Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 155–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:06:39

УДК 512.546+517.987

А. И. Штерн

Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах

Рассматриваются условия слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в локально выпуклых пространствах. В частности, рассматриваются условия слабой непрерывности приводимых локально эквинепрерывных представлений топологической группы в локально выпуклом пространстве, определяющих слабо непрерывные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству. Эти условия помогают доказать слабую непрерывность усреднений и аппроксимаций, связанных со слабо непрерывными локально эквинепрерывными квазипредставлениями аменабельных топологических групп. Условия сильной непрерывности представления, аппроксимирующего такое квазипредставление, связаны с условиями автоматической сильной непрерывности слабо непрерывных представлений, которые выполняются далеко не для всех групп, пространств и представлений. В связи с этим для широкого класса топологически псевдополных групп (включающего полные по Чеху группы и локально псевдокомпактные группы) указаны условия сильной непрерывности слабо непрерывных представлений в квазиполных бочечных локально выпуклых пространствах. Разобраны некоторые примеры, в частности, связанные с конструкцией Σ -произведений с отмеченными подгруппами.

Библиография: 50 названий.

§ 1. Введение

Статья посвящена условиям слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в локально выпуклых пространствах и во многом стимулирована замечательной работой Лоуренса Брауна [1], которая, в свою очередь, возникла в связи с работами Клауса Томсена [2], [3] по эквивариантной K -теории. Результаты, полученные в работе [1], были достаточны для решения задач, рассматривавшихся в [3], но в работах ряда авторов (в том числе самого Томсена [2], Кунца [4], [5] и Беггса [6]) изучались варианты K -теории для случая локально выпуклых алгебр, и в этой теории новые связи между слабой и сильной непрерывностью представлений топологических групп представляют интерес.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00574) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-619.2003.1).

В статье получены условия слабой непрерывности приводимых локально эквинепрерывных представлений общих топологических групп в локально выпуклых пространствах, определяющих слабо непрерывные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству. Эти условия позволяют получить явный вид приводимых слабо непрерывных локально эквинепрерывных квазипредставлений аменабельных топологических групп, определяющих обычные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству, и установить слабую непрерывность аппроксимирующего представления, поправки и некоторых (инвариантных) средних значений как функций на группе. Условия сильной непрерывности аппроксимирующего представления связаны с условиями автоматической сильной непрерывности слабо непрерывных представлений, которые выполняются не для всех групп и пространств. В статье для широкого класса топологически псевдополных групп (включающего группы полные по Чеху и локально псевдокомпактные группы) указаны условия сильной непрерывности слабо непрерывных представлений в квазиполных бочечных локально выпуклых пространствах, улучшающие соответствующие утверждения статьи [7]. Разобраны некоторые примеры, в частности, связанные с новой конструкцией топологических групп – “ Σ -произведением с отмеченными подгруппами”.

§ 2. Обозначения и терминология

Мы пользуемся терминологией и обозначениями теории локально выпуклых пространств, принятыми в книге [8], без дополнительных напоминаний (заметим здесь, что символ $*$ всегда означает двойственное пространство, сопряженный оператор или дуальное представление, а $\sigma(E, F)$ – слабую топологию на локально выпуклом пространстве E , индуцированную двойственностью $\{E, F\}$). Терминология, связанная с псевдокомпактными группами, заимствована из работ [9]–[11]. Для информации по теории представлений можно использовать работы [12] и [13], по теории инвариантных средних – [14] и [15], по общей топологии – [16], а по теории нормированных линейных пространств – [17].

Некоторые понятия, используемые в дальнейшем, необходимо напомнить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Локально выпуклое пространство E называется *пространством, слабая топология которого имеет свойство Крейна*¹ (или, коротко, *пространством Крейна в слабой топологии* (в связи с одной из теорем в [19])), если слабо замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка любого слабо компактного множества в E слабо компактна. Локально выпуклое пространство E называется *слабо полным по фон Нейману* (поскольку это условие было введено в [20]), если замыкание любого слабо предкомпактного множества в E слабо компактно.

Приведем наиболее общие утверждения, связанные с этими понятиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Слабо квазиполное (т.е. квазиполное в слабой топологии) локально выпуклое пространство является слабо полным по фон Нейману, слабо полное по фон Нейману локально выпуклое пространство является

¹Или *вафельно полным* (*wafer complete*, см. [18; гл. 2]).

пространством Крейна в слабой топологии. Локально выпуклое пространство является пространством Крейна в слабой топологии тогда и только тогда, когда слабо замкнутая выпуклая оболочка любого слабо компактного множества в E слабо компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если локально выпуклое пространство E слабо квази-полно, т.е. любое замкнутое слабо ограниченное подмножество в E слабо полно, то E полно по фон Нейману, поскольку выпуклая оболочка любого слабо предкомпактного множества B в E слабо предкомпактна, и поэтому замыкание выпуклой оболочки множества B ограничено и слабо компактно. В свою очередь, если E полно по фон Нейману, то E является и пространством Крейна в слабой топологии согласно [8; утверждение IV.11.5]. Если выпуклая уравновешенная оболочка любого слабо компактного множества в E слабо компактна, то и выпуклая оболочка любого слабо компактного множества в E слабо компактна. Последнее утверждение предложения также справедливо, поскольку слабо замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка любого слабо компактного множества в E является уравновешенной оболочкой слабо замкнутой выпуклой оболочки этого слабо компактного множества (см. [8; I.5.1]).

§ 3. Предварительные замечания

Как хорошо известно, любое слабо непрерывное линейное представление локально компактной топологической группы в банаховом пространстве сильно непрерывно. Согласно [21], где это замечательное утверждение было впервые опубликовано (с несколько сжатым доказательством), его следует называть теоремой Миркила. Полное и подробное изложение этого утверждения (на языке банаховых модулей над банаховыми алгебрами) приведено в монографии Джонсона [22; с. 23–27].² Р. Мур [18] распространил этот результат на случай представлений локально компактной группы в бочечном локально выпуклом топологическом векторном пространстве Крейна в слабой топологии, Мегрелишвили [24], [25] – на случай локально эквинепрерывных представлений общих топологических групп в банаховых пространствах со свойством точек непрерывности и в зубчатых локально выпуклых пространствах (см. [26]–[28]), а Браун [1] – на случай локально эквинепрерывных представлений топологически полных групп в произвольном метризуемом локально выпуклом пространстве. Браун [1] доказал также теорему (формулировка которой приведена ниже) о слабой непрерывности представлений с сильно непрерывным подпредставлением и сильно непрерывным представлением в соответствующем факторпространстве. Эти результаты показывают, что в теоремах об автоматической сильной непрерывности a priori не обязательно сильно непрерывных представлений должно иметь место некоторое взаимодействие условий, налагаемых на топологическую группу, локально выпуклое пространство и собственное представление. Скажем, чтобы ослабить условия непрерывности, нужно усилить условия, налагаемые на группу и пространство.

²К сожалению, доказательство, приведенное в [23], совершенно недостаточно.

Мы приводим вариант теоремы Брауна [1] о слабой непрерывности приводимых представлений топологических групп в локально выпуклых пространствах в предположении, что данное представление определяет слабо непрерывное подпредставление в инвариантном подпространстве и слабо непрерывное представление в соответствующем факторпространстве (см. § 4). Эта теорема позволяет, в частности, явным образом описать структуру приводимых слабо непрерывных локально эквинепрерывных квазипредставлений топологической группы, определяющих слабо непрерывные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству, в предположении, что группа аменабельна как дискретная группа (см. § 5). Оба результата повышают интерес к условиям автоматической сильной непрерывности (в топологии Макки) слабо непрерывных представлений топологических групп. В связи с этим в § 6 вводится новый класс топологических групп, так называемые топологически псевдополные группы, содержащий локально псевдокомпактные группы, топологически полные группы и Σ -произведения локально компактных групп с отмеченными компактными подгруппами, факторпространства по которым метризуемы, а в § 7 доказывается сильная непрерывность слабо непрерывных локально эквинепрерывных представлений топологически псевдополных групп в бочечных локально выпуклых пространствах. Заключительные замечания высказаны в § 8.

