Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Трынин, Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 141–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:19:08

УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке

В работе получен результат, позволяющий определять наличие или отсутствие аппроксимативной сходимости в точке значений операторов Уиттекера

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

От приближаемой функции f при этом не требуется ничего, кроме непрерывности на $[0, \pi]$. Информация о функции f может быть ограничена только ее значениями в узлах $k\pi/n$, находящихся в окрестности точки, в которой исследуются аппроксимативные свойства.

Получен также критерий равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости этих операторов для непрерывных функций, аналогичный критерию Привалова сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа–Чебышёва и тригонометрических полиномов.

Библиография: 32 названия.

Впервые синк-приближения появились в работах Плейна [1]. Позднее Борель [2] и Уиттекер [3] ввели понятия кардинальной функции и усеченной кардинальной функции, сужения на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядят так:

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

К настоящему времени достаточно фундаментально исследована проблема синк-аппроксимации функции, аналитической на действительной оси и экспоненциально убывающей на бесконечности (см., например, [4], [5]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [6]. Кроме того, появился ряд исследований, восходящих к теореме Котельникова [7], в которых получены различные представления целых функций рядами по синкам с узлами интерполирования, удовлетворяющими некоторым условиям “равномерности распределения”, например, [8]–[13]. Начиная с известной работы Крамера [14], изучается также связь между теоремами дискретизации и интерполяцией Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма–Лиувилля, см., например, [15].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00167) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1295.2003.1).

Доказать наличие аппроксимативной сходимости на оси для менее гладких функций удалось П. Л. Бутцеру и Р. Л. Стенсу. Правда, для этого пришлось несколько модифицировать оператор (1). В [16] ими установлено, что для равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f , принадлежащих классу Дини–Лишшица и удовлетворяющих условию $f(x) = O(|x|^{-\delta})$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для некоторого $\delta > 0$, равномерно на $\mathbb{R}$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $0 < a < 1$ справедливо равенство

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) \left(\frac{\sin \pi \left(\frac{a(Wx-k)}{m} \right)}{\pi \frac{a(Wx-k)}{m}} \right)^m \frac{\sin \pi(Wx-k)}{\pi(Wx-k)} = f(x).$$

Кроме того, для этих аппроксимаций ими получены теоремы типа Джексона при $W \rightarrow \infty$.

До настоящего времени, насколько мне известно, приближение операторами (1) на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций (см. [17], [6]) сведением к случаю оси с помощью конформного отображения.

В настоящей работе получен результат, позволяющий определять наличие или отсутствие аппроксимативной сходимости в точке непосредственно значений операторов (1). От приближаемой функции f при этом не требуется ничего, кроме непрерывности на $[0, \pi]$. Информация о функции f может быть ограничена только ее значениями в узлах $k\pi/n$, находящихся в окрестности точки, в которой исследуются аппроксимативные свойства (1). Получен также критерий равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости операторов (1) для непрерывных функций, аналогичный критерию Привалова сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа–Чебышёва [18]–[20], а также критерию равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$ интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля [21].

А именно, справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1 (формула равносходимости в точке). Пусть $f \in C[0, \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_n = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = \infty, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} - 1\right). \quad (2)$$

Для любого натурального n и $x \in [0, \pi]$ обозначим через p, m_1, m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor + 1, \quad m_2 = \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor, \quad \frac{\pi p}{n} \leq x < \frac{\pi(p+1)}{n}, \quad (3)$$

где числа k_1 и k_2 определяются с помощью неравенств:

$$\frac{\pi(k_1-1)}{n} < x - \varepsilon_n \leq \frac{\pi k_1}{n}, \quad \frac{\pi k_2}{n} \leq x + \varepsilon_n < \frac{\pi(k_2+1)}{n}.$$

Тогда поточечно на отрезке $[0, \pi]$ и равномерно внутри интервала $(0, \pi)$ (равномерно на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$) справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| L_n(f, x) - f(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p-2m} \right| = 0, \quad (4)$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а функция f доопределена следующим образом: $f(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi]$. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (4) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот результат является критерием сходимости синк-приближений в точке, так как указывает необходимое и достаточное условие приближения операторами (1) функции f в фиксированной точке.

Пусть $f \in C[0, \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям (2). Числа p , m_1 , m_2 определяются соотношениями (3). Тогда для того чтобы в точке $x \in [0, \pi]$ выполнялось равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(f, x) - f(x)| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m} \right| = 0,$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма равна нулю.

