Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Скрыпник, Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях общей структуры, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 8, 125–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:34:21

УДК 517.953

И. В. Скрыпник

Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях общей структуры

Рассматривается последовательность граничных задач для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка в областях $\Omega_s \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \dots$. Отсутствуют геометрические условия относительно областей Ω_s . Предполагается существование последовательности r_s , стремящейся к нулю при $s \rightarrow \infty$, такой, что для $r \geq r_s > 0$ и произвольной точки $x_0 \in \Omega$ выполнено неравенство $C_m(K(x_0, r) \setminus \Omega_s) \leq Ar^n$. Здесь $K(x_0, r)$ – куб с центром в x_0 и ребром $2r$, C_m – m -емкость. Условия на коэффициенты уравнения таковы, что энергетическим пространством является W_m^1 . Устанавливается сильная сходимость в W_p^1 , $p < m$, решений $u_s(x)$ рассматриваемых задач, строятся корректор в W_m^1 и усредненная граничная задача. Результаты основаны на асимптотическом разложении последовательности $u_s(x)$ и новой поточечной оценке решения нелинейной модельной задачи.

Библиография: 14 названий.

Введение

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть $\Omega_s \subset \Omega$, $s = 1, 2, \dots$, – последовательность открытых подмножеств множества Ω . В области Ω_s рассматривается нелинейная задача Дирихле

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega_s, \quad (0.1)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_s. \quad (0.2)$$

Формулируемые далее условия обеспечивают существование решения $u_s(x) \in f(x) + \overset{\circ}{W}_m^1(\Omega_s)$ задачи (0.1), (0.2) при каждом s и ограниченность последовательности $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega_s)$. Изучается возможность аппроксимации задачи (0.1), (0.2) новой усредненной задачей в области Ω , к решению которой сходится последовательность $u_s(x)$ при $s \rightarrow \infty$.

Линейные эллиптические задачи такого типа исследовались В. А. Марченко и Е. Я. Хрусловым (см., например, [1]). Изучение усреднения нелинейных задач

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований ГКНТ Украины и INTAS (грант № 93-2716).

принципиально отличается от линейного случая, так как для построения предельной граничной задачи недостаточна слабая сходимост ь градиентов решений задачи (0.1), (0.2).

Усреднение нелинейных задач вида (0.1), (0.2) исследовалось автором в [2]–[7] при геометрических предположениях относительно Ω_s , в частности, предполагалось, что $\Omega \setminus \Omega_s$ является объединением конечного числа непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$, $i = 1, \dots, I(s)$. Рассматривались два типа предположений относительно $F_i^{(s)}$: или диаметры $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ (области с мелкозернистой границей), или $F_i^{(s)}$ содержится в окрестности $\mathcal{U}(l_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ линии $l_i^{(s)}$ и $d_i^{(s)}$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ (области с каналами).

В настоящей работе отсутствуют геометрические предположения относительно структуры множеств $\Omega \setminus \Omega_s$. Предполагается выполнение следующего условия:

В) существуют положительная постоянная A и последовательность r_s , стремящаяся к нулю при $s \rightarrow \infty$, такие, что справедливо неравенство

$$C_m(K(x_0, r) \setminus \Omega_s) \leq A r^n$$

для $r \geq r_s$ и произвольной точки $x_0 \in \Omega$, расстояние которой до границы области Ω больше, чем $2\sqrt{n}r_s$; здесь

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j - x_j^{(0)}| \leq r, j = 1, \dots, n\}$$

– куб с центром $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, C_m – m -емкость.

В работе доказана сильная сходимост ь последовательности $u_s(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$, построены корректор для приближения последовательности $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и граничная задача для предельной функции. Все рассуждения основаны на новой конструкции асимптотического разложения, основанного на локальном приближении решений задачи (0.1), (0.2) решениями модельных нелинейных задач. Главную роль при изучении асимптотического поведения и построении усредненной граничной задачи играют новые поточечные оценки решений модельных нелинейных задач.

При иных предположениях и другими методами нелинейная задача усреднения рассматривалась в работах [8]–[11]. В [11] изучался вариационный случай, в [10] задача усреднения изучалась методами теории G -сходимости. В работах [8], [9] Дж. Даль Мазо и Ф. Мюра рассматривали усреднение последовательности задач вида (0.1), (0.2) без условий на последовательность Ω_s . В этом случае в предположении однородности функций $a_j(x, u, p)$ относительно p построена предельная граничная задача с дополнительным членом, содержащим борелевскую меру, значения которой могут быть равными бесконечности. В линейном случае аналогичный результат был получен в [12].

Основным отличием данной работы от работ [8]–[11] является установление емкостного характера дополнительного члена усредненного уравнения при естественном условии на последовательность перфорированных областей.

§ 1. Формулировка предположений и результатов

Будем предполагать, что функции $a_j(x, u, p)$, $j = 1, \dots, n$, определены при $x \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A_1) функции $a_j(x, u, p)$ непрерывны относительно u, p для почти всех $x \in \Omega$ и измеримы по x для всех $u, p \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$; $a_j(x, u, 0) = 0$ для $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, n$;

A_2) существуют положительные постоянные $\nu_1, \nu_2, \varepsilon$ такие, что при $2 \leq m < n$, $m \leq m_1 < mn/(n-m)$ и всех $x \in \bar{\Omega}$, $u, v \in \mathbb{R}^1$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (a_j(x, u, p) - a_j(x, u, q))(p_j - q_j) &\geq \nu_1 (1 + |p| + |q|)^{m-2} \cdot |p - q|^2, \\ a_0(x, u, p)u &\geq -(\nu_1 - \varepsilon)|p|^m - \varphi(x)(1 + |u|), \\ |a_j(x, u, p) - a_j(x, v, q)| &\leq \nu_2 (1 + |u|^{m_1} + |v|^{m_1} + |p|^m + |q|^m)^{(m-2)/m} \quad (1.1) \\ &\quad \times (|p - q| + |u - v|), \quad j = 1, \dots, n, \\ |a_0(x, u, p)| &\leq \nu_2 (|u|^{m_1} + |p|^m)^{(m_1-1)/m_1} + \varphi(x) \end{aligned}$$

с $\varphi(x) \in L_{r_1}(\Omega)$ при $r_1 > n/m$.

Отметим, что функции $a_j(x, u, p)$ можно продолжить на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ с сохранением условий A_1), A_2), и в дальнейшем такое продолжение подразумевается. Условие $2 \leq m < n$ предполагается для простоты изложения. Небольшими изменениями формулировок и доказательств могут быть рассмотрены случаи $1 < m < 2$, $m = n$. При $m > n$ задача нахождения предельной функции для последовательности $u_s(x)$ упрощается из-за компактности вложения $\overset{\circ}{W}_m^1(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$.

Будем предполагать, что граничная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x) \in W_{p_0}^1(\Omega_0), \quad p_0 > n, \quad (1.2)$$

где Ω_0 – некоторое открытое множество, содержащее Ω .

Используя методы теории монотонных операторов, просто доказать разрешимость задачи (0.1), (0.2). Справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что выполнены условия A_1), A_2) и (1.2). Тогда при каждом s граничная задача (0.1), (0.2) имеет, по крайней мере, одно решение. Более того, существует независящая от s постоянная R такая, что при всех s выполнена оценка*

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega_s)} \leq R. \quad (1.3)$$

В дальнейшем $u_s(x)$ – одно из возможных решений задачи (0.1), (0.2), удовлетворяющее оценке (1.3). Тем самым последовательность $\{u_s(x)\}$ зафиксирована в дальнейших рассмотрениях. Продолжим функцию $u_s(x)$ на Ω_0 , полагая ее равной

$f(x)$ для $x \in \Omega_0 \setminus \Omega_s$. Полученные таким образом функции $u_s(x)$ принадлежат $W_m^1(\Omega_0)$ и удовлетворяют оценке

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega_0)} \leq R_1 \quad (1.4)$$

с постоянной R_1 , не зависящей от s . Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем предполагать, что последовательность $u_s(x)$ слабо сходится в $W_m^1(\Omega_0)$ к функции $u_0(x)$.

Из [13] непосредственно следует ограниченность функции $u_s(x)$. Методом Мозера можно доказать равномерную ограниченность последовательности $\{u_s(x)\}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1. Тогда существует независящая от s постоянная M такая, что при всех s справедлива оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u_s(x)| \leq M. \quad (1.5)$$

Сформулируем сейчас условия на множества Ω_s в терминах m -емкости C_m , определение которой можно найти в [5]. Предполагаем выполненным условие B), сформулированное во введении. Для формулировки дополнительного условия на последовательность Ω_s , обеспечивающего построение граничной задачи для предельной функции $u_0(x)$, определим вспомогательные решения $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ модельной задачи.

Пусть $\psi(x)$ – функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная нулю вне $K(0, 1)$ и единице в $K(0, 1/2)$. При $r < 1/2$ для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ и произвольного вещественного числа q определим $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j \left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} v_r^{(s)}(x, x_0, q) \right) = 0, \quad x \in D_s(x_0, r), \quad (1.6)$$

$$v_r^{(s)}(x, x_0, q) = q\psi(x - x_0), \quad x \in \partial D_s(x_0, r), \quad (1.7)$$

где $D_s(x_0, r) = K(x_0, 1) \setminus \{K(x_0, r) \setminus \Omega_s\}$. Просто проверяется однозначная разрешимость задачи (1.6), (1.7). Продолжим $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ на $\mathbb{R}^n$, полагая равной $q\psi(x - x_0)$ вне $D_s(x_0, r)$.

Определим

$$C_A(K(x_0, r) \setminus \Omega_s, q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n \int_{D_s(x_0, r)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_r^{(s)}(x, x_0, q)}{\partial x} \right) \frac{\partial v_r^{(s)}(x, x_0, q)}{\partial x_j} dx. \quad (1.8)$$

Это есть характеристика множества $K(x_0, r) \setminus \Omega_s$, аналогичная емкости и связанная с дифференциальным уравнением (0.1).

Предположим, что выполнено условие:

C) существует непрерывная функция $c(x, q)$ такая, что для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ и для произвольного числа $q \in \mathbb{R}^1$ справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(2r)^n} C_A(K(x_0, r) \setminus \Omega_s, q) \right\} = c(x_0, q), \quad (1.9)$$

и сходимость к пределу в (1.9) является равномерной относительно $x_0 \in \Omega$ и q на каждом ограниченном интервале.