§ 4. Слабая непрерывность приводимых представлений в локально выпуклых пространствах

Как и в статье [1], в теореме о слабой непрерывности приводимых представлений³ в локально выпуклых пространствах мы не налагаем условий на топологическую группу G (пространство которой, конечно, предполагается вполне регулярным). Мы налагаем (не очень ограничительные) условия на пространство представления E , в отличие от статьи [1], в которой никаких условий на локально выпуклое пространство представления не налагается. Для простоты мы используем условие локальной эквинепрерывности представления вместо “условия (5)” статьи [1], которое требует, чтобы для любого $g \in G$ и любой непрерывной полунормы p на E существовала окрестность U точки g в G и такая непрерывная полунорма q , что

$$p(\pi(u)\xi) \leq q(\xi) \quad \text{для любых } u \in U \quad \text{и любых } \xi \in E$$

(в [1] отмечено, что локальная эквинепрерывность следует из “условия (5)”, если G топологически полна, а E полно и метризуемо (и именно в этих предположениях в [1] доказано, что слабая непрерывность представлений рассматриваемого вида равносильна их сильной непрерывности; см. обсуждение ниже в § 6 после введения класса топологически псевдополных групп)). Напомним формулировку теоремы Брауна, ограничиваясь случаем представлений групп (а не полугрупп, которые рассматривались в [1]).

³Напомним, что представление π группы G в локально выпуклом пространстве E называется *слабо (сильно) непрерывным*, если для любого вектора $x \in E$ отображение $g \mapsto \pi(g)x$, $g \in G$, непрерывно в слабой (сильной) топологии пространства E .

ТЕОРЕМА БРАУНА О ПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ [1; леммы 5, 6]. Пусть G – топологическая группа, E – локально выпуклое пространство, F – замкнутое векторное подпространство E , $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E , π – такое слабо непрерывное представление группы G в пространстве E , что

$$\pi(g)F \subset F \quad \text{для любых } g \in G.$$

Предположим, что представление π удовлетворяет сформулированному выше “условию (5)” и представления группы G в подпространстве F и в факторпространстве E/F , определяемые представлением π , сильно непрерывны. Тогда π – слабо непрерывное представление группы G в E .

Нетрудно видеть, что некоторые условия приведенной ниже теоремы 1 несколько более ограничительны, чем соответствующие условия теоремы Брауна [1]. С другой стороны, условие сильной непрерывности представлений в подпространстве и в факторпространстве оказалось возможным заменить условием слабой непрерывности, так что результат в теореме 1 выглядит более естественным.

Напомним определение слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(E, F)$. Эта топология индуцирована системой полунорм

$$T \mapsto |f(Tx)|, \quad x \in E, \quad f \in F^*$$

(где F^* – пространство, двойственное к F). Если пространство F двойственно к локально выпуклому пространству F_* , то слабой* операторной топологией на $\mathcal{L}(E, F)$ (связанной с преддвойственным пространством F_*) называется топология, индуцированная системой полунорм

$$T \mapsto |f(Tx)|, \quad x \in E, \quad f \in F_*.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – топологическая группа, E – бочечное локально выпуклое пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E , а π – такое слабо непрерывное представление G в E , что

$$\pi(g)F \subset F \quad \text{для любых } g \in G.$$

Предположим, что π локально слабо ограничено (т.е. образ $\pi(U)$ некоторой окрестности U единицы e в G слабо ограничен в $\mathcal{L}(E)$) и что представления группы G в подпространстве F и в факторпространстве E/F , определяемые представлением π , слабо непрерывны. Тогда π – слабо непрерывное представление группы G в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π^* – представление группы G в E^* , определенное формулой

$$\pi^*(g) = (\pi(g^{-1}))^*, \quad g \in G,$$

где звездочка в правой части равенства означает переход к сопряженному оператору. Достаточно доказать, что π^* – слабо* непрерывное представление группы G в E (здесь и далее под слабой* операторной топологией мы понимаем топологию, связанную с пространством E , преддвойственным к E^*).

Пусть U – такая симметричная окрестность единицы e в G , что множество $H = \pi(U)$ ограничено в топологии простой сходимости, связанной со слабой топологией в E (т.е. с $\sigma(E, E^*)$ -топологией). Поэтому множество $H^* = \pi^*(U)$ ограничено в слабой* операторной топологии на пространстве $\mathcal{L}(E^*)$.

По предположению пространство E бочечно. Поэтому из принципа равномерной ограниченности [8; теорема III.4.2] следует, что множество H^*f эквивалентно непрерывно в E^* для любого $f \in E^*$. Поскольку пространство, сопряженное к бочечному, квазиполно в слабой* топологии (согласно III.4.4 и очевидному слабому* варианту утверждения III.4.3 в [8]), то замыкание $\overline{H^*}$ множества H^* в $\mathcal{L}(E^*)$ компактно в слабой* операторной топологии (доказательство использует стандартные рассуждения, связанные с компактностью произведения компактных множеств $\overline{H^*}f$ в E^* для любых $f \in E^*$).

Воспользуемся приемом, работавшим в [7] и [29] в аналогичных ситуациях. Пусть M – пересечение замыканий $\overline{\pi^*(V)}$ (здесь и далее черта над подмножеством пространства $\mathcal{L}(E^*)$ означает замыкание этого подмножества в указанной выше слабой* операторной топологии⁴) образов $\pi^*(V)$ всевозможных симметричных окрестностей $V \subset G$ единицы в G . Так как мы доказали, что замыкание множества $\pi^*(U)$ компактно, то множество $\overline{\pi^*(V)}$ компактно в слабой* операторной топологии для любых симметричных окрестностей $V \subset U$ (поскольку множество $\overline{\pi^*(V)}$ замкнуто в компактном множестве).

Ввиду упомянутой выше компактности множества $\overline{\pi^*(V)}$ соотношение $M = \{1_{E^*}\}$ эквивалентно слабой* непрерывности представления π^* в единице e . Действительно, пополнение любой окрестности $\overline{W}$ нулевого элемента в множестве $\overline{\pi^*(V_0)}$ (для любой такой окрестности V_0 , что $\overline{\pi^*(V_0)}$ компактно в слабой* операторной топологии) тоже компактно в слабой* операторной топологии. Если $M = \{1_{E^*}\}$, то пересечение $M \cap (\overline{\pi^*(V_0)} \setminus W)$ пусто и поэтому существует конечное семейство множеств вида $\pi^*(V_i)$, $i = 1, \dots, N$, для которых пересечение

$$\left(\bigcap_{i=1}^N \overline{\pi^*(V_i)} \right) \cap (\overline{\pi^*(V_0)} \setminus W)$$

пусто, так что соотношение $\pi^*(V) \subset W$ выполняется для любой окрестности

$$V = V_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^N V_i \right).$$

Пусть T – элемент M . Докажем, что $T = 1_{E^*}$. Если $f \in F^\perp$, где $F^\perp$ – аннулятор пространства F в E^* , то $Tf = f$. Поскольку представление, определенное представлением π в E/F , слабо непрерывно, то ограничение представления π^* на $F^\perp$ слабо* непрерывно. Из указанной выше эквивалентности соотношения вида $M = \{1_{E^*}\}$ и условия слабой* непрерывности соответствующего представления в единице e группы G следует, что часть оператора T , отвечающая подпространству $F^\perp$, совпадает с единичным оператором на $F^\perp$. Аналогично, представление, определенное представлением π^* в $E^*/F^\perp$, тоже

⁴Из [8; теорема III.4.4 и упражнение 25 к гл. IV] следует, что операторы вида T непрерывны как операторы в сопряженном пространстве, снабженном слабой топологией.

