Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Иσμαгилов, Об операторах Рака́ для представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 3, 77–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:26:52

УДК 519.986.6

Р. С. Исмагилов

Об операторах Рака́ для представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$

В качестве обобщения общеизвестных коэффициентов Рака́ (они обычно определяются для конечномерных представлений полупростых групп Ли) вводится понятие операторов Рака́ для локально компактных групп с “хорошим” двойственным пространством. Для $PSL(2, \mathbb{C})$ эти операторы записаны явно.

Библиография: 8 названий.

Введение

Обычно коэффициенты Рака́ определяются для тензорных произведений конечномерных представлений полупростых групп Ли [1], [2]. В дальнейшем это определение переносилось на представления со старшим весом группы $SL(2, \mathbb{R})$ (см. [3]). В этом случае спектр произведения дискретен, что позволяет определить указанные коэффициенты из формул для конечномерного случая “аналитическим продолжением по целочисленным параметрам”. В работе [4] найдены коэффициенты Рака́ для тройки представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ в предположении, что хотя бы два представления из трех принадлежат дискретной серии. В [1] и [4] рассматривались также коэффициенты Рака́ для квантовой группы $U_q(\mathfrak{su}(1, 1))$.

В настоящей работе в качестве обобщения коэффициентов Рака́ вводятся *операторы Рака́* для произвольной локально компактной группы с “хорошим” двойственным пространством. Приводятся явные формулы для операторов Рака́, связанных с представлениями основной серии группы $G = PSL(2, \mathbb{C})$ (тензорные произведения этих представлений были изучены М. А. Наймарком [5]). В работе приводятся три реализации операторов Рака́ для этого случая. В одной из них, использующей гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$, можно усмотреть отдаленное сходство с классическими формулами для коэффициентов Рака́.

Предварительное краткое изложение результатов работы содержится в [6].

§ 1. Операторы Рака́

Предварительно напомним известную конструкцию из теории меры. Пусть даны борелевские пространства A, B . Борелевская структура возникает (обычным образом) также на $A \times B$. Говоря об измеримости и мере, будем иметь в виду указанные борелевские структуры. Пусть дана мера α на A и семейство мер

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 020124-2-693).

$\{\beta^a, a \in A\}$ на B . Предположим, что отображение $a \mapsto \beta^a$ измеримо в следующем смысле: для любого измеримого множества $F \subset B$ функция $a \mapsto \beta^a(F)$ измерима. Тогда для любого измеримого множества $E \subset A \times B$ измерима функция $a \mapsto \beta^a(E_a)$, где $E_a = \{b \in B : (a, b) \in E\}$. На $A \times B$ возникает мера τ , которая задается следующей формулой:

$$\tau(E) = \int_A \beta^a(E_a) d\alpha(a).$$

Для краткости будем записывать $d\tau(a, b) = d\beta^a(b) \cdot d\alpha(a)$.

Это построение обратимо: любую меру τ на $A \times B$ можно записать в указанном виде. При этом α и β^a определены с точностью до замены на $p(a) d\alpha(a)$, $(p(a))^{-1} d\beta^a(b)$, где $a \mapsto p(a)$, $a \in A$, – измеримая положительная (почти всюду) функция.

Нам понадобится следующее применение сказанного. Пусть даны измеримое семейство гильбертовых пространств $\{H_{a,b}, (a, b) \in A \times B\}$ и меры, связанные соотношением $d\tau(a, b) = d\beta^a(b) \cdot d\alpha(a)$. Тогда имеем естественный изоморфизм гильбертовых пространств

$$\bigoplus_{A \times B} H_{a,b} d\tau(a, b) \simeq \int_A \left(\bigoplus_B H_{a,b} d\beta^a(b) \right) d\alpha(a).$$

После этих приготовлений перейдем к основной цели.

Пусть G – локально компактная группа типа I и $\widehat{G}$ – двойственное пространство. Пусть дано непрерывное поле гильбертовых пространств H_c и действующих в них представлений T_c (T_c принадлежит классу эквивалентности $c \in \widehat{G}$). Пусть для любых $a_1, a_2 \in \widehat{G}$ фиксировано разложение представления $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ на неприводимые. Точнее, задан изоморфизм гильбертовых пространств

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (H_c \otimes V_c^{a_1, a_2}) d\tau^{a_1, a_2}(c).$$

Здесь $\{V_c^{a_1, a_2}, c \in \widehat{G}\}$ – измеримое семейство гильбертовых пространств, а отображение $(a_1, a_2) \mapsto \tau^{a_1, a_2}$ измеримо в указанном выше смысле.

Рассмотрим теперь произведение $T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ и разложим его на неприводимые, следуя известной стратегии: сначала разлагаем $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ указанным образом, затем разлагаем произведение каждого “слагаемого” на T_{a_3} (здесь мы употребили кавычки, ибо имеем дело с прямыми интегралами, которые могут не быть прямыми суммами). В итоге получаем меру на $\widehat{G} \times \widehat{G}$

$$d\tau(c, l) = d\tau^{c, a_3}(l) \cdot d\tau^{a_1, a_2}(c)$$

и изоморфизмы

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \int_{\widehat{G} \times \widehat{G}}^{\oplus} (H_l \otimes V_c^{a_1, a_2} \otimes V_l^{c, a_3}) d\tau(l, c).$$

Преобразуем последний прямой интеграл следующим образом. Запишем меру $d\tau$ в виде $d\mu^l(c) \cdot d\theta(l)$ и введем семейство гильбертовых пространств

$$M_l = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (V_c^{a_1, a_2} \otimes V_l^{c, a_3}) d\mu^l(c).$$