Основные результаты работы дают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B)$, (1.2), и пусть $u_s(x)$ – последовательность решений задачи (0.1), (0.2), слабо сходящаяся к $u_0(x)$ в $W_m^1(\Omega)$. Тогда последовательность $u_s(x)$ сильно сходится в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p \in (1, m)$.*

ТЕОРЕМА 1.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.3 и условие C). Тогда функция $u_0(x)$ является решением следующей задачи*

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) - a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, f(x) - u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.10)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.11)$$

где $c(x, q)$ – функция, определенная в условии C).

Доказательство теорем 1.3, 1.4 дано в следующих четырех параграфах. Основой построений служат новые поточечные оценки функций $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$, доказываемые в следующем параграфе. В §3 получены некоторые оценки усредненных функций. В §4 будет определено асимптотическое разложение для $u_s(x)$, главный член которого является корректором относительно приближения $u_s(x)$ в норме $W_m^1(\Omega)$. Из анализа поведения членов асимптотического разложения следует теорема 1.3. Доказательство теоремы 1.4, основанное на асимптотическом разложении, приведено в §5.

§2. Оценки решения модельной задачи

Будем писать $K(r)$ вместо $K(0, r)$ для куба с центром в начале координат. Пусть F – замкнутое подмножество куба $K(r)$, $r < 1/2$, и обозначим $D = K(1) \setminus F$. Рассмотрим в области D модельную нелинейную граничную задачу

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j \left(x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

$$u(x) = q\psi(x), \quad x \in \partial D, \quad (2.2)$$

где q – произвольное вещественное число и $\psi(x)$ – та же функция, что и в (1.7).

Предполагаем, что для функций $a_j(x, p)$ выполнены условия $A_1), A_2)$. Обозначим через $v(x, q)$ решение задачи (2.1), (2.2) и продолжим эту функцию на $\mathbb{R}^n$, полагая $v(x, q) = q\psi(x)$ при $x \notin D$. Просто проверяется, что при $q \neq 0$ справедливо неравенство $0 \leq (1/q)v(x, q) \leq 1$.

Обозначим через $M_r(F)$ множество функций класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $K(2r)$ и равных единице на F . Аналогично [5] доказывается неравенство

$$\inf_{\varphi \in M_r(F)} \int_{K(2r)} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq C_0 \cdot C_m(F) \quad (2.3)$$

с постоянной C_0 , зависящей лишь от m, n .

Пусть μ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \mu \leq |q|$, и определим

$$E_\mu = \{x \in D : |v(x, q)| \leq \mu\}.$$

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2)$. Тогда существует постоянная K_1 , зависящая только от ν_1, ν_2, n, m , такая, что выполнена оценка*

$$\begin{aligned} \int_{E_\mu} \left(1 + \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right|^2 dx \\ \leq K_1 \mu |q| (C_m(F))^{2/m} (|q|^m C_m(F) + r^n)^{(m-2)/m}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для изучения оценки (2.4) при $\mu = |q|$ достаточно подставить в соответствующее задаче (2.1), (2.2) интегральное тождество пробную функцию $v(x, q) - q\varphi(x)$ и провести стандартные оценки. Здесь $\varphi(x)$ – произвольная функция из $M_r(F)$. Доказательство неравенства (2.4) при $\mu < |q|$ проводится аналогично только с использованием пробной функции $v_\mu(x, q) - (\mu/q)v(x, q)$, где $v_\mu(x, q) = \min\{|v(x, q)|, \mu\}$.

В дальнейшем основной является поточечная оценка, содержащаяся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2)$. Тогда существует постоянная K_2 , зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, m , такая, что справедлива оценка*

$$|v(x, q)| \leq K_2 |q| \left(\frac{r}{\rho(x, K(r))} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}} \right)^{1/(m-1)} \quad (2.5)$$

при $0 < \rho(x, K(r)) \leq r$, где $\rho(x, K(r))$ – расстояние от точки x до куба $K(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся, для простоты, доказательством оценки (2.5) при $q > 0$. Для $0 < \rho < r$ определим две числовые последовательности

$$\rho_j^{(1)} = \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-j}), \quad \rho_j^{(2)} = \frac{\rho}{2}(3 - 2^{-j}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

и функции $\varphi_j(x)$, равные единице на множестве $G_j = K(r + \rho_j^{(2)}) \setminus K(r + \rho_j^{(1)})$, нулю вне множества G_{j+1} и такие, что $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$, $\left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j(x) \right| \leq 2^{j+3} \cdot \rho^{-1}$.

Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (2.1), (2.2), пробную функцию

$$(v(x, q))^{\sigma+1} \cdot (\varphi_j(x))^{\tau+m},$$

где σ, τ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенству $\sigma, \tau \geq 1$. Используя условие A_2) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_D \left(1 + \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right|^2 (v(x, q))^{\sigma} (\varphi_j(x))^{\tau+m} dx \\ & \leq C_1 \tau^m \int_D \left(v^{\sigma+2} \cdot \left(\frac{2^j}{\rho} \right)^2 \varphi_j^{\tau+m-2} + v^{\sigma+m} \cdot \left(\frac{2^j}{\rho} \right)^m \varphi_j^{\tau} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В данном параграфе через C_i обозначаем постоянные, зависящие лишь от ν_1, ν_2, n, m .

Введем обозначение

$$m_j = \text{ess sup} \{ v(x, q) : x \in G_j \}$$

и будем рассматривать в дальнейшем возможности:

$$m_{j+1} > \rho, \quad q^m C_m(F) > r^n, \quad (2.7)$$

$$m_{j+1} > \rho, \quad q^m C_m(F) \leq r^n, \quad (2.8)$$

$$m_{j+1} \leq \rho, \quad q^m C_m(F) > r^n, \quad (2.9)$$

$$m_{j+1} \leq \rho, \quad q^m C_m(F) \leq r^n. \quad (2.10)$$

Если выполнены условия (2.7) или (2.8), оценим правую часть неравенства (2.6), принимая во внимание, что $\rho^{-2} \leq \rho^{-m} m_{j+1}^{m-2}$. В этом случае получаем из (2.6)

$$\begin{aligned} & \int_D \left(1 + \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right|^2 \cdot (v(x, q))^{\sigma} (\varphi_j(x))^{\tau+m} dx \\ & \leq C_2 \tau^m \cdot \frac{2^{mj}}{\rho^m} m_{j+1}^{m-2} \int_D (v(x, q))^{\sigma+2} \cdot (\varphi_j(x))^{\tau} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Применяя лемму 1.3 §1, главы 8 [5] при соответствующем выборе параметров, получаем оценки

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \leq C_3 \frac{2^{nj}}{\rho^n} m_{j+1}^{n(m-2)/m} \int_D (v(x, q))^m \cdot (\varphi_j(x))^m dx, \quad (2.12)$$

если выполнены неравенства (2.7), и

$$m_j^{2+n(m-2)/m} \leq C_4 \frac{2^{nj}}{\rho^n} m_{j+1}^{n(m-2)/m} \int_D (v(x, q))^2 \cdot (\varphi_j(x))^2 dx, \quad (2.13)$$

если выполнены неравенства (2.8).

Интегралы в правых частях неравенств (2.12), (2.13) оценим, используя аналог оценки (1.10) гл. 8 [5] (с заменой шаров кубами) и оценку (2.4). Имеем, например,

$$\begin{aligned} \int_D (v(x, q))^m \cdot (\varphi_j(x))^m dx &\leq \int_{G_{j+1}} (v_{m_{j+1}}(x, q))^m dx \\ &\leq C_5 \rho r^{m-1} \int_{E_{m_{j+1}}} \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right|^m dx \\ &\leq C_6 \rho r^{m-1} m_{j+1} q^{m-1} C_m(F). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом также использовано второе неравенство в (2.7). Аналогично, используя второе неравенство в (2.8), имеем

$$\int_D (v(x, q))^2 \cdot (\varphi_j(x))^2 dx \leq C_7 \rho r m_{j+1} q (C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}. \quad (2.15)$$

Из двух последних неравенств и (2.12), (2.13) следуют оценки

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \leq C_8 \frac{2^{nj}}{\rho^{n-1}} m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F), \quad (2.16)$$

$$m_j^{2+n(m-2)/m} \leq C_9 \frac{2^{nj}}{\rho^{n-1}} m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot r q (C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}, \quad (2.17)$$

если, соответственно, выполнены условия (2.7) или (2.8).

Аналогичные оценки могут быть получены при выполнении условий (2.9) или (2.10). В этом случае в правой части (2.6) оцениваем $v(x, q)$ числом ρ и получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_D \left(1 + \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial v(x, q)}{\partial x} \right|^2 \cdot (v(x, q))^\sigma (\varphi_j(x))^{\tau+m} dx \\ \leq C_{10} \tau^m \frac{2^{mj}}{\rho^2} \int_D (v(x, q))^{\sigma+2} \cdot (\varphi_j(x))^\tau dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, приходим к оценкам

$$m_j^m \leq C_{11} \frac{2^{nmj/2}}{\rho^{n-1}} m_{j+1} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F), \quad (2.19)$$

$$m_j^2 \leq C_{12} \frac{2^{nmj/2}}{\rho^{n-1}} m_{j+1} \cdot r q (C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}, \quad (2.20)$$

если, соответственно, выполнены условия (2.9) или (2.10).

