Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Хромов, Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 11, 115–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1534>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 06:39:12

УДК 517.984

А. П. Хромов**Интегральные операторы с ядрами,
разрывными на ломаных линиях**

В статье изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы первого рода на ломаных линиях, образованных из сторон и диагоналей квадратов, получаемых разбиением единичного квадрата на n^2 равных квадратов.

Библиография: 11 названий.

Введение

Интегральный оператор

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt \quad (1)$$

всегда можно свести к интегральному оператору в пространстве вектор-функций размерности n , где n – любое натуральное число.

В самом деле, если положить

$$z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^T, \quad g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T,$$

где

$$z_k(x) = y\left(\frac{k-1}{n} + x\right), \quad g_k(x) = f\left(\frac{k-1}{n} + x\right)$$

и T – знак транспонирования, то

$$z = Bg = \int_0^{1/n} B(x, t) g(t) dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad (2)$$

где

$$B(x, t) = (B_{ij}(x, t))_1^n, \quad B_{ij}(x, t) = A\left(\frac{i-1}{n} + x, \frac{j-1}{n} + t\right).$$

Обратно, от любого оператора (2) вышеуказанным способом приходим к (1). В [1], [2] интегральный оператор (1) изучался, когда само ядро $A(x, t)$ (или некоторые его производные) имели разрывы на диагонали $t = x$ и кодиагонали $t = 1 - x$. Вышеприведенный переход от (1) к (2) позволяет применить методы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00003).

этих работ и в тех случаях, когда ядро $A(x, t)$ допускает указанные разрывы на диагоналях в любых из квадратов

$$\Pi_{ij} = \left\{ x, t \mid \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \leq t \leq \frac{j}{n} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

(при этом допускаются разрывы и на некоторых границах этих квадратов). Как и в [1], [2], мы ограничимся изучением лишь равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) и в тригонометрический ряд Фурье. Другие задачи по сходимости разложений с.п.ф. могут быть изучены теми же приемами, что и в [3]–[5], уже на основании полученного в настоящей статье материала. Разумеется, теперь возникают значительные трудности, вызванные рассмотрением векторного случая. Поэтому в §1 мы рассмотрим случай лишь кусочно постоянных ядер. Этот класс еще замечателен тем, что соответствующая краевая задача в пространстве вектор-функций выписывается особенно просто. В §2 приводятся интересные частные случаи операторов из §1 при $n = 2$, когда условия теорем равносходимости выглядят особенно просто. В §3 рассмотрен общий случай разрывных ядер (для простоты считаем $n = 2$).

§ 1. Случай кусочно постоянных ядер

1. Разобьем каждый квадрат Π_{ij} диагоналями на четыре треугольника J_{ij}^k , $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} J_{ij}^1 &= \left\{ (x, t) \in \Pi_{ij} \mid x = \frac{i-1}{n} + \xi, t = \frac{j-1}{n} + \eta, \xi + \eta \leq \frac{1}{n}, \xi \geq \eta \right\}, \\ J_{ij}^2 &= \left\{ (x, t) \in \Pi_{ij} \mid \xi + \eta \leq \frac{1}{n}, \xi \leq \eta \right\}, \\ J_{ij}^3 &= \left\{ (x, t) \in \Pi_{ij} \mid \xi + \eta \geq \frac{1}{n}, \xi \geq \eta \right\}, \\ J_{ij}^4 &= \left\{ (x, t) \in \Pi_{ij} \mid \xi + \eta \geq \frac{1}{n}, \xi \leq \eta \right\}. \end{aligned}$$

Рассматриваем случай, когда $A(x, t) = a_{ij}^k$, если $(x, t) \in J_{ij}^k$, где a_{ij}^k – комплексные постоянные. Без ограничения общности можно считать (в противном случае переходим к более мелкой сетке), что либо $a_{ij}^1 = a_{ij}^2$, $a_{ij}^3 = a_{ij}^4$, либо $a_{ij}^1 = a_{ij}^3$, $a_{ij}^2 = a_{ij}^4$. Далее, рассекаем каждый квадрат Π_{ij} на четыре равных квадрата и, переходя, если нужно, к еще более мелкой сетке, считаем, что в каждом нечетном горизонтальном слое $(k-1)/n \leq x \leq (k-1)/n + 1/(2n)$, $0 \leq t \leq 1$, в квадратах, идя слева направо, разрывы могут быть следующими: в первом квадратике – по диагонали, во втором – по кодиагонали, в третьем – по диагонали, в четвертом – по кодиагонали и т.д., а в каждом четном слое $(k-1)/n + 1/(2n) \leq x \leq k/n$, $0 \leq t \leq 1$, разрывы могут быть следующими: в первом квадратике – по кодиагонали, во втором – по диагонали, в третьем – по кодиагонали и т.д. Тогда по аналогии с (2) имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если $y = Af$, то

$$z = \left[B_1 \int_0^x + B_2 \int_x^{1/(2n)} + B_3 \int_0^{1/(2n)-x} + B_4 \int_{1/(2n)-x}^{1/(2n)} \right] g(t) dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2n} \right], \quad (3)$$

где число компонент векторов $z(x)$ и $g(x)$ равно $2n$ и $z_k(x) = y((k-1)/(2n)+x)$, $g_k(x) = f((k-1)/(2n)+x)$, матрицы $B_s = (b_{ij}^s)_1^n$ состоят из блоков b_{ij}^s и $b_{ij}^s = \begin{pmatrix} a_{ij}^s & 0 \\ 0 & a_{ij}^3 \end{pmatrix}$, $s = 1, 2$, $b_{ij}^s = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{2s-4} \\ a_{ij}^{2s-5} & 0 \end{pmatrix}$, $s = 3, 4$.

ТЕОРЕМА 2. Если $y = R_\lambda(A)f = (E - \lambda A)^{-1}Af$ (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр), то

$$v'(x) = \lambda \mathcal{D}v(x) + \mathcal{D}m(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2n} \right], \quad (4)$$

$$P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{2n}\right) = 0, \quad (5)$$

где $v(x) = (v_1^T(x), v_2^T(x))^T$, $v_1(x) = z(x)$, $v_2(x) = z(1/(2n) - x)$, $m(x) = (g^T(x), g^T(1/(2n) - x))^T$, $z(x)$ и $g(x)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{ij})_1^2$, $\mathcal{D}_{11} = B_1 - B_2$, $\mathcal{D}_{12} = B_4 - B_3$, $\mathcal{D}_{21} = B_3 - B_4$, $\mathcal{D}_{22} = B_2 - B_1$, $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$. Матрицы Q_1 и Q_2 размерности $2n \times 2n$, $\text{rang}(Q_1, Q_2) = 2n$, определяются из соотношения

$$Q_1(B_2 + B_3) + Q_2(B_1 + B_4) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y = R_\lambda(A)f$, то по теореме 1 имеем

$$z(x) = \left[B_1 \int_0^x + B_2 \int_x^{1/(2n)} + B_3 \int_0^{1/(2n)-x} + B_4 \int_{1/(2n)-x}^{1/(2n)} \right] (\lambda z(t) + g(t)) dt. \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lambda(B_1 - B_2)z(x) + \lambda(B_4 - B_3)z\left(\frac{1}{2n} - x\right) \\ &\quad + (B_1 - B_2)g(x) + (B_4 - B_3)g\left(\frac{1}{2n} - x\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$z(0) = (B_2 + B_3) \int_0^{1/(2n)} [\lambda z(t) + g(t)] dt. \quad (8)$$

Из (7) получаем (4). Полагая в (6) $x = 1/(2n)$, получаем

$$v_2(0) = (B_1 + B_4) \int_0^{1/(2n)} [\lambda z(t) + g(t)] dt,$$

что в сочетании с (8) приводит к $Q_1 v_1(0) + Q_2 v_2(0) = 0$. Так как

$$v_1(0) = v_2\left(\frac{1}{2n}\right), \quad v_2(0) = v_1\left(\frac{1}{2n}\right),$$

то отсюда получаем

$$Q_2 v_1 \left(\frac{1}{2n} \right) + Q_1 v_2 \left(\frac{1}{2n} \right) = 0$$

и тем самым (5) установлено.

ТЕОРЕМА 3. Если $v(x)$ удовлетворяет системе (4), (5), соответствующая однородная система имеет только нулевое решение и $Q_1 + Q_2$ обратима, то $R_\lambda(A)$ существует и

$$R_\lambda(A)f = z_k \left(x - \frac{k-1}{2n} \right) \quad \text{при} \quad x \in \left[\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n} \right],$$

где $z_k(x)$ – компоненты вектора $z(x) = v_1(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$v_1(x) = v_2 \left(\frac{1}{2n} - x \right). \quad (9)$$

Положим $u(x) = (u_1^T(x), u_2^T(x))^T$, где

$$u_1(x) = v_2 \left(\frac{1}{2n} - x \right), \quad u_2(x) = v_1 \left(\frac{1}{2n} - x \right).$$

Тогда $u(x)$ также удовлетворяет системе (4), (5). Поэтому $u(x) \equiv v(x)$, а отсюда следует (9). Теперь интегрируем первые $2n$ уравнений из (4) по x от 0 до x . Тогда, используя (9), получаем

$$v_1(x) = v_1(0) + \lambda B v_1(x) + B g(x) - (B_2 + B_3) \int_0^{1/(2n)} [\lambda v_1(t) + g(t)] dt,$$

где B – оператор (3). Отсюда, полагая $x = 1/(2n)$ и учитывая, что $v_1(1/(2n)) = v_2(0)$, получаем

$$v_2(0) = v_1(0) + (B_1 + B_4 - B_2 - B_3) \int_0^{1/(2n)} [\lambda v_1(t) + g(t)] dt. \quad (10)$$

Кроме того, в силу (5) имеем

$$Q_1 v_1(0) + Q_2 v_2(0) = 0. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем

$$(Q_1 + Q_2) v_1(0) = -Q_2 (B_1 + B_4 - B_2 - B_3) \int_0^{1/(2n)} .$$

Отсюда однозначно находится $v_1(0)$.