слабо* непрерывно и соответствующий фактороператор, определенный оператором T , совпадает с единичным оператором на $E^*/F^\perp$. Таким образом, если $f \in E^*$, то $Tf - f \in F^\perp$.

Пусть $T \neq 1_{E^*}$. Тогда существует такой функционал $f_0 \in E^*$, что $Tf_0 \neq f_0$. Мы уже доказали, что элемент $g = Tf - f$ принадлежит $F^\perp$, причем $g \neq 0$. Итак, $Tf = f + g$. Тогда

$$T^2f = T(Tf) = Tf + Tg = (f + g) + g = f + 2g$$

и по индукции получаем, что

$$T^n f = f + ng \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, для любой окрестности V единицы в G и любого натурального n существует такая окрестность W единицы в G , что $W^{2^n} \subset V$. Поэтому

$$\pi^*(W)^{2^n} \subset \pi^*(V).$$

Отсюда следует, что

$$(\pi^*(W))^{2^n} \subset \pi^*(V) \subset \overline{\pi^*(V)}.$$

Пусть $n = 1$. Тогда

$$\pi^*(W)\pi^*(W) \subset \pi^*(V).$$

Для любого $B \in \pi^*(W)$ из очевидного соотношения

$$B\pi^*(W) \subset \pi^*(V)$$

следует, что

$$B\overline{\pi^*(W)} \subset \overline{\pi^*(V)}$$

и поэтому

$$\pi^*(W)\overline{\pi^*(W)} \subset \overline{\pi^*(V)}.$$

В свою очередь, для любого $B \in \overline{\pi^*(W)}$ из очевидного соотношения

$$\pi^*(W)B \subset \overline{\pi^*(V)}$$

следует, что

$$\overline{\pi^*(W)}B \subset \overline{\pi^*(V)}$$

и поэтому

$$\overline{\pi^*(W)}\overline{\pi^*(W)} \subset \overline{\pi^*(V)}.$$

По индукции отсюда следует, что для любой окрестности V единичного элемента в G , любого натурального n и любой такой окрестности W единицы в G , что $W^{2^n} \subset V$, имеем

$$(\overline{\pi^*(W)})^{2^n} \subset \overline{\pi^*(V)}.$$

В частности, поскольку $T \in \overline{\pi^*(O)}$ для любой окрестности O единицы, отсюда следует, что

$$T^n \in \overline{\pi^*(V)} \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}$$

и любой окрестности V единицы в G и поэтому $T^n \in M$. Однако, как мы видели выше, если $T \neq 1_{E^*}$, то последовательность $n \mapsto T^n$, $n \in \mathbb{N}$, не ограничена, а это противоречит условию, что образ $\pi^*(U) \subset \mathcal{L}(E)$ некоторой окрестности U элемента e ограничен. Отсюда следует, что $T = 1_E$, что завершает доказательство теоремы 1.

§ 5. Аппроксимация приводимого слабо непрерывного локально эквинепрерывного квазипредставления аменабельной топологической группы в банаховом пространстве

Полученные в § 2 условия слабой непрерывности позволяют установить существование и слабую непрерывность аппроксимирующего представления для любого приводимого слабо непрерывного локально эквинепрерывного квазипредставления топологической группы, для которого квазипредставления, определяемые данным квазипредставлением в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству, являются обычными представлениями. Определения и обозначения см., например, в работах [29] и [30]. Напомним, в частности, что отображение θ группы G в группу обратимых элементов алгебры $\mathcal{L}(E)$ ограниченных линейных операторов в E называется δ -квазипредставлением группы G в E , если $\|\theta(gh) - \theta(g)\theta(h)\| \leq \delta$ для всех $g, h \in G$.

Теорема 1.3 в [30] допускает следующий специфический вариант, связанный с рассматриваемой задачей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что

$$\theta(g)F \subset F \quad \text{для любых } g \in G.$$

Предположим, что θ локально равномерно ограничено, $\theta(e) = 1_E$ и $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ для всех $g \in G$. Предположим также, что и ограничение представления θ на F , и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда существует такое слабо непрерывное представление π группы G в E , что $\|\pi(g) - \theta(g)\| \leq \delta$ для всех $g \in G$ и представления, определяемые представлением π в F и E/F , совпадают с представлениями, определяемыми квазипредставлением E в F и E/F соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как θ – δ -квазипредставление, для всех $g, h \in G$ имеем

$$\|\theta(gh)\theta(h^{-1}) - \theta(g)\| \leq \delta. \quad (1)$$

В частности, $h \mapsto \theta(gh)\theta(h^{-1})$ – ограниченная операторнозначная функция со значениями в $\mathcal{L}(E)$. Пусть E_* – (некоторое) банахово пространство, к которому сопряжено пространство E . Положим

$$\pi(g) = I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1})) \quad \text{для любого } g \in G,$$

где $I_h(F(h))$ для ограниченной операторной функции F на G со значениями в пространстве ограниченных операторов в E понимается как оператор, сопоставляющий элементу $x \in E$ элемент $y \in E$, определенный формулой

$$y(f) = I_{h \in G}((F(g)x)(f)) \quad \text{для любого } f \in E_*$$

для некоторого фиксированного двусторонне инвариантного среднего I на пространстве ограниченных непрерывных функций переменного $h \in G$ на группе G . По построению оператор $\pi(g) - \theta(g)$ удовлетворяет условию

$$\|\pi(g) - \theta(g)\| \leq \delta,$$

которое сразу следует из неравенства (1), а из соотношения

$$\pi(g) - \theta(g) = I_h((\theta(gh) - \theta(g)\theta(h))\theta(h^{-1}))$$

следует, что оператор $\pi(g) - \theta(g)$ действует из E в $F \subset E$ и равен нулю на F . Напомним также, что все произведения вида

$$(\theta(gh) - \theta(g)\theta(h))(\theta(kl) - \theta(k)\theta(l)), \quad g, h, k, l \in G,$$

равны нулю на E . Ввиду двусторонней инвариантности среднего I имеем

$$\begin{aligned} \pi(g) &= I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1})) = I_h(\theta(gkh)\theta((kh)^{-1})) = I_h(\theta(gkh)\theta(h^{-1}k^{-1}) \\ &\quad + \theta(gk)\theta(h)(\theta(h^{-1}k^{-1}) - \theta(h^{-1})\theta(k^{-1})) + \theta(gkh)\theta(h^{-1})\theta(k^{-1})) \\ &= \theta(gk)I_h(\theta(h)(\theta(h^{-1}k^{-1}) - \theta(h^{-1})\theta(k^{-1}))) + \pi(gk)\theta(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$. Из соотношения $\theta(h)^{-1} = \theta(h^{-1})$, где $h \in G$, следует, что

$$I_h(\theta(h)(\theta(h^{-1}k^{-1}) - \theta(h^{-1})\theta(k^{-1}))) = I_h(\theta(h)\theta(h^{-1}k^{-1})) - \theta(k^{-1}),$$

а из инвариантности среднего (с помощью замены $h \mapsto kl$ и перехода к среднему по l) заключаем, что

$$I_h(\theta(h)\theta(h^{-1}k^{-1})) - \theta(k^{-1}) = I_l(\theta(k^{-1}l)\theta(l)) - \theta(k^{-1}) = \pi(k^{-1}) - \theta(k^{-1}).$$

Таким образом,

$$\pi(g) = \theta(gk)(\pi(k^{-1}) - \theta(k^{-1})) + \pi(gk)\theta(k^{-1})$$

или

$$\theta(gk)\theta(k^{-1}) - \theta(gk)\pi(k^{-1}) - \pi(gk)\theta(k^{-1}) + \pi(g) = 0_E$$

для всех $g, k \in G$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} 0_E &= (\pi(gk) - \theta(gk))(\pi(k^{-1}) - \theta(k^{-1})) \\ &= \pi(gk)\pi(k^{-1}) - \theta(gk)\pi(k^{-1}) - \pi(gk)\theta(k^{-1}) + \theta(gk)\theta(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$ и можно вычесть последнее тождество из предыдущего. Получаем, что

$$\pi(g) - \pi(gk)\pi(k^{-1}) = -(\pi(gk) - \theta(gk))(\pi(k^{-1}) - \theta(k^{-1})) = 0_E,$$

т.е. π – представление, причем $\pi(g) - \theta(g)$ есть оператор из E в F . Таким образом, представления, определяемые представлением π в F и E/F , совпадают с представлениями, определяемыми квазипредставлением E в F и E/F соответственно. Ввиду локальной равномерной ограниченности представления π и слабой непрерывности представлений, определяемых квазипредставлением E в F и E/F , представление π слабо непрерывно по теореме 1.

