Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r , *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 135–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:54:37

УДК 517

И. И. Шарапудинов

Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r

В работе продолжено исследование аппроксимативных свойств на классе W^r частных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследование аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Лежандра, начатое в работах [1]–[3]. Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $s > -1$, $1 \leq p < \infty$, $L_p^s = L_p^s(-1, 1)$ – пространство измеримых функций, заданных на $[-1, 1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^s} = \left(\int_{-1}^1 (1-x^2)^s |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad L_p = L_p^0(-1, 1),$$

$W_{L_p^s}^r$ – класс, состоящий из функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а $f^{(r)} \in L_p^s(-1, 1)$, $W^r H_{L_p}^\mu(B)$ – подкласс функций $f = f(x)$ из $W_{L_p}^r$, для которых $\omega(f^{(r)}, \delta)_{L_p} \leq B\delta^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, где

$$\omega(g, \delta)_{L_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_{-1}^{1-h} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции $g = g(x) \in L_p$, $C[-1, 1]$ – пространство непрерывных функций $f = f(x)$, заданных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом: $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Через W^r мы обозначим класс r раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[-1, 1]$, для которых r -я производная $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет неравенству $\|f^{(r)}\| \leq 1$. Далее, если $0 < q < 1$, $\mathcal{E}_q$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1 , сумма полуосей которого равна $1/q$, то через $A_q(B)$ мы обозначим класс функций $f = f(z)$, принимающих действительные значения на $[-1, 1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных в $\mathcal{E}_q$ по модулю числом B .

Через $\mathcal{N}_{n+2r} = \mathcal{N}_{n+2r}(f, x)$ мы обозначим частичную сумму смешанного ряда функции f по полиномам Лежандра (алгебраический полином степени $n+2r$, см. ниже равенство (3.7)). В работе [1] рассматривались аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{N}_{n+2r}$ на классах $S^r H_{\Delta}^\mu(B)$, состоящих из функций, обладающих переменной гладкостью на $[-1, 1]$. (Точное определение классов $S^r H_{\Delta}^\mu(B)$ см. в [1].) В частности, было показано, что $\mathcal{N}_{n+2r}(f, x)$ осуществляет

приближение наилучшего порядка на классах $S^r H_\Delta^\mu(B)$ среди алгебраических полиномов степени $n + 2r$. В работе [2], в частности, доказано, что это свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ сохраняется и для классов $W^r H_{L_2}^\mu$. Кроме того, в [2] доказано, что оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ осуществляет приближение наилучшего порядка среди полиномов степени $n + 2r$ для классов $A_q(B)$. В работе [3] были рассмотрены смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и исследованы их аппроксимативные свойства на классах $W^r H_{L_2}^\mu$, $S^r H_\Delta^\mu(B)$ и $A_q(B)$. Методы, применявшиеся при исследовании аппроксимативных свойств смешанных рядов по ультрасферическим полиномам на классах $W^r H_{L_2}^\mu$, $S^r H_\Delta^\mu(B)$, $A_q(B)$, не позволяют достичь окончательных результатов при решении задачи об оценке отклонения операторов $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ от функций $f \in W^r$. В настоящей работе предпринята попытка восполнить этот пробел. Один из подходов к решению этой задачи связан с использованием известного в теории приближений результата А. С. Теляковского [4] и И. Е. Гопенгауза [5], а именно: если $f \in W^r$, то найдется последовательность алгебраических полиномов $\{p_n(x)\}_{n=2r-1}^\infty$ таких, что $\deg p_n(x) = n$, и положительная постоянная $c = c(r)$, для которой справедливы следующие неравенства:

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq c(1-x^2)^{(r-\nu)/2} n^{\nu-r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad (1.1)$$

$$x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \nu \leq r,$$

где

$$\omega(g, \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [-1, 1] \\ |x-t| \leq \delta}} |g(x) - g(t)|$$

– модуль непрерывности функции $g \in C[-1, 1]$. При $\nu = 0$ это неравенство мы можем записать в следующем виде:

$$(1-x^2)^{-r/2} |f(x) - p_n(x)| \leq c n^{-r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right), \quad x \in [-1, 1]. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что если $f \in W^r$, то мы можем определить следующую величину:

$$E_n^r(f) = \inf_{p_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2)^{-r/2} |f(x) - p_n(x)|, \quad (1.3)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_n(x)$ степени n , для которых $f^{(\nu)}(\pm 1) = p_n^{(\nu)}(\pm 1)$ при $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Из (1.2) следует, что

$$E_n^r(f) \leq c n^{-r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad (1.4)$$

если только $f \in W^r$. Среди полиномов $p_n(x)$ степени $n \geq 2r-1$, удовлетворяющих условиям $f^{(\nu)}(\pm 1) = p_n^{(\nu)}(\pm 1)$ при $\nu = 0, 1, \dots, r-1$, через $p_n^r(f) = p_n^r(f, x)$ мы обозначим тот полином, для которого

$$E_n^r(f) = \max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x^2)^{-r/2} |f(x) - p_n^r(f, x)|. \quad (1.5)$$

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Для удобства ссылок мы соберем здесь необходимые для дальнейшего свойства полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, которые мы определим с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \kappa(x) \sigma^n(x) \}, \quad (2.1)$$

где α, β – произвольные действительные числа, $\kappa(x) = \kappa(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha \times (1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортонормированную систему с весом $\kappa(x)$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) \kappa(x) dx = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm}, \quad (2.2)$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.3)$$

и имеет место *формула Кристоффеля–Дарбу*

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{\alpha,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta}(y)}{h_k^{\alpha,\beta}} \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \\ &\quad \times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y) - P_n^{\alpha,\beta}(x) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [6]:

– *производные*

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d^r}{dx^r} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_r}{2^r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x), \quad (2.6)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1) \cdots (a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$;

– *равенства*

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (\alpha+1)_k} \left(\frac{1-t}{2} \right)^k, \quad (2.7)$$

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}} \frac{d^m}{dx^m} \{ (1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x) \}, \quad (2.8)$$

$$(1+x) P_n^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} [(n+\beta+1) P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+1) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)]; \quad (2.9)$$

– *симметрия*

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x); \quad (2.10)$$

– *весовая оценка* ($1 \leq x \leq 1$)