Далее, утверждаем, что $w_1 = (B_2 + B_3) \int_0^{1/(2n)}$ удовлетворяет (6). В самом деле, w_1 и $w_2 = (B_1 + B_4) \int_0^{1/(2n)}$ удовлетворяют

$$Q_1 w_1 + Q_2 w_2 = 0. \quad (12)$$

Но

$$w_2 - w_1 = (B_1 + B_4 - B_2 - B_3) \int_0^{1/(2n)}. \quad (13)$$

Поэтому, находя w_2 из (13) и подставляя в (12), получаем

$$\begin{aligned} Q_1 w_1 + Q_2 \left[w_1 + (B_1 + B_4 - B_2 - B_3) \int_0^{1/(2n)} \right] \\ = (Q_1 + Q_2) w_1 + Q_2 (B_1 + B_4 - B_2 - B_3) \int_0^{1/(2n)} = 0. \end{aligned}$$

Значит, $w_1 = v_1(0)$. Тогда $v_2(0) = w_2 = (B_1 + B_4) \int_0^{1/(2n)}$. Таким образом, получили $v_1(x) = \lambda B v_1(x) + B g(x)$. Утверждаем, что уравнение $z(x) = \lambda B z(x)$ имеет только тривиальное решение. В самом деле, если бы существовало ненулевое решение $z(x)$, то $v(x) = (v_1^T(x), v_2^T(x))^T$, где $v_1(x) = z(x)$, $v_2(x) = z(1/(2n) - x)$, удовлетворяло бы системе (4), (5) при $g(x) \equiv 0$, а это противоречит условию доказываемой теоремы. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

2. Пусть выполняются условия теоремы 3 и $v(x)$ удовлетворяет системе (4), (5). Предположим, что все собственные значения $\omega_1, \dots, \omega_{4n}$ матрицы $\mathcal{D}$ различны, отличны от нуля, и пусть Γ – неособая матрица, диагонализующая $\mathcal{D}$, т.е. $\Gamma^{-1} \mathcal{D} \Gamma = \mathcal{D}_1 = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_{4n})$. Положим $v = \Gamma h$. Тогда

$$h'(x) = \lambda \mathcal{D}_1 h(x) + \Gamma^{-1} \mathcal{D} m(x) = \lambda \mathcal{D}_1 h(x) + m_1(x), \quad (14)$$

$$U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h\left(\frac{1}{2n}\right) = 0. \quad (15)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} g_j(x, t, \lambda) &= \begin{cases} \varepsilon(x, t) \exp \lambda \omega_j(x - t), & \text{если } \text{Re } \lambda \omega_j \leq 0, \\ -\varepsilon(t, x) \exp \lambda \omega_j(x - t), & \text{если } \text{Re } \lambda \omega_j > 0, \end{cases} \\ g(x, t, \lambda) &= \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_{4n}(x, t, \lambda)), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$.

Очевидно, что $g_\lambda m_1(x) = \int_0^{1/(2n)} g(x, t, \lambda) m_1(t) dt$ является решением системы (14), $m_1(x) = \Gamma^{-1} \mathcal{D} m(x)$.

ЛЕММА 1. Для решения $h(x) = h(x, \lambda)$ задачи (14), (15) имеет место формула

$$h(x, \lambda) = -Y(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/(2n)} U_x(g(x, t, \lambda)) m_1(t) dt + g_\lambda m_1(x), \quad (16)$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda \omega_1 x}, \dots, e^{\lambda \omega_{4n} x})$, $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$, U_x означает, что U применяется к $g(x, t, \lambda)$ по x .

Это утверждение получается так же, как и теорема 1 в [2].

Считаем, что нумерация $\omega_1, \dots, \omega_{4n}$ зависит от $\arg \lambda$ следующим образом:

$$\operatorname{Re} \lambda \omega_1 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda \omega_{2n} \geq 0 \geq \operatorname{Re} \lambda \omega_{2n+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda \omega_{4n} \quad (17)$$

(это еще является и дополнительным требованием на ω_k). Рассмотрим подробно $U(h)$. Здесь первые $2n$ форм зависят только от $h(0)$, а $2n$ последних – от $h(1/(2n))$, т.е. $U(h) = (U_1(h), \dots, U_{4n}(h))^T$, где $U_s(h) = \sum_{j=1}^{4n} a_{sj} h_j(0)$, $U_{s+2n}(h) = \sum_{j=1}^{4n} b_{sj} h_j(1/(2n))$, $s = 1, \dots, 2n$.

Поэтому

$$\det \Delta(\lambda) = \sum_{j_1, \dots, j_{2n}} \Delta_{j_1, \dots, j_{2n}} \exp \mu(\omega_{j_1} + \dots + \omega_{j_{2n}}), \quad \mu = \frac{1}{2n} \lambda, \quad (18)$$

где $\Delta_{j_1, \dots, j_{2n}} = \pm \det \|a_{s\bar{j}_i}\|_{s,i=1}^{2n} \det \|b_{sj_i}\|_{s,i=1}^{2n}$, $j_1 < \dots < j_{2n}$, $\bar{j}_1 < \dots < \bar{j}_{2n}$ и $(j_1, \dots, j_{2n}, \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{2n})$ есть некоторая перестановка $(1, 2, \dots, 4n)$. Требуем, чтобы

$$\Delta_{1, \dots, 2n} \neq 0 \quad (19)$$

при каждом фиксированном $\arg \lambda$. Из (18) следует, что нули $\det \Delta(\lambda)$ (а они являются собственными значениями краевой задачи (14), (15)) при больших $|\lambda|$ находятся в полосах, границы которых параллельны некоторым лучам, исходящим из точки $\lambda = 0$, причем в каждой полосе в любом прямоугольнике единичной длины (т.е. две стороны являются границами полосы, а две другие стороны отстоят друг от друга на единицу) число нулей $\det \Delta(\lambda)$ ограничено числом, не зависящим от прямоугольника. Тогда известно [6; гл. 3, § 1, теорема 7], что если удалить все собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ , то в получившейся области S_δ справедлива оценка

$$|\det \Delta(\lambda)| \geq c |\exp \mu(\omega_1 + \dots + \omega_{2n})|, \quad (20)$$

где $c > 0$ и зависит только от δ .

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \|g_\lambda m_1(x)\|_\infty &= O(\|f\|_1), \\ \|g_\lambda \chi(x)\|_\infty &= O(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

где компоненты вектор-функции $\chi(x)$ являются характеристическими функциями отрезков из $[0, 1/(2n)]$, $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$, $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $L_\infty[0, 1]$.

Эта лемма очевидна.

ЛЕММА 3. *Если $x \in [\varepsilon, 1/(2n) - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1/(4n))$, то*

$$\|Y(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda)\|_{[\varepsilon, 1/(2n) - \varepsilon]} = O\left(\exp\left(-\varepsilon \sum_1^{2n} \operatorname{Re} \lambda \omega_s\right)\right) \quad (21)$$

и $\|\cdot\|_{[\varepsilon, 1/(2n) - \varepsilon]}$ есть норма в $C[\varepsilon, 1/(2n) - \varepsilon]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda)) = (\Delta_{sk})_1^{4n},$$

где $\Delta_{sk} = U_s(Y_k)$, Y_k – k -й столбец матрицы $Y(x, \lambda)$. Поэтому $\Delta_{sk} = a_{sk}$ при $s \leq 2n$ и $\Delta_{sk} = b_{s-2n,k} e^{\mu\omega_k}$ при $s \geq 2n+1$. Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4n} a_{sj} x_{jk} &= \delta_{sk}, & s = 1, \dots, 2n, & \quad k = 1, \dots, 4n, \\ \sum_{j=1}^{4n} b_{s-2n,j} e^{\mu\omega_j} x_{jk} &= \delta_{sk}, & s = 2n+1, \dots, 4n, & \quad k = 1, \dots, 4n, \end{aligned}$$

где δ_{sk} – символ Кронекера и $\Delta^{-1}(\lambda) = (x_{jk})_1^{4m}$. Отсюда с учетом оценки (20) получаем

$$\begin{aligned} x_{sk} &= O(e^{-\mu\omega_j}), & s = 1, \dots, 2n, & \quad k = 1, \dots, 4n, \\ x_{sk} &= O(1), & s = 2n+1, \dots, 4n, & \quad k = 1, \dots, 4n, \end{aligned}$$

и утверждение леммы становится очевидным.

Рассмотрим краевую задачу:

$$u'(x) = \lambda \mathcal{U}_1 u(x) + m_1(x), \quad U_0(u) = u(0) - u\left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$$

Для ее решения имеет место формула (16) с заменой U на U_0 , и для $Y(x, \lambda) \times \Delta_0^{-1}(\lambda)$ справедлива (21) в S_δ (правда теперь из S_δ дополнительно удалены δ -окрестности нулей $\det \Delta_0(\lambda)$), $\Delta_0(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$.