ТЕОРЕМА 2 (критерий равномерной сходимости). Пусть $f \in C[0, \pi]$, $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < \varepsilon < (b - a)/2$. Для любого натурального n обозначим через p_1 , p_2 , m_1 , m_2 такие целые числа, что

$$\begin{aligned} \frac{\pi(k_1 - 1)}{n} &\leq a < \frac{\pi k_1}{n}, & \frac{\pi k_2}{n} < b \leq \frac{\pi(k_2 + 1)}{n}, \\ m_1 &= \left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, & m_2 &= \left[\frac{k_2}{2} \right], \\ \frac{\pi p_1}{n} &\leq a + \varepsilon < \frac{\pi(p_1 + 1)}{n}, & \frac{\pi p_2}{n} &\leq b - \varepsilon < \frac{\pi(p_2 + 1)}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, \cdot) - f\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0, \quad (6)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m} \right| = 0, \quad (7)$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. На всем отрезке по теореме Арцела–Александрова сходимость процессов (1), вообще говоря, является квазиравномерной, так как на концах отрезка сходимость обеспечивается интерполяционными свойствами оператора (1). Для функции $f \equiv 1$ непосредственно проверяется, что $|L_n(1, \pi/(2n)) - 1|$ не стремится к нулю. Таким образом, даже для $f \equiv 1$ устанавливается отсутствие равномерной сходимости на всем отрезке $[0, \pi]$.

Прежде чем доказывать эти теоремы, приведем ряд утверждений, которые будем использовать в рассуждениях.

Во-первых, нам понадобится теорема С. Б. Стечкина, которую, без указания конкретных значений констант, он опубликовал в [22; теорема 7 или частный случай теоремы 3]. Заметим, что предлагаемый в настоящей статье способ доказательства не зависит от их величины. Доказательство этого утверждения с числовыми оценками констант можно найти, например, в [19; кн. 1, гл. III, § 3.4].

ТЕОРЕМА 3 (теорема Стечкина). *Если функция $f \in C_{2\pi}$, то для любого натурального m существует тригонометрический полином T_m порядка не выше m такой, что справедливы неравенства:*

$$\|f - T_m\|_{C_{2\pi}} \leq 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right), \quad (8)$$

$$\|T'_m\|_{C_{2\pi}} \leq 7m\omega\left(f, \frac{1}{m}\right), \quad (9)$$

где $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции f .

Далее нам потребуется оценка погрешности аппроксимации функций, допускающих для некоторого положительного ε аналитическое продолжение с отрезка $[0, \pi]$ на круг $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ интерполяционным оператором по синкам (1), анонсированная в [23]. А именно, верна

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f \in A(K_\varepsilon)$ – аналитическая в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \leq \pi/2 + \varepsilon\}$ функция для некоторого положительного ε . Тогда найдутся такие абсолютная константа $C_0 > 0$ и натуральное n_ε , зависящее только от ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ и $x \in [0, \pi]$*

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \frac{C_0 \|f\| |\sin nx|}{n\left(\pi\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\|f\| = \max_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В. П. Скляров проверил точность порядка приближения в теореме 4, оценив для нечетных n погрешность аппроксимации (10) снизу в точке $x = \pi/2$ функции $f \equiv 1$. Кроме того, для операторов (1) им проведен интересный численный эксперимент, анонсированный в [24].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $x_{k,n} = k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. При каждом натуральном n оценим уклонение оператора L_n от интерполируемой функции с помощью обобщения формулы Эрмита [25; гл. 1, § 1, п. 2]. В качестве контура интегрирования возьмем окружность Γ_n с центром в точке $\pi/2$ радиуса $\pi/2 + \pi/(2n)$. Эта окружность при каждом n охватывает $n+1$ узел $x_{k,n}$, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{\|f\| |\sin nx|}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{d\zeta}{(\zeta - x) \sin n\zeta} \right|. \quad (11)$$

Сделаем замену

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) e^{i\varphi},$$

оценим сверху интеграл в (11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{d\zeta}{(\zeta - x) \sin n\zeta} \right| &\leq \frac{n+1}{4n} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{|e^{i\varphi}| d\varphi}{\left| \sin \frac{\pi n}{2} \cos \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) + \cos \frac{\pi n}{2} \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) \right| \left| \left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1}{n} \right) e^{i\varphi} - \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Когда φ пробегает отрезок от 0 до 2π , значение $\left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1}{n} \right) e^{i\varphi} - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ описывает окружность радиуса $\frac{\pi}{2} \frac{n+1}{n}$ с центром в точке $\left(x - \frac{\pi}{2} \right)$. Так как $x \in [0, \pi]$, то

$$\min_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left| \left(\frac{\pi}{2} \frac{n+1}{n} \right) e^{i\varphi} - \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|.$$

Следовательно, из (11) и (12) получаем оценку

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - f(x)| &\leq \frac{|\sin nx|(n+1)}{4n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left| \sin \frac{\pi n}{2} \cos \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) + \cos \frac{\pi n}{2} \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) \right|}. \end{aligned}$$

В зависимости от четности n оценка распадается на два случая. Обозначим

$$\chi_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\left| \cos \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) \right|} & \text{при } n \text{ нечетных,} \\ \frac{1}{\left| \sin \left(\frac{\pi(n+1)}{2} e^{i\varphi} \right) \right|} & \text{при } n \text{ четных,} \end{cases}$$

тогда

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{|\sin nx|(n+1)}{4n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|} \int_0^{2\pi} \chi_n(\varphi) d\varphi. \quad (13)$$