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha, \beta}(x)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2}, \quad (2.11)$$

где здесь и всюду в дальнейшем $c(\alpha)$, $c(\alpha, \beta)$, $c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, различные в разных местах;

– *оценка интеграла, содержащего полином Якоби*

$$\int_0^1 (1-x)^\gamma |P_n^{\alpha, \beta}(x)| dx \asymp \begin{cases} n^{\alpha-2\gamma-2}, & 2\gamma < \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-1/2} \ln n, & 2\gamma = \alpha - \frac{3}{2}, \\ n^{-1/2}, & 2\gamma > \alpha - \frac{3}{2}; \end{cases} \quad (2.12)$$

– *рекуррентная формула*

$$\begin{aligned} P_{-1}^{\alpha, \beta}(x) &= 0, \quad P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1, \quad P_1^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{\alpha, \beta}(x) &= (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\ &\quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{\alpha, \beta}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots; \end{aligned} \quad (2.13)$$

– *асимптотическая формула*

$$P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta) = n^{-1/2} k(\theta) \left\{ \cos(\lambda \theta + \gamma) + \frac{r_n(\theta)}{n \sin \theta} \right\}, \quad (2.14)$$

где α, β – произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \pi^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}, \\ \lambda &= n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = - \left(\frac{\alpha + 1}{2} \right) \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

а для остаточного члена $r_n(\theta) = r_n(\theta; \alpha, \beta)$ имеет место оценка

$$|r_n(\theta)| \leq c(\alpha, \beta, \delta), \quad 0 < \frac{\delta}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{\delta}{n}. \quad (2.15)$$

§ 3. Смешанный ряд по полиномам Лежандра

Пусть $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$, $n = 0, 1, \dots$, – полиномы Лежандра. Если $f = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$ $r-1$ раз, а $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, то при каждом $k = 0, 1, \dots$ мы можем определить коэффициенты

$$f_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Рассмотрим следующий ряд

$$f(x) \sim D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad (3.2)$$

где $D_{2r-1}(x)$ – алгебраический полином степени $2r - 1$, для которого

$$D_{2r-1}^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (3.3)$$

а

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (3.4)$$

$k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1) \cdots (k-r+1)$. Из результатов, полученных в работах [2] и [3], в частности, вытекает, что если $f \in W^r$, то ряд (3.2) сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ и имеет место равенство

$$f(x) = D_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x). \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.3), в свою очередь, следует, что $D_{2r-1}(x)$ представляет собой интерполяционный полином Эрмита, интерполирующий функцию $f(x)$ и ее производные $f^{(\nu)}(x)$ при $0 \leq \nu \leq r - 1$ в узлах ± 1 , т.е.

$$D_{2r-1}(x) = \frac{(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \sum_{s=0}^{r-1-\nu} \frac{(r)_s}{2^s s!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu-s}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu-s}} \right], \quad (3.6)$$

где $(r)_0 = 1$, $(r)_s = r(r+1) \cdots (r+s-1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В работах [2] и [3] допущена описка, заключающаяся в том, что в выражениях для $D_{2r-1}(x)$, соответствующих равенству (3.6), сумма вида $\sum_{s=0}^{r-1-\nu}$ пропущена.

Правая часть равенства (3.5) – это *смешанный* ряд функции f по полиномам Лежандра. Рассмотрим его частичную сумму следующего вида:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = D_{2r-1}(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (3.7)$$

Из (3.5) и (3.7) мы получаем, что

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{f_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) = R_{r,n}(f, x). \quad (3.8)$$

Дифференцируя обе части равенства (3.8) ν раз и пользуясь равенством (2.8), получаем, что

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) - (\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x))^{(\nu)} &= \frac{(-1)^{r-\nu}(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{(f^{(\nu)})_{r-\nu,k}}{k^{[r-\nu]}} P_{k-r+\nu}^{r-\nu,r-\nu}(x) \\ &= R_{r-\nu,n+\nu}(f^{(\nu)}, x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда, в свою очередь, выводим равенство

$$(\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x))^{(\nu)} = \mathcal{Y}_{n+\nu+2(r-\nu)}(f^{(\nu)}, x). \quad (3.10)$$

§ 4. Приближение функций $f \in W^r$ посредством $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$

Из (3.8) нетрудно заметить, что для произвольного алгебраического полинома $p_m(x)$ степени $m \leq n + 2r$ имеет место равенство

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(p_m, x) = p_m(x). \quad (4.1)$$

В частности, если $f \in W^r$, то для полинома $p_{n+2r}^r(f) = p_{n+2r}^r(f, x)$, удовлетворяющего условию (1.5), из (4.1) имеем

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) + \mathcal{Y}_{n+2r}(p_{n+2r}^r(f) - f, x). \quad (4.2)$$

Сопоставляя (3.7), (3.3) и (4.2), мы можем записать

$$f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = f(x) - p_{n+2r}^r(f, x) + Z(x), \quad (4.3)$$

где

$$Z(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (4.4)$$

а в силу (3.1)

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 (p_{n+2r}^r(f, t) - f(t))^{(r)} P_k(t) dt. \quad (4.5)$$

Далее, поскольку $(p_{n+2r}^r(f, t) - f(t))_{t=\pm 1}^{(\nu)} = 0$ при $\nu = 0, 1, \dots, r-1$, то, применяя метод интегрирования по частям и формулу (2.6), из (4.5) находим

$$(p_{n+2r}^r(f) - f)_{r,k} = (-1)^r \frac{2k+1}{2} \frac{(k+1)_r}{2^r} \int_{-1}^1 (p_{n+2r}^r(f, t) - f(t)) P_{k-r}^{r,r}(t) dt. \quad (4.6)$$

Из (4.4) и (4.6) имеем

$$Z(x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 (p_{n+2r}^r(f, t) - f(t)) dt \sum_{k=r}^{n+r} \frac{(k+1)_r(2k+1)}{2^{2r+1} k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(t) P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (4.7)$$

Обратившись к первому из равенств (2.4), нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=r}^{n+r} \frac{(k+1)_r(2k+1)}{2^{2r+1} k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(t) P_{k-r}^{r,r}(x) = K_n^{r,r}(x, t),$$