ЛЕММА 4. Если $\varepsilon \in (0, 1/(4n))$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [h(x, \lambda) - u(x, \lambda)] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/(2n)-\varepsilon]} = 0$$

(здесь окружности $|\lambda| = r$ целиком находятся в S_δ).

Утверждение леммы получается привлечением лемм 1–3 такими же рассуждениями, как в лемме 13 из [2].

ТЕОРЕМА 4 (равносходимости). При выполнении вышеуказанных условий для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^{4n} \gamma_{kj} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(m_{1j}, x - \frac{k-1}{2n} \right) \right\|_{[(k-1)/(2n)+\varepsilon, k/(2n)-\varepsilon]} &= 0, \\ k &= 1, \dots, 2n, \end{aligned}$$

где $\varepsilon \in (0, 1/(4n))$, $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, γ_{kj} – компоненты матрицы Γ : $\Gamma^{-1} \mathcal{U} \Gamma = \mathcal{U}_1 = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_{4n})$, $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора $u'(x)$, $u(0) = u(1/(2n))$ (u – скалярная функция) для собственных значений λ_k^0 , для которых $|\lambda_k^0| < r$, m_{1j} – компоненты $m_1(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [(k-1)/(2n)+\varepsilon, k/(2n)-\varepsilon]$. Тогда по теореме 3

$$R_\lambda(A)f = \sum_{j=1}^{4n} \gamma_{kj} h_j \left(x - \frac{k-1}{2n}, \lambda \right).$$

Поэтому по лемме 4

$$\begin{aligned} S_r(f, x) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \sum_{j=1}^{4n} \gamma_{kj} u_j \left(x - \frac{k-1}{2n}, \lambda \right) d\lambda + o(1) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \gamma_{kj} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(m_{1j}, x - \frac{k-1}{2n} \right) + o(1). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $|\omega_j| = d$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_{rd} \left(f_k, x - \frac{k-1}{2n} \right) \right\|_{[(k-1)/(2n)+\varepsilon, k/(2n)-\varepsilon]} = 0.$$

§ 2. Частные случаи

Если для дифференциальных операторов регулярность краевых условий охватывает практически все случаи, когда имеют место такие, например, важные факты, как равносходимость и равносуммируемость разложений по собственным функциям с разложениями в тригонометрические ряды Фурье, базисность по Риссу системы с.п.ф., то из-за большого числа различных случаев теорема 4 (условиями регулярности Биркгофа являются (19)) далеко не полностью охватывает возможные случаи справедливости теоремы равносходимости. Кроме того, если точно известно, в каком квадрате берется диагональ, а в каком – кодиагональ, то не требуется дополнительно дробить сетку, и потому дифференциальная система может быть гораздо меньшей размерности. Мы продемонстрируем это на некоторых интересных частных случаях.

1. Пусть $A(x, t) = 1$, если $\{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\} \cup \{x - 1/2 \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}$ (t – ось абсцисс, x – ось ординат), $A(x, x) = 0$ в оставшейся области. Если бы мы пользовались общими соображениями из § 1, то пришли бы к системе восьми уравнений. В действительности их много меньше. Более того, именно в этом случае нашу задачу можно свести к уже рассмотренной. В самом деле, если $y = Af$, то $y(x) = y(1-x)$. Поэтому если к тому же считать, что и $f(x) = f(1-x)$, то наш оператор сводится к $z(x) = 2 \int_0^{1/2-x} g(t) dt$, $x \in [0, 1/2]$, где $z(x) = y(1/2 - x)$, $g(t) = f(1/2 - t)$. Поэтому по теореме 4 из [2] имеет место

ТЕОРЕМА 5. Если $f(x) \in L[0, 1]$, $f(x) = f(1-x)$, то при $\varepsilon \in (0, 1/4)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{2r}(f, x)\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{2r}(f, 1-x)\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 4 при $n = 1$.

2. Пусть $A(x, t) = 1$, если $\{0 \leq t \leq x, 0 \leq x \leq 1/2\} \cup \{0 \leq t \leq 1/2, 1/2 \leq x \leq 1\} \cup \{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A(x, x) = 0$ при остальных x и t . Тогда если $y = Af$, то аналогично формуле (3) имеем

$$z(x) = \left[B_1 \int_0^x + B_2 \int_x^{1/2} + B_4 \int_{1/2-x}^{1/2} \right] g(t) dt,$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$z(x)$ и $g(x)$ те же, что и в теореме 1 при $n = 1$. Аналогично теоремам 2 и 3 получаем, что если $y = R_\lambda f$, то

$$v'(x) = \lambda \mathcal{D}v(x) + \mathcal{D}m(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (22)$$

где $\mathcal{D} = (d_{ij})_1^4$, $d_{11} = d_{42} = -d_{24} = -d_{33} = 1$, а остальные $d_{ij} = 0$, $v(x)$, $m(x)$, P_0 и P_1 – те же, что и в теореме 2 при $n = 1$ $\left(Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Если $v(x)$ удовлетворяет (22) и $-\lambda^2$ не является собственным значением оператора $y''(x)$, $y(0) = y'(1/2) = 0$ ($y(x)$ – скалярная функция), то R_λ существует и $R_\lambda f = z_k(x - (k-1)/2)$ при $x \in [(k-1)/2, k/2]$, $k = 1, 2$, где $z_1(x)$, $z_2(x)$ – две первые компоненты вектора $v(x)$.

Приступаем к задаче разложения по с.п.ф. Подробно запишем систему (22):

$$\begin{aligned} z'_1(x) &= \lambda z_1(x) + f_1(x), & z'_2(x) &= -\lambda z_4(x) - f_4(x), \\ z'_3(x) &= -\lambda z_3(x) - f_3(x), & z'_4(x) &= \lambda z_2(x) + f_2(x), \end{aligned} \quad (23)$$

$$z_1(0) = z_2(0) - z_3(0) = z_3\left(\frac{1}{2}\right) = z_1\left(\frac{1}{2}\right) - z_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (24)$$

где $z_k(x)$ ($f_k(x)$) – компоненты $v(x)$ ($m(x)$). Отсюда видно, что

$$z_1(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

Но $z_1(x) = R_\lambda f$ при $x \in [0, 1/2]$. Значит, все с.п.ф. при $x \in [0, 1/2]$ равны нулю и поэтому целесообразно считать, что и $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, 1/2]$. Тогда из (23), (24) получаем $z_1(x) \equiv z_3(x) = 0$, и поэтому система (23), (24) переходит в

$$z'_2(x) = -\lambda z_4(x) - f_4(x), \quad z'_4(x) = \lambda z_2(x) + f_2(x), \quad z_2(0) = z_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (25)$$

Исследуя (25) как при доказательстве теоремы 4, получаем

ТЕОРЕМА 6. Если $f(x) \in L[0, 1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_r\left(f, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ та же, что и в теореме 5.

3. Разобьем квадрат $\{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ на четыре треугольника диагоналями $t = x, t = 1 - x$. Пусть $A(x, t)$ принимает постоянное значение в каждом из треугольников, точнее, $A(x, t) = \alpha_1$ в треугольнике со стороной $\{t = 0, 0 \leq x \leq 1\}$, $A(x, t) = \alpha_2$ в треугольнике со стороной $\{0 \leq t \leq 1, x = 0\}$, $A(x, t) = \alpha_3$ в треугольнике со стороной $\{0 \leq t \leq 1, x = 1\}$, $A(x, t) = \alpha_4$ в треугольнике со стороной $\{t = 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Пользуясь спецификой данного оператора, проведем иные, более простые рассуждения, чем по схеме предыдущего параграфа. Если $y = Af$, то

$$y(x) = \Phi_1(f, x), \quad y\left(\frac{1}{2} + x\right) = \Phi_2\left(f, \frac{1}{2} - x\right), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (26)$$

где

$$\Phi_1(f, x) = \left[\alpha_1 \int_0^x + \alpha_2 \int_x^{1-x} + \alpha_4 \int_{1-x}^1 \right] f(t) dt,$$

$\Phi_2(f, x)$ отличается от $\Phi_1(f, x)$ тем, что α_2 заменяется на α_3 .

ЛЕММА 5. Если $y = R_\lambda f$, то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, удовлетворяет системе

$$z'(x) = \lambda \mathcal{D}z(x) + \mathcal{D}g(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad (27)$$

$$z_1(0) = \alpha_2 \int_0^1 [\lambda y(t) + f(t)] dt, \quad z_2(0) = \alpha_3 \int_0^1 [\lambda y(t) + f(t)] dt, \quad (28)$$

где $\mathcal{D} = (d_{ij})_1^2$, $d_{11} = \alpha_1 - \alpha_2$, $d_{12} = \alpha_4 - \alpha_2$, $d_{21} = \alpha_1 - \alpha_3$, $d_{22} = \alpha_4 - \alpha_3$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1-x)$.

Утверждение леммы легко следует из (26).