Сравнивая оценки (2.16), (2.19) и замечая, что $m_j \leq m_{j+1}$, получаем, что при выполнении неравенства $q^m C_m(F) > r^n$, справедлива оценка

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \leq C_{13} m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot \frac{2^{mnj/2}}{\rho^{n-1}} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F) \quad (2.21)$$

при $j = 1, 2, \dots$. Отсюда в силу леммы 1.5 гл. 8 [5] получаем оценку

$$m_1 \leq C_{14} q \left(\frac{r}{\rho} \right)^{(n-1)/(m-1)} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}} \right)^{1/(m-1)}. \quad (2.22)$$

Аналогично доказывается оценка

$$m_1 \leq C_{15} q \left(\frac{r}{\rho} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}} \right)^{2/m}, \quad (2.23)$$

если выполнено неравенство $q^m C_m(F) \leq r^n$. Наконец, принимая во внимание, что

$$C_m(F) \leq C_{16} r^{n-m}, \quad \frac{2}{m} \geq \frac{1}{m-1}, \quad \rho < r,$$

получаем, что во всех возможных случаях справедлива оценка

$$m_1 \leq C_{17} q \left(\frac{r}{\rho} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}} \right)^{1/(m-1)},$$

что завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2)$, и пусть $\bar{q}, \tilde{q}$ – произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $|\bar{q}| \leq M, |\tilde{q}| \leq M$. Тогда существует постоянная K_3 , зависящая лишь от M, ν_1, ν_2, n, t , такая, что справедливы оценки*

$$\begin{aligned} & \int_D \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} (v(x, \bar{q}) - v(x, \tilde{q})) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (v(x, \bar{q}) - v(x, \tilde{q})) \right|^m \right) dx \\ & \leq K_3 |\bar{q} - \tilde{q}|^2 (C_m(F))^{2/m} \cdot (C_m(F) + r^n)^{(m-2)/m}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \int_D \left(a_j \left(x, \frac{\partial v(x, \bar{q})}{\partial x} \right) \frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial v(x, \bar{q})}{\partial x_j} - a_j \left(x, \frac{\partial v(x, \tilde{q})}{\partial x} \right) \frac{1}{\tilde{q}} \frac{\partial v(x, \tilde{q})}{\partial x_j} \right) dx \right| \\ & \leq K_3 |\bar{q} - \tilde{q}| (C_m(F) + r^n). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Доказательство проводится стандартными рассуждениями, используя интегральные тождества для $v(x, \bar{q})$, $v(x, \tilde{q})$ и условие $A_2)$. При получении первого неравенства выбирается пробная функция вида $v(x, \bar{q}) - v(x, \tilde{q}) - (\bar{q} - \tilde{q})\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция из $M_r(F)$. При доказательстве второго неравенства выбираются пробные функции вида $(1/q)v(x, q) - \varphi(x)$, $q = \bar{q}$ или $q = \tilde{q}$, $\varphi(x) \in M_r(F)$.

§ 3. Оценки усредненных функций

Пусть $\omega(t)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^1$, равная нулю при $|t| \geq 1$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|) dx = 1. \quad (3.1)$$

Для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и положительного числа h определим усреднение $u_h(x)$ равенством

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) u(y) dy. \quad (3.2)$$

Далее $B(x_0, h)$ – шар радиуса h с центром x_0 .

ЛЕММА 3.1. *Существует постоянная C' , зависящая лишь от n, m , такая, что для произвольной функции $u(x) \in W_{m,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\left| \frac{\partial u_h(x_0)}{\partial x} \right| \leq C' \left(\frac{1}{h^n} \int_{B(x_0, h)} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right|^m dy \right)^{1/m} \quad (3.3)$$

при $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$.

Доказательство получается дифференцированием равенства (3.2) и применением неравенства Гёльдера.

ЛЕММА 3.2. *Существует постоянная C'' , зависящая лишь от n, m , такая, что для произвольной функции $u(x) \in W_{m,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\int_{B(0, R)} |u_h(x) - u(x)|^m dx \leq C'' h^m \int_{B(0, R+h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \quad (3.4)$$

с произвольными положительными числами R, h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1), (3.2) следует

$$\begin{aligned} |u_h(x) - u(x)| &\leq \frac{1}{h^n} \int_{B(x, h)} |u(y) - u(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{h^n} \int_0^h \int_{S(0, 1)} \left(\int_0^\rho \left| \frac{\partial u(x + t\omega)}{\partial t} \right| dt \right) \rho^{n-1} d\omega d\rho \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{B(x, h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right| \frac{dz}{|z - x|^{n-1}} \\ &\leq C_{18} h^{1-\varepsilon} \left(\int_{B(x, h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m \frac{dz}{|z - x|^{n-\varepsilon m}} \right)^{1/m}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $S(0, 1)$ – сфера единичного радиуса с центром в начале координат, ε – число из интервала $(0, 1/2)$. Через C_i в этом параграфе обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, m .

Из (3.5) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,R)} |u_h(x) - u(x)|^m dx \\
& \leq C_{19} h^{m-\varepsilon m} \int_{B(0,R)} \int_{B(x,h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m \frac{dz dx}{|z-x|^{n-\varepsilon m}} \\
& \leq C_{19} h^{m-\varepsilon m} \int_{B(0,R+h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m \left(\int_{B(z,h)} \frac{dx}{|z-x|^{n-\varepsilon m}} \right) dz \\
& \leq C_{20} h^m \int_{B(0,R+h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m dz,
\end{aligned}$$

доказывающее лемму.

Для фиксированного положительного числа h определим множество точек $x_\alpha = 2h\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор с целочисленными координатами. Будем обозначать через $K(\alpha, h)$ куб $K(x_\alpha, h)$. Для произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $I(D, h)$ множество таких векторов α , что $K(\alpha, 2h) \subset D$. Далее,

$$u(\alpha, h) = \frac{1}{(2h)^n} \int_{K(\alpha, h)} u_h(x) dx$$

– среднее значение определенной равенством (3.2) функции $u_h(x)$ относительно куба $K(\alpha, h)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $u(x)$, $g(x)$ – функции из пространств $W_m^1(\Omega)$, $L_m(\Omega)$, соответственно, и предположим, что с некоторой постоянной Q выполнено неравенство

$$\int_{K(\alpha, h)} |g(x)|^m dx \leq Q h^n \quad (3.6)$$

при $\alpha \in I(\Omega, h)$. Существует зависящая лишь от n , m постоянная C''' такая, что справедлива оценка

$$\sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, h)} |u_h(x) - u(\alpha, h)|^m |g(x)|^m dx \leq C''' Q h^m \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенства (3.3), (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, h)} |u_h(x) - u(\alpha, h)|^m |g(x)|^m dx \\
& \leq C_{21} h^m \sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, h)} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} u_h(tx + (1-t)\xi(\alpha, h)) \right|^m |g(x)|^m dt dx \\
& \leq C_{22} h^{m-n} \sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, 2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \int_{K(\alpha, h)} |g(x)|^m dx \\
& \leq C_{22} h^m Q \sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, 2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx.
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\xi(\alpha, h)$ – некоторая точка куба $K(\alpha, h)$.

Оценка (3.7) следует из (3.8) и просто проверяемого неравенства

$$\sum_{\alpha \in I(\Omega, h)} \int_{K(\alpha, 2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq 3^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx.$$

Тем самым закончено доказательство леммы 3.3

§ 4. Асимптотическое разложение последовательности решений

В данном параграфе $u_s(x)$ – решение задачи (0.1), (0.2), удовлетворяющее оценкам (1.4), (1.5). Предполагается слабая сходимости последовательности $u_s(x)$ к функции $u_0(x)$ в пространстве $W_m^1(\Omega)$. Через C_i будем обозначать постоянные, зависящие лишь от n, m, ν_1, ν_2, M, A , $\text{mes } \Omega$, где A – число из условия B). Будем предполагать выполненными условия $A_1), A_2), B)$.

Определим последовательности $\rho_s, \mu_s, \lambda_s, s = 1, 2, \dots$, равенствами

$$\begin{aligned} \rho_s &= r_s + \left(\int_{\Omega} |u_s(x) - u_0(x)|^m dx \right)^{1/m}, \\ \mu_s &= \left(\ln \frac{1}{\rho_s} \right)^{-1}, \quad \lambda_s = \left(E \left(\ln \frac{1}{\rho_s} \right) \right)^{2m}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $E(\ln(1/\rho_s))$ – целая часть числа $\ln(1/\rho_s)$, r_s – числовая последовательность, введенная в условии B).

Рассмотрим подразделение области Ω

$$\Omega = \left\{ \bigcup_{\alpha \in I_s} K(x_{\alpha}^{(s)}, \lambda_s \rho_s) \right\} \cup \mathcal{U}_s, \quad (4.2)$$

где, как и в предыдущем параграфе, α – вектор с целочисленными координатами, $x_{\alpha}^{(s)} = 2\lambda_s \rho_s \cdot \alpha$, I_s – множество таких векторов α , что $K(x_{\alpha}^{(s)}, (2 + \lambda_s)\rho_s) \subset \Omega$. В (4.2) использовано определенное во введении обозначение для куба $K(x_0, r)$, $\mathcal{U}_s$ – дополнение к $\bigcup_{\alpha \in I_s} K(x_{\alpha}^{(s)}, \lambda_s \rho_s)$ относительно области Ω .

Обозначим

$$K_s(\alpha) = K(x_{\alpha}^{(s)}, \lambda_s \rho_s), \quad K'_s(\alpha) = K(x_{\alpha}^{(s)}, (\lambda_s - 2)\rho_s). \quad (4.3)$$

Определим функцию $v_{\alpha}^{(s)}(x, q)$ как решение модельной граничной задачи

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j \left(x, 0, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in D_s(\alpha), \quad (4.4)$$

$$u(x) = q\psi(x - x_{\alpha}^{(s)}), \quad x \in \partial D_s(\alpha), \quad (4.5)$$

где $D_s(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)}, 1) \setminus \{K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s\}$, число q и функция $\psi(x)$ такие же, как в (1.7). Функцию $v_\alpha^{(s)}(x, q)$ продолжим на $\mathbb{R}^n \setminus D_s(\alpha)$ равенством $v_\alpha^{(s)}(x, q) = q\psi(x - x_\alpha)$.

Для $s = 1, 2, \dots$ и $\alpha \in I_s$ определим множество $I_s(\alpha)$ векторов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ с целочисленными координатами и множество точек $\{x_{\alpha\beta}^{(s)} : \beta \in I_s(\alpha)\}$ таких, что $x_{\alpha\beta}^{(s)} = 2\rho_s\beta$ и

$$K_s(\alpha) \setminus K'_s(\alpha) = \bigcup_{\beta \in I_s(\alpha)} K_s(\alpha, \beta), \quad K_s(\alpha, \beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, \rho_s). \quad (4.6)$$

Через $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x, q)$ будем обозначать решение модельной граничной задачи вида (4.4), (4.5) с заменой $x_\alpha^{(s)}$ на $x_{\alpha\beta}^{(s)}$, $D_s(\alpha)$ на $D_s(\alpha, \beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 1) \setminus \{K_s(\alpha, \beta) \setminus \Omega_s\}$. Аналогично $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x, q)$, определим функцию $\bar{v}_{\alpha\beta}^{(s)}(x, q)$ с заменой $D_s(\alpha, \beta)$ на $\bar{D}_s(\alpha, \beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 1) \setminus \{K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 2\rho_s) \setminus \Omega_s\}$.