Отсюда немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что

$$\theta(g)F \subset F \quad \text{для любых } g \in G.$$

Предположим, что $\theta(e) = 1_E$, θ локально равномерно ограничено и соотношения $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ выполнены для всех $g \in G$. Предположим также, что ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда функция

$$g \mapsto I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1})), \quad g \in G,$$

слабо непрерывна как функция со значениями в непрерывных линейных операторах в E .

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что среднее от непрерывной функции двух переменных по одной из переменных не обязательно непрерывно. Например, среднее от функции

$$\{x, y\} \mapsto \exp(ixy), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

по переменной x определено однозначно и разрывно как функция от y .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть π – представление, существование которого утверждается в теореме 2, а $\delta: G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ – ограниченное отображение ($\|\delta(g)\| \leq f(\varepsilon)$), являющееся поправкой (т.е. $\pi = \theta + \delta$). Если семейство операторов $\{\theta(g)\pi(g^{-1}) \mid g \in G\}$ (или, что равносильно, семейство операторов $\{\pi(g)\theta(g^{-1}) \mid g \in G\}$) ограничено, то отображение

$$h \mapsto I_h(\delta(gh)\theta(h^{-1})), \quad g, h \in G,$$

определено и слабо непрерывно по $h \in G$ как отображение группы G в алгебру $\mathcal{L}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – представление, построенное в теореме 2, и пусть $\delta: G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ – ограниченное отображение ($\|\delta(g)\| \leq f(\varepsilon)$), являющееся поправкой (т.е. $\pi = \theta + \delta$). Так как

$$\pi(gh) - \pi(g)\pi(h) \equiv 0_E \quad \text{для всех } g, h \in G,$$

то

$$\theta(gh) + \delta(gh) - \theta(g)\theta(h) - \delta(g)\theta(h) - \theta(g)\delta(h) - \delta(g)\delta(h) = 0_E$$

для любых $g, h \in G$. Очевидно, $\delta(g)\delta(h) \equiv 0_E$. Следовательно,

$$\delta(g) = \theta(gh)(\theta(h))^{-1} - \theta(g) - \theta(g)\delta(h)(\theta(h))^{-1} + \delta(gh)(\theta(h))^{-1}$$

для любых $g, h \in G$ и поэтому правая часть равенства не зависит от $h \in G$. Кроме того, отображение

$$\{g, h\} \mapsto \theta(gh)(\theta(h))^{-1} - \theta(g) = \theta(gh)\theta(h^{-1}) - \theta(ghh^{-1}), \quad g, h \in G,$$

ограничено. Применяя слабое* инвариантное среднее по $h \in G$, как в [30], видим, что

$$\pi(g) - \theta(g) = \delta(g) = \pi(g) - \theta(g) + \delta(g)w + I_h(\delta(gh)\theta(h^{-1})) \quad \text{для любого } g \in G,$$

где w – инвариантное среднее в слабой операторной топологии от функции $\delta(h)\theta(h^{-1})$, взятое по переменной $h \in G$ (эта функция ограничена, если ограничено семейство операторов $\{\theta(g)\pi(g^{-1}) \mid g \in G\}$ или, что равносильно, если ограничено семейство операторов $\{\pi(g)\theta(g^{-1}) \mid g \in G\}$). Таким образом,

$$I_h(\delta(gh)\theta(h^{-1})) = -\delta(g)w \quad \text{для любого } g \in G,$$

что и доказывает слабую непрерывность отображения

$$g \mapsto I_h(\delta(gh)\theta(h^{-1})), \quad g, h \in G.$$

§ 6. Топологически псевдополные группы

В § 4 были получены условия слабой непрерывности представлений топологических групп в бочечных локально выпуклых пространствах, а в предыдущем параграфе эти условия непрерывности позволили нам установить слабую непрерывность представлений, аппроксимирующих слабо непрерывные локально эквинепрерывные квазипредставления топологической группы, определяющие обычные представления в инвариантном подпространстве и в факторпространстве по этому инвариантному подпространству. Естественно возникает вопрос об общих условиях сильной непрерывности представлений этого класса.

Нетрудно видеть, что условия сильной непрерывности аппроксимирующего представления связаны с условиями автоматической сильной непрерывности слабо непрерывных представлений, которые выполняются далеко не для всех групп, пространств и представлений.

ПРИМЕР. Пусть E – бесконечномерное пространство, пусть $F \neq E$ – бесконечномерное замкнутое векторное подпространство в E с бесконечномерным факторпространством E/F , и пусть G – группа всех непрерывных линейных операторов в E , отличающихся от единичного оператора на конечномерный линейный оператор вида

$$Tx = \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i, \quad x \in E, \quad x_i \in F, \quad f_i \in F^\perp, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $F^\perp$ – аннулятор пространства F в E^* . Снабдим группу G слабой операторной топологией. Нетрудно видеть, что G – топологическая группа и тавтологическое представление группы G в E , очевидно, слабо непрерывно, но не сильно непрерывно, так как в бесконечномерном банаховом пространстве слабая и сильная топологии различны.

В этом параграфе мы напомним определение класса топологических групп, введенного в работе [7]. Начнем с определения псевдокомпактных и локально псевдокомпактных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологическое пространство называется *псевдокомпактным*, если любая вещественнозначная непрерывная функция на этом пространстве ограничена. Топологическое пространство X называется *локально псевдокомпактным*, если любая точка пространства X имеет псевдокомпактную окрестность. Топологическая группа называется *псевдокомпактной* (*локально псевдокомпактной*), если топологическое пространство этой группы псевдокомпактно (локально псевдокомпактно).

Нетрудно видеть, что метризуемые псевдокомпактные группы компактны. Дополнительную информацию о псевдокомпактных группах, локально псевдокомпактных группах и их обобщениях можно найти в работах [9]–[11], [31]–[33].

Введем класс групп (содержащий, в частности, класс локально псевдокомпактных групп), слабо непрерывные представления которых в “хороших” локально выпуклых пространствах автоматически сильно непрерывны, см. теорему 3 ниже. Напомним, что топологическая группа G называется *топологически полной* или *почти метризуемой* [34], [35], если G допускает компактификацию, в которой исходная группа G образует множество типа G_δ или, что равносильно, если топологическая группа G содержит компактную подгруппу N с метризуемым пространством смежных классов G/N . Мы расширим этот класс следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Топологическая группа G называется *топологически псевдополной*, если она содержит замкнутую псевдокомпактную подгруппу N с метризуемым пространством смежных классов G/N .

Очевидно, что группа N есть множество типа G_δ в G .

Как показывает следующее утверждение, класс топологически псевдополных групп довольно широк.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Все топологически полные топологические группы и все локально псевдокомпактные топологические группы принадлежат классу топологически псевдополных групп.