Обратимся к краевым условиям. Если $|\alpha_2| + |\alpha_3| > 0$, то из (28) получаем

$$\alpha_3 z_1(0) = \alpha_2 z_2(0) = 0. \quad (29)$$

Если $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то $z_1(0) = z_2(0) = 0$. Так как $y(1/2 - 0) = y(1/2 + 0)$, то получаем еще одно краевое условие

$$z_1\left(\frac{1}{2}\right) = z_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (30)$$

ЛЕММА 6. Если $\alpha_2 \neq \alpha_3$ и система (27), (29), (30) при $f(x)$ имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = y(x)$, где $y(x) = z_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$, $y(x) = z_2(1-x)$ при $x \in [1/2, 1]$, а $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют системе (27), (29), (30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируем систему (27) от нуля до x . Получим

$$\begin{aligned} z_1(x) = z_1(0) + \lambda \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^x z_1(t) dt + (\alpha_4 - \alpha_2) \int_0^x z_2(t) dt \right] \\ + \Phi_1(f, x) - \Phi_1(f, 0), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} z_2(x) = z_2(0) + \lambda \left[(\alpha_1 - \alpha_3) \int_0^x z_1(t) dt + (\alpha_4 - \alpha_3) \int_0^x z_2(t) dt \right] \\ + \Phi_2(f, x) - \Phi_2(f, 0). \end{aligned} \quad (32)$$

Так как $\int_0^x z_1(t) dt = \int_0^x y(t) dt$, $\int_0^x z_2(t) dt = \int_{1-x}^1 y(t) dt$, то из (31), (32) получаем

$$\begin{aligned} z_1(x) &= z_1(0) + \Phi_1(\lambda y + f, x) - \Phi_1(\lambda y + f, 0), \\ z_2(x) &= z_2(0) + \Phi_2(\lambda y + f, x) - \Phi_2(\lambda y + f, 0). \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (30) получаем

$$z_1(0) - z_2(0) = (\alpha_2 - \alpha_3) \int_0^1 [\lambda y(t) + f(t)] dt. \quad (33)$$

Рассматривая теперь (29) и (33) как систему уравнений относительно $z_1(0)$, $z_2(0)$, получаем, что выполняется (28), а тогда (31), (32) переходят в $z_j(x) = \Phi_j(\lambda y + f, x)$, $j = 1, 2$, т.е. $y = \lambda Ay + Af$. А так как однородное уравнение $y = \lambda Ay$ имеет только нулевое решение, то лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то оператор A вольтерров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = \lambda Ay$. Тогда $y(x) = y(1-x)$. Пусть $x \in [0, 1/2]$. Тогда $y(x) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_4) \int_0^x y(t) dt$. Отсюда $y(x) \equiv 0$ и лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай $\alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Так как в этом случае $\Phi_1(f, x) = \Phi_2(f, x)$, то $y(x) = y(1-x)$ и система (27), (28) переходит в

$$z'(x) = \lambda az(x) + af(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad (34)$$

$$z(0) = 2 \int_0^{1/2} [\lambda z(t) + f(t)] dt, \quad (35)$$

где теперь $z(x) = y(x)$, $a = \alpha_1 + \alpha_4 - 2$ и при этом еще считаем, что $f(x) = f(1-x)$. Если $a = 0$, то $z(x)$ – константа, а тогда из (35) получаем

$$R_\lambda f = z(x) = \frac{2}{1-\lambda} \int_0^{1/2} f(t) dt,$$

т.е. этот случай, как и $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, не интересен.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда (35) с помощью (34) преобразуется к виду

$$z(0) = \frac{2}{a} \int_0^{1/2} z'(t) dt.$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{2}{a}\right) z(0) = \frac{2}{a} z\left(\frac{1}{2}\right).$$

Если $1 + 2/a = 0$, т.е. $a = -2$, то оператор A опять вольтерров. Поэтому ограничимся случаем $a \neq 0$, $a \neq -2$. Из вышеизложенного следует

ЛЕММА 8. Если $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $a \neq 0$, $a \neq -2$, то для $y = R_\lambda f$ при $f(x) \in L[0, 1]$ и $f(x) = f(1-x)$ имеет место

$$\begin{aligned} y(x) &= y(1-x), \\ y'(x) &= \lambda a y(x) + a f(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left(1 + \frac{2}{a}\right) y(0) = \frac{2}{a} y\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

ЛЕММА 9. Если выполнены условия леммы 11, $y(x)$ удовлетворяет (36) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует, при $f(x) = f(1-x)$ имеет место $R_\lambda f(x) = R_\lambda f(1-x)$ и $R_\lambda f(x) = y(x)$ при $x \in [0, 1/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(x)$ есть решение (36). Тогда

$$y(x) = a \int_0^x [\lambda y(t) + f(t)] dt + y(0). \quad (37)$$

Положим $y(x) = y(1-x)$ при $x \in [1/2, 1]$. Тогда

$$\int_0^x y(t) dt = \int_{1-x}^1 y(t) dt, \quad \int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f(t) dt.$$

Поэтому из (37) имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[\alpha_1 \int_0^x + \alpha_4 \int_{1-x}^1 - \int_0^x - \int_{1-x}^1 \right] [\lambda y(t) + f(t)] dt + y(0) \\ &= \Phi(\lambda y + f, x) + y(0) - \int_0^1 [\lambda y(t) + f(t)] dt, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\Phi(f, x) = \Phi_1(f, x)$ при $\alpha_2 = 1$. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= 2 \int_0^{1/2} f(t) dt, \quad \int_0^1 y(t) dt = 2 \int_0^{1/2} y(t) dt, \\ \Phi\left(\lambda y + f, \frac{1}{2}\right) &= (\alpha_1 + \alpha_4) \int_0^{1/2} [\lambda y(t) + f(t)] dt, \end{aligned}$$

то из (38) получаем при $x = 1/2$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) - y(0) = a \int_0^{1/2} [\lambda y(t) + f(t)] dt. \quad (39)$$

Из (39) и (36) получаем $y(0) = 2a \int_0^{1/2} [\lambda y(t) + f(t)] dt$ и тем самым из (38) получаем $y = \lambda A y + A f$. Далее, уравнение $y = \lambda A y$ имеет только нулевое решение, и тем самым лемма доказана.

На основании лемм 8 и 9, как и в случае теоремы 4, получаем

ТЕОРЕМА 7. Если $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $a = \alpha_1 + \alpha_4 - 2$ не равно 0 и -2 , то для любой $f(x) \in L[0, 1]$, для которой $f(x) = f(1 - x)$, и для любого $\varepsilon \in (0, 1/4)$ имеют место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{r|a|}(f, x)\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{r|a|}(f, 1 - x)\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ та же, что и в теореме 4 при $n = 1$.

В случае $\alpha_2 \neq \alpha_3$ на основании лемм 5 и 6, как и в случае теоремы 4, можно получить теорему равносходимости, однако не во всех случаях. Так, если $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = 1$, то матрица $\mathcal{D}$ вырождена, а оператор A вольтерров. В самом деле, пусть $y = \lambda Ay$. Тогда

$$y(x) = \lambda \int_x^{1-x} y(t) dt, \quad y\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lambda \int_{1/2-x}^{1/2+x} y(t) dt. \quad (40)$$

Отсюда $y(1/2 - 0) = y(1/2 + 0)$. Дифференцируем (40):

$$y'(x) = -\lambda[y(1-x) + y(x)], \quad y'\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lambda\left[y\left(\frac{1}{2} + x\right) + y\left(\frac{1}{2} - x\right)\right]. \quad (41)$$

Во втором уравнении в (41) заменим x на $1/2 - x$ и сложим с первым. Тогда $y'(x) + y'(1-x) = 0$. Значит, $y(x) - y(1-x) = c$. Полагая здесь $x = 1/2$, получаем $c = 0$, т.е. $y(x) = y(1-x)$ и тем самым первое уравнение в (41) примет вид $y'(x) = -2\lambda y(x)$, а так как $y(1/2) = 0$, то отсюда $y(x) \equiv 0$.

4. Пусть $A(x, t) = 1$, если $\{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\} \cup \{0 \leq t \leq x, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $A(x, x) = 0$ в остальных случаях. Если $y = Af$, то

$$y(x) = \int_0^{1/2-x} f(t) dt, \quad y\left(\frac{1}{2} + x\right) = \int_0^{1/2+x} f(t) dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

ЛЕММА 10. Если $y \in R_\lambda f$, то

$$z'(x) = \lambda \mathcal{D}z(x) + \mathcal{D}g(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad z_1(0) - z_2(0) = z_3(0) = z_1(1/2) = 0, \quad (42)$$

где

$$z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^T, \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))^T,$$

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right), \quad z_3(x) = y\left(\frac{1}{2} - x\right),$$

$$g_1(x) = f(x), \quad g_2(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right), \quad g_3(x) = f\left(\frac{1}{2} - x\right),$$

$\mathcal{D} = (d_{ij})_1^3$, $d_{31} = d_{22} = -d_{13} = 1$, а остальные $d_{ij} = 0$.

ЛЕММА 11. Если $z(x)$ удовлетворяет (42) и краевая задача

$$u''(x) = -\lambda^2 u(x), \quad u'(0) = u\left(\frac{1}{2}\right), \quad (43)$$

где $u(x)$ – скалярная функция, имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = y(x)$, где $y(x) = z_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$, $y(x) = z_2(x - 1/2)$ при $x \in [1/2, 1]$.

Используя только первое и третье уравнения из системы (42) и краевые условия $z_3(0) = z_1(1/2) = 0$, как и в случае теоремы 4, получаем

ТЕОРЕМА 8. Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_{[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ из теоремы 5.

