-V(x_0, \mu) - \frac{\delta}{\varepsilon - \delta}\right\} \quad (4.8)$$

(второе неравенство в (4.8) следует из положительности $V(x_0, \mu')$).

Из (4.5) и (4.8), учитывая, что $V(x_0, \mu) = w(\mu)$ находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(\xi_n)|^{1/n} \geq e^{-w(\mu) - \varphi(\varepsilon, \delta)},$$

где

$$\varphi(\varepsilon, \delta) = \frac{\delta}{\varepsilon - \delta} + 2\theta \log \frac{2e}{\rho\theta}.$$

Поскольку ε и δ — произвольные числа такие, что $1/2 > \varepsilon > \delta > 0$, $\theta = \theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, значит, $\varphi(\varepsilon, \varepsilon^2) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем окончательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(\xi_n)|^{1/n} \geq e^{-w(\mu)}.$$

Пусть $\eta_n = \eta_{n,n}$ — вес, соответствующий точке ξ_n . Из предыдущей оценки следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_n^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n |P_n(\xi_n)|^p)^{1/(np)} \geq e^{-w(\mu)},$$

и лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Хорошо известно (и нетрудно показать), что многочлен $T_n(x)$, минимизирующий норму $\|\cdot\|_n$ из теоремы 2, удовлетворяет соотношениям ортогональности вида

$$\int \text{sign}(T_n(x)) \cdot |T_n(x)|^{p-1} q(x) d\tilde{\sigma}_n(x) = 0,$$

где $q(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$ и $d\tilde{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{N_n} \eta_{k,n} \delta(\xi_{k,n})$. Отсюда следует, что нули $T_n(x)$ разделяются точками $\xi_{k,n}$, т.е. каждый отрезок $[\xi_{k,n}, \xi_{k+1,n}]$ может содержать не более одного нуля многочлена $T_n(x)$.

Пусть $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x_{k,n})$ — последовательность мер, ассоциированных с многочленами $T_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{k,n})$, и пусть $\mu_n, n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, — произвольная слабо сходящаяся подпоследовательность:

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

Тогда из леммы 4.2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \Lambda} \|T_n\|_n^{1/n} \geq e^{-w(\mu)}. \quad (4.9)$$

С другой стороны, из леммы 4.1 вытекает, что

$$\overline{\lim}_{n \in \Lambda} \|T_n\|_n^{1/n} \leq e^{-w(\lambda)}, \quad (4.10)$$

где $\lambda = \lambda^\sigma$. Отсюда получаем $w(\lambda) \leq w(\mu)$. Из разделимости нулей T_n точками $\xi_{k,n}$, кроме того, следует, что $\mu \in M^\sigma$. В силу (v) теоремы 3 это позволяет заключить, что $\mu = \lambda$.

Теперь из слабой компактности последовательности $\{\mu_n\}$ вытекает, что $\mu_n \xrightarrow{*} \lambda$ при $n \rightarrow \infty$. Из соотношений (4.9) и (4.10) с учетом этого получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_n^{1/n} = e^{-w(\lambda)}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 5. Представление равновесной меры во внешнем поле

Пусть $\varphi(x)$ — четная, абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{R}$ с условием $\varphi(x)/\log|x| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Обозначим через M_t множество всех мер μ на $\mathbb{R}$ с нормой $|\mu| = t > 0$ и компактным носителем. Известно, что при каждом $t > 0$ существует единственная пара $\mu_t \in M_t, w_t \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\begin{aligned} V(x, \mu_t) + \varphi(x) &= w_t, & x \in \text{supp}(\mu_t), \\ V(x, \mu_t) + \varphi(x) &\geq w_t, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Мера μ_t является также единственной мерой из M_t , минимизирующей функционал полной энергии во внешнем поле φ , т.е.

$$J(\mu_t) + 2 \int \varphi d\mu_t = \min_{\mu \in M_t} \left(J(\mu) + 2 \int \varphi d\mu \right).$$

Подробнее см., например, [4], [5].

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что функция*

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{t\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

монотонно возрастает и $\nu(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) При каждом $t > 0$ носителем μ_t является отрезок $[-\beta_t, \beta_t]$, где β_t — функция, обратная к $\nu(x)$, т.е.

$$\beta_{\nu(x)} = \nu(\beta_x) = x, \quad x \geq 0. \quad (5.2)$$

- (ii) Мера μ_t абсолютно непрерывна: $d\mu_t(x) = \mu'_t(x) dx$ и справедливы представления

$$\mu'_t(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x|}^{\beta_t} \frac{\nu'(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad x \in [-\beta_t, \beta_t], \quad (5.3)$$

$$w_t = \varphi(0) + \int_0^{\beta_t} \nu'(\tau) \log \frac{2}{\tau} d\tau. \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $\varphi(x)$ определена только на конечном отрезке $[-R, R]$, то $\nu(x)$ определена на $[0, R]$ и приведенные соотношения справедливы при $t \leq \nu(R)$. Доказательство теоремы для этого случая не отличается от случая $R = \infty$.