Приходим к изоморфизму

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (H_l \otimes M_l) d\theta(l). \quad (1)$$

Повторим теперь этот путь, разложив сначала тензорное произведение $T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ и затем тензорно умножив T_{a_1} на каждое “слагаемое” этого разложения. В итоге получим второй унитарный изоморфизм

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3} \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (H_l \otimes N_l) d\sigma(l), \quad (2)$$

где

$$N_l = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (V_l^{a_1, c} \otimes V_c^{a_2, a_3}) d\nu^l(c).$$

Из (1) и (2) получаем унитарный изоморфизм

$$\int_{\widehat{G}}^{\oplus} (H_l \otimes M_l) d\theta(l) \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (H_l \otimes N_l) d\sigma(l), \quad (3)$$

перестановочный с представлениями группы G . Меры θ и σ эквивалентны (ибо для групп типа I максимальный спектральный тип разложения на неприводимые представления определяется однозначно). Пользуясь указанным выше произволом в выборе разложения $d\tau = d\mu^l(c) \cdot d\theta(l)$, будем считать, что $\theta = \sigma$. Ясно, что изоморфизм (3) задается зависящим от $l \in \widehat{G}$ набором унитарных операторов $R_l: M_l \rightarrow N_l$, т.е. операторов

$$R_l: \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (V_c^{a_1, a_2} \otimes V_l^{c, a_3}) d\mu^l(c) \rightarrow \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (V_l^{a_1, c} \otimes V_c^{a_2, a_3}) d\nu^l(c). \quad (4)$$

Это и есть (по определению) набор операторов Рака.

Приведенное сейчас определение – наиболее общего характера. В следующем параграфе мы покажем, что иногда возможна (и целесообразна) упрощенная модификация этого определения.

§ 2. Упрощенный вариант определения операторов Рака

Через δc обозначим меру Планшереля на $\widehat{G}$. Предположим, что выделено открытое подмножество $\mathcal{M}$, “замкнутое относительно разложений тензорных произведений”. Это означает, что для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$ фиксирован унитарный изоморфизм гильбертовых пространств

$$H_{a_1} \otimes H_{a_2} \simeq \int_{\mathcal{M}}^{\oplus} H_c p(a_1, a_2; c) \delta c,$$

разлагающий произведение $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ на неприводимые представления, здесь $c \mapsto p(a_1, a_2; c)$ – борелевская функция. Таким образом, кратность разложения

не превосходит 1, а спектральная мера разложения подчинена мере Планшереля. Это приводит к следующим упрощениям общей картины.

Все пространства $V_c^{a_1, a_2}$ отождествляются с $\mathbb{C}$. В качестве мер μ^l , ν^l можно взять

$$d\mu^l(c) = p^{a_1, a_2}(c)p^{c, a_3}(l) \cdot \delta(c), \quad d\nu^l(c) = p^{a_1, c}(l)p^{a_2, a_3}(c) \cdot \delta(c).$$

Наконец, в качестве θ выступает мера $\chi_E \delta l$, где χ_E – это индикатор множества $E = \{l : \mu^l \neq 0\}$. (Напомним, что меру σ , указанную в (3), мы решили отождествить с θ .) Мы приходим к операторам Ракá

$$R_l : L_2(\widehat{G}, d\mu^l(c)) \rightarrow L_2(\widehat{G}, d\nu^l(c)).$$

(Здесь записаны гильбертовы пространства числовых функций, определенных на $\widehat{G}$ и квадратично интегрируемых относительно мер $d\mu^l$, $d\nu^l$.)

§ 3. Группа $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, представления основной серии и их тензорные произведения

Сначала введем обозначение, которое пройдет через всю работу. Каждому числу $a = m + i\rho \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}$ и числу $k \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi_k(a, z) = |z|^{i\rho - m - k} z^m, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Это – характеры группы $\mathbb{C}^*$ (φ_0 – унитарный характер).

Теперь обратимся к группе $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Ее элементы имеют вид

$$g = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det g = 1.$$

Она действует на расширенной комплексной плоскости по формуле

$$zg = (\alpha z + \gamma)(\beta z + \delta)^{-1}.$$

Введем функцию

$$\sigma(g, z) = \begin{cases} \beta z + \delta & \text{при } z \neq \infty, \beta z + \delta \neq 0, \\ \beta & \text{при } z = \infty, \beta \neq 0, \\ \alpha z + \gamma & \text{при } z \neq \infty, \beta z + \delta = 0, \\ \alpha & \text{при } z = \infty, \beta = 0. \end{cases}$$

Она удовлетворяет уравнению коцикла $\sigma(g_1 g_2, z) = \sigma(g_1, z)\sigma(g_2, z g_1)$.

