Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 69–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:39:09

УДК 517.962.28

М. С. Сгибнев

Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой

Доказан полный аналог теоремы Блеквелла для матричной меры восстановления на всей прямой как в нерешетчатом, так и в решетчатом случаях. Получен законченный результат о разложении типа Стоуна для матричной меры восстановления. Установлены асимптотические свойства решений систем интегральных уравнений типа восстановления на прямой.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

Пусть F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ такое, что

$$\mu := \int_{\mathbb{R}} x F(dx) \in (0, +\infty],$$

U – мера восстановления, порожденная распределением F :

$$U(A) := \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*}(A), \quad A \in \mathcal{B},$$

где F^{k*} – k -кратная свертка F , $k \geq 1$, $F^{0*} := \delta_0$ – атомическая мера массы 1, сосредоточенная в нуле, и $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Теорема восстановления Блеквелла утверждает, что если распределение F неарифметическое (см. определение 2 в § 2), то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U((x, x+h]) = \frac{h}{\mu}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} U((x, x+h]) = 0 \quad (1)$$

для любого $h > 0$, а если распределение F арифметическое, то соотношение (1) справедливо для любого $h > 0$, кратного шагу распределения F [1] (см. также [2; § XI.9, теорема 1]); как обычно, считаем, что $c/\infty := 0$, c – постоянная.

Среди разнообразных применений теоремы Блеквелла отметим то, что она является исходным звеном в следующей цепочке важных результатов. Так, с ее помощью устанавливается асимптотика решения уравнения восстановления

$$z(x) = g(x) + \int_{\mathbb{R}} z(x-y) F(dy) := g(x) + F * z(x) \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00902).

для непосредственно интегрируемых по Риману функций $g(x)$ (см. определение 6 в §6). Очевидно, что функция $z(x) := U * g(x)$ является решением уравнения (2). Для неарифметического распределения F справедливо соотношение

$$U * g(x) \rightarrow \begin{cases} \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy, & x \rightarrow +\infty, \\ 0, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3)$$

(см. замечание перед доказательством теоремы 1 в работе [2; гл. XI, §9]). Этот результат называется *ключевой теоремой восстановления*. В свою очередь, ключевая теорема восстановления позволяет доказать разложение Стоуна [3] для меры восстановления U , порожденной распределением F таким, что m -кратная свертка F^{m*} распределения F при некотором $m \geq 1$ обладает ненулевой абсолютно непрерывной компонентой. Для таких распределений мера восстановления U допускает разложение $U = U_1 + U_2$, где U_2 – конечная мера, а U_1 – абсолютно непрерывная мера с ограниченной непрерывной плотностью $u(x)$ такой, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1/\mu$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$. Наконец, разложение Стоуна доставляет короткое доказательство ключевой теоремы восстановления (3) для ограниченных функций $g \in L_1(\mathbb{R})$ таких, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$ (см. [4] и [5; теорема 2.6.4]).

Данный подход применим и в многомерном случае для исследования асимптотики решения системы уравнений типа восстановления

$$z_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} z_j(x-u) F_{ij}(du), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где g_i , $i = 1, \dots, n$, – функции, либо непосредственно интегрируемые по Риману, либо суммируемые, а F_{ij} – конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $\mathbb{R}$, при этом роль распределения F играет матрица мер $\mathbf{F} = (F_{ij})$. В зависимости от того, насколько общим окажется матричный аналог теоремы Блеквелла, настолько общими будут в итоге и результаты об асимптотике решения системы уравнений.

Данная и примыкающая к ней проблематика ранее рассматривалась – в различной степени общности – в работах [6]–[10] (случай матриц мер и систем уравнений на полуоси), [11]–[14] (случай матриц мер и систем уравнений на всей вещественной прямой).

Цель настоящей работы – получить окончательный вариант теоремы Блеквелла для матричной меры восстановления на всей прямой так, как обстоит дело в одномерном случае, и получить, таким образом, максимально общие асимптотические результаты для решений системы (4). Дальнейший план работы таков. В §2 вводятся необходимые обозначения и определения и формулируется основная теорема – матричный аналог теоремы Блеквелла. В §3 формулируется и доказывается критерий решетчатости матрицы мер. В §4 рассматриваются вопросы, связанные с факторизацией матрицы мер. В §5 доказывается основная теорема. Наконец, в §6 исследуется асимптотика решений систем интегральных уравнений типа восстановления (4) при различных предположениях относительно функций $g_i(x)$ и мер F_{ij} .

§ 2. Основная теорема

Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $\mathbb{R}$. Свертка $\mathbf{F} * \mathbf{G}$ двух таких матриц – это матрица с элементами $(\mathbf{F} * \mathbf{G})_{ij} := \sum_{l=1}^n F_{il} * G_{lj}$, $i, j = 1, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Матричной мерой восстановления* называется матрица мер

$$\mathbf{U} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*};$$

здесь $\mathbf{F}^{1*} := \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(k+1)*} := \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$, $\mathbf{F}^{0*} := \delta_0 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка $n \times n$.

Спектральный радиус произвольной числовой матрицы $\mathbf{A}$ будем обозначать через $\varrho(\mathbf{A})$. По теореме Перрона–Фробениуса [15; теорема 8.4.4] любая неотрицательная неразложимая матрица $\mathbf{A}$ имеет положительное собственное значение кратности 1, равное $\varrho(\mathbf{A})$, и существует положительный правый (и левый) собственный вектор, соответствующий этому собственному значению. Положим $\mathbf{F}(\infty) = (F_{ij}(\infty)) := (F_{ij}(\mathbb{R}))$. Через $\mathbf{0}$ будем обозначать нулевую матрицу, размеры которой будут определяться из контекста. Для произвольной вещественнозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа* по формуле $\hat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . Условимся о том, что все операции над матрицами мер и вектор-функциями осуществляются поэлементно; например,

$$\int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) := \left(\int_{\mathbb{R}} x F_{ij}(dx) \right),$$

а если $\mathbf{A} = (A_{ij})$ – матрица, элементами которой являются меры, то через $\hat{\mathbf{A}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Лапласа $\hat{A}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\mathbf{A}$. Аналогичное соглашение относится и к неравенствам, в которых участвуют матрицы и вектор-функции. Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры ν обозначим через ν_c , а ее сингулярную компоненту – через ν_s : $\nu_s = \nu - \nu_c$; таким образом, под сингулярной компонентой меры здесь понимается сумма ее *обычной сингулярной* и *дискретной* компонент. Если $\mathbf{G} = (G_{ij})$ – матрица, элементы которой суть неотрицательные меры, то через $\mathbf{G}_s$ будем обозначать матрицу $((G_{ij})_s)$, элементы которой – сингулярные компоненты соответствующих элементов матрицы $\mathbf{G}$.