поэтому (4.7) можем переписать в следующем виде:

$$Z(x) = (1-x^2)^r \int_{-1}^1 (p_{n+2r}^r(f, t) - f(t)) K_n^{r,r}(x, t) dt. \quad (4.8)$$

Из (1.5) и (4.8) мы можем вывести оценку

$$|Z(x)| \leq (1-x^2)^r l_n^r(x) E_n^r(f), \quad (4.9)$$

где

$$l_n^r(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{r/2} |K_n^{r,r}(x, t)| dt. \quad (4.10)$$

Сопоставим (4.9) с (4.3) и заметим, что

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \leq |f(x) - p_{n+2r}^r(f, x)| + (1-x^2)^r l_n^r(x) E_n^r(f). \quad (4.11)$$

Отсюда с учетом (1.5) мы приходим к следующей оценке:

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \leq (1-x^2)^{r/2-1/4} ((1-x^2)^{1/4} + (1-x^2)^{r/2+1/4} l_n^r(x)) E_n^r(f). \quad (4.12)$$

В связи с оценкой (4.12) возникает вопрос об оценке величины $l_n^r(x)$ при $x \in (-1, 1)$.

ЛЕММА 4.1. Для $x \in (-1, 1)$ имеет место следующая оценка:

$$l_n^r(x) \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2} [\ln(n\sqrt{1-x^2} + 1) + (1-x^2)^{-1/4}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.10) и симметрии (2.10) имеем $l_n^r(-x) = l_n^r(x)$, поэтому достаточно рассмотреть случай $0 \leq x < 1$. Интеграл (4.10), определяющий функцию $l_n^r(x)$, разобьем на два по схеме: $\int_{-1}^1 = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^1$. Во втором интеграле сделаем замену переменной $t = \cos \theta$, после чего разобьем его на три интеграла: $\int_0^{2\pi/3} = \int_0^{\varphi-1/n} + \int_{\varphi-1/n}^{\varphi+1/n} + \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3}$, где $\varphi = \arccos x > 1/n$. Таким образом,

$$l_n^r(x) = \sum_{k=1}^4 J_k, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^{-1/2} |K_n^{r,r}(x, t)|(1-t^2)^{r/2} dt, \\ J_2 &= \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} |K_n^{r,r}(x, \cos \theta)|(\sin \theta)^{r+1} d\theta, \\ J_3 &= \int_{\varphi-1/n}^{\varphi+1/n} |K_n^{r,r}(x, \cos \theta)|(\sin \theta)^{r+1} d\theta, \\ J_4 &= \int_0^{\varphi-1/n} |K_n^{r,r}(x, \cos \theta)|(\sin \theta)^{r+1} d\theta, \end{aligned}$$

причем если окажется, что $\varphi \leq 1/n$, то $J_4 = 0$, а вместо $\varphi - 1/n$ в J_3 следует взять 0. Перейдем к оценкам величин J_k , для чего предварительно заметим, что

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \asymp n, \quad (4.14)$$

$$h_k^{\alpha, \beta} \asymp \frac{1}{k}. \quad (4.15)$$

Чтобы оценить J_1 , обратимся к формуле Кристоффеля–Дарбу (2.4), тогда

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 2\lambda_n(r, r)|P_n^{r,r}(x)| \int_{-1}^{-1/2} |P_{n+1}^{r,r}(t)|(1-t^2)^{r/2} dt \\ &\quad + 2\lambda_n(r, r)|P_{n+1}^{r,r}(x)| \int_{-1}^{-1/2} |P_n^{r,r}(t)|(1-t^2)^{r/2} dt. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду (2.12), (2.10), (4.14), выводим оценку

$$J_1 \leq c(r)\sqrt{n} \{|P_n^{r,r}(x)| + |P_{n+1}^{r,r}(x)|\} \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2-1/4}. \quad (4.16)$$

Оценим J_3 при $\varphi > 1/n$. Благодаря первой из формул (2.4), соотношению (4.15) и весовой оценке (2.11) имеем

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \int_{\varphi-1/n}^{\varphi+1/n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k^{r,r}} |P_k^{r,r}(\cos \theta) P_k^{r,r}(\cos \varphi)| (\sin \theta)^{r+1} d\theta \\ &\leq c(r) \left[1 + \sum_{k=1}^n k \varphi^{-r-1/2} k^{-1/2} \int_{\varphi-1/n}^{\varphi+1/n} \theta^{-r-1/2} k^{-1/2} \theta^{r+1} d\theta \right] \\ &\leq c(r) \left[1 + n \varphi^{-r-1/2} \int_{\varphi-1/n}^{\varphi+1/n} \theta^{1/2} d\theta \right] \\ &\leq c(r) \varphi^{-r-1/2} \left(\varphi + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \leq c(r) \varphi^{-r} \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если же $\varphi \leq 1/n$, то

$$\begin{aligned} J_3 &\leq c(r) \left[1 + \sum_{k=1}^n k k^r \int_0^{2/n} \theta^{-r-1/2} k^{-1/2} \theta^{r+1} d\theta \right] \\ &\leq c(r) \left[1 + \sum_{k=1}^n k^{r+1/2} \int_0^{2/n} \theta^{1/2} d\theta \right] \\ &\leq c(r) n^{r+3/2} \left(\frac{2}{n} \right)^{3/2} \leq c(r) n^r \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Чтобы оценить J_2 , преобразуем числитель в правой части формулы (2.4) для $\alpha = \beta = r$ с помощью (2.9) и (2.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{r,r}(x) P_n^{r,r}(t) - P_{n+1}^{r,r}(t) P_n^{r,r}(x) \\ = \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) [(1-x) P_n^{r+1,r}(x) P_n^{r,r}(t) - (1-t) P_n^{r+1,r}(t) P_n^{r,r}(x)]. \end{aligned}$$

Тогда $(\lambda_n = \lambda_n(r, r))$

$$\begin{aligned} J_2 &= \lambda_n \left(1 + \frac{r}{n+1} \right) \\ &\quad \times \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} \frac{|(1-x) P_n^{r+1,r}(x) P_n^{r,r}(\cos \theta) - (1-\cos \theta) P_n^{r+1,r}(\cos \theta) P_n^{r,r}(x)|}{\cos \varphi - \cos \theta} \\ &\quad \times (\sin \theta)^{r+1} d\theta. \end{aligned}$$