Пусть теперь $x \in [1/2, 1]$. В этом случае из второго уравнения в (42) и граничного условия $z_1(0) = z_2(0)$ по лемме 11 получаем

$$R_\lambda f = z_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = R_\lambda f|_{x=0} e^{\lambda(x-1/2)} + \int_{1/2}^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt,$$

и тем самым резольвента при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ имеет экспоненциальный рост. Из первого и третьего уравнений системы (42) при $g(x) \equiv 0$ следует, что собственные функции оператора A при $x \in [1/2, 1]$ суть $e^{\lambda_k x}$, где λ_k – собственные числа упомянутой системы для $z_1(x)$ и $z_3(x)$, т.е. $\lambda_k = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и тем самым здесь наблюдается та же ситуация, что и в случае дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями [7], [8], т.е. могут разлагаться лишь аналитические функции. Поэтому этот случай требует специального серьезного исследования, и мы его рассматривать сейчас не будем.

5. Пусть $A(x, t)$ при $0 \leq x \leq 1/2$ то же, что и в п. 4, а при $1/2 \leq x \leq 1$ $A(x, t) = 1$ при $0 \leq t \leq 3/2 - x$ и $A(x, t) = 0$ при $3/2 - x \leq t \leq 1$. В этом случае для $y = R_\lambda f$ имеем

$$y(x) = \int_0^{1/2-x} [\lambda y(t) + f(t)] dt, \quad y\left(\frac{1}{2} + x\right) = \int_0^{1-x} [\lambda y(t) + f(t)] dt, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

и поэтому

$$z'(x) = \lambda \mathcal{D}z(x) + \mathcal{D}g(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (44)$$

$$z_1(0) = z_4(0) = \int_0^{1/2}, \quad z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = \int_0^1, \quad (45)$$

где компоненты $z(x)$ суть

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad z_3(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right), \quad z_4(x) = y(1 - x),$$

а $g(x)$ имеет те же компоненты, что и $z(x)$ с заменой $y(x)$ на $f(x)$, $\mathcal{D} = (d_{ij})_1^4$, $d_{21} = -d_{12} = -d_{34} = d_{43} = 1$, а остальные $d_{ij} = 0$.

Из (45) получаются краевые условия

$$z_2(0) = z_1(0) - z_4(0) = 0, \quad (46)$$

и к ним следует добавить

$$z_1\left(\frac{1}{2}\right) = z_2\left(\frac{1}{2}\right) - z_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (47)$$

Так же как и при доказательстве теоремы 3, получаем, что если $z(x)$ удовлетворяет (44), (46), (47) и краевая задача (43) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$, $R_\lambda f = z_3(x - 1/2)$ при $x \in [1/2, 1]$.

Приступаем теперь к задаче разложения по собственным функциям. Так как $z_1(x)$, $z_2(x)$ те же, что и $z_1(x)$, $z_3(x)$ в п. 4, то теорема 8 имеет место и сейчас. Теперь рассмотрим случай $x \in [1/2, 1]$. Имеем из (44), (46), (47)

$$z'_3(x) = -\lambda z_4(x) - g_4(x), \quad z'_4(x) = \lambda z_3(x) + g_3(x), \quad (48)$$

$$z_4(0) = z_3\left(\frac{1}{2}\right) = R_\lambda f|_{x=0}. \quad (49)$$

ЛЕММА 12. Если $x \in [1/2, 1]$ и $\operatorname{Re} \lambda i \geq 0 \geq \operatorname{Re}(-\lambda i)$, то

$$\begin{aligned} R_\lambda f = & \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[(1 + ie^{-\lambda i/2}) R_\lambda f|_{x=0} + \int_0^{1/2} e^{-\lambda i(1+t)/2} m_1(t) dt \right. \\ & + i \int_0^{1/2} e^{-\lambda i(1/2-t)} m_2(t) dt \left. \right] e^{\lambda i(x-1/2)} - \frac{i}{\Delta(\lambda)} \left[(e^{\lambda i/2} + i) R_\lambda f|_{x=0} \right. \\ & - i \int_0^{1/2} e^{\lambda i(1/2-t)} m_1(t) dt - \int_0^{1/2} e^{-\lambda i(1/2-t)} m_2(t) dt \left. \right] e^{-\lambda i(x-1/2)} \\ & - \int_{x-1/2}^{1/2} e^{\lambda i(x-1/2-t)} m_1(t) dt - i \int_0^{x-1/2} e^{-\lambda i(x-1/2-t)} m_2(t) dt, \quad (50) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m = (m_1, m_2)^T &= \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (g_3, g_4)^T, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta(\lambda) e &= e^{\lambda i/2} + e^{-\lambda i/2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (48) $z = \Gamma v$, где теперь $z(x) = (z_3(x), z_4(x))^T$. Тогда $v' = \lambda \mathcal{D}_1 v + m(x)$, где $\mathcal{D}_1 = \operatorname{diag}(i, -i)$. Эта система представляет собой два не связанных между собой уравнения. Поэтому

$$v_1(x) = c_1 e^{\lambda i x} - \int_x^{1/2} e^{\lambda i(x-t)} m_1(t) dt, \quad v_2(x) = c_2 e^{-\lambda i x} + \int_0^x e^{-\lambda i(x-t)} m_2(t) dt, \quad (51)$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, c_1 и c_2 — постоянные числа. Так как $z_3(x) = v_1(x) - iv_2(x)$, $z_4(x) = -iv_1(x) + v_2(x)$, то для нахождения c_1 и c_2 в силу (49) получаем систему

$$\begin{aligned} z_3\left(\frac{1}{2}\right) &= c_1 e^{\lambda i/2} - i c_2 e^{-\lambda i/2} - i \int_0^{1/2} e^{-\lambda i(1/2-t)} m_2(t) dt = R_\lambda f|_{x=0}, \\ z_4(0) &= -i c_1 + c_2 + i \int_0^{1/2} e^{-\lambda i t} m_1(t) dt = R_\lambda f|_{x=0}. \end{aligned}$$

Находим отсюда c_1 и c_2 , подставляем в (51) и для $R_\lambda f = v_1(x-1/2) - iv_2(x-1/2)$ получаем (50).

Обозначим через $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ решения краевой задачи

$$u'(x) = \lambda \mathcal{D}_1 u(x) + m(x), \quad u(0) = u\left(\frac{1}{2}\right).$$

Тогда из аналога (50) в этом случае получаем

$$\begin{aligned} u_1\left(x - \frac{1}{2}\right) - i u_2\left(x - \frac{1}{2}\right) &= e^{\lambda i(x-1/2)} (1 - e^{\lambda i/2})^{-1} \int_0^{1/2} e^{-\lambda i t} m_1(t) dt \\ &\quad - i e^{-\lambda i(x-1/2)} (1 - e^{-\lambda i/2})^{-1} \int_0^{1/2} e^{-\lambda i(1/2-t)} m_2(t) dt \\ &\quad - \int_{x-1/2}^{1/2} e^{\lambda i(x-1/2-t)} m_1(t) dt \\ &\quad - i \int_0^{x-1/2} e^{-\lambda i(x-1/2-t)} m_2(t) dt, \quad x \in [1/2, 1]. \end{aligned}$$

Тогда подобно лемме 4 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 13. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} \Omega(x, \lambda) d\lambda \right\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\Omega(x, \lambda) = R_\lambda f(x) - u_1(x-1/2) + i u_2(x-1/2)$.

ТЕОРЕМА 9. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_r\left(g_3, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_r(f, x)$ из теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left[u_1\left(x - \frac{1}{2}\right) - i u_2\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|=r} d\lambda \int_0^{1/2} G\left(x - \frac{1}{2}, t, \lambda\right) [m_1(t) + i m_2(t)] dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} d\lambda \int_0^{1/2} G\left(x - \frac{1}{2}, t, \lambda\right) g_3(t) dt = \sigma_r\left(f_3, x - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

где $G(x, t, \lambda)$ – функция Грина оператора $y'(x) - \lambda y(x)$, $y(0) - y(1/2) = 0$ ($y(x)$ – скалярная функция). Отсюда по лемме 13 получаем утверждение теоремы.

§ 3. Общий случай разрывных ядер

1. Рассмотрим сначала задачу обращения оператора A . Как указано во введении, она эквивалентна задаче обращения оператора B . Этой последней мы и займемся. Для простоты изложения ограничимся случаем $n = 2$. Будем считать, что компоненты $B_{ij}(x, t)$ матрицы $B(x, t)$ имеют вид $B_{ij}(x, t) = B_{1;ij}(x, t) + B_{2;ij}(x, t)$, где $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B_{1;ij} \left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} B_{2;ij} \right)$ ($k + l \leq 2$, причем если $k + l = 2$, то $k = l = 1$) непрерывны, кроме, быть может, линии $t = x$ ($t + x = 1/2$). При подходе к каждой такой линии с любой стороны $B_{1;ij}(x, t)$ и $B_{2;ij}(x, t)$ принимают постоянные значения. Кроме того, считаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{1;ij}(x, x \pm 0), \quad \frac{\partial}{\partial x} B_{2;ij} \left(x, \frac{1}{2} - x \pm 0 \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} B_{s;ij}(x, \gamma), \quad s = 1, 2, \quad \gamma = 0, \frac{1}{2},$$

непрерывно дифференцируемы.