Напомним определения арифметического и решетчатого распределений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Распределение F на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* F . Распределение, не являющееся арифметическим, называется *неарифметическим*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [16]. Распределение F на $\mathbb{R}$ называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию,

т.е. на множестве точек вида $a + j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ – постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел). Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* F . Распределение, не являющееся решетчатым, называется *нерешетчатым*.

Аналогичным образом определяются арифметические и решетчатые меры. В матричном случае ситуация выглядит значительно сложнее. Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – квадратная матрица порядка n , элементами которой являются неотрицательные конечные меры на $\mathbb{R}$. Если ν – конечная мера, то обозначим через $\nu(t)$ ее функцию распределения: $\nu(t) := \nu((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$. В работе [6] дано следующее определение решетчатой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матрица мер $\mathbf{F}$ называется *решетчатой*, если выполняются следующие условия:

- 1) каждая мера F_{ij} , $i \neq j$, решетчата с шагом решетки λ_{ij} , каждая мера F_{ii} арифметическая с шагом решетки λ_{ii} ;
- 2) все λ_{ij} кратны некоторому числу, наибольшее из таких чисел обозначим через λ ;
- 3) если a_{ij} , a_{jk} и a_{ik} – точки роста функций распределения $F_{ij}(t)$, $F_{jk}(t)$ и $F_{ik}(t)$ соответственно, то $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} + m\lambda$, где $m \in \mathbb{Z}$; иными словами, $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} \bmod \lambda$.

Число λ называется *шагом* решетчатой матрицы мер $\mathbf{F}$. Матрица мер, не являющаяся решетчатой, называется *нерешетчатой*.

Сформулируем основную теорему настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1 (матричный аналог теоремы Блеквелла). Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на прямой. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\mu := \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$.

а) Если матрица $\mathbf{F}$ нерешетчата, то

$$\mathbf{U}((x, x+h]) \rightarrow \frac{h\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mu}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}((x, x+h]) \rightarrow \mathbf{0}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (6)$$

для любого фиксированного $h > 0$.

б) Если матрица $\mathbf{F}$ решетчата с шагом λ , то соотношения (5), (6) справедливы для любого фиксированного h , кратного λ : $h = t\lambda$, $t = 1, 2, \dots$.

Аналогичные результаты для нерешетчатых матриц мер на прямой были получены в работах [12] и [14] при более ограничительных предположениях. Так, помимо перечисленных выше условий и условия $\mu \in (0, +\infty)$, в [12; теорема 3] предполагалось, что еще и сам исследуемый объект $\mathbf{U}$ удовлетворяет дополнительному требованию $\mathbf{U}(t) := \mathbf{U}((-\infty, t]) < \infty$ при любом t . В [14; теорема 2] требовалось, чтобы $\mu \in (0, +\infty)$ и $\varrho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$, т.е. чтобы матрица мер $\mathbf{F}^{m*}$ обладала абсолютно непрерывной компонентой $(\mathbf{F}^{m*})_c \neq \mathbf{0}$.

§ 3. Критерий решетчатости матрицы мер

Хорошо известно [16; теорема 2.1.4], что F – решетчатое распределение тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $|\hat{F}(it_0)| = 1$. Анализируя доказательство теоремы 2.1.4 в работе [16], видим, что F – арифметическое распределение в том и только том случае, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $\hat{F}(it_0) = 1$. Шаг λ решетчатого распределения F определяется следующими соотношениями [17; гл. IV, упражнение 7]: $|\hat{F}(it)| < 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $|\hat{F}(2\pi i/\lambda)| = 1$. Если F – арифметическое распределение, то его шаг λ определяется следующими соотношениями: $\hat{F}(it) \neq 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $\hat{F}(2\pi i/\lambda) = 1$.

Наша цель состоит в том, чтобы получить аналогичный критерий решетчатости матриц мер. Потребность в таком критерии мотивируется тем, что даже в обычной одномерной теории восстановления приходится, как правило, проводить параллельные рассуждения в зависимости от того, будет ли исходное распределение арифметическим или нет. Аналогичным образом дело обстоит и в матричном случае [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – квадратная матрица порядка n , элементами которой являются неотрицательные конечные меры на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима. Допустим, что спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(\infty)$ равен 1. Тогда матрица мер $\mathbf{F}$ решетчата тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(it_0)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\mathbf{F}$ – решетчатая матрица мер и δ_{ij} – символ Кронекера. Определитель матрицы $\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)$ представляет собой линейную комбинацию произведений вида $f_{1l_1}(s)f_{2l_2}(s) \cdots f_{nl_n}(s)$, где $f_{kl_k}(s) = \delta_{kl_k} - \hat{F}_{kl_k}(s)$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим такое произведение общего вида. Для каждой меры F_{ij} выберем точку роста, скажем a_{ij} . Согласно свойствам 1) и 2) определения 4 имеем $a_{ii} = 0 \bmod \lambda$. Далее, $\hat{F}_{kl_k}(s) = \exp(a_{kl_k}s)\hat{G}_{kl_k}(s)$, где G_{kl_k} – мера, сосредоточенная на множестве $\lambda\mathbb{Z}$ и имеющая точно такую же полную массу, что и мера F_{kl_k} , т.е. $G_{kl_k}(\infty) = F_{kl_k}(\infty)$. Подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