Докажем предварительно три вспомогательные леммы.

ЛЕММА 5.1. Имеет место следующее “обратное” представление $\varphi(x)$ через $\nu(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{x}{t} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (5.1) и переставляя пределы интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x}{t} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} &= x \int_0^x \frac{1}{t\sqrt{x^2 - t^2}} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{y\varphi'(y)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right) dt \\ &= x \int_0^x y\varphi'(y) \left(\frac{2}{\pi} \int_y^x \frac{dt}{t\sqrt{(x^2 - t^2)(t^2 - y^2)}} \right) dy. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в последнем выражении

$$\frac{2}{\pi} \int_y^x \frac{dt}{t\sqrt{(x^2 - t^2)(t^2 - y^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{t\sqrt{(x^2 - t)(t - y^2)}}$$

является интегралом Коши функции $f(t) = ((t - x^2)(t - y^2))^{-1/2}$, голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [x^2, y^2]$. Значение этого интеграла равно $f(0) = 1/(xy)$. Отсюда получаем

$$\int_0^x \frac{x}{t} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \int_0^x \varphi'(y) dy = \varphi(x) - \varphi(0),$$

и лемма доказана.

Пусть $\Delta_t = [-\beta_t, \beta_t]$ и $g_t(x)$ — сужение на $\mathbb{R}$ функции Грина для дополнения к Δ_t , т.е.

$$g_t(x) = \int_{\beta_t}^{|x|} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - \beta_t^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \Delta_t, \quad (5.6)$$

и $g_t(x) = 0$ при $x \in \Delta_t$.

ЛЕММА 5.2. *Справедливо представление*

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^{\nu(x)} g_t(x) dt = \varphi(0) + \int_0^\infty g_t(x) dt, \quad x \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \geq \beta_t$ согласно (5.6) имеем

$$g_t(x) = \int_1^{x/\beta_t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}},$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} g_t(x) = -x \frac{\beta'_t}{\beta_t} \frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta_t^2}}.$$

С учетом этого, производя в интеграле (5.5) замену $t = \beta_\tau$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^x \frac{x}{t} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \int_0^{\nu(x)} \frac{x}{\beta_\tau} \frac{\tau \beta'_\tau}{\sqrt{x^2 - \beta_\tau^2}} d\tau \\ &= \int_0^{\nu(x)} \tau \frac{d}{d\tau} g_\tau(x) d\tau = \int_0^{\nu(x)} g_\tau(x) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $g_\tau(x) = 0$ при $\tau \geq \nu(x)$, мы можем заменить верхний предел $\nu(x)$ в последнем интеграле на ∞ . Лемма доказана.

Обозначим через γ_t распределение Робэна для отрезка Δ_t :

$$d\gamma_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\beta_t^2 - x^2}}, \quad x \in \Delta_t.$$

Пусть функция μ'_t определена интегралом (5.3). Производя в этом интеграле замену $t = \nu(\tau)$, получим представление

$$\mu'_\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu(|x|)}^\tau \frac{dt}{\sqrt{\beta_t^2 - x^2}}. \quad (5.7)$$

Это означает, что мера $d\mu_\tau = \mu'_\tau dx$ может быть представлена интегралом от семейства робэновских мер вида

$$\mu_t = \int_0^t \gamma_\tau d\tau.$$

Другими словами, это означает, что для любой функции f , интегрируемой по мере μ_t , имеем

$$\int f d\mu_t = \int_0^t \left(\int f d\gamma_\tau \right) d\tau. \quad (5.8)$$

В частности, с $f \equiv 1$ это дает $|\mu_t| = t$.

ЛЕММА 5.3. При каждом $t > 0$ имеем представление

$$V(x, \mu_t) + \varphi(x) = w_t + \int_t^\infty g_\tau(x) d\tau,$$

где постоянная w_t определена в (5.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся связью функции Грина и потенциала распределения Робэна:

$$g_t(x) = \log \frac{2}{\beta_t} - V(x, \gamma_t).$$

С учетом этого из леммы 5.2 получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^t g_\tau(x) d\tau + \int_t^\infty g_\tau(x) d\tau \\ &= \int_0^t \log \frac{2}{\beta_\tau} d\tau - \int_0^t V(x, \gamma_\tau) d\tau + \int_t^\infty g_\tau(x) d\tau. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (5.8) с $f(y) = \log \frac{1}{|x-y|}$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^t V(x, \gamma_\tau) d\tau &= \int_0^t \left(\int \log \frac{1}{|x-y|} d\gamma_\tau(y) \right) \\ &= \int \log \frac{1}{|x-y|} d\left(\int_0^t \gamma_\tau d\tau \right) = V(x, \mu_t). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\int_0^t \log \frac{2}{\beta_\tau} d\tau = \int_0^{\beta_t} \nu'(\tau) \log \frac{2}{\tau} d\tau.$$

Лемма доказана.