Дифференцируя (2), имеем

$$z'(x) = P_1 g(x) + P_2 g \left(\frac{1}{2} - x \right) + \int_0^{1/2} B_x(x, t) g(t) dt, \quad (52)$$

где P_1 и P_2 – постоянные матрицы 2×2 и $B_x(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, t) \Big|_{x=\xi}$. Поменяв в (52) x на $1/2 - x$, получим

$$z' \left(\frac{1}{2} - x \right) = P_2 g(x) + P_1 g \left(\frac{1}{2} - x \right) + \int_0^{1/2} B_x \left(\frac{1}{2} - x, t \right) g(t) dt. \quad (53)$$

Предположим, что блочная матрица $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$ обратима. Тогда

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix},$$

где Q_i – также блочные матрицы 2×2 . Из (52), (53) имеем

$$Pz'(x) = g(x) + B_1 g(x), \quad (54)$$

где

$$Pz'(x) = Q_1 z'(x) + Q_2 z' \left(\frac{1}{2} - x \right), \quad B_1 g(x) = \int_0^{1/2} B_1(x, t) g(t) dt, \\ B_1(x, t) = PB_x(x, t) = Q_1 B_x(x, t) + Q_2 B_x \left(\frac{1}{2} - x, t \right).$$

Представим оператор B_1 в пространстве $L_2^2[0, 1/2]$ в виде $B_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V – конечномерный:

$$Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \varphi_k(x),$$

где $\{\psi_k\}_1^m$, $\{\varphi_k\}_1^m$ – линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 2, причем $\varphi_k(x)$ – достаточно гладкие функции (например, вектор-функции полной ортогональной системы, образованной из тригонометрической),

$$(g, \psi_k) = \sum_{j=1}^2 \int_0^{1/2} g_j(t) \psi_k^j(t) dt,$$

$\psi_k^i(t)$ – компоненты $\psi_k(t)$. Тогда из (54) получим

$$(E + W)^{-1} Pz'(x) = g(x) + (E + W)^{-1} Vg(x). \quad (55)$$

ЛЕММА 14. Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда

$$\text{rang } M = m,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{1/2} B(0, t) \tilde{\psi}^T(t) dt \end{pmatrix},$$

E – единичная матрица $m \times m$, $(\tilde{\varphi}, \psi) = (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)_1^m$, $\tilde{\varphi}_k = (E + W)^{-1} \varphi_k$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Bg = 0$. Тогда (55) (при $z(x) \equiv 0$) переходит в

$$g(x) + \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \tilde{\varphi}_k(x) = 0. \quad (56)$$

Отсюда $g(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \tilde{\varphi}_k(x)$. Поэтому из (56) получаем

$$\gamma_k + \sum_{j=1}^m \gamma_j (\tilde{\varphi}_j, \psi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (57)$$

Далее, из $\int_0^{1/2} B(0, t) g(t) dt = 0$ дополнительно получаем

$$\sum_{k=1}^m \gamma_k \int_0^{1/2} B(0, t) \tilde{\varphi}_k(t) dt = 0. \quad (58)$$

Соотношения (57), (58) представляют собой необходимые и достаточные условия для нахождения γ_k , и потому B^{-1} существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы M системы (57), (58) равен m .

ЛЕММА 15. Пусть B^{-1} существует и, для определенности, минор Δ матрицы M , образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда

$$B^{-1}z = (E + W)^{-1}Pz'(x) + \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((E + W)^{-1}Pz', \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x), \quad (59)$$

$$\int_0^{1/2} B(0, t) B^{-1}z(t) dt = 0, \quad (60)$$

где Δ_{jk} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = Bg$. Тогда имеет место (55). Отсюда

$$((E + W)^{-1}Pz', \psi_j) = (g, \psi_j) + \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) (\tilde{\varphi}_k, \psi_j), \quad j = 1, \dots, m. \quad (61)$$

Так как определитель системы (61) относительно (g, ψ_k) есть Δ , то, находя из (61) явно (g, ψ_k) и подставляя в (55), получаем (59). Соотношение (60) очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные формулы легко получить, когда любой другой минор порядка m матрицы M отличен от нуля.

ТЕОРЕМА 10. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$\begin{aligned} B^{-1}z(x) = & Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) \\ & + a_4(x)z\left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt, \end{aligned} \quad (62)$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{1/2} a(t)z(t) dt = 0, \quad (63)$$

где $a_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$, $a'_3(x)$, $a'_4(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $B_x(x, t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, S и T – постоянные матрицы 2×2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(E + W)^{-1} = E + W_1$. Тогда из

$$\begin{aligned} W_1(x, t) = & -W(x, t) - \int_0^{1/2} W(x, \tau)W_1(\tau, t) d\tau \\ = & -W(x, t) - \int_0^{1/2} W_1(x, \tau)W(\tau, t) d\tau \end{aligned}$$

так же, как и в [9; теорема 2], получаем, что $W_1(x, t)$ обладает теми же свойствами, что и $B'_x(x, t)$. Тогда утверждение теоремы легко следует из леммы 15.

2. Получим интегро-дифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda)^{-1}A$ оператора A . Пусть $z = (E - \lambda B)^{-1}Bg$. Тогда z удовлетворяет условиям (63) и интегро-дифференциальной системе

$$B^{-1}z - \lambda z = g, \quad (64)$$

где B^{-1} определяется из (62). Положим $y_1(x) = z(x)$, $y_2(x) = z(1/2 - x)$, $y(x) = (y_1^T(x), y_2^T(x))^T$. Заменяя в (64) x на $1/2 - x$, получаем уравнения, которые вместе с (64) и (63) приводят к системе

$$Qy'(x) + \tilde{P}_1y(0) + \tilde{P}_2(x)y\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{P}_3(x)y(x) + \tilde{N}y - \lambda y(x) = \tilde{m}(x), \quad (65)$$

$$\tilde{M}_0y(0) + \tilde{M}_1y\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{1/2} \tilde{a}(t)y(t) dt = 0, \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & -Q_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{P}_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2(1/2 - x) & a_1(1/2 - x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4(1/2 - x) & a_3(1/2 - x) \end{pmatrix}, \\ \tilde{N}y &= \int_0^{1/2} \tilde{N}(x, t)y(t) dt, \quad \tilde{N}(x, t) = \begin{pmatrix} a(x, t) & 0 \\ a(1/2 - x, t) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_0 &= \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{m}(x) &= \left(g^T(x), g^T\left(\frac{1}{2} - x\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к оператору A , получаем

ТЕОРЕМА 11. *Если R_λ существует, то*

$$R_\lambda f = v(x), \quad (67)$$

где $v(x) = z_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$, $v(x) = z_2(x - 1/2)$ при $x \in [1/2, 1]$, $z_1(x)$, $z_2(x)$ – первые две компоненты вектора $y(x)$, удовлетворяющего системе (65), (66).

Верно и обратное, т.е. если λ таково, что однородная краевая задача для системы (65), (66) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (67). Это утверждение получается так же, как и в лемме 1 из [2].

3. Предположим теперь, что все собственные значения ω_j матрицы Q различны, отличны от нуля, и пусть Γ – неособая матрица, диагонализующая Q^{-1} , т.е. $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = \mathcal{D} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Выполним в (65), (66) замену $y(x) = \Gamma z(x)$ (теперь $z(x)$ получает новый смысл). Теперь система (65), (66)

переходит в

$$z'(x) + P_1 z(0) + P_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + P_3(x)z(x) + Nz - \lambda \mathcal{D}z(x) = m(x), \quad (68)$$

$$M_0 z(0) + M_1 z\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{1/2} \Omega(t)z(t) dt = 0, \quad (69)$$

где $P_i(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}\tilde{P}_i(x)\Gamma$, $N = \mathcal{D}\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$, $m(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$, $\Omega(t) = \tilde{a}(t)\Gamma$, $M_0 = \tilde{M}_0\Gamma$, $M_1 = \tilde{M}_1\Gamma$.

В дальнейшем при изучении системы (68), (69) затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим ее дальнейшее преобразование.

ЛЕММА 16. *Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) - \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, такая, что преобразование $z = H(x, \lambda)v$ приводит систему (68), (69) к виду*

$$v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v\left(\frac{1}{2}\right) + P_3(x, \lambda)v(x) + N_\lambda v - \lambda \mathcal{D}v = m(x, \lambda), \quad (70)$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{1/2} \Omega(t, \lambda)v(t) dt = 0, \quad (71)$$

где

$$P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda), \quad P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_2(x)H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right),$$

$$P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + P_3(x)H_1(x)],$$

$$N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)NH(x, \lambda), \quad M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda), \quad M_{1\lambda} = M_1H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right),$$

$$\Omega(t, \lambda) = \Omega(t)H(t, \lambda), \quad m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой известный процесс L -диагонализации дифференциальных систем (см. [10; гл. 1, § 4]). В системе (68), (69) выполним замену $z = H(x, \lambda)v$, где $H(x, \lambda)$ – пока неопределенная матрица с непрерывно дифференцируемыми по x коэффициентами. Из (68) имеем

$$\begin{aligned} & H(x, \lambda)v'(x) + [H'(x, \lambda) + P_3(x)H(x, \lambda) + \lambda(H(x, \lambda)\mathcal{D} - \mathcal{D}H(x, \lambda))]v(x) \\ & + P_1(x)H(0, \lambda)v(0) + P_2(x)H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)v\left(\frac{1}{2}\right) + NH(x, \lambda)v(x) \\ & - \lambda H(x, \lambda)\mathcal{D}v(x) = m(x). \end{aligned} \quad (72)$$