Пусть $|I_s|$ — число векторов α , принадлежащих множеству I_s , аналогично понимается $|I_s(\alpha)|$. Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|I_s| \leq C(\lambda_s \rho_s)^{-n}, \quad |I_s(\alpha)| \leq 2n \cdot \lambda_s^{n-1} \quad (4.7)$$

с постоянной C , зависящей только от Ω .

Пусть $u_0^{(s)}(x)$ — следующее усреднение функции $u_0(x)$:

$$u_0^{(s)}(x) = \frac{1}{(\lambda_s \rho_s)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x-y|}{\lambda_s \rho_s}\right) u_0(y) dy, \quad (4.8)$$

где $\omega(t)$ — функция, введенная в §3. Обозначим через $f_\alpha^{(s)}$, $u_\alpha^{(s)}$, соответственно, средние значения функций $f(x)$, $u_0^{(s)}(x)$ относительно куба $K_s(\alpha)$. Определим подмножество индексов I'_s , I''_s равенствами

$$\begin{aligned} I'_s &= \{\alpha \in I_s : |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}| > 2\mu_s\}, \\ I''_s &= \{\alpha \in I_s : |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}| \leq 2\mu_s\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

и введем функции $w_\alpha^{(s)}(x)$:

$$\begin{aligned} w_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \quad \text{для } \alpha \in I'_s, \\ w_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x, 1) \quad \text{для } \alpha \in I''_s. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для произвольной функции $g(x)$ обозначаем через $[g(x)]_+ = \max\{g(x), 0\}$ ее положительную часть. Определим срезающие функции $\varphi_\alpha^{(s)}(x)$ и $\bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(s)}(x) &= \frac{2}{\mu_s} \min \left\{ \left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s}{2} \right]_+, \frac{\mu_s}{2} \right\}, \\ \bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) &= \frac{4}{\mu_s} \min \left\{ \left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s}{4} \right]_+, \frac{\mu_s}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

и пусть $G_\alpha^{(s)}, \overline{G}_\alpha^{(s)}$ – носители функций $\varphi_\alpha^{(s)}(x), \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$, соответственно.

Отметим некоторые свойства срезающих функций, имеющие важное значение в дальнейшем.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B)$. Тогда существует s_1 такое, что справедливы равенства*

$$G_\alpha^{(s)} \cap G_\gamma^{(s)} = \emptyset, \quad \overline{G}_\alpha^{(s)} \cap \overline{G}_\gamma^{(s)} = \emptyset \quad (4.12)$$

при $s \geq s_1, \alpha, \gamma \in I_s, \alpha \neq \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что при достаточно большом s справедливо включение

$$\overline{G}_\alpha^{(s)} \subset K(x_\alpha^{(s)}, (\lambda_s - 1)\rho_s). \quad (4.13)$$

Для этого оценим $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$ в точке x , для $\rho(x, K'_s(\alpha)) \geq \rho_s$. Используя оценку (2.5) и условие $B)$, имеем для такой точки x неравенство

$$\begin{aligned} |w_\alpha^{(s)}(x)| &\leq C_{23} \lambda_s^{n-1} \left(\frac{C_m(K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s)}{(\lambda_s \rho_s)^{n-m}} \right)^{1/(m-1)} \\ &\leq C_{24} \lambda_s^{n-1} \cdot (\lambda_s \rho_s)^{m/(m-1)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.1) следует оценка

$$C_{24} \lambda_s^{n-1} \cdot (\lambda_s \rho_s)^{m/(m-1)} < \frac{\mu_s}{4}$$

при достаточно большом s . Тем самым из неравенства (4.14) получаем

$$\left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s}{4} \right]_+ = 0$$

для рассматриваемых значений x . Отсюда следует включение (4.13), а, следовательно, и утверждение леммы.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B)$. Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in I_s} \text{mes } G_\alpha^{(s)} = 0. \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 2.1 и неравенство Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{K_s(\alpha)} |\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)|^m dx \\
& \leq C_{25} (\lambda_s \rho_s)^m \int_{K_s(\alpha)} \left| \frac{\partial \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \\
& \leq C_{25} \left(\frac{4\lambda_s \rho_s}{\mu_s} \right)^m \int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_s/2)} \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \\
& \leq C_{26} \mu_s \left(\frac{\lambda_s \rho_s}{\mu_s} \right)^m (C_m(K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s))^{2/m} (C_m(K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s) + (\lambda_s \rho_s)^n)^{(m-2)/m},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где $E_\alpha^{(s)}(\mu) = \{x \in D_s(\alpha) : \mu/2 \leq |w_\alpha^{(s)}(x)| \leq \mu\}$. Из последнего неравенства и условия B) имеем

$$\text{mes } G_\alpha^{(s)} \leq C_{27} (\lambda_s \rho_s)^{n+m} \mu_s^{1-m}, \tag{4.17}$$

и, следовательно, используя (4.7), получаем

$$\sum_{\alpha \in I_s} \text{mes } G_\alpha^{(s)} \leq C_{28} (\lambda_s \rho_s)^m \mu_s^{1-m}.$$

В силу (4.1) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Это заканчивает доказательство леммы 4.2.

Определим срезающие функции $\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$:

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) = \frac{2}{\mu_s} \min \left\{ \left[v_{\alpha\beta}^{(s)}(x, 1) - \frac{\mu_s}{2} \right]_+, \frac{\mu_s}{2} \right\}$$

для $s = 1, 2, \dots$, $\alpha \in I_s$, $\beta \in I_s(\alpha)$, и пусть $G_{\alpha\beta}^{(s)}$ — носитель функции $\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$.

ЛЕММА 4.3. *Предположим, что выполнены условия $A_1)$, $A_2)$, B). Тогда существует такое число s_2 , что при $s \geq s_2$ справедливо включение*

$$G_{\alpha\beta}^{(s)} \subset K\left(x_{\alpha\beta}^{(s)}, \frac{3\rho_s}{2}\right). \tag{4.18}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.

Построим последовательность неотрицательных функций $\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$\sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in \bigcup_{\alpha \in I_s} \bigcup_{\beta \in I_s(\alpha)} \{K_s(\alpha, \beta) \setminus \Omega_s\}. \tag{4.19}$$

Для этого упорядочим множество пар векторов (α, β) с $\alpha \in I_s$, $\beta \in I_s(\alpha)$. Будем писать $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}) < (\alpha^{(2)}, \beta^{(2)})$ для $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$, $\beta^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_n^{(i)})$, $i = 1, 2$, если в последовательности чисел

$$\alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(2)} - \alpha_n^{(1)}, \quad \beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_n^{(2)} - \beta_n^{(1)},$$

первая, отличная от нуля, разность является положительным числом.

Если $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ – такая пара векторов, что $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}) \leq (\alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in I_s$, $\beta \in I_s(\alpha)$, то определим $\chi_{\alpha^{(0)}\beta^{(0)}}^{(s)}(x) \equiv \varphi_{\alpha^{(0)}\beta^{(0)}}^{(s)}(x)$. Предположим, по индукции, что функции $\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$ определены для всех (α, β) таких, что $(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, и при этом выполнены условия

$$\begin{aligned} \sum_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) &\equiv 1 \quad \text{для } x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \{K_s(\alpha, \beta) \setminus \Omega_s\}, \\ 0 &\leq \sum_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \leq 1 \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Определим функцию $\chi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x)$ равенством

$$\chi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) = \varphi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) \left(1 - \sum_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \right) \quad (4.21)$$

и проверим, что выполнены условия

$$\sum_{(\alpha, \beta) \leq (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \leq (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \{K_s(\alpha, \beta) \setminus \Omega_s\}, \quad (4.22)$$

$$0 \leq \sum_{(\alpha, \beta) \leq (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \leq 1 \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.23)$$

Для $x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \{K_s(\alpha, \beta) \setminus \Omega_s\}$ из (4.20), (4.21) получаем $\chi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) = 0$, и для таких x тождество (4.22) следует из (4.20). Для $x \in K_s(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \setminus \Omega_s$ имеем

$$\sum_{(\alpha, \beta) \leq (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) = \sum_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) + \varphi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) \left(1 - \sum_{(\alpha, \beta) < (\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \right) \equiv 1, \quad (4.24)$$

так как $\varphi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) \equiv 1$ на $K_s(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \setminus \Omega_s$.

Из (4.20) следует, что функция $\chi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x)$ неотрицательна. Тем самым обеспечено выполнение первого неравенства в (4.23). Второе неравенство в (4.23) получается из (4.24) и оценки $\varphi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{(s)}(x) \leq 1$. Этим заканчивается построение последовательности функций $\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$, удовлетворяющих тождеству (4.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из леммы 4.3 и (4.21) следует, что для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество

$$\{\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) : \alpha \in I_s, \beta \in I_s(\alpha)\}$$

содержит не более 2^n ненулевых чисел.