Так как $(\sin \theta)^{r+1} \asymp \theta^{r+1}$, $\cos \varphi - \cos \theta \asymp \theta^2 - \varphi^2$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi/3]$, то

$$J_2 \leq c(r)n(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)| \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} |P_n^{r,r}(\cos \theta)| \frac{\theta^{r+1}}{\theta^2 - \varphi^2} d\theta \\ + c(r)n|P_n^{r,r}(x)| \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} |P_n^{r+1,r}(\cos \theta)| \frac{\theta^{r+3}}{\theta^2 - \varphi^2} d\theta.$$

Поскольку $\theta^2 - \varphi^2 \geq \theta(\theta - \varphi)$, то в силу весовой оценки (2.11) имеем

$$J_2 \leq c(r)\sqrt{n}(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)| \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} \frac{\theta^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta + c(r)\sqrt{n}|P_n^{r,r}(x)| \int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} \frac{\theta^{1/2}}{\theta - \varphi} d\theta.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой [7]

$$\int_{\varphi+1/n}^{2\pi/3} \frac{\theta^{\alpha-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta \leq c(\alpha) \begin{cases} \varphi^{\alpha-1/2}[\ln(n\varphi+1)+1], & -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \varphi^{\alpha-1/2} \ln(n\varphi+1)+1, & \frac{1}{2} < \alpha, \end{cases}$$

находим

$$J_2 \leq c(r)\sqrt{n} [\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)| + \varphi^{1/2}|P_n^{r,r}(x)|] \ln(n\varphi+1) \\ + c(r)\sqrt{n} [\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)| + |P_n^{r,r}(x)|] \\ \leq c(r) [\varphi^{-r} \ln(n\varphi+1) + \varphi^{-r} + \varphi^{-r-1/2}] \leq c(r)\varphi^{-r-1/2} \{\varphi^{1/2} \ln(n\varphi+1) + 1\} \\ \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2-1/4} \{(1-x^2)^{1/4} \ln[(1-x^2)^{1/2} + 1] + 1\}. \quad (4.19)$$

Оценим J_4 . Поскольку $J_4 = 0$ при $\varphi \leq 1/n$, то мы можем считать, что $\varphi > 1/n$. По аналогии с первым из неравенств (4.19) имеем

$$J_4 \leq c(r)\sqrt{n}(1-x)|P_n^{r+1,r}(x)| \int_0^{\varphi-1/n} \frac{\theta^{1/2}}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta \\ + c(r)\sqrt{n}|P_n^{r,r}(x)| \int_0^{\varphi-1/n} \frac{\theta^{3/2}}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta.$$

Но при $\sigma > 0$

$$\int_0^{\varphi-1/n} \frac{\theta^\sigma}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta \leq \varphi^\sigma \int_0^{\varphi-1/n} \frac{d\theta}{\varphi^2 - \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \varphi^{\sigma-1} \ln(2n\varphi-1) \\ \leq \varphi^{\sigma-1} \ln(n\varphi+1),$$

поэтому

$$J_4 \leq c(r)\sqrt{n} [\varphi^{3/2}|P_n^{r+1,r}(x)| + \varphi^{1/2}|P_n^{r,r}(x)|] \ln(n\varphi+1) \\ \leq c(r)[\varphi^{-r} + \varphi^{-r}] \ln(n\varphi+1) \leq c(r)\varphi^{-r} \ln(n\varphi+1) \\ \leq c(r)(1-x^2)^{-r/2} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1). \quad (4.20)$$

Сопоставляя (4.13), (4.16)–(4.20), убеждаемся в справедливости леммы 4.1.

Из оценки (4.12) и леммы 4.1 непосредственно следует, что

$$\frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)|}{(1-x^2)^{r/2-1/4}} \leq c(r) [(1-x^2)^{1/4} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1) + 1] E_n^r(f). \quad (4.21)$$

Сопоставляя оценки (4.21) и (1.4), приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in W^r$, $n \geq 2r$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)|}{(1-x^2)^{r/2-1/4}} \leq \frac{c(r)}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) [(1-x^2)^{1/4} \ln(n\sqrt{1-x^2}+1) + 1].$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если $n \geq 2r$, то

$$\sup_{f \in W^r} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)|}{(1-x^2)^{r/2-1/4}} \leq c(r) \frac{\ln n}{n^r}. \quad (4.22)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если $n \geq 2r$, то

$$\sup_{f \in W^r} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)|}{(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}} \leq c(r) \frac{\ln n}{n^{r-\nu}}. \quad (4.23)$$

Утверждение следствия 4.2 вытекает из теоремы 4.1, примененной к функции $f \in W^{r-\nu}$, и из равенства (3.10).

Ниже мы приведем доказательство оценок (4.22) и (4.23), не опирающееся на неравенство (1.1), и покажем, что эта оценка неулучшаема. Тем самым, мы получим аналог известного результата Колмогорова о приближении классов $\widetilde{W}^r$, состоящих из r раз непрерывно дифференцируемых 2π -периодических функций, суммами Фурье по тригонометрической системе. Нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Положим

$$\mathcal{K}_{r,m}(x, t) = \sum_{k=r}^m (2k+1) P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t). \quad (4.24)$$

ЛЕММА 4.2. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} (x-t)\mathcal{K}_{r,m}(x, t) &= (m+1) [P_{m-r+1}^{r,r}(x) P_m(t) - P_{m-r}^{r,r}(x) P_{m+1}(t)] \\ &+ \sum_{k=r}^m \frac{r^2}{k+1} P_{m-r+1}^{r,r}(x) P_m(t) - r P_{r-1}(t). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рекуррентной формулой (2.13), которую в случае $\alpha = \beta$ перепишем в следующем виде:

$$2n(n+2\alpha) P_n^{\alpha,\alpha}(x) = (2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha) x P_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x) - 2(n+\alpha-1)(n+\alpha) P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x)$$