Каждое комплексное число $a = m + i\rho \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}$ задает неприводимое унитарное представление основной серии (см. [7; гл. 4]) по формуле

$$(T_a(g)f)(z) = \varphi_2(2a, \sigma(g, z))f(zg), \quad f \in L_2(\mathbb{C}).$$

Известно, что $T_a \simeq T_{-a}$ (см. там же). Поэтому здесь достаточно брать точки $a = m + i\rho$ из некоторого множества, содержащего ровно одну точку из каждой пары $(a, -a)$, а также содержащего точку 0. Достаточно взять множество $\mathcal{M}$, состоящее из точек $m + i\rho$, где $m \in \{0, 1, \dots\}$, $\rho \geq 0$, либо $m \in \{-1, -2, \dots\}$,

$\rho > 0$. Мера Планшереля на $\mathcal{M}$ – это $\delta c = |c|^2 dc$, где dc – обычная мера Лебега на каждой полупрямой $m + i\mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$. В дальнейшем, говоря о мере на $\mathcal{M}$ и соответствующем ей гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{M})$, мы имеем в виду именно меру δc . Как видим, все пространства H_a совпадают с $L_2(\mathbb{C})$. Тем не менее, в дальнейшем мы иногда используем обозначение H_a с целью согласовать обозначения с теми, которые введены в §§ 2 и 3.

Перейдем к тензорным произведениям $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$. Тензорные произведения представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ разложены на неприводимые в известной работе М. А. Наймарка [5]. Воспроизведем этот результат применительно к группе $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (в удобных для нас обозначениях). Гильбертово тензорное произведение $L_2(\mathbb{C}) \otimes L_2(\mathbb{C})$ (в нем действует представление $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$) естественным образом отождествляется с гильбертовым пространством $L_2(\mathbb{C}^2)$, состоящим из квадратично интегрируемых комплекснозначных функций $f(z_1, z_2)$. С другой стороны, введем гильбертово пространство $L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C})$, состоящее из функций $u(c, z)$, $c \in \mathcal{M}$, $z \in \mathbb{C}$, квадратично интегрируемых относительно меры $\delta c dz = |c|^2 dc dz$. Зададим в нем представление группы G по формуле $f(c, z) \mapsto \varphi_2(2c, \sigma(g, z))f(zg)$ (таким образом, имеем прямой интеграл представлений основной серии). Введем функцию

$$W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} = \varphi_1(-a_1 - a_2 - a_3, z_2 - z_1) \varphi_1(-a_1 + a_2 + a_3, z_3 - z_1) \\ \times \varphi_1(a_1 - a_2 + a_3, z_2 - z_3)$$

и каждой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{C}^2)$ поставим в соответствие функцию

$$\check{f}(c, z) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} W \begin{pmatrix} a_1, a_2, c \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2.$$

М. А. Наймарк доказывает, что это соответствие продолжается до унитарного изоморфизма гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{C}^2) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C})$, перестановочного с указанными действиями группы G . Это и есть искомое разложение представления $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ на неприводимые. (Мы лишь кратко упомянем, что в работе М. А. Наймарка сделано больше. В ней функция $\check{f}(c, z)$ рассматривается для всех $(c, z) \in (\mathbb{Z} + i\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$, а не только для $(c, z) \in \mathcal{M} \times \mathbb{C}$. Доказывается, что $\check{f}(c, \cdot)$ и $\check{f}(-c, \cdot)$ связаны унитарным оператором.)

Как видим, множество представлений $\{T_a, a \in \mathcal{M}\}$ “замкнуто относительно разложений тензорных произведений” (смысл этого высказывания разъяснился в § 2).

В следующих параграфах мы построим (следуя схеме из § 2) операторы Рака в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{M})$, связанные с представлениями T_{a_k} , $a_k = m_k + i\rho_k$, $k = 1, 2, 3$.

§ 4. Операторы Рака для $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (выражение через общие гипергеометрические функции)

В этом параграфе мы опишем (в общих чертах) стратегию получения явного вида операторов Рака для представлений T_a и укажем этот явный вид. Подробные обоснования содержатся в § 5.

Применяя общую конструкцию из § 2, разложим представление $T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ на неприводимые двумя способами:

- 1) разложим $T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ по представлениям T_c и затем разложим каждое $T_c \otimes T_{a_3}$ по представлениям T_l ;
- 2) разложим $T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ по представлениям T_c и затем разложим каждое $T_{a_1} \otimes T_c$ по представлениям T_l .

Пространство $H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3}$ отождествляется с $L_2(\mathbb{C}^3)$ (с обычной мерой Лебега dz на $\mathcal{C}$). Каждый из этих способов приводит к унитарному изоморфизму гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C})$. В определении второго пространства используется мера δc на $\mathcal{M}$ и мера dz на $\mathbb{C}$, векторы этого пространства записываем в виде $u(l, c, t)$, $(l, c) \in \mathcal{M}^2$, $t \in \mathbb{C}$. Группа G действует в $L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C})$ так: при каждом $l \in \mathcal{M}$ представление T_l действует на функцию $u(l, c, t)$ по переменной $t \in \mathbb{C}$. Упомянутые изоморфизмы действуют на функцию $f(z_1, z_2, z_3)$ (взятую из $C_0^\infty(\mathbb{C}^3)$) по правилам

$$f \mapsto f_1, \quad (5)$$

$$f_1(l, c, t) = \int_{\mathbb{C}^2} f(t + z_1, t + z_2, t + z_3) W \begin{pmatrix} a_1, a_2, c \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} c, a_3, l \\ z, z_3, 0 \end{pmatrix} dz_1 dz_2 dz_3 dz,$$

$$f \mapsto f_2, \quad (6)$$

$$f_2(l, c, t) = \int_{\mathbb{C}^2} f(t + z_1, t + z_2, t + z_3) W \begin{pmatrix} a_1, c, l \\ z_1, z, 0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a_2, a_3, c \\ z_2, z_3, z \end{pmatrix} dz_1 dz_2 dz_3 dz.$$

Искомые операторы Ракá R_l обязаны переводить $f_1(l, c, t)$ в $f_2(l, c, t)$ (при каждом l). Казалось бы, их можно найти, рассмотрев отображения

$$f(z_1, z_2, z_3) \mapsto f_k(l, c, t), \quad k = 1, 2,$$

и затем выразив отсюда f_2 через f_1 . Однако это приводит к громоздкому восьмерному интегралу: по переменным c', l', t', z' (эти переменные возникают при обращении первого из написанных отображений) и z_1, z_2, z_3, z (они возникают при применении второго из этих отображений). Для получения операторов Ракá необходимо избавиться от “лишних” интегрирований (свести дело к интегрированию только по c'), а это требует серии изменений порядка интегрирования и прочего. Неожиданным образом эта работа наталкивается на серьезные технические трудности, автору не удалось преодолеть их. Поэтому мы выбрали иной путь. Опишем его.