Определим функции $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$ равенством

$$\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) = \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \left(1 - \sum_{\gamma \in I_s} \overline{\varphi}_{\gamma}^{(s)}(x) \right), \quad \alpha \in I_s, \quad \beta \in I_s(\alpha), \quad (4.25)$$

и покажем, что при достаточно больших s справедливо тождество

$$\sum_{\alpha \in I_s} \overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x) + \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in \bigcup_{\alpha \in I_s} \{K_s(\alpha) \setminus \Omega_s\}. \quad (4.26)$$

Для $x \in \bigcup_{\alpha \in I_s} \{K_s(\alpha) \setminus K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s\}$ тождество (4.26) непосредственно следует из (4.19), (4.25). Для $x \in K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s$ имеем

$$\overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x) \equiv 1, \quad \overline{\varphi}_{\gamma}^{(s)}(x) \equiv 0 \quad \text{для } s \geq s_1, \quad \gamma \neq \alpha, \quad (4.27)$$

и, следовательно, из (4.25) получаем

$$\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \equiv 0 \quad \text{для } x \in \bigcup_{\alpha \in I_s} \{K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s\}, \quad s \geq s_1, \quad (4.28)$$

что доказывает тождество (4.26).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Обозначим через $D_{\alpha\beta}^{(s)}$ носитель функции $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$. Тогда из (4.7), леммы 4.3 и замечания 4.1 следует равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \text{mes } D_{\alpha\beta}^{(s)} = 0.$$

Сейчас мы имеем возможность ввести асимптотическое разложение, играющее основную роль в изучении характера сходимости последовательности $u_s(x)$ и построения усредненной задачи. Определим

$$u_s(x) = u_0^{(s)}(x) + \sum_{j=1}^5 r_s^{(j)}(x) + w_s(x), \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} r_s^{(1)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s} ((f(x) - f_{\alpha}^{(s)}) - (u_0^{(s)}(x) - u_{\alpha}^{(s)})) \overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x), \\ r_s^{(2)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} ((f(x) - f_{\alpha\beta}^{(s)}) - (u_0^{(s)}(x) - u_{\alpha\beta}^{(s)})) \psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x), \\ r_s^{(3)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s} v_{\alpha}^{(s)}(x, f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}) \varphi_{\alpha}^{(s)}(x), \\ r_s^{(4)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \overline{v}_{\alpha\beta}^{(s)}(x, f_{\alpha\beta}^{(s)} - u_{\alpha\beta}^{(s)}) \psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x), \\ r_s^{(5)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} ((f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}) \overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x) - v_{\alpha}^{(s)}(x, f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}) \varphi_{\alpha}^{(s)}(x)) \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x). \end{aligned}$$

Здесь $f_{\alpha\beta}^{(s)}$, $u_{\alpha\beta}^{(s)}$ — средние значения функций $f(x)$, $u_0^{(s)}(x)$ относительно куба $K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 2\rho_s)$.

ЛЕММА 4.4. Пусть выполнены условия $A_1), A_2), B)$ и $g(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует зависящее от $g(x)$ число s_3 , такое, что $g(x)w_s(x) \in \mathring{W}_m^1(\Omega_s)$ при $s \geq s_3$, где $w_s(x)$ – остаточный член разложения (4.29).

Доказательство основано на проверке тождества

$$w_s(x) \equiv 0 \quad \text{для } x \in \bigcup_{\alpha \in I_s} \{K_s(\alpha) \setminus \Omega_s\}, \quad (4.30)$$

которое следует из построения разложения (4.29) и свойств входящих в это разложение срезающих функций.

ЛЕММА 4.5. При выполнении условий $A_1), A_2), B)$ последовательности $r_s^{(1)}(x), r_s^{(2)}(x), r_s^{(4)}(x), r_s^{(5)}(x)$ сильно сходятся к нулю в пространстве $W_m^1(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все указанные последовательности равномерно ограничены. Поэтому их сходимость к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из леммы 4.2 и замечания 4.2. Оценим норму градиента $r_s^{(1)}(x)$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(1)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)}^m &\leq C_{29} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|^m + \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m \right) (\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x))^m dx \\ &+ C_{29} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_0^{(s)}(x)}{\partial x} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \\ &+ C_{29} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{\Omega} (|f(x) - f_\alpha^{(s)}|^m + |u_0^{(s)}(x) - u_\alpha^{(s)}|^m) \left| \frac{\partial}{\partial x} \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) \right|^m dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Первое слагаемое правой части (4.31) стремится к нулю в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла и леммы 4.2. Второе слагаемое стремится к нулю в силу свойства усредненных функций. Для оценки последнего слагаемого правой части (4.31) используем неравенство

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq C_{30} (\lambda_s \rho_s)^n \cdot \mu_s^{1-m}, \quad (4.32)$$

которая следует из леммы 2.1 и условия $B)$. Используя (4.32), принадлежность функции $f(x)$ пространству $C^{0,\delta}(\overline{\Omega})$ с некоторым $\delta > 0$ и лемму 3.3, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in I_s} \int_{\Omega} (|f(x) - f_\alpha^{(s)}|^m + |u_0^{(s)}(x) - u_\alpha^{(s)}|^m) \left| \frac{\partial \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \\ &\leq C_{31} \sum_{\alpha \in I_s} (\lambda_s \rho_s)^{n+m\delta} \cdot \mu_s^{1-m} + C_{31} \mu_s^{1-m} (\lambda_s \rho_s)^m \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Оба слагаемые правой части (4.33) стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ в силу (4.7) и выбора последовательностей ρ_s, μ_s, λ_s . Тем самым доказано утверждение леммы для $r_s^{(1)}(x)$. Для $r_s^{(2)}(x)$ доказательство аналогично с использованием замечания 4.2.

Используя неравенства (2.4), (4.7) и условие B), имеем

$$\left\| \frac{\partial r_s^{(4)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \leq C_{32} \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} (\rho_s^n + \mu_s^{1-m} \rho_s^n) \leq C_{33} \mu_s^{1-m} \lambda_s^{-1}, \quad (4.34)$$

и правая часть (4.34) стремится к нулю в силу (4.1). Это доказывает утверждение леммы для $r_s^{(4)}(x)$.

Наконец, для $r_s^{(5)}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial r_s^{(5)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m &\leq C_{34} \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \\ &+ C_{34} \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right|^m + \mu_s^{-m} \left| \frac{\partial w_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right|^m \right) (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m dx. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Первый член правой части (4.35) оценивается так же, как и при получении неравенства (4.34), и стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Для оценки второго слагаемого правой части (4.35) потребуется неравенство

$$\int_{D_s(\alpha)} \left| \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}(x, q)}{\partial x} \right|^m (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m dx \leq C_{35} \mu_s^{1-m} (\rho_s)^n, \quad (4.36)$$

справедливое при $|q| \leq M$. Для доказательства (4.36) нужно подставить в соответствующее задаче (4.4), (4.5) интегральное тождество пробную функцию $(v_{\alpha}^{(s)}(x, q) - q)(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m$. После стандартных оценок получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_s(\alpha)} \left(\left| \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}(x, q)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}(x, q)}{\partial x} \right|^m \right) (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m dx \\ \leq C_{36} \int_{D_s(\alpha)} \left(|q|^2 \left| \frac{\partial}{\partial x} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \right|^2 + |q|^m \left| \frac{\partial}{\partial x} \chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \right|^m \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда оценка (4.36) следует в силу неравенства (2.4) для функции $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x, 1)$ и условия B).

Из (4.7), (4.36) для второго слагаемого правой части (4.35) следует оценка

$$\sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right|^m + \mu_s^{-m} \left| \frac{\partial w_{\alpha}^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m \right) (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m dx \leq C_{37} \mu_s^{1-2m} \cdot \lambda_s^{-1}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$, и этим заканчивается доказательство леммы 4.5.

ЛЕММА 4.6. Пусть выполнены условия $A_1), A_2), B)$. Тогда последовательность $r_s^{(3)}(x)$ слабо сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$ и сильно сходится в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p < m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость $r_s^{(3)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ непосредственно следует из равномерной ограниченности этой последовательности и леммы 4.2. Применяя неравенства (2.4), (4.7) и условие $B)$, имеем оценку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(3)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)}^m &\leq C_{38} \mu_s^{-m} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_s)} |v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \\ &\quad + C_{38} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{D_s(\alpha)} \left| \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \right|^m dx \\ &\leq C_{39} \sum_{\alpha \in I_s} (\lambda_s \rho_s)^n \leq C_{40}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Множество $E_\alpha^{(s)}(\mu_s)$ понимается так же, как в (4.16), и поэтому в первом интеграле правой части (4.37) $|v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})|$ оценили сверху числом μ_s .

Так как функция $r_s^{(3)}(x)$ обращается в нуль вне множества $\bigcup_{\alpha \in I_s} G_\alpha^{(s)}$, то, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(3)}(x) \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(3)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)} \left(\sum_{\alpha \in I_s} \text{mes } G_\alpha^{(s)} \right)^{1/p-1/m},$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю в силу (4.37), (4.15). Это заканчивает доказательство леммы 4.6.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются условия $A_1), A_2), B)$ и $g(x)$ — произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда последовательность $g(x)w_s(x)$ сильно сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Без ограничения общности можем предполагать, что $|g(x)| \leq 1$ для $x \in \Omega$. Будем считать, что $s \geq s_i$, $i = 1, 2, 3$, где числа s_1, s_2, s_3 определены в леммах 4.1, 4.3, 4.4. Используя лемму 4.4, подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (0.1), (0.2) пробную функцию $|g(x)|^m w_s(x)$. Получаем

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g|^m w_s) dx + \int_\Omega a_0 \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) |g|^m w_s dx = 0. \quad (4.38)$$

Изучим поведение интегралов в левой части (4.38) при $s \rightarrow \infty$. Из лемм 4.5, 4.6 и разложения (4.29) следует сильная сходимость $w_s(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$. Это сходимость также в $L_r(\Omega)$ при любом $r < \infty$, так как последовательность $w_s(x)$ равномерно ограничена. Поэтому из (4.38) следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx = 0. \quad (4.39)$$

Перепишем последний интеграл в форме

$$\int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)} + I_4^{(s)}, \quad (4.40)$$

где

$$\begin{aligned} I_1^{(s)} &= \int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx, \\ I_2^{(s)} &= \int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_s - w_s) \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + r_s^{(3)}) \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx, \\ I_3^{(s)} &= \int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_0 - r_s^{(3)}) \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx, \\ I_4^{(s)} &= \int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Используя (1.1), получаем оценку

$$I_1^{(s)} \geq \nu_1 \int_{\Omega} |g(x)|^m \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^m dx. \quad (4.41)$$

Проверим, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I_2^{(s)} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} I_3^{(s)} = 0. \quad (4.42)$$

Первое равенство непосредственно следует после применения неравенств (1.1) и Гёльдера в силу леммы 4.5 и сильной сходимости усредненных функций. Для проверки второго равенства в (4.42) обозначим через $\chi_s(x)$ характеристическую функцию множества $\bigcup_{\alpha \in I_s} G_{\alpha}^{(s)}$ и представим

$$\begin{aligned} I_3^{(s)}(x) &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n h_{s,j}(x) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j} dx \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in I_s} \int_{G_{\alpha}^{(s)}} |g(x)|^m \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + r_s^{(3)}) \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $h_{s,j}(x) = (1 - \chi_s(x)) |g(x)|^m a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$. Используя (4.15), получаем сильную сходимость последовательности $h_{s,j}(x)$ в $L_{m/(m-1)}(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$. Это обеспечивает сходимость к нулю первого интеграла в (4.43). Сходимость к нулю второго слагаемого в (4.43) доказывается применением неравенств (1.1), Гёльдера и леммы 4.2.