Рассмотрим случай $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $A > 2$, обозначим

$$\delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}.$$

Выберем m_0 настолько большим, чтобы $\delta_m \in [0, \pi/2]$ для любого натурального $m > m_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \chi_{2m+1}(\varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left| \cos(\pi(m+1)e^{i\varphi}) \right|} \\ &\leq 4 \int_0^{\delta_m} \frac{d\varphi}{\left| \cos(\pi(m+1)\cos \varphi) \right|} + 4 \int_{\delta_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left| \operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin \varphi) \right|}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу первого замечательного предела найдется такое натуральное m_1 , $m_1 \geq m_0$, что справедливо неравенство

$$\delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2} \leq \arcsin \frac{\sqrt{30m+5}}{3(m+1)},$$

а следовательно, и неравенство

$$|\cos(\pi(m+1) \cos \varphi)| \geq \frac{1}{2} \quad (15)$$

будет выполняться для любых $m \geq m_1$ и $\varphi \in [0, \delta_m]$.

Нетрудно проверить, что если

$$\varphi \geq \delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}, \quad \text{где } A > 2,$$

то

$$\operatorname{sh}((m+1)\pi \sin \varphi) \geq \frac{e^{\pi(m+1) \sin \varphi}}{A}.$$

Следовательно, для второго интеграла (14) имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\delta_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\operatorname{sh}(\pi(m+1) \sin \varphi)} &\leq A \int_{\delta_m}^{\pi/2} e^{-(\pi(m+1) \sin \varphi)} d\varphi \\ &\leq A \int_{\delta_m}^{\pi/2} e^{-(\pi(m+1) \frac{2}{\pi} \varphi)} d\varphi \leq \frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (13), (14) и (15) для любого $x \in [0, \pi]$ и нечетного $n > n_0 = 2m_1 + 1$ получаем

$$\begin{aligned} &|L_n(f, x) - f(x)| \\ &\leq \frac{|\sin nx|(n+1)}{n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \left(2 \operatorname{mes}[0, \delta_m] + \frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}\right) \\ &= \frac{|\sin nx|}{n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \left(\ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим случай четного $n = 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Теперь оценка

$$\int_0^{2\pi} \chi_{2m}(\varphi) d\varphi$$

в (13) сводится к оцениванию интегралов:

$$\int_0^{\delta_m} \frac{d\varphi}{|\sin(\pi(m + \frac{1}{2}) \cos \varphi)|}, \quad \int_{\delta_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{|\operatorname{sh}(\pi(m + \frac{1}{2}) \sin \varphi)|}.$$

Замечаем, что при $\varphi \geq \delta_m = \frac{1}{8(m + \frac{1}{2})} \ln \frac{A}{A-2}$, где $A > 2$,

$$\operatorname{sh}\left(\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \sin \varphi\right) \geq \frac{e^{\pi(m + \frac{1}{2}) \sin \varphi}}{A}$$

для всех m , начиная с m_2 , $m_2 \geq m_1$.

Теперь, рассуждая так же как в случае нечетного n , в силу первого замечательного предела для достаточно больших четных $n \geq 2m_2$ и произвольных $x \in [0, \pi]$ имеем оценку

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{|\sin nx|}{n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{A}{A-2} + A^{3/4}(A-2)^{1/4}\right).$$

Объединяя эту оценку с (16), получим (10), где C_0 можно определить из равенства

$$\min_{A \geq 2} \max \left(\left(\ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)} \right), \left(\frac{1}{2} \ln \frac{A}{A-2} + A^{3/4}(A-2)^{1/4} \right) \right) = C_0.$$

Теорема 4 доказана.

Докажем аналог результата Г. П. Неваи [26], [27], полученного им при изучении классического лагранжева интерполирования многочленами.

ЛЕММА 1. Для всех $x \in [0, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \leq 4 \left(1 + \frac{1}{\pi}\right), \quad (17)$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $x \in [0, \pi]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к точке x нуля $x_{k_0,n} = k_0\pi/n$ функции $\sin nx$; если таких нулей два, то выберем любой из них, например, левый. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} + \frac{(-1)^{k-1} \sin nx}{nx - (k-1)\pi} \right| \\ &\leq |\sin nx| \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi} \right| + 4, \end{aligned}$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k_0 и $k_0 + 1$. Четыре слагаемых с этими номерами оцениваются с помощью неравенства

$$\left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} \right| \leq 1.$$

Заметим, что знаки выражений

$$\frac{1}{nx - k\pi} \quad \text{и} \quad \frac{1}{nx - (k-1)\pi}$$

положительны, если $1 \leq k \leq k_0 - 1$, и отрицательны, если $k_0 + 2 \leq k \leq n$. Поэтому цепочку неравенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| &\leq \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi} \right) \\ &\quad + \sum_{k=k_0+2}^n \left(\frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi} \right) + 4. \end{aligned}$$

Напомним, что при $k_0 = 0, 1$ в оценке сверху отсутствует первая сумма, а при $k_0 = n - 1, n$ – вторая. Теперь, почленно складывая слагаемые обеих сумм, получаем

$$\sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x) - l_{k-1,n}(x)| \leq \frac{1}{nx - (k_0 - 1)\pi} - \frac{1}{nx} + \frac{1}{nx - n\pi} - \frac{1}{nx - (k_0 + 1)\pi} + 4.$$

В силу выбора номера k_0 получим (17). Лемма 1 доказана.