Представление $T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ унитарно эквивалентно правому регулярному представлению группы. Унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{C}^3)$ (напомним, что это пространство мы отождествили с $H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes H_{a_3}$) и $L_2(G)$, сплетающий эти представления, переводит функцию

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto f(z_1, z_2, z_3)$$

в функцию

$$g \mapsto \varphi_2(2a_1, \sigma(g, 0)) \varphi_2(2a_2, \sigma(g, 1)) \varphi_2(2a_3, \sigma(g, \infty)) f(0g, 1g, \infty g),$$

это проверяется без труда. С другой стороны, для правого регулярного представления разложение на неприводимые хорошо известно (см. [7; гл. 4]). Это разложение устанавливает унитарный изоморфизм гильбертовых пространств

$L_2(G) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$ (элементы последнего пространства записываем в виде $u(l, \zeta, t)$), переводя функцию $g \mapsto f(g)$ в функцию

$$(l, \zeta, t) \mapsto \frac{1}{4} \int_{\mathbb{C}^2} f(\lambda^{-1} + \beta t, \beta, \lambda - \beta \zeta) \varphi_2(-l, \lambda) d\lambda d\beta.$$

Группа G действует в пространстве $L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$ так: для каждого l представление T_l действует на функцию $u(l, \zeta, t)$ по переменной t .

Композиция указанных изоморфизмов $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(G) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$ дает изоморфизм $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$. Легкий подсчет показывает, что он действует на функцию $(z_1, z_2, z_3) \mapsto f(z_1, z_2, z_3)$ (взятую из $C_0^\infty(\mathbb{C}^3)$) по правилу

$$f \mapsto f_0, \\ f_0(l, \zeta, t) = \int_{\mathbb{C}^2} f\left(\frac{1}{\lambda\beta} + t - \frac{1}{(\lambda - \beta\zeta)\beta}, \frac{1}{\lambda\beta} + t - \frac{1}{(\beta + \lambda - \beta\zeta)\beta}, \frac{1}{\lambda\beta} + t\right) \times \varphi_2(2a_1, \lambda - \beta\zeta) \varphi_2(2a_2, \beta + \lambda - \beta\zeta) \varphi(2a_3, \beta) \varphi_2(-l, \lambda) d\lambda d\beta. \quad (7)$$

Итак, получили два изоморфизма $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$ (они задаются соответствиями (5), (6)), а также изоморфизм $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$, заданный соответствием (7).

Обратимся, наконец, к операторам Рака. Существенно следующее обстоятельство: как будет показано в § 5, из указанных соответствий $f \mapsto f_1$ и $f \mapsto f_0$ легко выражается соответствие $f_0 \mapsto f_1$ (и обратное соответствие $f_1 \mapsto f_0$). Аналогично, из соответствий $f \mapsto f_2$ и $f \mapsto f_0$ столь же легко выражается соответствие $f_0 \mapsto f_2$. После этого для получения искомых операторов Рака остается вычислить композицию соответствий $f_1 \mapsto f_0$ и $f_0 \mapsto f_2$. Напомним еще раз, что выразить связь между f_1 и f_2 , исходя непосредственно из соответствий $f \mapsto f_1$ и $f \mapsto f_2$, оказывается затруднительным. Отложив явные вычисления до следующего § 5, сформулируем их окончательные итоги, а также первый основной результат этой работы – явное выражение операторов Рака (другие выражения будут даны в §§ 6 и 7).

Введем функции

$$\psi_1(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) = \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(-a_3 - l - c, z + 1) \times \varphi_1(a_3 + l - c, -z) \varphi_1(-a_1 + a_2 + c, z + \zeta) dz, \quad (8)$$

$$\psi_2(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) = \varphi_1(-a_1 + l - c, \zeta) \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(-a_1 - l - c, z + 1) \times \varphi_1(-a_2 + a_3 + c, -z) \varphi_1(a_2 - a_3 + c, z + \zeta) dz. \quad (9)$$

ЛЕММА 1. *Эти интегралы сходятся абсолютно, функции ψ_k , $k = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы при $\zeta \neq 0$, $\zeta \neq 1$. Кроме того, при фиксированных a_k, l, c справедливы соотношения*

$$\psi_k(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) = \begin{cases} O(|\zeta|^{-k} \ln |\zeta|), & \zeta \rightarrow \infty, \\ O(|\zeta|^{1-k} \ln(|\zeta|)), & \zeta \rightarrow 0, \\ O(\ln |\zeta - 1|), & \zeta \rightarrow 1. \end{cases}$$

Эта лемма позволяет ввести линейные отображения $\Psi_k: C_0^\infty(\mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ по формулам

$$(\Psi_k f)(c) = \int_{\mathbb{C}} \psi_k(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) f(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2 \quad (10)$$

(где интегралы абсолютно сходятся).