можно записать как произведение конечного числа циклических подстановок [18]. Суммируя числа a_{kl_k} по каждому циклу, получаем $\sum a_{kl_k} = 0 \bmod \lambda$ в силу свойства 3) определения 4. Отметим, что для циклических подстановок длины 1 (т.е. когда $k = l_k$) будем иметь

$$f_{kl_k}(s) = 1 - \hat{F}_{kk}(s) = 1 - \exp(a_{kk}s)\hat{G}_{kk}(s),$$

где $a_{kk} = 0 \bmod \lambda$. Отсюда вытекает, что $f_{kk}(s) = 1 - \hat{G}_{kk}(s)$ при $s = 2\pi i/\lambda$. Следовательно,

$$f_{1l_1}(s)f_{2l_2}(s) \cdots f_{nl_n}(s) = \exp(as)g_{1l_1}(s)g_{2l_2}(s) \cdots g_{nl_n}(s),$$

где $a = 0 \bmod \lambda$, $g_{kl_k}(s) = \hat{G}_{kl_k}(s)$ при $k \neq l_k$ и $g_{kk}(s) = 1 - \exp(a_{kk}s)\hat{G}_{kk}(s)$ с $a_{kk} = 0 \bmod \lambda$. Обозначим $\mathbf{G} := (G_{ij})$. Окончательно имеем

$$\det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(2\pi i/\lambda)) = \det(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}(2\pi i/\lambda)) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{G}(\infty)) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{F}(\infty)) = 0$$

(последнее равенство – следствие предположения о том, что спектральный радиус матрицы $\mathbf{F}(\infty)$ равен 1).

Достаточность. Допустим, что $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it_0)) = 0$ при некотором вещественном $t_0 \neq 0$. По предположению $\mathbf{F}(\infty)$ – неотрицательная неразложимая матрица со спектральным радиусом 1. Имеем $\mathbf{F}(\infty) \geq |\widehat{\mathbf{F}}(it)| := (|\widehat{F}(it)|)$ для всех вещественных t . Таким образом, спектральный радиус $\widehat{\mathbf{F}}(it)$ не превосходит спектрального радиуса матрицы $\mathbf{F}(\infty)$ [15; теорема 8.1.18]. Отсюда вытекает, что спектральные радиусы обеих матриц $\mathbf{F}(\infty)$ и $\widehat{\mathbf{F}}(it_0)$ совпадают. Применяя [15; теорема 8.4.5], приходим к следующему заключению: существуют вещественные числа $\theta_1, \dots, \theta_n$ такие, что $\widehat{\mathbf{F}}(it_0) = \mathbf{D}\mathbf{F}(\infty)\mathbf{D}^{-1}$, где $\mathbf{D} = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$. Следовательно, $\widehat{F}_{kl}(it_0) = e^{i(\theta_k - \theta_l)} F_{kl}(\infty)$. Это означает, что мера F_{kl} сосредоточена на множестве $(\theta_k - \theta_l)/t_0 + (2\pi/|t_0|)\mathbb{Z}$, $k, l = 1, \dots, n$ [16; § 2.1]. Теперь легко проверить выполнение всех требований определения 4. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку спектральный радиус стохастической матрицы равен 1, теорема 1 применима и в том случае, когда $\mathbf{F}(\infty)$ – неразложимая стохастическая матрица.

Доказательство достаточности подсказывает другое, более компактное, определение решетчатой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Матрица мер $\mathbf{F}$ называется *решетчатой*, если найдутся вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и положительное число λ такие, что каждая мера F_{ij} сосредоточена на множестве $\alpha_i - \alpha_j + \lambda\mathbb{Z}$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* решетчатой матрицы мер $\mathbf{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства достаточности вытекает, что шаг λ решетчатой матрицы мер $\mathbf{F}$ определяется следующими соотношениями: $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it)) \neq 0$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(2\pi i/\lambda)) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [19] дано определение решетчатости двумерного марковского процесса специального вида (см. [19; определение 3.2]). Если сопоставить его с основной матрицей мер, задающей эволюцию процесса, то получим другое определение решетчатости для матриц мер $\mathbf{F}$ таких, что $\mathbf{F}(\infty)$ – стохастическая матрица. В этом случае теорема 2 настоящей работы устанавливает связь между определением решетчатых матриц мер, данным в [6], и тем, которое можно извлечь из [19; определение 3.2].

§ 4. Факторизация

Для доказательства основной теоремы нам потребуется следующая модификация известного результата о факторизации матрицы $\delta_0\mathbf{I} - \mathbf{F}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{F} - (n \times n)$ -матрица, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неразложима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными

координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$. Тогда матрица мер $\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}$ допускает факторизацию

$$\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F} = (\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}_-) * (\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}_+), \quad (7)$$

где $\mathbf{F}_-$ и $\mathbf{F}_+$ – матрицы конечных неотрицательных мер, сосредоточенных на $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$ соответственно, причем $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] < 1$, $\varrho[\mathbf{F}_+(\infty)] = 1$ и $\mathbf{l}_{\mathbf{F}_+} := \mathbf{l}[\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)]$ – левый собственный вектор матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$, отвечающий собственному значению 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{F}(\infty)$ – стохастическая матрица, т.е. если сумма элементов каждой ее строки равна единице, то утверждение теоремы вытекает из [20; теорема 4.1 и предложение 4.2(c)]. В общем случае рассмотрим матрицу мер $\mathbf{G} := \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ – скалярная диагональная матрица с элементами $r_1, \dots, r_n$, расположенными на главной диагонали: $\mathbf{J} := \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$. Очевидно, что свойство неразложимости матрицы инвариантно относительно умножения справа или слева на диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами. Далее, непосредственно проверяется, что матрица $\mathbf{G}(\infty)$ стохастическая:

$$\mathbf{G}(\infty) \mathbf{1} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\infty) \mathbf{J} \mathbf{1} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\infty) \mathbf{r} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{1};$$

здесь $\mathbf{1}$ – n -мерный вектор-столбец с координатами 1. Кроме того, левый собственный вектор матрицы $\mathbf{G}(\infty)$ можно представить в виде $\mathbf{l}_{\mathbf{G}} = \mathbf{l} \mathbf{J}$:

$$\mathbf{l}_{\mathbf{G}} \mathbf{G}(\infty) = \mathbf{l} \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\infty) \mathbf{J} = \mathbf{l} \mathbf{F}(\infty) \mathbf{J} = \mathbf{l} \mathbf{J} = \mathbf{l}_{\mathbf{G}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{l}_{\mathbf{G}} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{G}(dx) \mathbf{1} = \mathbf{l} \mathbf{J} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(dx) \mathbf{J} \mathbf{1} = \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty].$$