Нам потребуются оценки последовательности норм интерполяционных операторов (1), действующих при каждом n из $C[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$. В теории интерполирования такие нормы называют константами Лебега [28], [29], [19]. А также проведем исследование поведения последовательности норм функционалов, ставящих каждой непрерывной на $[0, \pi]$ функции f значения в точке $x \in [0, \pi]$ операторов (1), $n = 1, 2, 3, \dots$. Функциональные зависимости таких норм от переменной $x \in [0, \pi]$ носят название функций Лебега [28], [29], [19].

ТЕОРЕМА 5. Для всех $x \in [0, \pi]$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ оценки сверху функций Лебега процесса (1) имеют вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} \right| \leq \frac{2}{\pi} |\sin nx| (2 + \ln(n+1)) + 1, \quad (18)$$

а последовательность констант Лебега сверху оценивается следующим образом:

$$L_n = \max_{x \in [0, \pi]} \sum_{k=0}^n \left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} \right| \leq \frac{2}{\pi} (2 + \ln(n+1)) + 1. \quad (19)$$

Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $C_1 > 0$ и для числовых последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ выполнены соотношения

$$0 \leq a_n < b_n \leq \pi, \quad b_n - a_n \geq C_1 n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Тогда найдутся константа $C_\alpha > 0$ и номер $n_0 \in \mathbb{N}$, зависящие только от C_1 и α в (20), такие, что для всех $n > n_0$ функции и константы Лебега процесса (1) на отрезках $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяют неравенствам:

$$L_n([a_n, b_n], x) = \sum_{k=l_n}^{m_n} \left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} \right| \geq C_\alpha |\sin nx| \ln n, \quad (21)$$

$$L_n([a_n, b_n]) = \max_{x \in [a_n, b_n]} \sum_{k=l_n}^{m_n} \left| \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} \right| \geq C_\alpha \ln n, \quad (22)$$

где номера l_n и m_n определяются из неравенств

$$x_{l_n-1} < a_n \leq x_{l_n}, \quad x_{m_n} \leq b_n < x_{m_n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 – номер ближайшего к x узла (если таких узла два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Тогда

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{\sin nx}{nx - k\pi} \right| + \left| \frac{\sin nx}{nx - k_0\pi} \right| + \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{\sin nx}{nx - k\pi} \right|.$$

Если $k_0 = 0$, то в сумме отсутствует первое слагаемое, если же $k_0 = n$, то нет третьего. Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства $\left| \frac{\sin nx}{nx - k\pi} \right| \leq 1$:

$$\begin{aligned} L_n(x) &\leq |\sin nx| \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{1}{nx - k\pi} \right| + \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{1}{nx - k\pi} \right| \right) + 1 \\ &\leq \frac{2}{\pi} |\sin nx| \left(2 + \int_{1/2}^{(n+1)/2} \frac{dt}{t} \right) + 1 = \frac{2}{\pi} |\sin nx| (2 + \ln(n+1)) + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства (18) и (19) доказаны.

Перейдем к доказательству (21) и (22). Теперь точку x будем произвольным образом брать из отрезков $[a_n, b_n]$. Номер k_0 выбираем как и прежде. Условия (20) гарантируют существование такого номера n_1 , начиная с которого в отрезки $[a_n, b_n]$ будет попадать хотя бы один узел $x_{k,n}$, $k = 0, \dots, n$, и будут выполняться неравенства

$$|x - x_{k_0 \pm 1, n}| \leq \frac{3\pi}{2n}. \quad (23)$$

Оценим снизу функцию Лебега на отрезках $[a_n, b_n]$ процесса (1):

$$\begin{aligned} L_n([a_n, b_n], x) &= |\sin nx| \sum_{k=l_n}^{m_n} \frac{1}{|nx - k\pi|} \\ &\geq |\sin nx| \sum_{k=l_n}^{k_0-2} \frac{1}{|nx - k\pi|} + |\sin nx| \sum_{k=k_0+2}^{m_n} \frac{1}{|nx - k\pi|}. \end{aligned}$$

Опустив неотрицательные слагаемые, мы только усилим неравенство. Поэтому при $x \leq (b_n + a_n)/2$ в оценке будет участвовать только вторая сумма, а при $x > (b_n + a_n)/2$ — только первая. Рассуждения в обеих ситуациях будут совершенно аналогичные, поэтому ограничимся разбором случая $x \leq (b_n + a_n)/2$. В силу (23)

$$\begin{aligned} L_n([a_n, b_n], x) &\geq |\sin nx| \sum_{k=k_0+2}^{m_n} \frac{1}{|nx - k\pi|} \geq \frac{1}{\pi} |\sin nx| \int_{3/2}^{[n(b_n - a_n)]/2} \frac{dt}{t} \\ &\geq \frac{1}{\pi} |\sin nx| \ln \left(\frac{2}{3} \left[n \frac{b_n - a_n}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Теперь в силу (20) найдем такое $n_0 > n_1$, начиная с которого для всех $x \in [a_n, b_n]$ будет выполняться неравенство (21):

$$L_n([a_n, b_n], x) \geq \frac{1}{\pi} |\sin nx| \ln \left(\frac{C_1 n^{1-\alpha}}{6} \right) \geq C_\alpha |\sin nx| \ln n.$$

Осталось заметить, что из (20) для достаточно больших n следует наличие хотя бы одного максимума функции $|\sin nx|$ на отрезке $[a_n, b_n]$. Значит, (22) верно и теорема 5 доказана.