ТЕОРЕМА 1. *Отображения (10) продолжаются до унитарных изоморфизмов гильбертовых пространств $\Psi_k: L_2(\mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathcal{M})$ (элементы этих гильбертовых пространств – это функции от переменных $\zeta \in \mathbb{C}$ и $c \in \mathcal{M}$ соответственно, квадратично интегрируемые по мере $d\zeta$ и по мере dc соответственно).*

Операторы Рака $R_l: L_2(\mathcal{M}) \rightarrow L_2(\mathcal{M})$ выражаются формулой $R_l = \Psi_2 \Psi_1^$.*

Из этой теоремы следует, что операторы R_l можно выразить интегралом

$$(R_l f)(c) = \int_{\mathbb{C}} r_l(a_1, a_2, a_3; c, c') |c'|^2 f(c') dc, \quad (11)$$

где

$$r_l(a_1, a_2, a_3; c, c') = \int_{\mathbb{C}} \psi_2(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) \bar{\psi}_1(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c') d\zeta. \quad (12)$$

Отсюда, используя равенства (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} r_l(a_1, a_2, a_3; c, c') &= \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(a_3 + l + c', z' + 1) \varphi_1(-a_3 - l + c', -z') \\ &\times \varphi_1(a_1 - a_2 - c, z' + \zeta) \varphi_1(-a_1 + l - c, \zeta) \varphi_1(-a_1 - l - c, z + 1) \\ &\times \varphi_1(-a_2 + a_3 + c, -z) \varphi_1(a_2 - a_3 + c, z + \zeta) dz dz' d\zeta. \end{aligned}$$

(Интеграл сходится абсолютно – в силу леммы 1.)

Как видим, $r_l(a_1, a_2, a_3; c, c')$ – это пример общей гипергеометрической функции (см. [8]).

§ 5. Доказательство леммы 1 и теоремы 1

Начнем с леммы 1. Оценим величину $|\psi_1(l, \zeta, c)|$ при больших $|\zeta|$. Имеем

$$|\psi_1(l, \zeta, c)| \leq \int_{\mathbb{C}} \frac{dz}{|z(z+1)(z+\zeta)|} = J_1 + J_2,$$

где J_1, J_2 получены интегрированием по множествам $|z| \leq 2$ и $|z| \geq 2$ соответственно. Ясно, что

$$J_1 \leq M_1 |\zeta|^{-1}, \quad J_2 \leq M_1 \int_{|z| \geq 2} \frac{dz}{|z|^2 |z + \zeta|}$$

с некоторой постоянной M_1 . Замена $z = \zeta u$ приводит последний интеграл к виду

$$\int_{|u| \geq 2|\zeta|^{-1}} \frac{1}{|u|^2 |\zeta| |u + 1|} du = J_3 + J_4,$$

где J_3 и J_4 получены интегрированием по множествам $|u| \geq 2^{-1}$ и $2|\zeta|^{-1} \leq |u| \leq 2^{-1}$ соответственно. Ясно, что $J_3 \leq M_2|\zeta|^{-1}$ и

$$J_4 \leq M_2 \int_{2|\zeta|^{-1} \leq |u| \leq 2^{-1}} |u|^{-2} |\zeta|^{-1} du \leq M_3 |\zeta|^{-1} \ln |\zeta|,$$

здесь M_2, M_3 – постоянные.

Аналогичным образом оценивается функция $|\psi_2(l, \zeta, c)|$. Из сказанного вытекают утверждения леммы 1, относящиеся к сходимости интегралов и поведению функций $|\psi_k(l, \zeta, c)|$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Остальные утверждения доказываются столь же просто.

Теперь докажем теорему 1. Рассмотрим унитарные изоморфизмы гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C})$, $f \mapsto f_1$, и $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$, $f \mapsto f_0$, заданные формулами (5) и (7). Исключив отсюда f , приходим к изоморфизму

$$K_1: L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C}), \quad f_0 \mapsto f_1.$$

Сейчас мы опишем его явными формулами.

Попробуем выразить искомое преобразование $f_0 \mapsto f_1$ формулой

$$f_1(l, c, t) = \int_{\mathbb{C}} A_1(l, c, \zeta) f_0(l, \zeta, t) d\zeta, \quad (13)$$

где $A_1(l, \zeta, t)$ – неизвестная функция такая, что интеграл в (13) сходится абсолютно. Подставим вместо f_0 выражение этой функции через f , указанное в (7). Затем преобразуем полученное посредством цепочки замен переменных. Цель этих замен – преобразовать правую часть равенства (13) таким образом, чтобы функция f входила в нее в достаточно простом виде, а именно в виде $f(z_1 + t, z_2 + t, z_3 + t)$. Позже выяснится, что целесообразно именно такое вхождение этой функции в преобразованную формулу для (13). Мы не будем выписывать результат каждой замены (это привело бы к громоздким записям), а лишь укажем цепочку этих замен (таким образом, при желании читатель без труда восстановит подробности). Во-первых, при фиксированных λ, ζ переходим от переменной β к новой переменной z_3 по формуле $z_3 = 1/(\lambda\beta)$. В полученное подынтегральное выражение войдет λ^2 . Резонно сделать замену $\lambda^2 \mapsto \lambda$, пользуясь очевидным равенством

$$\int_{\mathbb{C}} u(\lambda^2) d\lambda = 2^{-1} \int_{\mathbb{C}} u(\lambda) |\lambda|^{-1} d\lambda,$$