В доказательстве этого предложения нам потребуется понятие пополнения Вейля псевдокомпактной группы. Напомним, что любая псевдокомпактная топологическая группа G может быть так вложена в виде плотной подгруппы в некоторую локально компактную группу K , что любая непрерывная (автоматически ограниченная) вещественная функция на G допускает (и притом единственное) непрерывное (автоматически ограниченное) продолжение до вещественной функции на K . (Пространство группы K совпадает тем самым со стоун-чеховской компактификацией группы G .) Это условие определяет топологическую группу K однозначно с точностью до взаимно непрерывного изоморфизма групп, поточечно сохраняющего группу G . Группа K называется *пополнением Вейля* группы G . Подробности можно найти в работах [9]–[11], [31]–[33].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения 2 очевидно. Второе утверждение вытекает из одного из результатов статьи [10]: топологическая группа G локально псевдокомпактна тогда и только тогда, когда пространство смежных классов (однородное пространство) G/N локально компактно для любой замкнутой G_δ -подгруппы N в G . Действительно, если G локально

псевдокомпактна и K – пополнение Вейля группы G и если H – открытая почти связная подгруппа в K , то подгруппа $G' = G \cap H$ в G очевидным образом локально псевдокомпактна, так как достаточно малые окрестности любой точки группы G' в группе G' и в G одни и те же. Любая окрестность U единицы в H содержит такой замкнутый нормальный делитель M_U , что соответствующая факторгруппа H/M_U является конечным расширением связной группы Ли и, тем самым, нормальный делитель M_U есть G_δ -множество в H . Рассмотрим соответствующий непрерывный канонический гомоморфизм $H \rightarrow H/M_U$ и ограничим его на G' . Мы получим непрерывный гомоморфизм $G' \rightarrow H/M_U$, ядро которого принадлежит данной окрестности в H (или, что равносильно, данной окрестности в G) и имеет метризуемый образ (или, что равносильно, метризуемую факторгруппу). Так как G' открыта в G , то факторпространство G/N также метризуемо (см. [16; гл. V, § 5.5] и [36; § 8]), что завершает доказательство.

Введем следующую групповую конструкцию (которая, по-видимому, является новой).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть G_α , $\alpha \in A$, – семейство топологических групп, и пусть H_α – открытая компактная подгруппа группы G_α для любого $\alpha \in A$. Пусть G – подгруппа прямого произведения $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, образованная всеми такими элементами $\{g_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, что $g_\alpha \neq e_\alpha$ лишь для счетного множества индексов $\alpha \in A$, а $g_\alpha \notin H_\alpha$ лишь для конечного множества индексов $\alpha \in A$. Очевидно, что G – топологическая группа с открытой псевдокомпактной подгруппой H , являющейся обычным Σ -произведением компактных подгрупп H_α , $\alpha \in A$. Группа G называется Σ -произведением топологических групп G_α , $\alpha \in A$, с отмеченными подгруппами H_α , $\alpha \in A$. Топология в группе G определяется семейством окрестностей, определяемых как пересечение окрестностей в $\prod_{\alpha \in A} H_\alpha$ с группой G .

Следующее предложение показывает, что класс топологически псевдополных групп содержит Σ -произведения топологически полных групп G_α , $\alpha \in A$, с отмеченными открытыми компактными подгруппами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если G_α , $\alpha \in A$, – семейство топологически полных групп с открытыми компактными открытыми подгруппами H_α , то Σ -произведение групп G_α , $\alpha \in A$, с отмеченными подгруппами H_α является топологически псевдополной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G – топологическая группа с псевдокомпактной подгруппой H , а факторпространство G/H дискретно и потому метризуемо.

Конструкция Σ -произведения топологических групп с отмеченными подгруппами допускает модификацию, в которой отмеченные подгруппы не обязательно открыты.

Отметим в заключение параграфа, что класс топологически псевдополных групп не исчерпывается объединением классов локально псевдокомпактных и топологически полных групп. Очевидно, что подходящее прямое произведение локально псевдокомпактной группы и топологически полной группы может оказаться группой, которая не локально псевдокомпактна и не топологически полна.

§ 7. Сильная непрерывность слабо непрерывных представлений топологически псевдополных групп в бочечных локально выпуклых пространствах

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – топологически псевдополная топологическая группа, E – квазиполное бочечное локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E , π – слабо непрерывное представление группы G в пространстве E , и пусть π локально слабо ограничено (т.е. образ $\pi(U)$ некоторой окрестности U единицы e в G есть слабо ограниченное подмножество алгебры $\mathcal{L}(E)$). Тогда π – сильно непрерывное представление группы G в E . Если группа G топологически полна, то утверждение теоремы выполняется и в том случае, когда E – пространство Крейна в слабой топологии (не обязательно квазиполное).

Аналогичное утверждение, доказанное в [7], предполагало полноту пространства по фон Нейману, а не квазиполноту в сильной топологии. Нетрудно видеть, что банахово пространство полно по фон Нейману тогда и только тогда, когда оно рефлексивно. Таким образом, утверждение, доказанное в [7], не охватывало случай представлений в нереклексивных банаховых пространствах. Теорема 3 существенно сильнее теоремы из [7] и свободна от этого недостатка. Таким образом, в частности, локально слабо ограниченные слабо непрерывные представления топологически псевдополных групп в банаховых пространствах сильно непрерывны.

Для доказательства теоремы 3 потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – псевдокомпактная топологическая группа, K – пополнение Вейля группы G , E – квазиполное бочечное локально выпуклое пространство, а π – слабо непрерывное представление группы G в E . Тогда представление π сильно непрерывно, а π можно продолжить до сильно непрерывного представления компактной группы K в том же пространстве E . Если сама группа G компактна, то утверждение теоремы остается справедливым, если пространство E является всего лишь пространством Крейна в слабой топологии (и не обязательно квазиполным).

Напомним, что псевдокомпактность в бочечных пространствах была связана в работе [37] с относительной слабой компактностью. А именно в [37] доказано, что любое относительно слабо псевдокомпактное множество в квазиполном бочечном локально выпуклом пространстве E (т.е. такое множество X , что ограничение любой слабо непрерывной функции на E на множество X ограничено на X) является относительно слабо компактным в E .⁵

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что представление π можно продолжить до слабо непрерывного представления компактной группы K в том же

⁵Доказательство в [37] использует понятия и средства, развитые в доказательстве теоремы IV.11.2 в [8] и основано на критерии Гротендика слабой компактности [38]. Из сравнения этих средств следует, что в приведенном утверждении об относительной слабой компактности слабо псевдокомпактных множеств можно несколько ослабить условие квазиполноты. А именно достаточно требовать, чтобы пространство было бочечным и замыкания относительно слабо псевдокомпактных множеств в этом пространстве были полны.

пространстве E . Действительно, слабо непрерывное представление любой компактной топологической группы в любом бочечном пространстве, являющемся пространством Крейна в слабой топологии, сильно непрерывно [18]. Таким образом, если требуемое продолжение до представления группы K в E существует, то оно сильно непрерывно. Это рассуждение завершает доказательство теоремы, если группа G компактна.