Нам потребуется еще один аналог, на мой взгляд, очень полезного результата Г. П. Неваи [26], [27], полученного им при изучении классического лагранжева интерполирования алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами.

ТЕОРЕМА 6. Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеет место формула равносходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (24)$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Сходимость в (24) поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, т.е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Пусть последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_n = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = \infty, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} - 1\right).$$

Если непрерывную на отрезке $[0, \pi]$ функцию f доопределить таким образом, что $f(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеет место формула равносходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (25)$$

где номера k_1 и k_2 определяются с помощью неравенств:

$$\frac{\pi(k_1 - 1)}{n} < x - \varepsilon_n \leq \frac{\pi k_1}{n}, \quad \frac{\pi(k_2 - 1)}{n} \leq x + \varepsilon_n < \frac{\pi k_2}{n}.$$

Если $k_2 < k_1$, то сумма в (25) отсутствует. Сходимость в (25) поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, т.е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если гладкость функции f допускает выбор последовательностей γ_n и ε_n , удовлетворяющих требованиям (2) и таких, что в отрезок $[x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]$ будет независимо от n попадать не более конечного числа узлов $\pi k/n$, $k_1 \leq k \leq k_2$, где $k_2 - k_1 \leq K$, то имеет место равномерная внутри интервала $(0, \pi)$ аппроксимация функции f операторами (1).

Действительно, в силу равномерной непрерывности функции f в этом случае имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - L_n(f, x)| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| \\ & \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

В частности, отсюда следует аналог признака Дини–Липшица равномерной сходимости рядов Фурье [30; гл. IV, § 4], классического интерполяционного процесса Лагранжа–Чебышёва [31], [19] и процесса Лагранжа–Штурма–Лиувилля в случае краевых условий третьего рода, из которых удалены условия первого рода [32], см. также [21; теорема 3', следствие 2].

СЛЕДСТВИЕ 2 (признак Дини–Липшица). *Если функция f принадлежит классу Дини–Липшица, т.е. выполняется соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \ln n = 0,$$

то значения операторов (1) сходятся к f равномерно внутри $(0, \pi)$ и поточечно на всем $[0, \pi]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - L_n(f, x)) = 0.$$

Действительно, взяв в качестве $\gamma_n = \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \ln \frac{2n}{\pi^2 e}$, воспользуемся следствием 1 к теореме 6.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Из соотношений (2) и (25) следует справедливость принципа локализации для непрерывных функций процесса (1). То есть поведение значений операторов (1) в точке x зависит от значений функции f лишь в окрестности x .*

Действительно, из (2) и (25) следует, что если две непрерывные функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки $x_0 \in [0, \pi]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(f, x_0) - L_n(g, x_0)| = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если в качестве последовательности γ_n в (2) взять $\gamma_n = \sqrt{\omega(f, \pi/n)}$, то суммирование в (25) можно брать по номерам узлов из сегмента*

$$\left[x - \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{n})}} - 1\right), x + \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{n})}} - 1\right) \right) \cap [0, \pi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Продолжим функцию f на отрезок $[-\pi, \pi]$ четным образом. Получим новую функцию $\tilde{f} \in C_{2\pi}$, ее норма $\|f\|_{C[0, \pi]} = \|\tilde{f}\|_{C_{2\pi}}$ и модуль непрерывности $\omega(\tilde{f}, \delta) = \omega(f, \delta)$. В силу теоремы 3 (теоремы Стечкина) для любого натурального m существует тригонометрический полином T_m порядка не выше m , удовлетворяющий соотношениям (8) и (9). С помощью

теоремы 4 приблизим этот тригонометрический полином оператором (1):

$$\begin{aligned} |L_n(T_m, x) - T_m(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - T_m(x) \right| \\ &\leq \frac{C_0 \|T_m\| |\sin nx|}{n\left(\pi\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)}. \end{aligned}$$

В силу линейности оператора (1) при любом $x \in [0, \pi]$

$$f(x) - L_n(f, x) - (L_n(T_m, x) - L_n(f, x)) = f(x) - T_m(x) + T_m(x) - L_n(T_m, x).$$

Из неравенства (8) имеем

$$|f(x) - L_n(f, x) - L_n(T_m - f, x)| \leq 5\omega\left(f, \frac{1}{m}\right) + \frac{C_0 \|T_m\| |\sin nx|}{n\left(\pi\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)}. \quad (26)$$