справедливым для любой функции $u(z)$, для которой эти интегралы сходятся абсолютно. Далее переходим от λ к новой переменной z_1 (при фиксированных ζ, z_3) по формуле $z_1 = \zeta z_3 (\zeta - \lambda z_3)^{-1}$. Наконец, переходим от ζ к z_2 (при фиксированных z_1, z_3) по формуле $z_2 = z_1 z_3 (1 - \zeta)(z_1 - z_3 \zeta)^{-1}$. В итоге этих преобразований равенство (13) превратится в равенство

$$\begin{aligned} f_1(l, c, t) = & \int_{\mathbb{C}} A_1 \left(l, c, \frac{z_1(z_3 - z_2)}{z_3(z_1 - z_2)} \right) \varphi_2(-a_1 - a_2 + a_3 + l, z_1 - z_2) \\ & \times \varphi_0(a_1 - a_2 - a_3 - l, z_3 - z_2) \varphi_0(-a_1 + a_2 - a_3 - l, z_1 - z_3) \\ & \times \varphi_2(2l, z_3) f(z_1 + t, z_2 + t, z_3 + t) dz_1 dz_2 dz_3. \end{aligned}$$

Сравнивая это с формулой (5), видим, что искомая функция $A_1(l, c, \zeta)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} A_1\left(l, c, \frac{z_1(z_3 - z_2)}{z_3(z_1 - z_2)}\right) & \varphi_2(-a_1 - a_2 + a_3 + l, z_1 - z_2) \\ & \times \varphi_0(a_1 - a_2 - a_3 - l, z_3 - z_2) \varphi_0(-a_1 + a_2 - a_3 - l, z_1 - z_3) \varphi_2(2l, z_3) \\ & = \int_{\mathbb{C}} W\left(\begin{matrix} a_1, a_2, c \\ z_1, z_2, z \end{matrix}\right) W\left(\begin{matrix} c, a_3, l \\ z, z_3, 0 \end{matrix}\right) dz. \end{aligned}$$

Достаточно очевидные замены приводят к равенству

$$\begin{aligned} A_1(l, c, \zeta) & = \varphi_0(a_1 - a_2 + a_3 + l, 1 - \zeta) \\ & \times \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(-a_3 - l - c, z + 1) \varphi_1(a_3 + l - c, -z) \varphi_1(-a_1 + a_2 + c, z + \zeta) dz. \end{aligned}$$

Аналогичным образом из изоморфизмов $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C})$, $f \mapsto f_2$, и $L_2(\mathbb{C}^3) \simeq L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2)$, $f \mapsto f_0$, заданных формулами (5) и (7), получаем изоморфизм

$$K_2: L_2(\mathcal{M} \times \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\mathcal{M}^2 \times \mathbb{C}), \quad f_0 \mapsto f_2.$$

Он действует на функции f_0 , полученные из соответствия $f \mapsto f_0$, по формуле

$$f_2(l, c, t) = \int_{\mathbb{C}} A_2(l, c, \zeta) f_0(l, \zeta, t) d\zeta,$$

где

$$\begin{aligned} A_2(l, c, \zeta) & = \varphi_0(a_1 - a_2 + a_3 + l, 1 - \zeta) \varphi_1(-a_1 + l - c, \zeta) \\ & \times \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(-a_1 - l - c, z + 1) \varphi_1(-a_2 + a_3 + c, -z) \varphi_1(a_2 - a_3 + c, z + \zeta) dz. \end{aligned}$$

Теперь для нахождения операторов Рака достаточно подсчитать оператор $K_2 K_1^*$. Заметим, что при этом подсчете сокращается множитель

$$\varphi_0(a_1 - a_2 + a_3 + l, 1 - \zeta),$$

входящий в обе функции A_1, A_2 — ядра операторов K_1, K_2 . В итоге получаются операторы $\Psi_2 \Psi_1^*$, указанные в теореме 1. Теорема 1 доказана.

§ 6. Выражение оператора Рака через функцию ${}_4F_3$

Введем функцию

$$\begin{aligned} S\left(\begin{matrix} A_1, \dots, A_r \\ B_1, \dots, B_r \end{matrix}\right) & = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{L_\tau} \frac{\prod_{k=1}^r \Gamma\left(\frac{A_k+m}{2} - z\right) \prod_{k=1}^r \Gamma\left(\frac{B_k+m}{2} + z\right)}{\prod_{k=1}^r \Gamma\left(\frac{A_k+m}{2} + z\right) \prod_{k=1}^r \Gamma\left(\frac{B_k+m}{2} - z + 1\right)} dz, \\ & A_k \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}, \quad B_k \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\tau \in (0, 1/2)$, а интегрирование ведется по вертикальной прямой $L_\tau = \{z = \tau + iy : y \in \mathbb{R}\}$, интеграл не зависит от выбора числа τ .