Для изучения поведения $I_4^{(s)}$ при $s \rightarrow \infty$ перепишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} I_4^{(s)} &= \int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j} dx \\ &\quad + \sum_{\alpha \in I_s} \int_{G_{\alpha}^{(s)}} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) - a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j} dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ в силу (1.1), (4.15).

Для преобразования первого слагаемого в (4.44) определим функцию $\zeta_{\alpha}^{(s)}(x)$ равенством

$$\zeta_{\alpha}^{(s)}(x) = \frac{1}{\mu_s} \min\{[|w_{\alpha}^{(s)}(x)| - \mu_s]_+, \mu_s\},$$

где сохранены те же обозначения, что и в (4.11). Отметим, что справедливо тождество

$$\zeta_{\alpha}^{(s)}(x) \varphi_{\alpha}^{(s)}(x) \equiv \zeta_{\alpha}^{(s)}(x) \quad \text{для } \alpha \in I_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.45)$$

Используя (4.45) и лемму 4.1, представим первый интеграл из (4.44) в виде

$$\int_{\Omega} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j} dx = I_5^{(s)} + I_6^{(s)} + I_7^{(s)}, \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} I_5^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \int_{G_{\alpha}^{(s)}} \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)|^m \zeta_{\alpha}^{(s)}(x) w_s(x)) dx, \\ I_6^{(s)} &= - \sum_{\alpha \in I_s} \int_{G_{\alpha}^{(s)}} \zeta_{\alpha}^{(s)}(x) w_s(x) \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} |g(x)|^m dx, \\ I_7^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \int_{G_{\alpha}^{(s)}} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_{\alpha}^{(s)} v_{\alpha}^{(s)}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (w_s(x) (1 - \zeta_{\alpha}^{(s)}(x))) dx. \end{aligned}$$

Здесь $v_{\alpha}^{(s)} = v_{\alpha}^{(s)}(x, f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)})$. Из определения функции $v_{\alpha}^{(s)}(x, f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)})$ следует $I_5^{(s)} = 0$. В силу леммы 4.6 получаем, что $I_6^{(s)}$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Обозначим

$$E_{\alpha}^{(s)} = \{x \in D_s(\alpha) : |w_{\alpha}^{(s)}(x)| \leq 2\mu_s\} \cap G_{\alpha}^{(s)}$$

и оценим $I_7^{(s)}$, используя (1.1):

$$\begin{aligned} |I_7^{(s)}| &\leq C_{40} \left(\sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_{\alpha}^{(s)}} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (v_{\alpha}^{(s)} \varphi_{\alpha}^{(s)}) \right| \right)^m dx \right)^{(m-2)/m} \\ &\quad \times \left(\sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_{\alpha}^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} (w_s(1 - \zeta_{\alpha}^{(s)})) \right|^m dx \right)^{1/m} \\ &\quad \times \left(\sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_{\alpha}^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} (v_{\alpha}^{(s)} \varphi_{\alpha}^{(s)}) \right|^m dx \right)^{1/m}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Покажем дальше, каким образом оценивается каждый из множителей правой части (4.47). По определению $E_\alpha^{(s)}$, $\varphi_\alpha^{(s)}$ и из неравенства (2.4) и условия B) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_\alpha^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} (v_\alpha^{(s)} \varphi_\alpha^{(s)}) \right|^m dx \\
& \leq C_{41} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_\alpha^{(s)}} \left(\left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^m + \frac{1}{\mu_s^m} |v_\alpha^{(s)}|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^m \right) dx \\
& \leq C_{42} \sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_\alpha^{(s)}} \left(\left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^m + \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^m \right) dx \\
& \leq C_{43} \sum_{\alpha \in I_s} \mu_s (\lambda_s \rho_s)^m \leq C_{44} \cdot \mu_s. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Для второго интеграла правой части (4.47) имеем оценку

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha \in I_s} \int_{E_\alpha^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} (w_s (1 - \zeta_\alpha^{(s)})) \right|^m dx \\
& \leq C_{45} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^m dx + \sum_{\alpha \in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |w_s|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^m dx \right). \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Дальше оцениваем второе слагаемое в правой части (4.49), используя равенство

$$w_s(x) = u_s(x) - u_0^{(s)}(x) - r_s^{(1)}(x) - r_s^{(3)}(x) - r_s^{(5)}(x) \quad \text{для } x \in E_\alpha^{(s)},$$

следующее из (4.29), так как для рассматриваемых x $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) \equiv 1$ и, следовательно, $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) \equiv 0$. Получаем

$$\sum_{\alpha \in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |w_s(x)|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq C_{46} (I_8^{(s)} + I_9^{(s)} + I_{10}^{(s)} + I_{11}^{(s)}), \tag{4.50}$$

где

$$\begin{aligned}
I_8^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx, \\
I_9^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} (|f(x) - f_\alpha^{(s)}|^m + |u_0^{(s)}(x) - u_\alpha^{(s)}|^m) \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx, \\
I_{10}^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})|^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx, \\
I_{11}^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s} \sum_{\beta \in I_s(\alpha)} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m \left| \frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx.
\end{aligned}$$

Для оценки $I_8^{(s)}$ подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (4.4), (4.5), пробную функцию

$$|u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \min\{|v_\alpha^{(s)}(x, q)| - 2\mu_s, 0\} (h_\alpha^{(s)}(x))^m,$$

если $2\mu_s < |q| < M$. Здесь $h_\alpha^{(s)}(x)$ — функция класса $C_0^\infty(K(x_\alpha^{(s)}, 1))$, равная единице в $K_s(\alpha)$, нулю вне $K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s)$ и такая, что $\left|\frac{\partial}{\partial x}h_\alpha^{(s)}(x)\right| \leq 2/(\lambda_s\rho_s)$. Получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_\alpha^{(s)}} |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \left| \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha^{(s)}(x, q) \right|^m dx \\ & \leq C_{47} \int_{K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s)} \left(\mu_s^2 \left| \frac{\partial(u_s(x) - u_0^{(s)}(x))}{\partial x} \right|^2 + \mu_s^m \left| \frac{\partial(u_s(x) - u_0^{(s)}(x))}{\partial x} \right|^m \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\mu_s}{\lambda_s\rho_s} \right)^2 |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^2 + \left(\frac{\mu_s}{\lambda_s\rho_s} \right)^m |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \right) dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Используя лемму 3.2 и выбор ρ_s , имеем из (4.51)

$$I_8^{(s)} \leq C_{48} \mu_s^{2-m} (1 + R_1^m), \quad (4.52)$$

где R_1 — постоянная из неравенства (1.4).

Аналогично с (4.33), получим оценку для $I_9^{(s)}$:

$$I_9^{(s)} \leq C_{49} \mu_s^{1-m} ((\lambda_s\rho_s)^m R_1^m + (\lambda_s\rho_s)^{\delta m}). \quad (4.53)$$

Оценка

$$I_{10}^{(s)} \leq C_{50} \mu_s \quad (4.54)$$

доказывается аналогично неравенству (4.48). Из (4.36) следует неравенство

$$I_{11}^{(s)} \leq C_{51} \mu_s^{1-2m} \cdot \lambda_s^{-1}. \quad (4.55)$$

Замечая, что $\text{mes } E_\alpha^{(s)}$ возможно оценить по неравенству (4.17), получаем из (4.47)–(4.55)

$$\begin{aligned} |I_7^{(s)}| & \leq C_{52} \mu_s^{(m-1)/m} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^m dx + \mu_s^{2-m} (1 + R_1^m) \right. \\ & \quad \left. + \mu_s^{1-m} ((\lambda_s\rho_s)^m R_1^m + (\lambda_s\rho_s)^{\delta m}) + \mu_s^{1-2m} \cdot \lambda_s^{-1} \right)^{1/m}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ в силу выбора λ_s, μ_s . Тем самым из (4.44), (4.46), (4.56) получаем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I_4^{(s)} = 0. \quad (4.57)$$

Сильная сходимость $g(x)w_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ следует из (4.39)–(4.42), (4.57), что и заканчивает доказательство теоремы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Сильная сходимость последовательности $u_s(x)$ является простым следствием асимптотического разложения (4.29), лемм 4.5, 4.6 и теоремы 4.1. Достаточно заметить, что последовательность $w_s(x)$ сильно стремится к нулю в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p < m$. Последнее утверждение следует из оценки

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^p dx \leq \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^p dx + (\text{mes}(\Omega \setminus \Omega'))^{1-p/m} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \right|^m dx \right)^{p/m}$$

для произвольной подобласти Ω' области Ω . И правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе Ω' и достаточно большом s .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из асимптотического разложения (4.29), леммы 4.5 и теоремы 4.1 следует, что для произвольной строго внутренней подобласти Ω' области Ω последовательность $u_s(x) - r_s^{(3)}(x)$ сильно сходится в $W_m^1(\Omega')$ к $u_0(x)$. В этом смысле говорим о $r_s^{(3)}(x)$, как о корректоре в пространстве W_m^1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Анализируя доказательства, приведенные в данном параграфе, легко видеть, что все рассуждения сохраняются без изменения, если заменить последовательность ρ_s последовательностью $\bar{\rho}_s$ такой, что $\rho_s \leq \bar{\rho}_s$, $\bar{\rho}_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. В этом случае, соответственно, и μ_s , λ_s нужно заменить на

$$\bar{\mu}_s = \left(\ln \frac{1}{\bar{\rho}_s} \right)^{-1}, \quad \bar{\lambda}_s = \left(E \left(\ln \frac{1}{\bar{\rho}_s} \right) \right)^{2m}.$$

§ 5. Вывод предельного уравнения

Начнем с уточнения интегральной оценки для решения модельной задачи (4.4), (4.5).