Согласно определению (1)

$$\begin{aligned} L_n(T_m - f, x) &= \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) \left(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l_{k-1,n}(x) \left(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (T_m(\pi) - f(\pi)) l_{n,n}(x) + \frac{1}{2} (T_m(0) - f(0)) l_{0,n}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)) \left(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Оценим отдельно вторую сумму в полученном представлении с помощью формулы Лагранжа и неравенства (9):

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} |l_{k,n}(x)| \left| \left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \right| \\ &\leq \frac{7m\pi}{2n} \omega\left(f, \frac{1}{m}\right) \sum_{k=0}^{n-1} |l_{k,n}(x)| \leq \frac{7m\pi}{2n} \omega\left(f, \frac{1}{m}\right) L_n(x). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся оценкой функции Лебега, полученной в теореме 5, а именно, неравенством (18):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(T_m \left(\frac{(k+1)\pi}{n} \right) - T_m \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \right| \\ & \leq \frac{7m\pi}{2n} \omega \left(f, \frac{1}{m} \right) \left[\frac{2}{\pi} |\sin nx| (2 + \ln(n+1)) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Из теоремы 3 и леммы 1 следуют соотношения:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)) \left(T_m \left(\frac{k\pi}{n} \right) - f \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \|T_m - \tilde{f}\|_{C[-\pi, \pi]} \sum_{k=1}^n |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \leq 10 \left(1 + \frac{1}{\pi} \right) \omega \left(f, \frac{1}{m} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$|T_m(\pi) - f(\pi)| |l_{n,n}(x)| + |T_m(0) - f(0)| |l_{0,n}(x)| \leq 10\omega \left(f, \frac{1}{m} \right). \quad (30)$$

Таким образом, из (26)–(30) и неравенства треугольника для любого $x \in [0, \pi]$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(f \left(\frac{(k+1)\pi}{n} \right) - f \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \right| \\ & \leq 30\omega \left(f, \frac{1}{m} \right) + \frac{C_0 \|T_m\| |\sin nx|}{n \left(\pi \left(\frac{n+1}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \right)} \\ & \quad + \frac{7m\pi}{2n} \omega \left(f, \frac{1}{m} \right) \left[\frac{2}{\pi} |\sin nx| (2 + \ln(n+1)) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Возьмем любой отрезок $[a, b] \subset (0, \pi)$. Выберем произвольное положительное ε . Найдем такое m , для которого $30\omega(f, 1/m) \leq \varepsilon/2$. Затем подберем n_0 такое, начиная с которого будут выполняться неравенства для любого $x \in [a, b]$

$$\frac{C_0 \|T_m\| |\sin nx|}{n \min(a, \pi - b)} + \frac{7m\pi}{2n} \omega \left(f, \frac{1}{m} \right) \left[\frac{2}{\pi} |\sin nx| (2 + \ln(n+1)) + 1 \right] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, для любого положительного ε и произвольного $x \in [a, b]$ в силу (31) можно найти такое n_0 , что для всех $n > n_0$

$$\left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x) \left(f \left(\frac{(k+1)\pi}{n} \right) - f \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Поточечная сходимость на концах отрезка в силу интерполяционных свойств оператора (1) легко проверяется непосредственно. Действительно, например, в нуле (24) имеет вид

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(0) - L_n(f, 0) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f \left(\frac{(k+1)\pi}{n} \right) - f \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) l_{k,n}(0) \right) \\ & = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f \left(\frac{\pi}{n} \right) - f(0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется справедливость соотношения (25) при $x = 0$ и $x = \pi$.

Пусть $x \in (0, \pi)$. Тогда в силу (2) найдется номер $n_2 = n_2(x)$ такой, что для любого $n \geq n_2$ отрезок $[x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n]$ попадает в интервал $(0, \pi)$. Для доказательства (25) при $n \geq n_2$ оценим сумму:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k: |x_{k,n} - x| > \varepsilon_n} l_{k,n}(x) \left(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \right| \\ & \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| \sum_{k: |x_{k,n} - x| > \varepsilon_n} \frac{1}{|nx - \pi k|} \\ & \leq \frac{1}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| \left(\int_0^{x-\varepsilon_n/2} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\varepsilon_n/2}^{\pi} \frac{dt}{t-x} \right) \\ & \quad + \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| |l_{k_1-1,n}(x)| + \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| |l_{k_2+1,n}(x)|. \end{aligned}$$

Так как

$$\max_{x \in [0, \pi]} \ln|x(\pi - x)| = 2 \ln \frac{\pi}{2},$$

в силу (2) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k: |x_{k,n} - x| > \varepsilon_n} l_{k,n}(x) \left(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) \right| \\ & \leq 2 \ln \frac{e\pi}{\varepsilon_n} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) |\sin nx| = 2\gamma_n |\sin nx|. \end{aligned} \quad (32)$$