Таким образом, как уже отмечалось выше, для такой матрицы $\mathbf{G}$ справедлива факторизация

$$\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{G} = (\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{G}_-) * (\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{G}_+)$$

с указанными свойствами. Полагая $\mathbf{F}_+ := \mathbf{J} \mathbf{G}_+ \mathbf{J}^{-1}$ и $\mathbf{F}_- := \mathbf{J} \mathbf{G}_- \mathbf{J}^{-1}$, видим, что матрица $\delta_0 \mathbf{I} - \mathbf{F}$ допускает факторизацию (7). Поскольку для произвольной скалярной матрицы $\mathbf{A}$ и любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{J} \mathbf{A} \mathbf{J}^{-1})$, заключаем, что спектры матриц $\mathbf{G}_{\pm}(\infty)$ и $\mathbf{F}_{\pm}(\infty)$ совпадают соответственно. Следовательно, $\varrho[\mathbf{F}_+(\infty)] = \varrho[\mathbf{G}_+(\infty)] = 1$ и $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] = \varrho[\mathbf{G}_-(\infty)] < 1$. Наконец, $\mathbf{l}_{\mathbf{F}_+}[\mathbf{I} - \mathbf{F}_+(\infty)] = \mathbf{0}$. Теорема 3 доказана.

Нам также понадобятся несколько лемм о свойствах матриц $\mathbf{F}_{\pm}$.

ЛЕММА 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда матрица $\mathbf{F}_+(\infty)$ неразложима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем от противного. Допустим, что $\mathbf{F}_+(\infty)$ разложима. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{F}_+(\infty)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_+(\infty) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{C} - (m \times m)$ -матрица, причем $m < n$. Вектор $\mathbf{r}$ является правым собственным вектором матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$, отвечающим собственному значению 1. Действительно, поскольку $\varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] < 1$, имеем

$$[\mathbf{I} - \mathbf{F}_+(\infty)]\mathbf{r} = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)]^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{F}(\infty)]\mathbf{r} = (0, \dots, 0)^T.$$

Очевидно, что и вектор $\mathbf{r}_1 = (0, \dots, 0, r_{n-m+1}, \dots, r_n)^T$ также является правым собственным вектором матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$, отвечающим собственному значению 1. Но из равенства $\mathbf{I} - \mathbf{F}(\infty) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)][\mathbf{I} - \mathbf{F}_+(\infty)]$ вытекает, что у неразложимой неотрицательной матрицы $\mathbf{F}(\infty)$ со спектральным радиусом 1 есть два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$, отвечающих собственному значению 1, что невозможно. Полученное противоречие доказывает неразложимость матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда матрица мер $\mathbf{F}_+$ решетчата в том и только том случае, когда решетчата исходная матрица мер $\mathbf{F}$; при этом шаги решеток у обеих матриц совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что матрица мер $\mathbf{F}$ решетчата. Воспользуемся критерием решетчатости матрицы мер (см. теорему 2). Найдется $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $t_0 \neq 0$ и $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it_0)) = 0$. Известно [15; теорема 8.1.18], что если элементы одной матрицы не превосходят по абсолютной величине соответствующих элементов некоторой неотрицательной матрицы, то спектральный радиус первой матрицы не превосходит спектрального радиуса второй. Поэтому $\varrho[\widehat{\mathbf{F}}_-(it_0)] \leq \varrho[\mathbf{F}_-(\infty)] < 1$. Следовательно, матрица $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it_0)$ обратима и

$$\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_+(it_0)) = \frac{\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it_0))}{\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_-(it_0))} = 0,$$

что доказывает решетчатость матрицы $\mathbf{F}_+$. Совпадение шагов решеток у матриц мер $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_+$ вытекает из замечания 2 с учетом равенства

$$\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(it)) = \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_-(it)) \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_+(it)) = 0$$

и неравенства $\det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}_-(it)) \neq 0$, справедливых при любом $t \in \mathbb{R}$. Обратное утверждение леммы устанавливается аналогично. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3, и пусть $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_\pm$ – меры восстановления, порожденные матрицами мер $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_\pm$. Тогда $\mathbf{U}_-$ – матрица конечных мер и для любого $A \in \mathcal{B}$ справедливо представление $\mathbf{U} = \mathbf{U}_+ * \mathbf{U}_-$, т.е.*

$$\mathbf{U}(A) = \mathbf{U}_+ * \mathbf{U}_-(A) = \int_{-\infty}^{0+} \mathbf{U}_+(A - x) \mathbf{U}_-(dx); \quad (8)$$

здесь $A - x := \{y \in \mathbb{R} : y + x \in A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу мер $\mathbf{G} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{J}$ (см. доказательство теоремы 3). Матрица $\mathbf{G}(\infty)$ – неразложимая стохастическая матрица. Воспользуемся основным факторизационным тождеством [19; формула (2.9)],

не вдаваясь в описание вероятностного смысла входящих в него элементов, поскольку это не существенно для наших целей. Следует лишь сделать важное замечание, что указанное тождество справедливо и для матриц мер $\mathbf{G}$, для которых $\mathbf{G}(\infty)$ – *неразложимая* стохастическая матрица, поскольку, как уже отмечалось, у таких матриц есть неподвижная вектор-строка с *положительными* координатами, а этого достаточно, чтобы переписать тождества (2.2) и (2.3) в виде (2.9) (см. доказательство теоремы 2.1, б) работы [19]). Имеем

$$\mathbf{I} - z\hat{\mathbf{G}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_-(s; z)][\mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}_+(s; z)], \quad z \in (0, 1], \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad (9)$$

где функции $\hat{\mathbf{G}}_+(s; z)$, $\hat{\mathbf{G}}_-(s; z)$, $\operatorname{Re} s = 0$, суть матрицы преобразований Лапласа неотрицательных конечных мер, непрерывно и монотонно ($\uparrow$) зависящих от z и сосредоточенных на $(0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ соответственно. Кроме того, $\varrho[\hat{\mathbf{G}}_{\pm}(z, 0)] \leq z$. Далее, $\hat{\mathbf{G}}_{\pm}(s; z) = \hat{\mathbf{G}}_{\pm}(s)$, где $\mathbf{G}_{\pm}$ – меры, о которых шла речь в доказательстве теоремы 3. Поэтому $\varrho[\mathbf{G}_-(\infty)] < 1$. Обращая тождество (9), получим при $z \in (0, 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \hat{\mathbf{G}}(s)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\mathbf{G}}_+(s; z)^k \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\mathbf{G}}_-(s; z)^m.$$