Основной результат этого параграфа – это теорема 2, выражающая ядра операторов Рака, заданные формулой (12), через функцию (14). Но предварительно (в лемме 2) мы выразим ее через Γ -функцию и гипергеометрическую функцию ${}_rF_{r-1}$. Последняя записывается, как обычно, в виде

$${}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_1^r \\ \{b_j\}_1^{r-1}\end{matrix}, z\right), \quad |z| \leq 1;$$

далее используется предел этой функции при $z \rightarrow 1 - 0$.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} S\left(\begin{matrix} A_1, \dots, A_r \\ B_1, \dots, B_r \end{matrix}\right) &= \sum_{s=1}^r \frac{\prod_{j \neq s}^r \Gamma\left(\frac{B_j - B_s}{2}\right) \prod_j \Gamma\left(\frac{A_j - \bar{B}_s}{2}\right)}{\prod_j \Gamma\left(\frac{\bar{A}_j - B_s}{2}\right) \prod_j \Gamma\left(\frac{\bar{B}_j - \bar{B}_s}{2} + 1\right)} \\ &\quad \times {}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix}\left\{1 - \frac{\bar{A}_j - B_s}{2}\right\}_{j=1}^{j=r} \\ \left\{1 - \frac{B_j - B_s}{2}\right\}_{j=1, j \neq s}^{j=r} \end{matrix}, 1 - 0\right) \\ &\quad \times {}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix}\left\{\frac{A_j - \bar{B}_s}{2}\right\}_{j=1}^{j=r} \\ \left\{\frac{\bar{B}_j - \bar{B}_s}{2}\right\}_{j=1, j \neq s}^{j=r} \end{matrix}, 1 - 0\right), \\ A_k &\in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}, \quad B_k \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем необходимые для доказательства вычисления, не проводя их явно (с целью избежать громоздких формул). Возьмем число $\varepsilon > 0$ и чуть изменим подынтегральную функцию в (14), а именно умножим ее на $\exp(\varepsilon z)$. Полученный интеграл вычисляем (обычным способом) с использованием вычетов в полюсах, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ (указанный множитель обеспечивает необходимое для этого быстрое стремление к нулю подынтегральной функции на последовательности полуокружностей, лежащих в этой полуплоскости). Внимательный анализ (простой, но несколько кропотливый) показывает, что полюсами будут только точки $-(B_s + m)/2 - k$, $k = 0, 1, \dots$ (в точках $(A_s + m)/2 + k$, $k = 0, 1, \dots$, – устранимые особенности; здесь существенно используется то, что величины $\operatorname{Re} A_s$, $\operatorname{Re} B_s$ целые). При каждом $s = 1, \dots, r$ находим сумму вычетов в этих полюсах. Сумма распространяется на все целые m , k такие, что $k \geq 0$, $m + k \geq -\operatorname{Re} B_s$. Перейдя от переменной суммирования m к $j = m + k$, усматриваем приятное обстоятельство: полученная сумма распадается в произведение двух сумм – по k и по j . Обе суммы выражаются через Γ -функцию и через ${}_4F_3$. Просуммировав по $s \in \{1, \dots, r\}$ и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к нужному тождеству. Лемма доказана.

Для нижеследующей теоремы 2 введем функцию

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{z}+1}{2}\right)}, \quad z \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Ядра операторов Рака выражаются по формуле*

$$\begin{aligned} r_l(a_1, a_2, a_3; c, c') &= \varphi_0(a_1 + a_3, -1) \gamma(-a_1 - c - l) \\ &\quad \times \gamma(a_2 - a_3 + c) \bar{\gamma}(-a_3 - l - c') \bar{\gamma}(-a_1 + a_2 + c') \\ &\quad \times S\left(\begin{matrix} -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{l} + 1, -2\bar{a}_1 + 1, -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + \bar{l} + 1, 1 \\ -a_1 + a_2 - c', -a_1 + a_2 + c', -a_1 + c + l, -a_1 + l - c \end{matrix}\right). \end{aligned}$$

Для доказательства понадобятся некоторые приготовления.

Во-первых, каждой непрерывной функции $u(x)$, $x \in \mathbb{C}$, имеющей компактный носитель, поставим в соответствие ее преобразование Меллина

$$\hat{u}(a) = \int_{\mathbb{C}} u(x) \varphi_1(a, x) dx, \quad a \in \mathbb{Z} + i\mathbb{R},$$

и сформулируем в удобном для дальнейшего виде известное свойство этого преобразования.

ЛЕММА 3. *Это соответствие продолжается до унитарного изоморфизма гильбертовых пространств $L_2(\mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$ (второе гильбертово пространство построено по мере на $\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$, совпадающей с мерой Лебега на прямых $t + i\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{Z}$).*

Второе вспомогательное утверждение – это формула для бета-функции, связанной с полем комплексных чисел (см. [8], мы приведем ее в удобном для нас виде)

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi_1(a, z) \varphi_1(b, 1 - z) |z|^\alpha dz = \pi \frac{\Gamma\left(\frac{a+\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{a}-\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{b}+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+b+\alpha+2}{2}\right)}. \quad (15)$$

Теперь докажем теорему 2. Для этого вычислим функцию, заданную интегралом (12), используя лемму 3. Однако непосредственному применению этой леммы препятствует то, что функции $\zeta \mapsto \psi_k(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c)$, $k = 1, 2$, не принадлежат пространству $L_2(\mathbb{C})$, что видно из леммы 1. Поэтому возьмем произвольное число $\theta \in (0, 1)$ и запишем (12) как скалярное произведение (в пространстве $L_2(\mathbb{C})$) функций $\zeta \mapsto \psi_1(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) |\zeta|^{-\theta}$ и $\zeta \mapsto \psi_2(a_1, a_2, a_3; l, \zeta, c) |\zeta|^\theta$ (они лежат в $L_2(\mathbb{C})$ согласно лемме 1). Таким образом, лемма 3 позволяет записать $r_l(a_1, a_2, a_3; c, c')$ как скалярное произведение (в пространстве $L_2(\mathbb{C})$) преобразований Меллина M_k^θ , $k = 1, 2$, этих функций. Функции M_k^θ легко вычисляются при помощи формулы (15), получаются произведение Γ -функций. Наконец, записав скалярное произведение функций M_1^θ , M_2^θ , приходим к функции вида (14). При этом число τ из формулы (14) совпадает с $\theta/2$. Теорема доказана.