Осталось заметить, что для любого отрезка $[a, b] \subset (0, \pi)$ найдется номер n_3 , начиная с которого неравенство (32) выполняется одновременно для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, характер сходимости в (25) будет таким же, как и в (24), т.е. сходимость будет поточечной на отрезке $[0, \pi]$ и равномерной внутри интервала $(0, \pi)$. Теорема 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 (КРИТЕРИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ). Обозначим

$$\psi_{k,n} = f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (33)$$

Зафиксируем произвольное $x \in [0, \pi]$. Выберем индекс $p = p(x, n)$ из соображений, что $x \in [x_{p,n}, x_{p+1,n})$. Тогда

$$x = x_{p,n} + \alpha(x_{p+1,n} - x_{p,n}) = x_{p,n} + \frac{\alpha\pi}{n},$$

где $\alpha = \alpha(x, n) \in [0, 1)$ (в случае $x = \pi$ получаем $p(\pi, n) = n$, $\alpha = 0$),

$$x - x_{k,n} = \frac{p-k+\alpha}{n} \pi.$$

Пользуясь (33), оценим разность сразу для всех $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k+\alpha} - \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-\alpha)} \\ & \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-1)} \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Разобьем сумму в (25) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k:k_1 \leq k \leq k_2, |p-k| \geq 3} \psi_{k,n} l_{k,n}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k:k_1 \leq k \leq k_2, |p-k| < 3} \psi_{k,n} l_{k,n}(x). \end{aligned}$$

Теперь из (33), (34) и того, что

$$|(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x)| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad (35)$$

с помощью неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k:|p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k+\alpha} - \sum_{k:|p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k| < 3} |\psi_{k,n} l_{k,n}(x)| + \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k| < 3} \frac{|\psi_{k,n}|}{|p-k|} \leq \frac{5}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad (36) \end{aligned}$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемого, знаменатель которого обращается в нуль.

Теперь сгруппируем слагаемые парами. Не более трех слагаемых, не нашедших себе пар, оцениваем с помощью (33). Положив $m_1 = [k_1/2] + 1$, $m_2 = [k_2/2]$, имеем неравенство

$$\left| \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \left\{ \frac{\psi_{2m,n}}{p-2m} - \frac{\psi_{2m-1,n}}{p-2m+1} \right\} \right| \leq \frac{3}{2\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда и из (33), (36) после преобразования Абеля получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\psi_{2m,n} - \psi_{2m-1,n}}{p-2m} \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \left| \frac{\psi_{2m-1,n}}{(p-2m)(p-2m+1)} \right| + \frac{13}{2\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{7}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad (37) \end{aligned}$$

Оценка в (37) равномерна по $x \in [0, \pi]$. Правда, не следует забывать, что при каждом n в (37) нужно соответствующим образом выбирать $p = p(x, n)$.

В силу теоремы 6 и (37) из равенства (7) следует равномерная сходимость интерполяционного процесса (1) на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, т.е. справедливо (6).

Для доказательства необходимости заметим, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p-2m} \right| \\
 & - \left| \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{(p \pm 2) - 2m} \right| \\
 & \leq \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{\left| f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) - f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right) \right|}{|p-2m| |(p \pm 2) - 2m|} + 2\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \\
 & \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \left(4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+2)} + 2 \right) = 5\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \tag{38}
 \end{aligned}$$

где “штрих” у суммы означает отсутствие слагаемых, знаменатели которых обращаются в нуль.

Пусть существуют последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$, $p_1 \leq \bar{p}_i \leq p_2$, где p_1 и p_2 определяются соотношениями (5), и положительное число q такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n_i}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n_i}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n_i}\right)}{\bar{p}_i - 2m} \right| \geq q > 0. \tag{39}$$

Выбрав i_0 таким образом, чтобы для всех $i > i_0$ выполнялось неравенство $5\omega(f, \pi/n_i) < q/2$, из (38) и (39) получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n_i}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n_i}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n_i}\right)}{(\bar{p}_i \pm z_i) - 2m} \right| \geq \frac{q}{2} > 0, \tag{40}$$

где $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – произвольная последовательность, принимающая значения из множества $\{-2, 0, 2\}$. Другими словами, если сумма в соотношении (7) отделена от нуля для точек из сегмента

$$\frac{\pi \bar{p}_i}{n_i} \leq x < \frac{\pi(\bar{p}_i + 1)}{n_i},$$

то она останется отделенной от нуля и через один сегмент влево и вправо. Теперь, если случится так, что $\bar{p}_i$ окажется равным p_1 , $p_1 + 1$, $p_2 - 1$ или p_2 , то, полагая $\bar{p}_i = p_1 + 2$ или $\bar{p}_i = p_2 - 2$, мы можем образовать новую последовательность $\{\tilde{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что точки $(\tilde{p}_i + 0.5)\pi/n_i$, в которых достигается экстремум функции $\sin n_i x$, принадлежат отрезку $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Тогда из (25), (37) и (40) следует неравенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|L_{n_i}(f, \cdot) - f\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \geq \frac{q}{4\pi} > 0.$$

Критерий равномерной сходимости доказан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 (ФОРМУЛЫ РАВНОСХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ).
Пусть $f \in C[0, \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям (2). Тогда во внутренних точках интервала $(0, \pi)$ равенство (4) следует из (3), (25), (33), (35) и (37). В концах отрезка $[0, \pi]$ равенство (4) проверяется непосредственной подстановкой.