или

$$\begin{aligned} (n+\alpha)^2 P_n^{\alpha,\alpha}(x) &+ (n-1+\alpha)(n+\alpha) P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x) \\ &= (2n+2\alpha-1)(n+\alpha) x P_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x) + \alpha^2 P_n^{\alpha,\alpha}(x), \end{aligned}$$

и отсюда получим, что

$$(n+\alpha)P_n^{\alpha,\alpha}(x) + (n-1+\alpha)P_{n-2}^{\alpha,\alpha}(x) = (2n+2\alpha-1)xP_{n-1}^{\alpha,\alpha}(x) + \frac{\alpha^2}{n+\alpha}P_n^{\alpha,\alpha}(x). \quad (4.25)$$

Если $\alpha = 0$, $x = t$, $n = k + 1$, то (4.25) принимает вид

$$(k+1)P_{k+1}(t) + kP_{k-1}(t) = (2k+1)tP_k(t). \quad (4.26)$$

Кроме того, если в (4.25) мы положим $n = k - r + 1$, $\alpha = r$, то получим, что

$$(k+1)P_{k-r+1}^{r,r}(x) + kP_{k-r-1}^{r,r}(x) = (2k+1)xP_{k-r}^{r,r}(x) + \frac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x). \quad (4.27)$$

Из (4.26) и (4.27) находим

$$\begin{aligned} (k+1)[P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t) - P_{k-r}^{r,r}(x)P_{k+1}(t)] - k[P_{k-r}^{r,r}(x)P_{k-1}(t) - P_{k-r-1}^{r,r}(x)P_k(t)] \\ = (x-t)(2k+1)P_{k-r}^{r,r}(x)P_k(t) + \frac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Суммируя правые и левые части равенств, полученных из (4.28) при $k = r, r+1, \dots, m$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 4.2.

ЛЕММА 4.3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} (x-t)\mathcal{H}_{r,m}(x,t) = -rP_{r-1}(t) - \frac{(m+1)^2(1-x)}{m-r+1}P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t) \\ + (m+1)(1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t) \\ + \frac{(m+1)r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t) + \sum_{k=r}^m \frac{r^2}{k+1}P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.9) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} P_{m-r+1}^{r,r}(x) = \frac{m+1}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x) - \frac{m+1}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x), \\ P_{m+1}(t) = P_m(t) - (1-t)P_m^{1,0}(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_{m-r+1}^{r,r}(x)P_m(t) - P_{m-r}^{r,r}(x)P_{m+1}(t) = \frac{r}{m-r+1}P_{m-r}^{r,r}(x)P_m(t) \\ - \frac{m+1}{m-r+1}(1-x)P_{m-r}^{r+1,r}(x)P_m(t) + (1-t)P_{m-r}^{r,r}(x)P_m^{1,0}(t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Сопоставляя равенство (4.29) с леммой 4.2, приходим к утверждению леммы 4.3.

ЛЕММА 4.4. *Справедливо неравенство*

$$(1-x^2)^{r/2+1/4} \left| \sum_{k=r}^m \frac{r^2}{k+1} P_{k-r+1}^{r,r}(x)P_k(t) \right| \leq c(r). \quad (4.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из весовой оценки (2.11) следует, что

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} |P_{k-r+1}^{r,r}(x)| \leq c(r) k^{-1/2}, \quad (4.31)$$

и, с другой стороны, $|P_k(t)| \leq 1$ при $-1 \leq t \leq 1$. Утверждение леммы 4.4 непосредственно вытекает из этих двух оценок.

ЛЕММА 4.5. Пусть $0 < \varepsilon < \delta < 1$, $-1 + \delta \leq x \leq 1$. Тогда

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} |\mathcal{K}_{r,m}(x, t)| dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}. \quad (4.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к леммам 4.3 и 4.4, тогда

$$(1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} |\mathcal{K}_{r,m}(x, t)| dt \leq Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5, \quad (4.33)$$

где в силу (2.11) и (2.12)

$$Z_1 = r(1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{|P_{r-1}(t)|}{x - t} dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}, \quad (4.34)$$

$$Z_2 \leq \frac{(m+1)^2(1-x)}{m-r+1} |P_{m-r}^{r+1,r}(x)| (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{|P_m(t)|}{x - t} dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}, \quad (4.35)$$

$$Z_3 \leq (m+1) |P_{m-r}^{r,r}(x)| (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{(1-t) |P_m^{1,0}(t)|}{x - t} dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}, \quad (4.36)$$

$$Z_4 \leq \frac{r(m+1)}{m-r+1} |P_{m-r}^{r,r}(x)| (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{|P_m(t)|}{x - t} dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}, \quad (4.37)$$

$$Z_5 \leq \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{r^2}{x - t} \sum_{k=r}^m \frac{(1 - x^2)^{r/2+1/4}}{k+1} |P_{k-r+1}^{r,r}(x) P_k(t)| dt \leq \frac{c(r)}{\delta - \varepsilon}. \quad (4.38)$$

Утверждение леммы 4.5 непосредственно вытекает из формул (4.33)–(4.38).

ЛЕММА 4.6. Пусть $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$l_{r,m}(x) = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m}(x, t)| dt \leq c(r) \ln(m+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства симметрии (2.10)

$$\int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m}(x, t)| dt = \int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,m}(-x, t)| dt,$$

поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая $0 \leq x \leq 1$. Разобьем интеграл $\int_{-1}^1$ на два по схеме $\int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^1$. Во втором интеграле произведем замену переменной $t = \cos \theta$, после чего разобьем его на три интеграла:

$$\int_0^{2\pi/3} = \int_0^{\varphi-1/m} + \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} + \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3},$$

где $\varphi = \arccos x$. Таким образом,

$$l_{r,m}(x) = \sum_{k=1}^4 X_k, \quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= (1-x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1}^{-1/2} |\mathcal{K}_{r,m}(x, t)| dt, \\ X_2 &= (\sin \varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} |\mathcal{K}_{r,m}(x, \cos \theta)| d\theta, \\ X_3 &= (\sin \varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} |\mathcal{K}_{r,m}(x, \cos \theta)| d\theta, \\ X_4 &= (\sin \varphi)^{r+1/2} \int_0^{\varphi-1/m} |\mathcal{K}_{r,m}(x, \cos \theta)| d\theta, \end{aligned}$$