Переходя в этом равенстве от преобразований Лапласа к мерам и устремляя $z \uparrow 1$, приходим к соотношению

$$\mathbf{U}_{\mathbf{G}}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^{k*}(A) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}_+^{k*} \right) * \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}_-^{m*} \right)(A) = \mathbf{U}_{\mathbf{G}_+} * \mathbf{U}_{\mathbf{G}_-}(A),$$

$$A \in \mathcal{B},$$

причем $\mathbf{U}_{\mathbf{G}_-}(\infty) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}_-(\infty)^m < \infty$ [15; следствие 5.6.13]. Поскольку $\mathbf{F} = \mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}$ и $\mathbf{F}_{\pm} = \mathbf{J}\mathbf{G}_{\pm}\mathbf{J}^{-1}$, имеем

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{U}_{\mathbf{G}}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}\mathbf{U}_{\mathbf{G}_+} * \mathbf{U}_{\mathbf{G}_-}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}\mathbf{U}_{\mathbf{G}_+}\mathbf{J}^{-1} * \mathbf{J}\mathbf{U}_{\mathbf{G}_-}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{U}_+ * \mathbf{U}_-.$$

Лемма 3 доказана.

§ 5. Доказательство основной теоремы

Мы будем доказывать теорему в два этапа. На первом этапе установим теорему в полном объеме для матриц мер $\mathbf{F}$, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Необходимость обратиться еще раз к рассмотрению случая мер, сосредоточенных на полуоси, вызвана тем, что относящиеся к нему известные результаты [6], [7] получены с определенными оговорками. Так, в теореме 3.1(i) из работы [6] утверждается, что если все меры F_{ij} сосредоточены на $[0, \infty)$, $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$ и все значения $F_{ij}(\infty)$ положительны, то тогда справедливы утверждения а), б) теоремы 1. А в работе [7] содержится замечание, что все соответствующие рассуждения из [6] верны и для неразложимых матриц $\mathbf{F}(\infty)$, если, по крайней мере, одна из функций распределения $F_{ii}(t)$ мер, стоящих на главной диагонали, имеет точку роста или если хотя бы одна из функций распределения $F_{ij}(t)$, $i \neq j$, мер, расположенных вне главной диагонали, имеет по меньшей мере две

точки роста (при этом, по-прежнему, считается, что все меры F_{ij} сосредоточены на $[0, \infty)$ и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$). После того, как на первом этапе мы установим сформулированную теорему в полном объеме для матриц мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$, на втором этапе, используя факторизационное тождество и леммы, докажем теорему для матриц мер на всей прямой.

Этап первый. Пусть $\mathbf{F}$ – матрица мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Предположим сначала, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ примитивна. Напомним [15; определение 8.5.0], что неотрицательная квадратная матрица называется *примитивной*, если она неразложима и обладает только одним собственным значением с максимальным модулем. Не ограничивая общности, можно считать, что собственные векторы $\mathbf{l}, \mathbf{r}$ матрицы $\mathbf{F}(\infty)$, отвечающие собственному значению 1, выбраны так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Тогда $\mathbf{F}(\infty)^k \rightarrow \mathbf{r}\mathbf{l} > \mathbf{0}$ при $k \rightarrow \infty$ [15; теорема 8.5.1]. Выберем целое p достаточно большим так, чтобы $\mathbf{F}(\infty)^p > \mathbf{0}$. Положим $\mathbf{G} := \mathbf{F}^{p*}$. Согласно критерию решетчатости (см. теорему 2) матрица мер $\mathbf{G}$ решетчата тогда и только тогда, когда решетчата матрица мер $\mathbf{F}$, при этом шаги решеток у матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ совпадают. Применяя теорему 3.1(i) из работы [6] к мере восстановления $\mathbf{U}_{\mathbf{G}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^{k*}$, получаем, что

$$\mathbf{U}_{\mathbf{G}}((x, x+h]) \rightarrow \frac{h\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{G}(dx) \mathbf{r}}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $h > 0$ произвольно, если матрица $\mathbf{F}$ нерешетчата, и $h > 0$ кратно шагу решетки λ , если матрица $\mathbf{F}$ решетчата. Очевидно, что

$$\mathbf{U}((x, x+h]) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{U}_{\mathbf{G}}((x, x+h]) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\infty} \mathbf{F}^{k*}(dy) \mathbf{U}_{\mathbf{G}}((x-y, x-y+h]).$$

По теореме о мажорируемой сходимости последнее выражение при $x \rightarrow +\infty$ стремится к

$$h \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathbf{F}^k(\infty) \mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_0^{\infty} x \mathbf{G}(dx) \mathbf{r}} = \frac{h\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_0^{\infty} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}},$$

что доказывает теорему для примитивных $\mathbf{F}(\infty)$. Отметим, что использовавшееся здесь равенство

$$\mathbf{l} \int_0^{\infty} x \mathbf{G}(dx) \mathbf{r} = p \mathbf{l} \int_0^{\infty} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}$$

несложно доказывается индукцией по p , поскольку

$$\int_0^{\infty} x \mathbf{F}^{(p+1)*}(dx) = \int_0^{\infty} x \mathbf{F}^{p*} * \mathbf{F}(dx) = \int_0^{\infty} x \mathbf{F}^{p*}(dx) \mathbf{F}(\infty) + \mathbf{F}(\infty)^p \int_0^{\infty} x \mathbf{F}(dx).$$

И вообще, если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ – любые $(m \times m)$ -матрицы неотрицательных мер, то

$$\int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F} * \mathbf{G}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{F}(\infty) \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{G}(dx).$$

Этим соотношением мы будем пользоваться в дальнейшем, не оговаривая этого особо. Пусть, по-прежнему, $\mathbf{F}$ – матрица мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$, но