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B)$. Тогда существует постоянная K_4 , зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, m, A и M , такая, что при $s = 1, 2, \dots, q \in \mathbb{R}^1, 0 < \mu \leq |q|$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\mu,s}(\alpha)} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} v_{\alpha}^{(s)}(x, q) \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x} v_{\alpha}^{(s)}(x, q) \right|^2 dx \\ & \leq K_4 \mu |q| (C_m(K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s))^{2/m} (|q|^m C_m(K'_s(\alpha) \setminus \Omega_s) + (\lambda_s \rho_s)^{n+m})^{(m-2)/m}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$E_{\mu,s}(\alpha) = \{x \in D_s(\alpha) : |v_{\alpha}^{(s)}(x, q)| \leq \mu\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки (5.1) при $\mu = |q|$ подставляем в интегральное тождество, соответствующее задаче (4.4), (4.5), пробную функцию

$$v_\alpha^{(s)}(x, q) - q\tilde{\varphi}_\alpha^{(s)}(x), \quad \tilde{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) = 4 \min \left\{ \left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{1}{4} \right]_+, \frac{1}{4} \right\},$$

где $w_\alpha^{(s)}(x)$ определена равенством (4.10). Далее проводятся такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 2.1, только с использованием оценки $\text{mes}\{\text{supp } \tilde{\varphi}_\alpha^{(s)}\} \leq C(\lambda_s \rho_s)^{n+m}$, получаемой аналогично неравенству (4.17). Неравенство (5.1) при $|q| > \mu$ получается далее аналогично доказательству неравенства (2.4) при $|q| > \mu$.

Будем доказывать теорему 1.2 при выполнении условий $A_1), A_2), B), C)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Используя условие $C)$, можно получить, что для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа $r(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$ и последовательность $r_s(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю при $s \rightarrow \infty$, такие, что

$$\left| \frac{1}{\text{mes } K(x_0, r)} C_A(K(x_0, r) \setminus \Omega_s, q) - c(x_0, q) \right| < \varepsilon \quad (5.2)$$

при $s \geq s(\varepsilon)$, $r_s(\varepsilon) \leq r \leq r(\varepsilon)$, $|q| \leq M$.

Зафиксируем далее $\varepsilon > 0$ и изменим, по сравнению с (4.1), выбор последовательностей ρ_s, μ_s, λ_s . А именно, определим

$$\begin{aligned} \rho_s(\varepsilon) &= r_s + \left(\int_\Omega |u_s(x) - u_0(x)|^m dx \right)^{1/m} + r_s(\varepsilon), \\ \mu_s(\varepsilon) &= \left(\ln \frac{1}{\rho_s(\varepsilon)} \right)^{-1}, \quad \lambda_s(\varepsilon) = \left(E \left(\ln \frac{1}{\rho_s(\varepsilon)} \right) \right)^{2m}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

С учетом этой замены сохраняем все построения предыдущего параграфа. Новые значения множеств $I_s, I'_s, I''_s, I_s(\alpha)$ будем обозначать через $I_s(\varepsilon), I'_s(\varepsilon), I''_s(\varepsilon), I_s(\alpha, \varepsilon)$. В силу замечания 4.4 сохраняются все утверждения предыдущего параграфа. Для краткости не будем вводить индекс ε в обозначении кубов разбиения, решений модельных задач и членов асимптотического разложения, сохраняя эти обозначения такими же, как в § 4.

Определим функции

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \quad \text{для } \alpha \in I'_s(\varepsilon), \\ \xi_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x, 2\mu_s(\varepsilon)) \quad \text{для } \alpha \in I''_s(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\eta_\alpha^{(s)}(x) = \frac{2}{\mu_s(\varepsilon)} \min \left\{ \left[|\xi_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s(\varepsilon)}{2} \right]_+, \frac{\mu_s(\varepsilon)}{2} \right\} \quad \text{для } \alpha \in I_s(\varepsilon), \quad (5.5)$$

где $v_\alpha^{(s)}(x, q)$ имеет такой же смысл, как в § 4, с учетом замены последовательности ρ_s .

Пусть $g(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ и определим последовательность

$$g_s(x) = g(x) + \sum_{j=1}^5 \rho_s^{(j)}(x), \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_s^{(1)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} (g_\alpha^{(s)} - g(x)) \bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x), \\ \rho_s^{(2)}(x) &= \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \sum_{\beta \in I_s(\alpha, \varepsilon)} (g_{\alpha\beta}^{(s)} - g(x)) \psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x), \\ \rho_s^{(3)}(x) &= - \sum_{\alpha \in I'_s(\varepsilon)} \frac{1}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \eta_\alpha^{(s)}(x) g_\alpha^{(s)} \\ &\quad - \sum_{\alpha \in I''_s(\varepsilon)} \frac{1}{2\mu_s(\varepsilon)} v_\alpha^{(s)}(x, 2\mu_s(\varepsilon)) \eta_\alpha^{(s)}(x) g_\alpha^{(s)}, \\ \rho_s^{(4)}(x) &= - \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \sum_{\beta \in I_s(\alpha, \varepsilon)} \bar{v}_{\alpha\beta}^{(s)}(x, 1) \psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) g_{\alpha\beta}^{(s)}, \\ \rho_s^{(5)}(x) &= - \left(\sum_{\alpha \in I'_s(\varepsilon)} \left(\bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) - \frac{1}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \eta_\alpha^{(s)}(x) \right) g_\alpha^{(s)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha \in I''_s(\varepsilon)} \left(\bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) - \frac{1}{2\mu_s(\varepsilon)} v_\alpha^{(s)}(x, 2\mu_s(\varepsilon)) \eta_\alpha^{(s)}(x) \right) g_\alpha^{(s)} \right) \\ &\quad \times \sum_{\gamma \in I_s(\varepsilon)} \sum_{\beta \in I_s(\gamma, \varepsilon)} \chi_{\gamma\beta}^{(s)}(x). \end{aligned}$$

Здесь функции $\bar{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$, $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$, $\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$, числа $f_\alpha^{(s)}$, $u_\alpha^{(s)}$ имеют такой же смысл, как в § 4. Через $g_\alpha^{(s)}$, $g_{\alpha\beta}^{(s)}$ обозначены средние значения функции $g(x)$ относительно кубов $K_s(\alpha)$ и $K_s(\alpha, \beta)$.

ЛЕММА 5.2. Пусть выполнены условия $A_1)$, $A_2)$, $B)$, $C)$. Тогда существует число s_4 , зависящее от $g(x)$, такое, что $|g(x)| \cdot g_s(x) \in \overset{\circ}{W}_m^1(\Omega_s)$ при $s \geq s_4$.

Доказательство следует из проверки тождества

$$g_s(x) \equiv 0 \quad \text{для } x \in \bigcup_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \{K_s(\alpha) \setminus \Omega_s\},$$

следующего из (5.6), свойств решений модельных задач и срезающих функций.

Будем предполагать далее, что

$$\|g(x)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq 1. \quad (5.7)$$

ЛЕММА 5.3. Пусть выполнены условия $A_1), A_2), B), C)$. Тогда последовательности $\rho_s^{(1)}(x), \rho_s^{(2)}(x), \rho_s^{(4)}(x), \rho_s^{(5)}(x)$ сильно сходятся к нулю в $W_m^1(\Omega)$ при $s \rightarrow \infty$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 4.5.

ЛЕММА 5.4. Предположим, что выполнены условия $A_1), A_2), B), C)$. Тогда последовательность $\rho_s^{(3)}(x)$ ограничена в $W_m^1(\Omega)$ и сильно сходится к нулю в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.6. Нужно только заметить, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{|f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}|^m} \int_{D_s(\alpha)} \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)}(x) \eta_\alpha^{(s)}(x)) \right|^m dx \leq C_{53} (\lambda_s \rho_s)^n,$$

следующее из леммы 5.1 и условия $B)$.

В соответствии с леммой 5.2 подставим пробную функцию $|g(x)| \cdot g_s(x)$ в интегральное тождество, соответствующее задаче (0.1), (0.2). Получаем

$$J_1^{(s)} + J_2^{(s)} + J_3^{(s)} = 0, \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} J_1^{(s)} &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)|g(x)) \right. \\ &\quad \left. + a_0 \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) |g(x)|g(x) \right) dx, \\ J_2^{(s)} &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)|(\rho_s^{(1)}(x) + \rho_s^{(2)}(x) + \rho_s^{(4)}(x) + \rho_s^{(5)}(x))) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^5 a_0 \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) |g(x)|\rho_s^{(k)}(x) \right) dx, \\ J_3^{(s)} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)|\rho_s^{(3)}(x)) dx. \end{aligned}$$

Из теоремы 1.3 следует возможность предельного перехода в $J_1^{(s)}$. Имеем

$$\begin{aligned} J_1^{(s)} &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)|g(x)) \right. \\ &\quad \left. + a_0 \left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) |g(x)|g(x) \right) dx + \gamma_s^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь и дальше через $\gamma_s^{(i)}$ обозначаем последовательности, стремящиеся к нулю при $s \rightarrow \infty$. Из лемм 5.3, 5.4 и оценки (1.4) следует, что $J_2^{(s)}$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Осталось изучить поведение $J_3^{(s)}$. Используя разложение (4.29) (с соответствующим изменением, связанным с переходом к $\rho_s(\varepsilon)$), получаем

$$J_3^{(s)} = J_4^{(s)} + J_5^{(s)} + J_6^{(s)} + J_7^{(s)}, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} J_4^{(s)} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + r_s^{(3)}) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)| \rho_s^{(3)}(x)) dx, \\ J_5^{(s)} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + r_s^{(3)}) \right) - a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)| \rho_s^{(3)}(x)) dx, \\ J_6^{(s)} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(a_j \left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) - a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)| \rho_s^{(3)}(x)) dx, \\ J_7^{(s)} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)| \rho_s^{(3)}(x)) dx. \end{aligned}$$

Легко доказать, что справедливо неравенство

$$|J_4^{(s)}| + |J_5^{(s)}| + |J_6^{(s)}| \leq \gamma_s^{(2)}. \quad (5.11)$$

Оценки для $J_4^{(s)}$, $J_5^{(s)}$ доказываются аналогично доказательству равенств (4.42).