причем если $\varphi \leq 1/m$, то $X_4 = 0$, а вместо $\varphi - 1/m$ в X_3 следует взять 0. Оценим X_k при $1 \leq k \leq 4$. Для X_1 в силу леммы 4.5 мы имеем оценку

$$X_1 \leq c(r). \quad (4.40)$$

Оценим X_3 . Имеем

$$\begin{aligned} X_3 &\leq (\sin \varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} \sum_{k=r}^m (2k+1) |P_{k-r}^{r,r}(\cos \varphi) P_k(\cos \theta)| \sin \theta d\theta \\ &\leq c(r) \sum_{k=r}^m (2k+1) (\sin \varphi)^{r+1/2} |P_{k-r}^{r,r}(\cos \varphi)| \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} |P_k(\cos \theta)| \sin \theta d\theta \\ &\leq c(r) \sum_{k=r}^m (2k+1) k^{-1/2} k^{-1/2} \int_{\varphi-1/m}^{\varphi+1/m} d\theta \leq c(r). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Оценим X_2 . Воспользовавшись леммой 4.3, имеем

$$X_2 \leq X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 + X_2^4 + X_2^5, \quad (4.42)$$

где

$$X_2^1 = r(\sin \varphi)^{r+1/2} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{|P_{r-1}(\cos \theta)| \sin \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad (4.43)$$

$$X_2^2 = \frac{(m+1)^2}{m-r+1} (\sin \varphi)^{r+5/2} |P_{m-r}^{r+1,r}(\cos \varphi)| \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{|P_m(\cos \theta)| \sin \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad (4.44)$$

$$X_2^3 = 2(m+1) (\sin \varphi)^{r+1/2} |P_{m-r}^{r,r}(\cos \varphi)| \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{|P_m^{1,0}(\cos \theta)| \sin^3 \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad (4.45)$$

$$X_2^4 = \frac{r(m+1)}{m-r+1} (\sin \varphi)^{r+5/2} |P_{m-r}^{r,r}(\cos \varphi)| \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{|P_m(\cos \theta)| \sin \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad (4.46)$$

$$X_2^5 = \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{r^2 \sin \theta}{x - \cos \theta} \left| \sum_{k=r}^m \frac{(1-x^2)^{r/2+1/4}}{k+1} P_{k-r+1}^{r,r}(x) P_k(\cos \theta) \right| d\theta. \quad (4.47)$$

Заметим, далее, что

$$\cos \varphi - \cos \theta \asymp \theta^2 - \varphi^2 > \theta(\theta - \varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \quad (4.48)$$

и в силу (2.11)

$$(\sin \theta)^{\alpha+1/2} |P_m^{\alpha, \beta}(\cos \theta)| \leq c(\alpha, \beta) m^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}. \quad (4.49)$$

Из соотношений (4.43)–(4.49) имеем

$$X_2^1 \leq c(r) \varphi^{r+1/2} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta, \quad (4.50)$$

$$X_2^2 \leq c(r) \varphi^2 \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta, \quad (4.51)$$

$$X_2^3 \leq c(r) \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{1/2}}{\theta - \varphi} d\theta, \quad (4.52)$$

$$X_2^4 \leq c(r) \frac{1}{m} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta. \quad (4.53)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta &< \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{(\varphi + 1/m)^{-1/2}}{\theta - \varphi} d\theta = \left(\varphi + \frac{1}{m}\right)^{1/2} \ln(\theta - \varphi) \Big|_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \\ &= \left(\varphi + \frac{1}{m}\right)^{-1/2} \ln \left[\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) m \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\theta^{1/2}}{\theta - \varphi} d\theta &< \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{\varphi^{1/2}}{\theta - \varphi} d\theta + \int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \frac{(\theta - \varphi)^{1/2}}{\theta - \varphi} d\theta \\ &= 2(\theta - \varphi)^{1/2} \Big|_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} + \varphi^{1/2} \ln(\theta - \varphi) \Big|_{\varphi+1/m}^{2\pi/3} \\ &< 2 \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} + \varphi^{-1/2} \ln \left[\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) m \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Сопоставляя (4.50)–(4.55), находим

$$X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 + X_2^4 \leq c(r) [1 + \varphi^{1/2} \ln(m+1)]. \quad (4.56)$$

Оценим X_2^5 , для чего воспользуемся леммой 4.4. В силу (4.47) это дает ($x = \cos \varphi$)

$$\begin{aligned} X_2^5 &= (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1/2}^{\cos(\varphi+1/m)} \left| \sum_{k=r}^m \frac{r^2}{k+1} P_{k-r+1}^{r,r}(x) P_k(t) \right| \frac{dt}{x-t} \\ &\leq c(r) \int_{-1/2}^{\cos(\varphi+1/m)} \frac{dt}{x-t} = c(r) \ln \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \cos(\varphi + \frac{1}{m})} \\ &= c(r) \ln \frac{x + \frac{1}{2}}{\cos \varphi - \cos(\varphi + \frac{1}{m})} = c(r) \ln \frac{x + \frac{1}{2}}{2 \sin(\varphi + \frac{1}{2m}) \sin \frac{1}{2m}} \\ &\leq c(r) \ln \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2m}} \leq c(r) \ln(m+1). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Из (4.42), (4.56) и (4.57) находим

$$X_2 \leq c(r) \leq m + 1. \quad (4.58)$$

Оценим X_4 при $\varphi \geq 1/m$ (если $\varphi < 1/m$, то $X_4 = 0$). По аналогии с (4.42) имеем

$$X_4 \leq X_4^1 + X_4^2 + X_4^3 + X_4^4 + X_4^5, \quad (4.59)$$

где X_4^i , $i = 1, \dots, 5$, определяются равенствами, совершенно аналогичными равенствам (4.43)–(4.47), с той лишь разницей, что вместо интегралов типа $\int_{\varphi+1/m}^{2\pi/3}$ берутся интегралы вида $\int_0^{\varphi-1/m}$. Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве оценок для X_2^i , из (4.59) выводим оценку

$$X_4 \leq c(r) \ln(m + 1). \quad (4.60)$$

Взяв оценки (4.41), (4.58)–(4.60) и сопоставив их с равенством (4.39), убедимся в справедливости утверждения леммы 4.6.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $r \geq 1$, $n \geq 2r$. Тогда

$$R_{r,n}(W^r) = \sup_{f \in W^r} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)|}{(1 - x^2)^{r/2-1/4}} \asymp \frac{\ln n}{n^r},$$