матрица $\mathbf{F}(\infty)$ уже импримитивна. Пусть $d > 1$ – индекс импримитивности матрицы $\mathbf{F}(\infty)$ [21; гл. XII, § 5, определение 3]. Переставляя в случае необходимости одинаково строки и столбцы, можно представить матрицы $\mathbf{F}(\infty)$, $\mathbf{F}$ в виде [15; замечание 8.4.9]

$$\mathbf{F}(\infty) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_1(\infty) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_2(\infty) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{F}_d(\infty) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{F}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

здесь $\mathbf{F}_i$ – блочные $(m \times m)$ -матрицы и $m = n/d$. Кроме того [21; гл. XIII, § 5, следствие теоремы 5],

$$\mathbf{F}(\infty)^d = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1(\infty) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2(\infty) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_d(\infty) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{G}_i(\infty)$, $i = 1, \dots, d$, – блочные примитивные матрицы, имеющие спектральный радиус 1. Не ограничивая общности, можно считать, что такая перестановка уже произведена. Отметим, что левые и правые собственные векторы $\mathbf{l}_i$, $\mathbf{r}_i$ матриц $\mathbf{G}_i(\infty)$, отвечающие собственному значению 1, совпадают с соответствующими порциями векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{r}$; например,

$$\mathbf{l}_1 = (l_1, \dots, l_m), \quad \mathbf{l}_2 = (l_{m+1}, \dots, l_{2m}), \quad \dots, \quad \mathbf{l}_d = (l_{(d-1)m+1}, \dots, l_n).$$

Очевидно, матрицы $\mathbf{G}_i$ выражаются следующим образом через $\mathbf{F}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2 * \cdots * \mathbf{F}_{d-1} * \mathbf{F}_d, \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{F}_2 * \mathbf{F}_3 * \cdots * \mathbf{F}_d * \mathbf{F}_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{G}_d &= \mathbf{F}_d * \mathbf{F}_1 * \cdots * \mathbf{F}_{d-2} * \mathbf{F}_{d-1}. \end{aligned}$$

Положим $\mathbf{G} := \mathbf{F}^{d*}$. Тогда

$$\mathbf{U}_G := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^{k*} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}_d \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}_i^{k*}$, $i = 1, \dots, d$. Как мы уже установили, для каждой блочной матрицы $\mathbf{U}_i$ утверждение теоремы справедливо. Для компактности записи положим $\mu_i := \mathbf{l}_i \int_0^{\infty} x \mathbf{G}_i(dx) \mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, d$. Имеем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\mathbf{G}}((x, x+h]) &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1((x, x+h]) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hdashline & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}_d((x, x+h]) \end{pmatrix} \\ &\rightarrow h \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{l}_1}{\mu_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hdashline & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \frac{\mathbf{r}_d \mathbf{l}_d}{\mu_d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возвратимся к исходной мере восстановления $\mathbf{U}$. По теореме о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{U}((x, x+h]) &= \sum_{k=0}^{d-1} \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{U}_{\mathbf{G}}((x, x+h]) \\ &\rightarrow h \sum_{k=0}^{d-1} \mathbf{F}(\infty)^k \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{l}_1}{\mu_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{l}_2}{\mu_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \frac{\mathbf{r}_d \mathbf{l}_d}{\mu_d} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Вспоминая структуру матрицы $\mathbf{F}(\infty)$, нетрудно понять, что справедливы следующие соотношения, связывающие блочные матрицы $\mathbf{F}_i(\infty)$ и векторы $\mathbf{l}_i, \mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{F}(\infty)\mathbf{r} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F}_1(\infty)\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_2(\infty)\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{F}_d(\infty)\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_d; \quad (10)$$

$$\mathbf{l}\mathbf{F}(\infty) = \mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{l}_d\mathbf{F}_d(\infty) = \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{l}_1\mathbf{F}_1(\infty) = \mathbf{l}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{l}_{d-1}\mathbf{F}_{d-1}(\infty) = \mathbf{l}_d. \quad (11)$$

Вычислим значения $\mathbf{l}_i \int_0^\infty x \mathbf{G}_i(dx) \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, d$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \mathbf{G}_1(dx) &= \int_0^\infty x \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2 * \dots * \mathbf{F}_{d-1} * \mathbf{F}_d(dx) \\ &= \int_0^\infty x \mathbf{F}_1(dx) \mathbf{F}_2(\infty) \dots \mathbf{F}_{d-1}(\infty) \mathbf{F}_d(\infty) \\ &\quad + \mathbf{F}_1(\infty) \int_0^\infty x \mathbf{F}_2(dx) \dots \mathbf{F}_{d-1}(\infty) \mathbf{F}_d(\infty) \\ &\quad + \dots + \mathbf{F}_1(\infty) \mathbf{F}_2(\infty) \dots \int_0^\infty x \mathbf{F}_{d-1}(dx) \mathbf{F}_d(\infty) \\ &\quad + \mathbf{F}_1(\infty) \mathbf{F}_2(\infty) \dots \mathbf{F}_{d-1}(\infty) \int_0^\infty x \mathbf{F}_d(dx). \end{aligned} \quad (12)$$

Умножая обе части этого равенства слева на $\mathbf{l}_1$ и справа на $\mathbf{r}_1$ и учитывая соотношения (10) и (11), убеждаемся в том, что первое слагаемое в правой части (12) дает вклад $\mathbf{l}_1 \int_0^\infty x \mathbf{F}_1(dx) \mathbf{r}_2$, второе — $\mathbf{l}_2 \int_0^\infty x \mathbf{F}_2(dx) \mathbf{r}_3$ и так далее, последнее же слагаемое дает значение $\mathbf{l}_d \int_0^\infty x \mathbf{F}_d(dx) \mathbf{r}_1$. В итоге получим

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 \int_0^\infty x \mathbf{G}_1(dx) \mathbf{r}_1 &= \mathbf{l}_1 \int_0^\infty x \mathbf{F}_1(dx) \mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_2 \int_0^\infty x \mathbf{F}_2(dx) \mathbf{r}_3 \\ &\quad + \dots + \mathbf{l}_d \int_0^\infty x \mathbf{F}_d(dx) \mathbf{r}_1 = \mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}. \end{aligned}$$