§ 7. Выражение операторов Рака́ через Γ -функцию

Сначала опишем план наших действий. В § 4 мы представили операторы Рака́ в виде композиции $\Psi_2 \Psi_1^*$, где операторы $\Psi_k: L_2(\mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathcal{M})$, $k = 1, 2$, определены формулой (10). Пользуясь унитарным изоморфизмом, указанным в лемме 3, заменим здесь $L_2(\mathbb{C})$ пространством $L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$. Тогда получим операторы $\tilde{\Psi}_k: L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathcal{M})$, $k = 1, 2$, и равенство $R_l = \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_1^*$. Чтобы найти ядра (обобщенные функции), задающие операторы $\tilde{\Psi}_k$, $k = 1, 2$, достаточно перейти от функций ψ_k (они заданы формулами (8) и (9)) к их преобразованиям Меллина (по переменной ζ). Ясно, что это будут обобщенные функции $M_1^{\theta-0}$, $M_2^{\theta+0}$.

Чтобы претворить этот план в явные формулы, понадобится обобщенная функция $w(c) = (c - 0)^{-1}$, определяемая как функционал на пространстве

$C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$ вида

$$\langle w, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{Z} + i\mathbb{R}} (c - \varepsilon)^{-1} \varphi(c) dc, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}).$$

С ее помощью зададим интегральные операторы $K_1, K_2: C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ вида

$$\begin{aligned} (K_1 f)(c) &= 4\pi \int \gamma(-a_1 + a_2 - c + h) \gamma(-a_1 + a_2 + c + h) \\ &\quad \times w(-\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{c} + \bar{h}) w(-\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{c} + \bar{h}) f(h) dh, \\ (K_2 f)(c) &= \int \gamma(-a_1 + l + c + h) \gamma(-a_1 + l - c + h) \\ &\quad \times w(-\bar{a}_1 + \bar{c} + \bar{l} + \bar{h}) w(-\bar{a}_1 + \bar{l} - \bar{c} + \bar{h}) f(h) dh, \\ &\quad f \in C_0^\infty(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(Интегрирование производится по множеству $\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$.)

Нам понадобятся также унитарные операторы M_1, M_2, M_3 вида

$$\begin{aligned} (M_1 f)(c) &= \bar{\gamma}(-a_3 - l - c + 1) \bar{\gamma}(-a_1 + a_2 + c + 1) f(c), \quad f \in L_2(\mathcal{M}), \\ (M_2 f)(h) &= \bar{\gamma}(-a_1 + a_2 + a_3 + l + h + 1) \bar{\gamma}(h + 1) \bar{\gamma}(-2a_1 + h + 1) \\ &\quad \times \bar{\gamma}(-a_1 + a_2 - a_3 + h + 1) f(h), \quad f \in L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}), \\ (M_3 f)(c) &= \gamma(-a_1 - c - l + 1) \gamma(a_2 - a_3 + c + 1) f(h), \quad f \in L_2(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Теперь все готово для выполнения плана, намеченного в начале этого параграфа. Минуя промежуточные выкладки, приведем только окончательную формулу для операторов Рака́.

ТЕОРЕМА 3. *Операторы K_1 и K_2 продолжаются до унитарных изоморфизмов гильбертовых пространств $K_1, K_2: L_2(\mathbb{Z} + i\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathcal{M})$. Операторы Рака́, построенные для представлений основной серии T_{a_k} , $a_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, 3$, группы $G = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, представимы в виде $R_l = (-1)^{m_1+m_3} M_3 K_2 M_2 K_1^* M_1$, $l \in \mathcal{M}$.*

Список литературы

- [1] П. И. Голод, А. У. Климык, *Математические основы теории симметрий*, РХД, М., Ижевск, 2001.
- [2] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, V. B. Uvarov, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [3] В. А. Кныр, П. П. Пипирайте, Ю. Ф. Смирнов, “Канонические преобразования, “деревья” и моменты, кратные $1/4$ ”, *Ядерная физика*, **22**:5 (1975), 1063–1072.
- [4] W. Groenevelt, “Wilson function transforms related to Racah coefficients”, *Acta Appl. Math.*, **91**:2 (2006), 133–191; [arXiv:math.CA/0501511](https://arxiv.org/abs/math.CA/0501511).
- [5] М. А. Наймарк, “Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления. I. Случай тензорного произведения представлений основной серии”, *Тр. ММО*, **8** (1959), 121–154.

- [6] Р. С. Исмагилов, “Об операторах Рака”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 69–72; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “On Racah operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **40**:3 (2006), 222–224.
- [7] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*. Вып. 5. *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*. Vol. 5. *Integral geometry and representation theory*, Academic Press, New York–London, 1966.
- [8] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, “Гипергеометрические функции над произвольным полем”, *УМН*, **59**:5 (2004), 29–100; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, V. S. Retakh, “Hypergeometric functions over an arbitrary field”, *Russian Math. Surveys*, **59**:5 (2004), 831–905.

Р. С. Исмагилов (R. S. Ismagilov)

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: ismagil@serv.bmstu.ru

Поступила в редакцию
17.02.2006 и 30.10.2006