другими словами, найдутся две такие положительные постоянные $c_1(r)$ и $c_2(r)$, что

$$c_1(r) \frac{\ln n}{n^r} \leq R_{r,n}(W^r) \leq c_2(r) \frac{\ln n}{n^r}, \quad n = 2r, 2r + 1, \dots \quad (4.61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верхняя из оценок (4.61) вытекает из следствия 4.1. Однако мы здесь приведем новое доказательство, не опирающееся на неравенство (1.1). Если $f \in W^r$, то справедливо равенство (3.8), из которого с учетом (3.1) имеем

$$R_{r,n}(f, x) = \frac{(-1)^r (1 - x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) Q_{r,n}(x, t) dt, \quad (4.62)$$

где

$$Q_{r,n}(x, t) = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t). \quad (4.63)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$R_{r,n}(W^r) \geq \sup_{f \in W^r} |R_{r,n}(f, x)| = \frac{(1 - x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}} \int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt. \quad (4.64)$$

Заметим, что для частичных сумм

$$Q_{r,n,m}(x, t) = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{n+r+1}^m \frac{2k+1}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t)$$

ряда (4.63) функция

$$G_x(t) = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r]}} |P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t)|$$

является мажорантой. Но при каждом $x \in [-1, 1]$ функция $G_x(t)$ интегрируема на $(-1, 1)$. В самом деле, в силу неравенства Бесселя и весовой оценки (2.11)

$$\int_{-1}^1 G_x^2(t) dt \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{(k^{[r]})^2} (1 - x^2)^{r+1/2} (P_{k-r}^{r,r}(x))^2 \leq c(r) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} k^{-2r} < \infty.$$

Следовательно, в правой части (4.62) можно осуществить почленное интегрирование, которое в силу (3.8) показывает справедливость этого равенства. В правой части равенства (4.63) произведем преобразование Абеля, тогда

$$Q_{r,n}(x, t) = -(1 - x^2)^{r/2+1/4} \frac{\mathcal{K}_{r,n+r}(x, t)}{(n + r + 1)^{[r]}} + (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m + 1)^{[r]}} \right] \mathcal{K}_m(x, t),$$

где функция $\mathcal{K}_m(x, t)$ определена с помощью равенства (4.24). Но поскольку

$$\frac{1}{m^{[r]}} - \frac{1}{(m + 1)^{[r]}} = \frac{r}{(m + 1)m^{[r]}},$$

то предыдущее равенство принимает вид

$$Q_{r,n}(x, t) = -(1 - x^2)^{r/2+1/4} \frac{\mathcal{K}_{r,n+r}(x, t)}{(n + r + 1)^{[r]}} + (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(m + 1)m^{[r]}} \mathcal{K}_m(x, t). \quad (4.65)$$

Если $f \in W^r$, то $|f^{(r)}| \leq 1$, поэтому из (4.62) имеем

$$|R_{r,n}(f, x)| \leq \frac{(-1)^r (1 - x^2)^{r/2-1/4}}{2^{r+1}} \int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt, \quad (4.66)$$

а из (4.65) следует, что

$$\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt \leq (1 - x^2)^{r/2+1/4} \frac{1}{(n + r + 1)^{[r]}} \int_{-1}^1 |\mathcal{K}_{r,n+r}(x, t)| dt + (1 - x^2)^{r/2+1/4} \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{r}{(m + 1)m^{[r]}} \int_{-1}^1 |\mathcal{K}_m(x, t)| dt. \quad (4.67)$$

Из (4.67), воспользовавшись леммой 4.6, находим

$$\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt \leq c(r) \left[\frac{\ln(n + 1)}{n^r} + \sum_{m=n+r+1}^{\infty} \frac{\ln(m + 1)}{m^{r+1}} \right] \leq c(r) \frac{\ln(n + 1)}{n^r}.$$

Сопоставляя эту оценку с (4.66), убеждаемся в справедливости верхней оценки (4.61).

Перейдем к доказательству нижней из оценок (4.61). Пусть $0 < \varepsilon < \delta < 1$, $-1 + \delta \leq x \leq 1 - \delta$. Снова рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1. \quad (4.68)$$

Из (4.68) имеем

$$\int_{-1}^1 |Q_{r,n}(x, t)| dt > \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} |Q_{r,n}(x, t)| dt = E. \quad (4.69)$$

Займемся интегралом E . Имеем

$$E = (1 - x^2)^{r/2+1/4} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) P_k(t) \right|. \quad (4.70)$$

Положим $x = \cos \varphi$, $t = \cos \theta$ и воспользуемся асимптотической формулой (2.14) и равенством

$$\frac{2k+1}{\sqrt{k(k-r)} k^{[r]}} = \frac{2}{(k+1)^{[r]}} + O((k+1)^{-r-1}),$$

тогда

$$\begin{aligned} E &> c_1(r, \varepsilon, \delta) \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \left(r + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right| d\theta - c_2(r, \varepsilon, \delta) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} k^{-r-1}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

где $\varphi_\varepsilon = \arccos(1 - \varepsilon)$. Так как

$$\begin{aligned} &\cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi - \left(r + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi + \theta) - \frac{(r+1)\pi}{2} \right] + \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) (\varphi - \theta) - \frac{r\pi}{2} \right] \right), \end{aligned}$$

то из (4.71) имеем

$$\begin{aligned} E &\geq c_1(r, \varepsilon, \delta) \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos[(k + \frac{1}{2})(\varphi + \theta) - \frac{(r+1)\pi}{2}]}{(k+1)^{[r]}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos[(k + \frac{1}{2})(\varphi - \theta) - \frac{r\pi}{2}]}{(k+1)^{[r]}} \right| d\theta - \frac{c_2(r, \varepsilon, \delta)}{n^r}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

В случае четного r (4.72) принимает вид

$$\begin{aligned} E &\geq c_1(r, \varepsilon, \delta) \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi-\varphi_\varepsilon} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1) \frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1) \frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} \right| d\theta - \frac{c_2(r, \varepsilon, \delta)}{n^r}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