фиксированное число, если матрица $\mathbf{F}(\infty)$ нерешетчатая (что влечет нерешетчатость матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$ согласно лемме 2) и $h > 0$ кратно λ – общему шагу решеток матриц $\mathbf{F}(\infty)$ и $\mathbf{F}_+(\infty)$, если матрица $\mathbf{F}(\infty)$ решетчатая. Воспользуемся представлением (8) для меры $\mathbf{U}$. Имеем

$$\mathbf{U}((x, x+h]) = \int_{-\infty}^{0+} \mathbf{U}_+((x-y, x-y+h]) \mathbf{U}_-(dx). \quad (14)$$

Поскольку $\mathbf{U}_-$ – матрица конечных мер (см. лемму 3), можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (14). Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{U}((x, x+h]) &= \frac{h \mathbf{r} \mathbf{l} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)]}{\mathbf{l} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)] \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) \mathbf{r}} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)]^{-1} \\ &= \frac{h \mathbf{r} \mathbf{l}}{\mathbf{l} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)] \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (15)$$

так как

$$\mathbf{U}_-(\mathbb{R}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{F}_-(\infty)^m = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)]^{-1}.$$

Из равенства $\mathbf{F} = \mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_- * \mathbf{F}_+$ вытекает

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) &= \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_-(dx) + \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_-(dx) \mathbf{F}_+(\infty) - \mathbf{F}_-(\infty) \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)] \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) + \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_-(dx) [\mathbf{I} - \mathbf{F}_+(\infty)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Умножая матричное равенство (16) слева на $\mathbf{l}$ и справа на $\mathbf{r}$, получаем

$$\mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} = \mathbf{l} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_-(\infty)] \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}_+(dx) \mathbf{r}, \quad (17)$$

так как $\mathbf{r}$ – правый собственный вектор матрицы $\mathbf{F}_+(\infty)$, отвечающий собственному значению 1. Подставляя (17) в (15), убеждаемся в справедливости (5). Наконец, соотношение (6) устанавливается предельным переходом в равенстве (14) при $x \rightarrow -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{U}_+((x-y, x-y+h]) = \mathbf{0}$, так как сужение $\mathbf{U}_+|_{(-\infty, 0]} = \mathbf{0}$). Теорема 1 доказана полностью.

§ 6. Применения. Системы интегральных уравнений

Перейдем к изучению асимптотических свойств решений системы интегральных уравнений типа восстановления (4):

$$z_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} z_j(x-u) F_{ij}(du), \quad i = 1, \dots, n.$$

Запишем эту систему в матричной форме

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{g}(x) + \mathbf{F} * \mathbf{z}(x); \quad (18)$$

здесь $\mathbf{g}(x) := (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$ и аналогично для $\mathbf{z}(x)$, а i -я координата вектора $\mathbf{F} * \mathbf{z}(x)$ по определению равна сумме в правой части (4).

Системы уравнений вида (18) рассматривались в работах [11]–[14] при различных предположениях относительно $\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}$, и в зависимости от вида этих объектов были установлены асимптотические свойства решений $\mathbf{z}(x)$ в той или иной форме, о чем будет сказано дополнительно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [2; гл. XI, § 1]. Вещественнозначная функция $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *непосредственно интегрируемой по Риману*, если при любом $h > 0$ ряды

$$\underline{\sigma}(h) := h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \min\{g(x) : x \in [(k-1)h, kh]\},$$

$$\overline{\sigma}(h) := h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \max\{g(x) : x \in [(k-1)h, kh]\}$$

сходятся абсолютно и $\lim_{h \rightarrow 0} [\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)] = 0$.

Очевидно, что $\mathbf{z}(x) := \mathbf{U} * \mathbf{g}(x)$ – решение системы (18) для $\mathbf{g} \in L_1(\mathbb{R})$. В отличие от аналогичных систем уравнений на полуоси, у которых решение определяется однозначно в виде $\mathbf{z}(x) = \mathbf{U} * \mathbf{g}(x)$ [10; замечание 1], в рассматриваемом случае ситуация несколько иная. Если $\mathbf{z}(x)$ – решение системы (18) и $\mathbf{r}$ – произвольный правый собственный вектор, отвечающий собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$, то $\mathbf{z}(x) + \mathbf{r}$ – снова решение системы (18).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\mu = \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$ и функции $g_j(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, непосредственно интегрируемы по Риману. Тогда справедливы следующие утверждения. Если матрица мер $\mathbf{F}$ нерешетчата, то

$$\mathbf{U} * \mathbf{g}(x) = \left(\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} g_j(x-y) U_{ij}(dy) \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\mu} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{g}(y) dy, & x \rightarrow +\infty, \\ (0, \dots, 0)^T, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Если матрица мер $\mathbf{F}$ решетчата, то

$$\mathbf{U} * \mathbf{g}(x + n\lambda) \rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda \mathbf{r} \mathbf{l}}{\mu} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(x + k\lambda), & n \rightarrow +\infty, \\ (0, \dots, 0)^T, & n \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем точно так же, как и в одномерном случае (см. замечание перед доказательством теоремы 1 в [2; гл. XI, § 9]). Пусть, для

определенности, матрица мер $\mathbf{F}$ нерешетчатая. Применяя теорему 1, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} g_j(x-y) U_{ij}(dy) \rightarrow \begin{cases} \frac{r_i l_j}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g_j(y) dy, & x \rightarrow +\infty, \\ 0, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Суммируя полученные предельные соотношения по j от 1 до n , убеждаемся в справедливости теоремы 4.

По аналогии с одномерным случаем теорему 4 можно назвать *многомерной ключевой теоремой восстановления*.

Ранее аналогичные результаты для *нерешетчатых* матриц мер $\mathbf{F}$ на всей прямой были получены в работах [12] и [14] при более ограничительных предположениях. Помимо условий, перечисленных в теореме 4 настоящей работы, в теореме 4 из работы [12] предполагалось, что $\mathbf{U}((-\infty, t]) < \infty$ при любом t и $\mu \in (0, +\infty)$, а в теореме 3 из работы [14] требовалось, чтобы $\mu \in (0, +\infty)$ и $\varrho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$, т.е. чтобы матрица мер $\mathbf{F}^{m*}$ обладала абсолютно непрерывной компонентой $(\mathbf{F}^{m*})_c \neq 0$.