Из леммы 5.3 следует, что

$$\begin{aligned} V(x, \mu_t) + \varphi(x) &= w_t, & x \in \Delta_t, \\ V(x, \mu_t) + \varphi(x) &> w_t, & x \in \mathbb{R} \setminus \Delta_t. \end{aligned}$$

Тем самым, $\mu_t \in M_t$ – равновесная мера на $\mathbb{R}$ в поле $\varphi(x)$ и w_t – соответствующая равновесная постоянная. Теорема доказана.

Наконец, используя представление теоремы 4, мы получим представление для λ^σ с $d\sigma(x) = \frac{dx}{2c}$, $c \in (0, 1)$.

Положим

$$\varphi(x) = -V^\sigma(x), \quad x \in F = [-1, 1].$$

Пусть $\mu \in M_t$ и $\lambda = \sigma - \mu$, тогда $\mu = \sigma - \lambda$ и

$$J(\lambda) = J(\sigma - \mu) = J(\mu) + 2 \int \varphi d\mu + J(\sigma).$$

Отсюда следует, что если $\mu \in M_t$ минимизирует функционал полной энергии $J(\mu) + 2 \int \varphi d\mu$ в классе M_t и дополнительно удовлетворяет условию $d\mu(x) \leq d\sigma(x)$, то $\lambda = \sigma - \mu \in M^\sigma$ и минимизирует функционал энергии $J(\lambda)$ в этом классе. Другими словами, при $t = 1/c - 1$ имеем

$$\{d\mu_t(x) \leq d\sigma(x)\} \Rightarrow \{\lambda^\sigma = \sigma - \mu_t\}. \quad (5.9)$$

Найдем теперь с помощью теоремы 4 явный вид для μ_t .
Для производных функции

$$\varphi(x) = -V^\sigma(x) = \frac{1}{2c} \int_{-1}^1 \log|x-t| dt$$

имеем представления

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{2c} \int_{-1}^1 \frac{dt}{x-t} = \frac{1}{2c} \log \frac{1+x}{1-x}, \\ \varphi''(x) &= \frac{1}{c} \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Найдем соответствующую функцию $\nu(x)$. Из (5.1), интегрируя по частям и используя (5.10), получаем

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{t\varphi'(t) dt}{\sqrt{x^2-t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sqrt{x^2-t^2} \varphi''(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi c} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1/x^2-t^2} dt = \frac{1}{\pi c} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \frac{dt}{1/x^2-t}. \end{aligned}$$

Последний интеграл является интегралом Коши для функции

$$f(z) = 1 - \sqrt{\frac{z-1}{z}},$$

голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. Из интегральной формулы Коши теперь следует, что

$$\nu(x) = f(1/x^2) = \frac{1}{c} (1 - \sqrt{1-x^2}), \quad x \in [0, 1].$$

Функция $\nu(x)$ возрастает на $[0, 1]$ и из теоремы 4 следует, что носителем равновесной меры μ_t является отрезок $[-r, r]$, где r — корень уравнения

$$\frac{1}{c} (1 - \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{c} - 1.$$

Отсюда получаем $r = \sqrt{1-c^2}$.

Далее, из (5.3) находим

$$\mu'_t(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^r \frac{\nu'(t) dt}{\sqrt{t^2-x^2}} = \frac{1}{\pi c} \int_x^r \frac{t dt}{\sqrt{t^2-x^2} \sqrt{1-t^2}}.$$

Производя замену $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$, получаем

$$\mu'_t(x) = \frac{1}{\pi c} \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - x^2 - \tau^2}} = \frac{1}{\pi c} \sin^{-1} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\pi c} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{c^2}}.$$

Из этого представления следует, что $\mu'_t(x) \leq 1/(2c)$, $x \in [-r, r] = \operatorname{supp}(\mu_t)$. С учетом (5.9) это дает

$$(\lambda^\sigma)'(x) = \frac{1}{2c} - \frac{1}{\pi c} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{c} = \frac{1}{\pi c} \operatorname{tg}^{-1} \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$x \in [-r, r]$; $(\lambda^\sigma)'(x) = 1/(2c)$, $|x| \in [r, 1]$. Тем самым представление (1.3) теоремы 1 доказано.

Наконец, чтобы доказать представление (1.5) теоремы 1, воспользуемся равенствами (5.4) и (5.9). Имеем

$$\begin{aligned} w^\sigma &= -w_t = -\varphi(0) - \int_0^r \log \frac{2}{x} \nu'(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \left(1 - \int_0^r \log \frac{2}{x} d(1 - \sqrt{1 - x^2}) \right). \end{aligned}$$

После простых преобразований, учитывая, что $c = \sqrt{1 - r^2}$, откуда получаем (1.5).

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих // Полное собрание сочинений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
3. Шарпудинов И. И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 9. С. 1259–1277.
4. Гончар А. А., Рахманов Е. А. Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125. С. 117–127.
5. Saff E. B., Totik V. Logarithmic Potentials with external Fields. New York: Springer-Verlag (to appear).
6. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
Университет Южной Флориды, Тампа, США

Поступила в редакцию
20.06.1995 и 16.02.1996