Формула равносходимости в точке доказана.

Список литературы

- [1] G. A. A. Plana, “Sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites”, *Mem. Acad. Sci. Torino* (1), **25** (1820), 403–418.
- [2] É. Borel, “Sur l’interpolation”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **124** (1897), 673–676.
- [3] E. T. Whittaker, “On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **35**:2 (1914–1915), 181–194.
- [4] F. Stenger, “Approximations via Whittaker’s cardinal function”, *J. Approximation Theory*, **17**:3 (1976), 222–240.
- [5] А. С. Жук, В. В. Жук, “Некоторые ортогональности в теории приближения”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **314** (2004), 83–123; англ. пер.: A. S. Zhuk, V. V. Zhuk, “Some orthogonality in approximation theory”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **133**:6 (2006), 1652–1675.
- [6] F. Stenger, *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, Springer Ser. Comput. Math., **20**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] В. А. Котельников, “О пропускной способности “эфира” и проволоки в электро-связи”, *Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической рекон-струкции дела связи и развития слаботочной промышленности*, РККА, М., 1933.
- [8] J. J. Voss, “A sampling theorem with nonuniform complex nodes”, *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 235–254.
- [9] P. L. Butzer, G. Hinsen, “Reconstruction of bounded signals from pseudo-periodic, irregularly spaced samples”, *Signal Process.*, **17**:1 (1989), 1–17.
- [10] J. R. Higgins, “Sampling theorems and the contour integral method”, *Appl. Anal.*, **41**:1–4 (1991), 155–169.
- [11] G. Hinsen, “Irregular sampling of bandlimited L^p -functions”, *J. Approx. Theory*, **72**:3 (1993), 346–364.
- [12] K. Seip, “An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense”, *SIAM J. Appl. Math.*, **47**:5 (1987), 1112–1116.
- [13] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Pure Appl. Math., **93**, Academic Press, New York–London, 1980.
- [14] H. P. Kramer, “A generalized sampling theorem”, *J. Math. Phys.*, **38** (1959), 68–72.
- [15] A. I. Zayed, G. Hinsen, P. L. Butzer, “On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm–Liouville problems”, *SIAM J. Appl. Math.*, **50**:3 (1990), 893–909.
- [16] P. L. Butzer, R. L. Stens, “A modification of the Whittaker–Kotelnikov–Shannon sam-pling series”, *Aequationes Math.*, **28**:1 (1985), 305–311.
- [17] F. Stenger, “An analytic function which is an approximate characteristic function”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**:2 (1975), 239–254.
- [18] А. А. Привалов, “Критерий равномерной сходимости интерполяционных процес-сов Лагранжа”, *Изв. вузов. Матем.*, **5** (1986), 49–59; англ. пер.: A. A. Privalov, “Uniform convergence criteria for Lagrange interpolation processes”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:5 (1986), 65–77.
- [19] А. А. Привалов, *Теория интерполирования функций*, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1990.
- [20] А. А. Привалов, *Избранные труды*, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1997.
- [21] А. Ю. Трынин, *О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лаг-ранжа–Штурма–Лиувилля*, деп. в ВИНТИ 1763-В91.
- [22] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.

- [23] А. Ю. Трынин, “Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа–Штурма–Лиувилля”, *Тезисы докладов 10-ой Саратовской зимней школы* (Саратов, 2000), 2000.
- [24] В. П. Скляр, “О наилучшей равномерной sinc аппроксимации на конечном отрезке”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы (Саратов, 2006), 2006.
- [25] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964; англ. пер.: V. I. Smirnov, N. A. Lebedev, *Functions of a complex variable. Constructive theory*, MIT Press, Cambridge, MA, 1968.
- [26] Г. П. Неваи, “Замечания об интерполировании”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **25**:1–2 (1974), 123–144.
- [27] Г. П. Неваи, “О сходимости лагранжева интерполирования по узлам Лагерра”, *Publ. Math. Debrecen*, **20** (1973), 235–239.
- [28] J. Marcinkiewicz, “Quelques remarques sur l’interpolation”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **8** (1937), 127–130.
- [29] S. Lozinski, “On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes”, *Матем. сб.*, **14(56)**:3 (1944), 175–268.
- [30] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматлит, М., 1961; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Macmillan, New York; Pergamon Press, Oxford–London–New York, 1964.
- [31] С. Н. Бернштейн, “Несколько замечаний об интерполировании”, *Собрание сочинений. Том I. Конструктивная теория функций*, Изд-во Акад. наук СССР, М., 1952.
- [32] Г. И. Натансон, “Об одном интерполяционном процессе”, *Ученые записки Лен. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **166** (1958), 213–219.

А. Ю. Трынин (A. Yu. Trynin)
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: tayu@rambler.ru; trynin@cpk.sgu.ru

Поступила в редакцию
20.02.2006 и 20.11.2006