Разложение Стоуна для матричной меры восстановления [14; теорема 4] позволяет получить короткое доказательство асимптотических свойств решения системы уравнений типа восстановления (18) для $\mathbf{g} \in L_1(\mathbb{R})$ [14; теорема 1], не требуя при этом абсолютной непрерывности матрицы мер $\mathbf{F}$. Поэтому применение теоремы 1, включающей в себя случай $\mu = 1 \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} = +\infty$, позволяет установить разложение Стоуна для $\mathbf{U}$ и при $\mu = +\infty$, т.е. в большей общности по сравнению с теоремой 4 из работы [14], и, тем самым, дать более общий вариант теоремы об асимптотике решения системы (18) (см. теорему 6 ниже).

ТЕОРЕМА 5 (разложение Стоуна). Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры на прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\mu := 1 \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$ и $\varrho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Тогда матричная мера восстановления $\mathbf{U}$, порожденная матрицей мер $\mathbf{F}$, допускает разложение $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, где $\mathbf{U}_2$ – матрица конечных мер, а $\mathbf{U}_1$ – матрица абсолютно непрерывных мер с ограниченными непрерывными плотностями $\mathbf{u}(x) = (u_{ij}(x))$, для которой существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\mu}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}.$$

Доказательство теоремы 5 почти дословно повторяет рассуждения из доказательства разложения Стоуна для матричной меры восстановления на полуоси [10; теорема 2] и потому опускается. Отметим только, что в соответствующих местах следует воспользоваться теоремами 1 и 4.

Введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} M_l &:= \{f \in L_\infty(\mathbb{R}) : \exists f(\pm\infty)\}, & M_0 &:= \{f \in M_l : f(\pm\infty) = 0\}, \\ C_l &:= \{f \in C(\mathbb{R}) : \exists f(\pm\infty)\}, & C_0 &:= \{f \in C_l : f(\pm\infty) = 0\}. \end{aligned}$$

Пределы $f(\pm\infty)$ в M_l понимаются в следующем смысле: в классе эквивалентных функций найдется представитель $\tilde{f}$ такой, что существуют обычные пределы $\tilde{f}(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(x)$ и $f(\pm\infty) := \tilde{f}(\pm\infty)$.

Опираясь на установленный расширенный вариант разложения Стоуна, мы можем теперь обобщить теорему 1 из работы [14] об асимптотических свойствах решения системы уравнений (18) следующим образом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $\mathbb{R}$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\mu := \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$ и $\varrho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Пусть $\mathbf{g} \in L_1(\mathbb{R})$ – вектор-функция. Тогда существует решение $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ системы (18) такое, что $\mathbf{z}_1 \in C_l$, $\mathbf{z}_2 \in L_1(\mathbb{R})$, $\mathbf{z}_1(-\infty) = (0, \dots, 0)^T$ и

$$\mathbf{z}_1(+\infty) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mu} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{g}(x) dx.$$

Если, дополнительно, предположить, что $\mathbf{g} \in M_0(C_0)$, то $\mathbf{z}_2 \in M_0(C_0)$, так что $\mathbf{z} \in M_l(C_l)$.

Доказательство теоремы 6 совпадает с доказательством теоремы 1 в работе [14], следует лишь воспользоваться более общей версией разложения Стоуна, доставляемой теоремой 5 (см. также доказательство теоремы 3 в [10]).

Утверждения, аналогичные теореме 6, были ранее получены в работах [11] и [14] при более ограничительных предположениях. Помимо условий, перечисленных в теореме 6, в теореме 8.1 из работы [11] предполагалось, что $\mathbf{F}$ – матрица абсолютно непрерывных мер, т.е. $(\mathbf{F})_s = \mathbf{0}$, а в теореме 1 из работы [14] требовалось, чтобы μ было конечным положительным числом.

Завершая обзор результатов об асимптотике $\mathbf{U} * \mathbf{g}(x)$, отметим равномерные оценки скорости сходимости [13; теорема 2]:

$$\sup_{\alpha: |\alpha| \leq |\mathbf{g}|} \left| \mathbf{U} * \alpha(t) - \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mu} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) dx \right| = o\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$\sup_{\alpha: |\alpha| \leq |\mathbf{g}|} |\mathbf{U} * \alpha(t)| = o\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right), \quad t \rightarrow -\infty,$$

где $\varphi(x)$ – полумультипликативная функция: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$.

Список литературы

- [1] D. Blackwell, “Extension of a renewal theorem”, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 315–320.
- [2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Наука, М., 1967.
- [3] C. Stone, “On absolutely continuous components and renewal theory”, *Ann. Math. Stat.*, **37** (1966), 271–275.
- [4] E. Arjas, E. Nummelin, R. L. Tweedie, “Uniform limit theorems for non-singular renewal and Markov renewal processes”, *J. Appl. Probab.*, **15** (1978), 112–125.

- [5] G. Alsmeyer, *Erneuerungstheorie*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [6] K. S. Crump, “On systems of renewal equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **30** (1970), 425–434.
- [7] K. S. Crump, “On systems of renewal equations: the reducible case”, *J. Math. Anal. Appl.*, **31** (1970), 517–528.
- [8] T. A. Ryan, Jr., “A multidimensional renewal theorem”, *Ann. Probab.*, **4** (1976), 656–661.
- [9] Н. Б. Енгибарян, “Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 59–72.
- [10] М. С. Сгибнев, “Разложение Стоуна для матричной меры восстановления на полупрямой”, *Матем. сб.*, **192**:7 (2001), 97–106.
- [11] Н. Б. Енгибарян, “Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 61–82.
- [12] B. de Saporta, “Renewal theorem for a system of renewal equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **39**:5 (2003), 823–838.
- [13] M. S. Sgibnev, “Systems of renewal equations on the line”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **10**, 495–517.
- [14] М. С. Сгибнев, “Системы интегральных уравнений типа восстановления на прямой”, *Дифференциальные уравнения*, **40**:1 (2004), 128–137.
- [15] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [16] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979.
- [17] М. Лоев, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962.
- [18] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1976.
- [19] Э. Л. Пресман, “Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:4 (1969), 861–900.
- [20] S. Asmussen, “Aspects of matrix Wiener–Hopf factorisation in applied probability”, *Math. Sci.*, **14**:2 (1989), 101–116.
- [21] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967.

М. С. Сгибнев (M. S. Sgibnev)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
22.03.2005