а если r нечетно, то

$$E \geq c_1(r, \varepsilon, \delta) \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi - \varphi_\varepsilon} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1) \frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1) \frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} \right| d\theta - \frac{c_2(r, \varepsilon, \delta)}{n^r}. \quad (4.74)$$

Оценим снизу интегралы, фигурирующие в формулах (4.73) и (4.74). Для этого представим их по схеме $\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi - \varphi_\varepsilon} = \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi - \varphi_\varepsilon}$. Для определенности мы предположим, что $0 \leq x \leq \delta$, и в этом случае рассмотрим интеграл

$$A = \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1) \frac{\varphi+\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1) \frac{\varphi-\theta}{2}}{(k+1)^{[r]}} \right| d\theta. \quad (4.75)$$

Положим

$$U_l(\eta) = \sum_{j=0}^l \cos(2j+1)\eta, \quad V_l(\eta) = \sum_{j=0}^l \sin(2j+1)\eta, \quad (4.76)$$

$$\bar{U}_m(\eta) = \sum_{l=0}^m U_l, \quad \bar{V}_m(\eta) = \sum_{l=0}^m V_l(\eta). \quad (4.77)$$

Тогда из (4.74), применяя дважды преобразование Абеля, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\eta}{(k+1)^{[r]}} &= -\frac{V_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}} - \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+2)^{[r]}} - \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \right) V_k(\eta) \\ &= -\frac{V_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}} + \left(\frac{1}{(n+r+3)^{[r]}} - \frac{1}{(n+r+2)^{[r]}} \right) \bar{V}_{n+r}(\eta) \\ &\quad + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+3)^{[r]}} - \frac{2}{(k+2)^{[r]}} + \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \right) \bar{V}_k(\eta), \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\eta}{(k+1)^{[r]}} &= -\frac{U_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}} - \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+2)^{[r]}} - \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \right) U_k(\eta) \\ &= -\frac{U_{n+r}(\eta)}{(n+r+1)^{[r]}} + \left(\frac{1}{(n+r+3)^{[r]}} - \frac{1}{(n+r+2)^{[r]}} \right) \bar{U}_{n+r}(\eta) \\ &\quad + \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+3)^{[r]}} - \frac{2}{(k+2)^{[r]}} + \frac{1}{(k+1)^{[r]}} \right) \bar{U}_k(\eta). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Далее, нетрудно показать, что

$$U_l(\eta) = \frac{\sin(2l+1)\eta}{2 \sin \eta}, \quad \bar{U}_m(\eta) = \frac{\sin((m+1)\eta) \sin((m+2)\eta)}{2 \sin^2 \eta}, \quad (4.80)$$

$$V_l(\eta) = \frac{\sin^2(l+1)\eta}{\sin \eta}, \quad \bar{V}_m(\eta) = \sum_{l=0}^m \frac{\sin^2(l+1)\eta}{\sin \eta}. \quad (4.81)$$

Отсюда, в свою очередь, заметим, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left| U_{n+r} \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right| d\theta &= \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left| \frac{\sin(n+r+1)(\varphi - \theta)}{2 \sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right| d\theta \\
 &= \int_{\varphi_\varepsilon - \varphi}^{\pi/2 - \varphi} \left| \frac{\sin(n+r+1)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta > \int_{\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta}^0 \left| \frac{\sin(n+r+1)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta}^{\varphi_\delta - \varphi_\varepsilon} \left| \frac{\sin(n+r+1)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+r+1)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta - \int_{\varphi_\delta - \varphi_\varepsilon}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+r+1)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right| d\theta \\
 &\geq \frac{1}{\pi} \ln(n+1) + c(\varepsilon, \delta),
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left| \overline{U}_m \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right| d\theta &= \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left| \frac{\sin((m+1)\frac{\varphi - \theta}{2}) \sin((m+2)\frac{\varphi - \theta}{2})}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \theta}{2}} \right| d\theta \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left(\frac{\sin(m+1)\frac{\varphi - \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \left(\frac{\sin(m+2)\frac{\varphi - \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \\
 &\leq m+2,
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} V_l \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) d\theta &= \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sin^2(l+1)\frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi + \theta}{2}} d\theta = \int_{\varphi_\varepsilon + \varphi}^{\pi/2 + \varphi} \frac{\sin^2(l+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta \\
 &= \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin^2(l+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta < \int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta < \frac{\pi}{\sin \frac{\varphi_\varepsilon}{2}} \leq c(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\int_{\varphi_\varepsilon}^{\pi/2} \overline{V}_m \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) d\theta \leq (m+1) \frac{\pi}{\sin \frac{\varphi_\varepsilon}{2}}. \tag{4.85}$$

Сопоставляя (4.75), (4.78), (4.79), (4.82)–(4.85), находим, что

$$A \geq \frac{\ln(n+1)}{\pi(n+r+1)^{[r]}} - \frac{c(\varepsilon, \delta)}{n^r}. \tag{4.86}$$

Если мы теперь сравним (4.74), (4.75) и (4.86), то для нечетного r получаем оценку

$$E \geq c(r, \varepsilon, \delta) \frac{\ln(n+1)}{n^r}. \tag{4.87}$$

Совершенно аналогично из (4.73) выводится оценка (4.87) для четного r . Нижняя из оценок (4.61) вытекает из (4.64), (4.69) и (4.87). Теорема 4.2 доказана.

Список литературы

- [1] И. И. Шарапуудинов, “Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 143–160.
- [2] И. И. Шарапуудинов, “Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства”, *Матем. сб.*, **194**:3 (2003), 115–148.

- [3] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{U}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 765–795.
- [4] С. А. Теляковский, “Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами”, *Матем. сб.*, **70**:2 (1966), 252–265.
- [5] И. З. Гопенгауз, “К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 163–172.
- [6] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [7] С. А. Агаханов, Г. И. Натансон, “Функция Лебега сумм Фурье–Якоби”, *Вестн. ЛГУ*, 1968, № 1, 11–23.

И. И. Шарапудинов (I. I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала

E-mail: sharapud@datacom.ru

Поступила в редакцию

31.01.2005