Построим требуемое расширение в общем случае. По определению псевдокомпактного пространства любая непрерывная вещественная функция на G ограничена. Из определения сразу следует, что непрерывный образ псевдокомпактного топологического пространства псевдокомпактен. Так как представление π слабо непрерывно по предположению, то отображение $g \mapsto \pi(g)x$, $g \in G$, непрерывно как отображение группы G в пространство E , снабженное слабой топологией, для любого $x \in E$. Поэтому орбита $O(x) = \{\pi(g)x \mid g \in G\}$ каждого вектора $x \in E$ под действием группы G псевдокомпактна в слабой топологии, т.е. любая слабо непрерывная вещественная функция на $O(x)$ ограничена. Тогда и ограничение любой слабо непрерывной функции на E на множество $O(x)$ ограничено на $O(x)$. Поскольку пространство E квазиполно по предположению, то каждая орбита $O(x)$ слабо относительно компактна по теореме 3 из [37]. Следовательно, замкнутая выпуклая оболочка $H(x)$ этой орбиты слабо предкомпактна (см. [8; I.5.1]) и потому слабо ограничена. Множество $H(x)$ выпукло и замкнуто, а поэтому и слабо замкнуто. Таким образом, множество $H(x)$ слабо компактно для любого $x \in E$. Стандартное рассуждение, использующее теорему Тихонова, показывает тогда, что множество $\pi(G)$ имеет компактное замыкание в слабой операторной топологии пространства $\mathcal{L}(E)$.

Отметим теперь, что любая комплекснозначная непрерывная функция на G тоже ограничена. Кроме того, поскольку компактная группа K является стоунчевской компактификацией группы G , то любая комплекснозначная непрерывная функция на G допускает единственное продолжение по непрерывности до комплекснозначной непрерывной функции на K . Так как пространство E бочечно по предположению, то множество $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ эквинепрерывно в пространстве $\mathcal{L}(E)$ по теореме IV.5.2 в [8]. Таким образом, любая точка $k \in K$ определяет ограниченный фильтр на множестве $\pi(G)$, образованный образами пересечений окрестностей точки k в K с множеством G . Это – фильтр Коши в слабой операторной топологии, сходящийся к некоторому отображению $\pi(k)$ (ввиду поточечной компактности образов) в пространстве E^E всех отображений E в E с топологией простой слабой сходимости. Еще раз используя тот факт, что пространство E бочечно, и применяя теорему III.4.6 из [8], получаем, что $\pi(k) \in \mathcal{L}(E)$ и построенный фильтр сходится к $\pi(k)$ в слабой операторной топологии на пространстве $\mathcal{L}(E)$. Это правило определяет некоторое отображение $K \rightarrow \mathcal{L}(E)$, которое непрерывно в слабой операторной топологии, потому что матричные элементы построенного отображения являются непрерывными функциями на K . Остается доказать, что построенное отображение (которое мы обозначаем той же буквой π , поскольку продолженное отображение однозначно определено исходным представлением π) есть представление группы K в пространстве E . Заметим, что

$$\pi(gh) = \pi(g)\pi(h) \quad \text{для любых } g, h \in G$$

и поэтому

$$f(\pi(gh)\xi) = f(\pi(g)\pi(h)\xi) \quad \text{для любых } g, h \in G, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*.$$

По непрерывности по переменной $g \in G$ и по определению продолжения мы получаем, что

$$f(\pi(kh)\xi) = f(\pi(k)\pi(h)\xi) \quad \text{для любых } k \in K, \quad h \in G, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*$$

или, что равносильно,

$$(\pi(kh)^*f)(\xi) = (\pi(k)^*f)(\pi(h)\xi) \quad \text{для любых } k \in K, \quad h \in G, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*.$$

Так как непрерывность представления π в пространстве E в слабой топологии $\sigma(E, E^*)$ почти тавтологически равносильна непрерывности представления $g \mapsto \pi(g^{-1})^*$ в пространстве E^* в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ (с учетом непрерывности взятия обратного в группе K), то

$$(\pi(kl)^*f)(\xi) = (\pi(k)^*f)(\pi(l)\xi) \quad \text{для любых } k, l \in K, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*$$

или, иначе говоря,

$$f(\pi(kl)\xi) = f(\pi(k)\pi(l)\xi) \quad \text{для любых } k, l \in K, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*.$$

Следовательно,

$$\pi(kl) = \pi(k)\pi(l) \quad \text{для любых } k, l \in K.$$

Поскольку $\pi(e) = 1_E$ по предположению, это завершает доказательство предложения 4.

Использованное в доказательстве рассуждение можно почти дословно повторить для случая локально псевдокомпактных групп. Единственное отличие состоит в том, что нужно использовать псевдокомпактную окрестность любого элемента группы, а не группу в целом. Мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть топологическая группа G локально псевдокомпактна, пусть K – пополнение Вейля группы G , E – квазиполное бочечное локально выпуклое пространство, а π – слабо непрерывное представление группы G в пространстве E . Тогда представление π сильно непрерывно и представление π можно продолжить до сильно непрерывного представления локально компактной группы K в том же пространстве E . Если исходная группа G локально компактна, то утверждение остается справедливым, если условие квазиполноты пространства E заменить условием, что пространство E является пространством Крейна в слабой топологии.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть G – топологическая группа, имеющая замкнутую псевдокомпактную подгруппу N , для которой однородное пространство (пространство смежных классов) G/N метризуемо. Пусть K – пополнение Вейля группы N . Согласно предложению 4 ограничение представления π на N допускает слабо непрерывное продолжение на K , и это продолжение сильно

непрерывно. Пусть $\xi \in E$, $f \in E^*$, $\operatorname{Re} f(\xi) > 0$. Вследствие слабой непрерывности представления π для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V единицы в K , что

$$\operatorname{Re} f(\pi(m)\xi) > \operatorname{Re} f(\xi) - \varepsilon \quad \text{для любых } m \in V,$$

и такой компактный нормальный делитель M в K , что $M \subset V$. Можно считать, что $0 < \varepsilon < \operatorname{Re} f(\xi)$. Тогда из сильной непрерывности представления π следует, что существует ненулевой M -инвариантный вектор

$$\eta = \int_M \pi(m)\xi \, d\mu_M(m) \in E,$$

который удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f(\eta) > \operatorname{Re} f(\xi) - \varepsilon$. Это наблюдение показывает, что векторное подпространство L пространства E , образованное неподвижными векторами $\zeta \in E$ всевозможных компактных G_δ -подгрупп в K , слабо плотно в E , и поэтому L сильно плотно в E (поскольку L – векторное подпространство, слабо плотное в E). Поэтому достаточно доказать, что каждый вектор $\zeta \in L$ сильно непрерывен (т.е. отображение

$$g \mapsto \pi(g)\zeta, \quad g \in G,$$

сильно непрерывно на G). Действительно, пусть $\xi \in E$, O – такая окрестность единицы в G , что множество $\pi(O)$ эвклиндово непрерывно, и пусть U – (сильная) окрестность нуля в E . Пусть V – такая (сильная) окрестность нуля в E , что $V + V + V \subset U$. Используя эвклиндову непрерывность множества $\pi(O)$, мы можем найти такую симметричную (сильную) окрестность W нуля в E , что

$$\pi(g)W \subset V \quad \text{для любых } g \in O.$$

Пусть ζ – такой вектор в E , что ζ инвариантно относительно нормального делителя M в H и при этом $\zeta - \xi \in W$. Тогда

$$\pi(g)\xi - \xi = \pi(g)\xi - \pi(g)\zeta + \pi(g)\zeta - \zeta + \zeta - \xi \in \pi(g)\zeta - \zeta + V + V \subset V + V + V \subset U$$

для любых $g \in \Omega$, где Ω – такая окрестность единицы в G , что

$$\pi(g)\zeta - \zeta \in V \quad \text{для любых } g \in \Omega.$$

Такая окрестность Ω действительно существует, потому что ζ – сильно непрерывный вектор по построению.