Оценка $J_6^{(s)}$ аналогична оценке второго слагаемого в (4.44).

Представим $J_7^{(s)}$ в виде

$$J_7^{(s)} = - \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{|g_{\alpha}^{(s)}| g_{\alpha}^{(s)}}{f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^6 R_i^{(s)}, \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} R_1^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s''(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{|g_{\alpha}^{(s)}| g_{\alpha}^{(s)}}{f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial v_{\alpha}^{(s)}}{\partial x_j} dx, \\ R_2^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I_s'(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{g_{\alpha}^{(s)}}{f_{\alpha}^{(s)} - u_{\alpha}^{(s)}} \int_{F_s(\alpha)} |g(x)| \left(a_j \left(x, 0, \frac{\partial \xi_{\alpha}^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_{\alpha}^{(s)}}{\partial x_j} - a_j \left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} (\xi_{\alpha}^{(s)} \varphi_{\alpha}^{(s)}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi_{\alpha}^{(s)} \eta_{\alpha}^{(s)}) \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I'_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} \int_{F_s(\alpha)} (|g_\alpha^{(s)}| - |g(x)|) a_j \left(x, 0, \frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x_j} dx, \\
R_4^{(s)} &= \sum_{\alpha \in I'_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{|g_\alpha^{(s)}| g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha) \setminus F_s(\alpha)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x_j} dx, \\
R_5^{(s)} &= - \sum_{\alpha \in I''_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n g_\alpha^{(s)} \int_{\Omega} |g(x)| a_j \left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} (v_\alpha^{(s)} \varphi_\alpha^{(s)}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) dx, \\
R_6^{(s)} &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \rho_s^{(3)}(x) a_j \left(x, 0, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} |g(x)| dx,
\end{aligned}$$

Здесь $v_\alpha^{(s)} = v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})$, $F_s(\alpha)$ — носитель функции $\eta_\alpha^{(s)}(x)$.

ЛЕММА 5.5. *При выполнении условий $A_1), A_2), B), C)$ справедливо равенство*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 |R_i^{(s)}| = 0. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим вначале, что при $\alpha \in I''_s$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\int_{D_s(\alpha)} \left(1 + \left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right|^2 dx \\
&\leq C_{54} |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}|^2 (\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n (\mu_s(\varepsilon))^{m-2}, \\
&\int_{D_s(\alpha)} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) \right|^2 dx \\
&\leq C_{54} (\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n (\mu_s(\varepsilon))^m, \\
&\int_{D_s(\alpha)} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (v_\alpha^{(s)} \varphi_\alpha^{(s)}) \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial}{\partial x} (v_\alpha^{(s)} \varphi_\alpha^{(s)}) \right|^2 dx \\
&\leq C_{54} (\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n \mu_s(\varepsilon),
\end{aligned} \quad (5.14)$$

следующие из леммы 5.1.

Используя неравенства (1.1), (4.7), (5.14) и выбор $\rho_s(\varepsilon)$, $\mu_s(\varepsilon)$, $\lambda_s(\varepsilon)$ получаем, что $R_1^{(s)}$ и $R_5^{(s)}$ стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$. Из (5.1), (5.7) следует, что $R_3^{(s)}$ стремится к нулю. Так как

$$D_s(\alpha) \setminus F_s(\alpha) = \left\{ x \in D_s(\alpha) : |\xi_\alpha^{(s)}(x)| \leq \frac{\mu_s(\varepsilon)}{2} \right\},$$

то стремление к нулю $R_4^{(s)}$ следует из (5.1).

При оценке $R_2^{(s)}$ будем использовать неравенства

$$\begin{aligned} \int_{F_s(\alpha)} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) - \frac{\partial}{\partial x} \xi_\alpha^{(s)} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) - \frac{\partial}{\partial x} \xi_\alpha^{(s)} \right|^m \right) dx \\ \leq C_{55} \mu_s(\varepsilon) |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}| (\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n, \\ \int_{F_s(\alpha)} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} \xi_\alpha^{(s)} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \xi_\alpha^{(s)} \right|^m + \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} (\xi_\alpha^{(s)} \eta_\alpha^{(s)}) \right|^m \right) dx \\ \leq C_{55} (\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n, \end{aligned} \quad (5.15)$$

следующие из определения функций $\xi_\alpha^{(s)}(x)$, $\eta_\alpha^{(s)}(x)$ и неравенства (5.1). Используя (1.1), (4.7), (5.15), получаем, что $R_2^{(s)}$ стремится к нулю. Наконец, сходимость к нулю последовательности $R_6^{(s)}$ следует из лемм 4.6, 5.4. Тем самым закончено доказательство леммы 5.5.

Осталось рассмотреть поведение первого слагаемого в равенстве (5.12).

ЛЕММА 5.6. *При выполнении условий $A_1)$, $A_2)$, $B)$, $C)$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{|g_\alpha^{(s)}| g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j} dx \right. \\ \left. - \int_{\Omega} c(x, f(x) - u_0(x)) |g(x)| g(x) dx \right| \leq \varepsilon \text{mes } \Omega + \gamma_s^{(3)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где ε — положительное число, фиксированное при определении последовательностей $\rho_s(\varepsilon)$, $\mu_s(\varepsilon)$, $\lambda_s(\varepsilon)$.

Используя обозначение (1.8) и неравенство (5.2) имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^n \frac{|g_\alpha^{(s)}| g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j} dx \right. \\ \left. - \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} |g_\alpha^{(s)}| g_\alpha^{(s)} c(x_\alpha^{(s)}, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \text{mes } K'_s(\alpha) \right| \leq \varepsilon \text{mes } \Omega, \end{aligned} \quad (5.17)$$

если s столь большое, что $\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon) < r(\varepsilon)$, $s \geq s(\varepsilon)$.

Из (5.7) и непрерывности функции $c(x, q)$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} |g_\alpha^{(s)}| g_\alpha^{(s)} c(x_\alpha^{(s)}, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \text{mes } K'_s(\alpha) \right. \\ \left. - \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \int_{K'_s(\alpha)} c(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) |g(x)| g(x) dx \right| \leq \gamma_s^{(4)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для дальнейшей оценки заметим, что при $|q'|, |q''| \leq M$ справедливо неравенство

$$|c(x, q') - c(x, q'')| \leq C_0 |q' - q''|, \quad (5.19)$$

следующее из леммы 2.2 и условия B).

Используя гёльдеровость функции $f(x)$, (5.19) и лемму 3.3, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \int_{K'_s(\alpha)} |c(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) - c(x, f(x) - u_0^{(s)}(x))| |g(x)|^2 dx \\ & \leq \gamma_s^{(5)} + C_{56} \left(\sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \int_{K'_s(\alpha)} |u_\alpha^{(s)} - u_0^{(s)}(x)|^m |g(x)|^m dx \right)^{1/m} \\ & \leq \gamma_s^{(5)} + C_{57} \lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon) \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x} u_0(x) \right|^m dx \right)^{1/m} \leq \gamma_s^{(6)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Наконец, из ограниченности функции $c(x, f(x) - u_0(x))$, леммы 3.2 и неравенств (5.19), (4.7) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \int_{K'_s(\alpha)} c(x, f(x) - u_0^{(s)}(x)) |g(x)| g(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_\Omega c(x, f(x) - u_0(x)) |g(x)| g(x) dx \right| \\ & \leq C_{58} \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \text{mes}(K_s(\alpha) \setminus K'_s(\alpha)) \\ & \quad + C_{58} \left(\sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \int_{K'_s(\alpha)} |u_0^{(s)}(x) - u_0(x)|^m |g(x)|^m dx \right)^{1/m} \\ & \leq C_{59} \sum_{\alpha \in I_s(\varepsilon)} \left((\lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon))^n - ((\lambda_s(\varepsilon) - 2) \rho_s(\varepsilon))^n \right) \\ & \quad + C_{59} \lambda_s(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon) \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \right)^{1/m} \leq \gamma_s^{(7)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Теперь неравенство (5.16) следует из оценок (5.17)–(5.21).

Из (5.8)–(5.13), (5.16) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (|g(x)| g(x)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(a_0 \left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - c(x, f(x) - u_0(x)) \right) |g(x)| g(x) \right) dx \right| \leq \varepsilon \text{mes } \Omega + \gamma_s^{(8)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Пользуясь произвольным выбором ε и стремлением $\gamma_s^{(8)}$ к нулю, получаем равенство нулю левой части (5.22). Отсюда следует, что $u_0(x)$ — решение задачи (1.10), (1.11). Это завершает доказательство теоремы 1.4.

Список литературы

1. Марченко В. А., Хруслев Е. Я. Граничные задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Скрыпник И. В. Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–25.
3. Скрыпник И. В. Поточечная оценка некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач. Киев: Наукова думка, 1983. С. 198–296.
4. Skrzypnik I. V. Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Leipzig: Teubner-Verlag, 1986.
5. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
6. Скрыпник И. В. Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // ДАН. 1990. Т. 315. № 4. С. 793–797.
7. Скрыпник И. В. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 67–90.
8. Dal Maso G., Murat F. Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators on H_0^1 // Calculus of Variations Homogenization and Continuum Mechanics. Singapore: World Scientific, 1994. P. 177–202.
9. Dal Maso G., Murat F. Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators. Trieste: Preprint SISSA, 1994.
10. Ковалевский А. А. О G -сходимости операторов Дирихле в переменных областях // Докл. АН Украины. Сер. А. 1993. № 5. С. 13–17.
11. Панкратов Л. С. О сходимости решений вариационных задач с слабо связанными областями. Харьков: Препринт ФТИНТ, 1988.
12. Dal Maso G., Garroni A. New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains // Math. Models Methods Appl. Sci. 1994. V. 3. P. 373–407.
13. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
14. Скрыпник И. В., Наумова М. А. Поточечные оценки решений квазилинейных эллиптических задач в областях с тонкой полостью // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 10. С. 1417–1432.

Институт прикладной математики и механики
Национальной Академии наук Украины

Поступила в редакцию
05.10.1995