Исследуем квадратную скобку в (72). Известно, что если $H = H(x, \lambda)$ – диагональная матрица, то $H\mathcal{D} - \mathcal{D}H = 0$. Поэтому представим $H(x, \lambda) = H_0(x, \lambda) + H_1(x, \lambda)$, где $H_0(x, \lambda)$ – диагональная матрица, а элементы главной диагонали $H_1(x, \lambda)$ равны нулю. Тогда квадратная скобка имеет вид

$$\begin{aligned} [\dots] &= H'_0(x, \lambda) + H'_1(x, \lambda) + P_3(x)H_0(x, \lambda) + P_3(x)H_1(x, \lambda) \\ &+ \lambda[H_1(x, \lambda)\mathcal{D} - \mathcal{D}H_1(x, \lambda)]. \end{aligned} \quad (73)$$

Диагональные элементы матрицы $H_1(x, \lambda) \mathcal{D} - \mathcal{D} H_1(x, \lambda)$ равны нулю, и уравнение

$$\lambda[H_1(x, \lambda) \mathcal{D} - \mathcal{D} H_1(x, \lambda)] = L, \quad (74)$$

где L – любая матрица с нулевыми диагональными элементами, имеет и притом единственное решение. Поэтому если подобрать матрицу $H_0(x, \lambda)$ так, чтобы диагональные элементы $L_1 = H'_0(x, \lambda) + P_3(x)H_0(x, \lambda)$ равнялись нулю, и взять в качестве $L = -L_1$, то (73) значительно упростится. Итак, подберем $H_0(x, \lambda)$ так, чтобы диагональные элементы матрицы L_1 были нули. Ясно, что в этом случае можно брать $H_0(x, \lambda)$ не зависящей от λ , поскольку λ не входит в $P_3(x)$. Пусть $H_0(x, \lambda) = H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$. Тогда диагональные элементы матрицы L_1 суть $h'_i(x) + p_{ii}(x)h_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$, где $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы $P_3(x)$. Поэтому, считая, что $h'_i(x) + p_{ii}(x)h_i(x) = 0$, получаем, что $h_i(x) \in C^2[0, 1]$, $h_i(x) \neq 0$ при всех x . Теперь из (74) находим $H_1(x, \lambda)$, причем $\lambda H_1(x, \lambda)$ от λ не зависит, т.е. $H_1(x, \lambda) = \lambda^{-1}H_2(x)$. Окончательно имеем $[\dots] = \lambda^{-1}[H'_2(x) + P_3(x)H_2(x)]$, и тем самым (70) получено, а (71) – очевидно.

4. Приведем необходимое исследование системы (70), (71). Рассмотрим систему

$$w'(x) = \lambda \mathcal{D} w(x) + m(x), \quad U(w) = 0, \quad (75)$$

где $U(\cdot)$ берется из (71), а $m(x)$ – произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0, 1/2]$. Для ее решения $w(x)$ имеет место представление (16) при $n = 1$ и $m(x)$ вместо $m_1(x)$. Считаем, далее, что для ω_j выполняется (17) при $n = 1$.

ЛЕММА 17. Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет место следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4, \quad \mu = \frac{\lambda}{2}, \quad (76)$$

где a_{ij} (b_{ij}) – компоненты матрицы K_0 (L_0),

$$K_0 = \begin{pmatrix} S\Gamma_{11} + T\Gamma_{21} & S\Gamma_{12} + T\Gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H_0(0),$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T\Gamma_{11} + S\Gamma_{21} & T\Gamma_{12} + S\Gamma_{22} \end{pmatrix} H_0\left(\frac{1}{2}\right),$$

Γ_{ij} – блоки матрицы Γ размера 2×2 , $[a] = a + o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_1(\lambda), \quad (77)$$

где

$$\Delta_0(\lambda) = M_{0\lambda}V(0, \lambda) + M_{1\lambda}V\left(\frac{1}{2}, \lambda\right), \quad \Delta_1(\lambda) = \int_0^{1/2} \Omega(t, \lambda)V(t, \lambda) dt.$$

Для $\Delta_0(\lambda)$ имеет место формула

$$\Delta_0(\lambda) = K_0 + \lambda^{-1}K_1 + (L_0 + \lambda^{-1}L_1)V\left(\frac{1}{2}, \lambda\right),$$

где K_1 и L_1 – постоянные матрицы. Далее, по лемме 1 из [9] элементы $\Delta_1(\lambda)$ имеют следующий вид: элементы первого и второго столбцов суть $o(e^{\mu\omega_1})$ и $o(e^{\mu\omega_2})$, а третьего и четвертого столбцов суть $o(1)$, и утверждение леммы теперь легко следует из (77).

СЛЕДСТВИЕ. Для $\det \Delta(\lambda)$ имеет место асимптотическая формула

$$\det \Delta(\lambda) = \{\varphi(\lambda) + o(1)\}e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}, \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = & \theta_0 + \theta_1 e^{\mu(\omega_3-\omega_2)} + \theta_2 e^{\mu(\omega_4-\omega_2)} + \theta_3 e^{\mu(\omega_3-\omega_1)} \\ & + \theta_4 e^{\mu(\omega_4-\omega_1)} + \theta_5 e^{\mu(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_2)}, \end{aligned}$$

θ_i – комплексные числа, причем с точностью до знака θ_0 (θ_5) есть

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \right).$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\theta_0 \theta_5 \neq 0. \quad (79)$$

Определим область S_δ как в § 1. Тогда из (78) и (79) получаем оценку (20) для $\det \Delta(\lambda)$.

ЛЕММА 18. В области S_δ при больших λ для решения $w(x, \lambda) = R_{1\lambda}m$ задачи (75) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\psi(\lambda)\|m\|_\infty), \\ \|R_{1\lambda}m\|_1 &= O(\psi(\lambda)\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (80)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) – нормы в пространстве вектор-функций $L_\infty[0, 1]$ ($L[0, 1]$), $\chi(x)$ – вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка,

$$\psi(\lambda) = \sum_1^4 \varkappa\left(\left|\operatorname{Re} \frac{1}{2}\lambda\omega_j\right|\right),$$

$\varkappa(y) = (1 - e^{-y})/y$ при $y \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (76) алгебраические дополнения Δ_{jk} элементов матрицы $\Delta(\lambda)$ имеют оценки

$$\Delta_{j1} = O(e^{\mu\omega_2}), \quad \Delta_{j2} = O(e^{\mu\omega_1}), \quad \Delta_{j3} = O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}), \quad \Delta_{j4} = (e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}).$$

Поэтому в силу (20) для элементов матрицы $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ справедливы следующие оценки: $O(e^{\lambda\omega_1(x-1/2)})$ – для элементов первой строки, $O(e^{\lambda\omega_2(x-1/2)})$ – второй, $O(e^{\lambda\omega_3x})$ – третьей, $O(e^{\lambda\omega_4x})$ – четвертой. Далее, в [2] получены оценки (80) для $\int_0^{1/2} g_j(x, t, \lambda)m_j(t) dt$, где $m_j(t)$ – компоненты $m(t)$. Аналогично этим оценкам получаем, что $U\left(\int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t) dt\right)$ есть или $O(\|m\|_1)$, или $O(\psi(\lambda)\|m\|_\infty)$, или $O(1/\lambda)$ в случае $m(t) = \chi(t)$, и утверждение леммы теперь следует из (16).

Обратимся теперь к системе (70), (71).

ЛЕММА 19. В S_δ при больших $|\lambda|$ $\|R_{1\lambda}N_\lambda\| = o(1)$ ($\|\cdot\|$ – норма в L_∞).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\|R_{1\lambda}N_\lambda - R_{1\lambda}H_0^{-1}NH_0\| = O(1/\lambda)$. Как и в [2; лемма 8] получаем, что $R_{1\lambda}H_0^{-1}NH_0$ есть $o(1)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В S_δ при больших $|\lambda|$ оператор $E + R_{1\lambda}P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$ обратим в L_∞ .

Это утверждение следует из леммы 19 и оценки $\|R_{1\lambda}P_3(x, \lambda)\| = O(1/\lambda)$.

ЛЕММА 20. В S_δ при больших $|\lambda|$ краевая задача (70), (71) однозначно разрешима и для ее решения $v(x, \lambda)$ справедлива оценка

$$\|v(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x, \lambda)\|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \psi^2(\lambda)\right)\|f\|_1\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $L_\lambda = (E + R_{1\lambda}P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda)^{-1}$. Тогда для решения задачи (70), (71) имеем

$$v(x, \lambda) = -L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x, \lambda)v(0, \lambda) - L_\lambda R_{1\lambda}P_2(x, \lambda)v(1/2, \lambda) + L_\lambda R_{1\lambda}m(x, \lambda).$$

Отсюда для нахождения $v(0) = v(0, \lambda)$, $v(1/2) = v(1/2, \lambda)$ получаем систему

$$d_{11}v(0) + d_{12}v(1/2) = d_1, \quad d_{21}v(0) + d_{22}v(1/2) = d_2, \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= E + L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x, \lambda)|_{x=0}, & d_{12} &= L_\lambda R_{1\lambda}P_2(x, \lambda)|_{x=0}, \\ d_{21} &= L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x, \lambda)|_{x=1/2}, & d_{22} &= E + L_\lambda R_{1\lambda}P_2(x, \lambda)|_{x=1/2}, \\ d_1 &= L_\lambda R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=0}, & d_2 &= L_\lambda R_{1\lambda}m(x, \lambda)|_{x=1/2}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} d_{11} &= E + o(1), & d_{12} &= o(1), \\ d_{21} &= o(1), & d_{22} &= E + o(1), \\ d_1 &= O(\|f\|_1), & d_2 &= O(\|f\|_1). \end{aligned}$$