Итак, рассмотрим отображение $G \rightarrow E$, определяемое формулой $g \mapsto \pi(g)\zeta$. Пусть M – такой замкнутый нормальный делитель типа G_δ в N , что

$$\pi(m)\zeta = \zeta \quad \text{для любых } m \in M.$$

Согласно работе [10] факторгруппа N/M компактна и удовлетворяет первой аксиоме счетности. Поэтому N/M – компактное метризуемое пространство, и, так как пространство G/N тоже метризуемо (и поэтому является k -пространством), из теоремы 3.7.18 в [16] следует, что естественное отображение факторизации $G/M \rightarrow G/N$, определенное формулой $gM \mapsto gN$ для любого $g \in G$, является совершенным отображением на метризуемое пространство (ср. теоремы 5.18 и 5.38 (е) в [36]), причем прообразы всех точек являются метризуемыми компактными множествами. По теореме 5.5.7 в [16] отсюда следует, что пространство смежных классов G/M метризуемо.

Если ζ не является сильно непрерывным вектором, то отображение $G/M \rightarrow E$, определенное формулой $gM \mapsto \pi(g)\zeta$, $g \in G$, разрывно. Если g_0M – точка разрыва, то, поскольку пространство G/M метрическое и, в частности, удовлетворяет первой аксиоме счетности, существует такая последовательность $g_mM \rightarrow g_0M$, $g_m \in G$, что $\pi(g_m)\zeta$ не стремится к $\pi(g_0)\zeta$. Заменяя ζ на $\pi(g_0)\zeta$, M на $M' = g_0Mg_0^{-1}$ и G/M на G/M' , видим, что при такой замене мы можем заменить точку g_0 точкой $e_{G/M'}$. С другой стороны, если $e = e_{G/M'}$ – точка разрыва, то очевидно, что любая точка $g \in G/M'$ тоже является точкой разрыва. Чтобы упростить обозначения, будем считать, что e – точка разрыва отображения $G/M \rightarrow E$ для исходной группы M .

Рассмотрим замкнутую подгруппу Q в G , порожденную элементами g_m , $m \in \mathbb{N}$. Пусть $P = Q \cap M$. Тогда P – замкнутая подгруппа в Q и естественное отображение однородных пространств $Q/P \rightarrow G/M$, определенное формулой $qP \mapsto qM$, взаимно однозначно. Образ этого отображения – подпространство метризуемого пространства. Следовательно, Q/P сепарабельна и метризуема. По предположению рассматриваемое представление не является сильно непрерывным; следовательно, существует такая полунорма p на E , что числовая последовательность $p(\pi(g_m)\zeta - \zeta)$, $m \in \mathbb{N}$, не стремится к нулю. Но в этой ситуации можно применить построение, предложенное Брауном в [1; замечание 12], и заменить исходное представление слабо непрерывным не сильно непрерывным представлением в локально выпуклом пространстве, топология которого порождена счетным семейством полунорм (в частности, это пространство метризуемо). Кроме того, можно ограничиться метризуемым пространством, порожденным Q/P -орбитой вектора ζ . Поскольку эта орбита является сепарабельным метризуемым пространством, мы можем предполагать, что рассматриваемое метризуемое пространство представления сепарабельно.

Докажем теперь, что постановку задачи можно упростить и свести рассмотрение к случаю, когда не только пространство представления, но и рассматриваемая группа метризуема и сепарабельна.

Рассмотрим псевдокомпактную подгруппу M . Как мы видели выше, пространство смежных классов N/M – (несвязная, но конечнолистная) группа Ли и поэтому M – замкнутое подмножество типа G_δ в G . Любая группа вида

$$g_{i_1}^{-1} g_{i_2} \cdots g_{i_{2n-1}}^{-1} g_{i_{2n}} M g_{i_{2n}}^{-1} g_{i_{2n-1}} \cdots g_{i_2}^{-1} g_{i_1}$$

(получаемая из M сопряжением с элементом подмножества, плотного в Q) тоже является псевдокомпактным замкнутым подмножеством типа G_δ в G . Пересечение R всех таких подгрупп очевидным образом тоже является замкнутым подмножеством типа G_δ в G . Кроме того, множество R инвариантно относительно группы, порожденной элементами $g_1, \dots, g_n$, и, следовательно, относительно замыкания объединения таких групп. Отсюда следует, что P является подмножеством R . Действительно, P инвариантно относительно автоморфизмов, определенных элементами самого множества P , и поэтому

$$P \subset M \subset N \implies g_{i_1}^{-1} g_{i_2} \cdots g_{i_{2n-1}}^{-1} g_{i_{2n}} M g_{i_{2n}}^{-1} g_{i_{2n-1}} \cdots g_{i_2}^{-1} g_{i_1} \in M \subset N.$$

Таким образом, R – замкнутый нормальный делитель в N , являющийся замкнутым G_δ -множеством в N . Из [10; теорема 2.11] следует, что R – псевдокомпактная группа. Тогда из [10; замечание 2.7] вытекает, что факторгруппа

N/R компактна. Так как $R - G_\delta$ -множество в G , то N/R – сепарабельная (удовлетворяющая второй аксиоме счетности) компактная метризуемая группа. Заметим, что подгруппа R инвариантна относительно всех автоморфизмов группы N , порожденных элементами подгруппы Q . Следовательно, семейство QR элементов вида qr , $q \in Q$, $r \in R$, является подгруппой, инвариантной относительно всех автоморфизмов, определяемых элементами подгрупп Q и R . Рассмотрим группу $H = QR$. По построению эта группа содержит семейство элементов g_m , $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим тогда семейство таких элементов $h \in H$, что $\pi(h)\zeta \equiv \zeta$. Переходя к подпространству векторов в E , которые остаются на месте под действием всех элементов нормального делителя R (напомним, что мы уже знаем, что структура слабо непрерывных представлений группы R совпадает со структурой слабо непрерывных представлений ее компактного пополнения Вейля), мы получаем слабо непрерывное представление факторгруппы H/R в метризуемом пространстве R -инвариантных векторов. Это представление слабо непрерывно, но не сильно непрерывно.

Заметим, что в приведенной выше постановке группа H/R метризуема и сепарабельна и пространство представления тоже метризуемо (т.е. пространство, порожденное орбитой вектора ζ) и тоже сепарабельно (поскольку оно слабо сепарабельно по построению). Наконец, по построению полученное представление слабо непрерывно, но не сильно непрерывно. Но существование такого представления противоречит утверждению, полученному в первой части доказательства леммы 10 статьи Брауна [1; ч. 1] (т.е. противоречит “сепарабельной” части утверждения этой леммы). Это завершает доказательство теоремы 3.

Заметим, что аргументация Брауна, на которую мы неоднократно ссылались в доказательстве, основана на борелевских соображениях (ср. [39]–[42]), а не на свойствах измеримости. Кроме того, сильно измеримые функции в локально выпуклых пространствах общего вида образуют развитую иерархию (см., например, [43]), работа с которой требует значительных предварительных усилий.

В заключение параграфа приведем одно из простейших и важнейших следствий теоремы 3, которое непосредственно вытекает из этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – локально псевдокомпактная топологическая группа, E – квазиполное бочечное локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E , а π – слабо непрерывное представление G в пространстве E , причем π локально слабо ограничено (т.е. образ $\pi(U)$ некоторой окрестности U единицы в G является слабо ограниченным множеством в $\mathcal{L}(E)$). Тогда π – сильно непрерывное представление G в E .

§ 8. Заключительные замечания

Отметим, что если представление некомпактной группы в “хорошем” топологическом векторном пространстве (и даже в гильбертовом пространстве) имеет такое инвариантное подпространство, что представления в этом подпространстве и в соответствующем факторпространстве, скажем, сильно непрерывны, то все представление не обязательно слабо или сильно непрерывно. Соот-

ветствующий пример, приведенный Брауном [1], использует двумерное треугольное представление аддитивной группы вещественных чисел с единицами на диагонали и разрывным аддитивным характером в наддиагональной клетке. Поэтому “условие (5)” статьи [1] или его аналог – локальная эквинепрерывность – являются существенными условиями слабой непрерывности.

Отметим также, что мы считаем слабо непрерывное представление заданным и не обсуждаем здесь условий существования таких представлений (так называемой представимости, т.е. существования представлений с теми или иными алгебраическими или топологическими свойствами). Существен результат Телемана [44], утверждающий, что любая хаусдорфова топологическая группа имеет точное слабо непрерывное представление в банаховом пространстве. Известен и следующий критерий “рефлексивной представимости” (полученный с помощью результатов статей [45] и [46]), похожий по форме на критерий конечномерной представимости топологической группы в терминах ее непрерывного вложения в компактную группу: хаусдорфова топологическая группа имеет достаточно много непрерывных представлений (т.е. семейство представлений, разделяющее элементы группы) в *рефлексивных* банаховых пространствах тогда и только тогда, когда она допускает непрерывное вложение в компактную полутопологическую полугруппу [47]. Но проблема “унитарной представимости” безусловно нетривиальна за пределами применимости теоремы Гельфанда–Райкова, и необходимые и достаточные условия существования достаточно большого семейства непрерывных представлений в *гильбертовых* пространствах еще неизвестны (в связи с этим есть интересный отрицательный результат: группа, вложимая в компактную полутопологическую полугруппу, может не быть унитарно представимой [48], и имеется ряд примеров групп, не имеющих никаких непрерывных унитарных представлений в гильбертовых пространствах [49]). Описание топологических групп, имеющих достаточно много конечномерных унитарных представлений, которыми список неприводимых представлений в гильбертовом пространстве исчерпывается (т.е. все топологически неприводимые унитарные представления этих групп в гильбертовых пространствах конечномерны), приведено в работе [50].

Автор благодарен Лоуренсу Брауну за чрезвычайно полезный комментарий к его работе [1] и А. С. Мищенко за внимание к работе.

Список литературы

- [1] L. G. Brown, “Continuity of actions of groups and semigroups on Banach spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **62**:1 (2000), 107–116.
- [2] K. Thomsen, “Asymptotic homomorphisms and equivariant KK -theory”, *J. Funct. Anal.*, **163**:2 (1999), 324–343.
- [3] K. Thomsen, “Nonstable K -theory for operator algebras”, *K-Theory*, **4**:3 (1991), 245–267.
- [4] J. Cuntz, “Bivariante K -Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern–Connes-Charakter”, *Doc. Math.*, **2** (1997), 139–182.
- [5] J. Cuntz, *Bivariant K -theory and the Weyl algebra*, [arXiv:math.KT/0401295](https://arxiv.org/abs/math.KT/0401295).
- [6] E. J. Beggs, *Pointwise bounded asymptotic morphisms and Thomsen’s non-stable k -theory*, [arXiv:math.OA/0201051](https://arxiv.org/abs/math.OA/0201051).

- [7] A. I. Shtern, "Representations of topological groups in locally convex spaces: continuity properties and weak almost periodicity", *Russian J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 81–108.
- [8] X. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [9] W. W. Comfort, K. A. Ross, "Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups", *Pacific J. Math.*, **16**:3 (1966), 483–496.
- [10] W. W. Comfort, F. J. Trigos-Arrieta, "Locally pseudocompact topological groups", *Topology Appl.*, **62**:3 (1995), 263–280.
- [11] D. Dikranjan, D. Shakhmatov, *Algebraic structure of pseudocompact groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **633**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [12] S. A. Gaal, *Linear analysis and representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [13] M. A. Naimark, A. I. Štern [Shtern], *Theory of group representations*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [14] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1969.
- [15] A. T.-M. Lau, "Amenability of semigroups", *The analytical and topological theory of semigroups*, de Gruyter Exp. Math., **1**, de Gruyter, Berlin, 1990, 313–334.
- [16] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [17] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, Наука, М., 1961.
- [18] C. C. Moore, "Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups. I, II", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 40–63, 64–86.
- [19] M. Krein, V. Šmulian, "On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space", *Ann. of Math. (2)*, **41** (1940), 556–583.
- [20] J. von Neumann, "On complete topological spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 1–20.
- [21] K. de Leeuw, I. Glicksberg, "The decomposition of certain group representations", *J. Anal. Math.*, **15** (1965), 135–192.
- [22] B. E. Johnson, *Cohomology of Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **127**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.
- [23] Ю. И. Любич, *Введение в теорию банаховых представлений групп*, Вища школа, Харьков, 1985.
- [24] M. G. Megrelishvili, "Operator topologies and reflexive representability", *Nuclear groups and Lie groups*, Selected lectures of the workshop (Madrid, Spain, September 1999), Res. Exp. Math., **24**, eds. E. Martin Peinador, J. Nunez Garcia, Helder mann, Lemgo, 2001, 197–208.
- [25] M. G. Megrelishvili, "Fragmentability and continuity of semigroup actions", *Semigroup Forum*, **57**:1 (1998), 101–126.
- [26] L. Egghe, "On the Radon–Nikodym property, and related topics in locally convex spaces", *Lecture Notes in Phys.*, **77** (1978), 77–90.
- [27] R. C. James, "KMP, RNP, and PCP for Banach spaces", *Banach space theory* (Iowa City, IA, 1987), Contemp. Math., **85**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 281–317.
- [28] I. Namioka, "Radon–Nikodym compact spaces and fragmentability", *Mathematika*, **34** (1987), 258–281.
- [29] А. И. Штерн, "Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах", *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 139–156.
- [30] А. И. Штерн, "Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп", *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 908–920.
- [31] S. Antonyan, M. Sanchis, "Extension of locally pseudocompact group actions", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **181** (2002), 239–246.

- [32] A. V. Arhangel'skii, "Moscow spaces, Pestov–Tkačenko problem, and C -embeddings", *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **41**:3 (2000), 585–595.
- [33] M. Sanchis, "Continuous functions on locally pseudocompact groups", *Topology Appl.*, **86**:1 (1998), 5–23.
- [34] L. G. Brown, "Topologically complete groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35**:2 (1972), 593–600.
- [35] Б. А. Пасынков, "Почти метризуемые топологические группы", *Докл. АН СССР*, **161**:2 (1965), 281–284.
- [36] Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Мир, М., 1975.
- [37] M. Valdivia, "Some new results on weak compactness", *J. Funct. Anal.*, **24**:1 (1977), 1–10.
- [38] A. Grothendieck, "Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux", *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 168–186.
- [39] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Subwencji Funduszu Narodowej, Warszawa, 1932.
- [40] K.-H. Neeb, "On a theorem of S. Banach", *J. Lie Theory*, **7**:2 (1997), 293–300.
- [41] K.-H. Neeb, D. Pickrell, "Supplements to the papers entitled: "On a theorem of S. Banach" and "The separable representations of $U(H)$ ", *J. Lie Theory*, **10**:1 (2000), 107–109.
- [42] V. Pestov, *Review of* [40], [MR1473172](#).
- [43] S. S. Khurana, "Pointwise compactness and measurability", *Pacific J. Math.*, **83**:2 (1979), 387–391.
- [44] S. Teleman, "Sur la représentation linéaire des groupes topologiques", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **74** (1957), 319–339.
- [45] N. J. Young, "Periodicity of functionals and representations of normed algebras on reflexive spaces", *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **20**:2 (1976/77), 99–120.
- [46] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pelczynski, "Factoring weakly compact operators", *J. Funct. Anal.*, **17** (1974), 311–327.
- [47] A. I. Shtern, "Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups", *Russian J. Math. Phys.*, **2**:1 (1994), 131–132.
- [48] M. Megrelishvili, "Generalized Heisenberg groups and Shtern's question", *Georgian Math. J.*, **11**:4 (2004), 775–782.
- [49] W. Banaszczyk, *Additive subgroups of topological vector spaces*, Lecture Notes in Math., **1466**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [50] А. И. Штерн, "Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа Γ ", *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 143–160.

А. И. Штерн (A. I. Shtern)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступила в редакцию

25.02.2005