Поэтому из (81) можно однозначно найти $v(0)$, $v(1/2)$, причем справедливы оценки $v(0) = O(\|f\|_1)$, $v(1/2) = O(\|f\|_1)$. Значит, краевая задача (70), (71) однозначно разрешима и

$$v(x, \lambda) = L_\lambda R_{1\lambda} P_1(x, \lambda) O(\|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} P_2(x, \lambda) O(\|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x, \lambda),$$

причем $O(\|f\|_1)$ являются постоянными векторами. Отсюда

$$v(x, \lambda) = O(\|R_{1\lambda} P_1(x, \lambda)\|_\infty \|f\|_1) + O(\|R_{1\lambda} P_2(x, \lambda)\|_\infty \|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x, \lambda). \quad (82)$$

Далее, если $\varphi(x)$ – непрерывные вектор-функции ограниченной вариации, то $\|R_{1\lambda} \varphi\|_\infty = O(1/\lambda)$. Поэтому из (82) получаем

$$v(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x, \lambda). \quad (83)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (83). По лемме 18 имеем

$$\begin{aligned} L_\lambda R_{1\lambda} m(x, \lambda) &= L_\lambda R_{1\lambda} H_0^{-1} m + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right), \\ L_\lambda R_{1\lambda} H_0^{-1} m &= R_{1\lambda} H_0^{-1} m - L_\lambda (R_{1\lambda} P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda} N_\lambda) R_{1\lambda} H_0^{-1} m \\ &= R_{1\lambda} H_0^{-1} m + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) - L_\lambda R_{1\lambda} N_\lambda H_0^{-1} m, \\ L_\lambda R_{1\lambda} N_\lambda R_{1\lambda} H_0^{-1} m &= L_\lambda R_{1\lambda} H_0^{-1} N H_0 R_{1\lambda} H_0^{-1} m + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) \\ &= O(\psi(\lambda) \|H_0^{-1} N H_0 R_{1\lambda} H_0^{-1} m\|_\infty) + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) \\ &= O(\psi(\lambda) \|R_{1\lambda} H_0^{-1} m\|_1) + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) = O(\psi^2(\lambda) \|f\|_1) + O\left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1\right) \end{aligned}$$

и тем самым из (83) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 21. Если $m(x) = \chi(x)$, то

$$\|v(x, \lambda) - R_{1\lambda} H_0^{-1} m(x)\|_\infty = O(\lambda^{-2}).$$

Это утверждение получается аналогично лемме 20, если учесть, что теперь $d_i = O(\lambda^{-1})$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 22. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [v(x, \lambda) - R_{1\lambda} H_0^{-1} m] d\lambda \right\|_\infty = 0$$

(считается, что окружности $|\lambda| = r$ находятся в S_δ).

Это утверждение по теореме Банаха–Штейнгауза следует из лемм 20 и 21.

5. Наконец стало возможным получить теорему равносходимости. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u'(x) = \lambda \mathcal{U}u(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u(1/2) = 0,$$

и ее решение обозначим $R_{2\lambda}m$. Тогда для $R_{2\lambda}m$ имеет место формула (16) при $n = 1$, $m_1(x)$, $\Delta(\lambda)$, $U(\cdot)$ заменяются на $m(x)$, $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$, $U_0(\cdot)$. Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ собственные значения краевых задач $u'_j - \lambda \omega_j u_j = 0$, $u_j(0) - u_j(1/2) = 0$, $j = 1, \dots, 4$, и получившуюся область опять обозначим S_δ .

ЛЕММА 23. Если $m(x)$ – вектор-функция с компонентами из $L[0, 1/2]$ и $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [R_{2\lambda}m(x, \lambda) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $R_{2\lambda}$ имеют место утверждения леммы 18 (надо еще заметить, что $\|R_{2\lambda}\varphi\|_\infty = O(1/\lambda)$, когда $\varphi(x)$ есть непрерывная вектор-функция ограниченной вариации), и утверждение леммы получается по теореме Банаха–Штейнгауза, как и в случае теоремы 12.

ЛЕММА 24. Если $m(x)$ – из леммы 22, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [R_{1\lambda}m - R_{2\lambda}m] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1/4).$$

Это утверждение устанавливается точно так же, как и лемма 13 из [2].

ЛЕММА 25. Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0, \quad (84)$$

$$\varepsilon \in (0, 1/4),$$

где $v(x, \lambda)$ – решение задачи (70), (71) и $m(x)$ – то же, что и в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} H(x, \lambda)v(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}m) &= H(x, \lambda)[v(x, \lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m)] \\ &+ H(x, \lambda)[R_{1\lambda}(H_0^{-1}m) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m)] + [H(x, \lambda) - H_0(x)]R_{2\lambda}(H_0^{-1}m). \end{aligned} \quad (85)$$

Так как $H(x, \lambda) - H_0(x) = O(1/\lambda)$, $R_{2\lambda}(H_0^{-1}m) = O(\|f\|_1)$, то

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda) - H_0(x)]R_{2\lambda}(H_0^{-1}m) d\lambda \right\|_\infty = O(\|f\|_1). \quad (86)$$

Пусть теперь $g(x) = \chi(x)$. Тогда $R_{2\lambda}H_0^{-1}m = O(1/\lambda)$ и в этом случае (84) установлено.

Отсюда в силу (85), (86) на основании лемм 22, 24, 25 по теореме Банаха–Штейнгауза получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 12 (равносходимости). Пусть A^{-1} существует, ядро $A(x, t)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в §3, п. 1 (для $B_{ij}(x, t)$), выполняются (17) при $n = 1$ и (79). Тогда для любой $f(x) \in L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j} \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0, \quad (87)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{2j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(\varphi_j, x - \frac{1}{2} \right) \right\|_{[1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0, \quad (88)$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.н.ф. оператора A для тех характеристических чисел, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0, 1/2]$ по системе $\{e^{4k\pi ix}\}_{-\infty}^{+\infty}$ для тех k , для которых $(4k\pi) < r$; γ_{jk} (δ_{jk}) – элементы матрицы Γ (Γ^{-1}); $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(1/2 + x) + \delta_{j3}f(1/2 - x) + \delta_{j4}f(1 - x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f d\lambda, \quad \sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f d\lambda,$$

где $y = R_{0\lambda}f$ есть решение краевой задачи $y' - \lambda y = f$, $y(0) = y(1/2)$.

Пусть $x \in [0, 1/2]$. Тогда

$$R_{0\lambda}f = (\Gamma H_0(x) R_{2\lambda}(H_0^{-1}m))_1, \quad R_\lambda f = (\Gamma H(x, \lambda)v(x, \lambda))_1,$$

где $(\cdot)_1$ означает первую компоненту вектора, помещенного в скобки. По лемме 25 имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [(\Gamma H(x, \lambda)v(x, \lambda))_1 - (\Gamma H_0(x) R_{2\lambda}(H_0^{-1}m))_1] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0.$$

Поэтому из (88) имеем

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x) R_{2\lambda}(H_0^{-1}m))_1 d\lambda + o(1), \quad (89)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$. Но

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x) R_{2\lambda}(H_0^{-1}m))_1 d\lambda \\ & = (\Gamma(h_1(x)\sigma_{r|\omega_1|}(h_1^{-1}\varphi_1, x), h_2(x)\sigma_{r|\omega_2|}(h_2^{-1}\varphi_2, x), \\ & \quad h_3(x)\sigma_{r|\omega_3|}(h_3^{-1}\varphi_3, x), h_4(x)\sigma_{r|\omega_4|}(h_4^{-1}\varphi_4, x))^T)_1, \end{aligned} \quad (90)$$

где h_j – диагональные элементы матрицы $H_0(x)$. По теореме Штейнгауза ([11; гл. 1, §4]) и принципу локализации $h_j(x)\sigma_{r|\omega_j|}(h_j^{-1}\varphi_j, x) = \sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) + o(1)$. Поэтому из (89), (90) получаем (87). Аналогично получается (88). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $|\omega_j| = d$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{rd}(f, x)\|_{[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_{rd}\left(g, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{[1/2 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]} = 0, \quad g(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все результаты статьи легко распространяются на случай такой неравномерной сетки, когда единичный отрезок осей t и x разбивается одинаково.

Список литературы

- [1] А. П. Хромов, “Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях”, *Матем. заметки*, **64**:6 (1998), 932–942.
- [2] В. В. Корнев, А. П. Хромов, “О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 33–50.
- [3] А. П. Гуревич, А. П. Хромов, “Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2003, №2(489), 24–35.
- [4] В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, “О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 97–110.
- [5] В. В. Корнев, А. П. Хромов, “Абсолютная сходимость разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 59–74.
- [6] М. Л. Расулов, *Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1964.
- [7] А. П. Хромов, “Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями”, *Матем. сб.*, **70**(112):3 (1966), 310–329.
- [8] А. П. Хромов, “Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями”, *Матем. заметки*, **19**:5 (1976), 763–772.
- [9] А. П. Хромов, “Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **114**(156):3 (1981), 378–405.
- [10] И. М. Рапопорт, *О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений*, Изд-во АН УССР, Киев, 1954.
- [11] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

А. П. Хромов (А. Р. Khromov)

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Поступила в редакцию

20.02.2006