Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера–Шаудера, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:12:07

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов

Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера–Шаудера

В метрике пространства $\varphi(L)$, порожденного непрерывной четной и монотонно возрастающей на $[0, \infty)$ функцией $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, найдены оценки погрешности приближения частными суммами рядов Фабера–Шаудера на классах функций C^1 и W^1H_ω , где $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности.

Библиография: 21 название.

§ 1. Определения и некоторые известные результаты

Система Фабера–Шаудера возникла как первый пример базиса в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$. К настоящему времени получены фундаментальные результаты относительно рядов по данной системе. Большой вклад в изучение этих рядов внес П. Л. Ульянов и его ученики В. А. Матвеев, А. П. Горячев, С. В. Бочкарев, А. С. Логинов.

На единичном отрезке $[0, 1]$ определим двоичные интервалы следующим образом: $\delta_m^k \stackrel{\text{def}}{=} ((k-1)/2^m, k/2^m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ система функций Хаара [1]: $\chi_1(x) \equiv 1$, а при $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2^{k-1}}, \\ -2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2^k}, \\ 0, & \text{если } x \notin \overline{\delta_m^k}, \end{cases}$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ – замыкание множества $\mathcal{M}$. В точках разрыва функции Хаара равны полусумме пределов справа и слева. На концах отрезка $[0, 1]$ они равны своим предельным значениям внутри отрезка.

В 1910 г. Фабер [2] ввел в рассмотрение систему функций $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, где

$$\psi_0(x) \equiv 1, \quad \psi_n(x) = \int_0^x \chi_n(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Пусть $C \stackrel{\text{def}}{=} C[0, 1]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. В работе [2] было показано, что произвольную функцию $f(x) \in C$ можно представить в виде

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \psi_n(x), \quad (2)$$

где равенство понимается в смысле равномерной сходимости ряда, а коэффициенты ряда определяются соотношениями [3]

$$a_0(f) = f(0), \quad a_n(f) = \int_0^1 \chi_n(t) df(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Присутствующий в соотношениях (3) интеграл понимают в смысле Лебега–Стилтьеса. В 1927 г. результат вида (2) был передоказан Шаудером [4] с использованием функций $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, отличающихся от соответствующих функций $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ лишь постоянными множителями.

Через

$$S_n(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} a_0(f) + \sum_{i=1}^n a_i(f) \psi_i(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

обозначим частную сумму n -го порядка ($n \in \mathbb{N}$) разложения (2). Функция $S_n(f, x)$ является ломаной, которая линейна на отрезках $\overline{\delta_{m+1}^i}$, $i = \overline{1, 2k}$, и $\overline{\delta_m^j}$, $j = \overline{k+1, 2m}$, и интерполирует функцию $f(x)$ в точках множества $\mathcal{D}_n$ (см., например, [3], [5]), где

$$\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \cup \{1\}, \quad \mathcal{D}_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{j}{2^m} \right\}_{j=0}^{2^m} \cup \left\{ \frac{2j-1}{2^{m+1}} \right\}_{j=1}^k, \quad n = 2, 3, \dots$$

Пусть Φ есть множество четных конечных неубывающих на $[0, \infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(\infty) = \infty$. Если $\varphi(x) \in \Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначим множество всех измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$, для каждой из которых

$$\int_0^1 \varphi(f(x)) dx < \infty.$$

Для произвольных функций $f_1(x), f_2(x) \in \varphi(L)$ обобщенным φ -расстоянием между ними называют величину [6]

$$\rho_\varphi(f_1, f_2) = \int_0^1 \varphi(f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Для $f(x) \in \varphi(L)$ используем обозначение $\|f\|_{\varphi(L)} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_\varphi(f, 0)$. Если, например, $\varphi(x) = |x|^p$, $1 \leq p < \infty$, то $\varphi(L)$ совпадает с нормированным пространством $L_p \stackrel{\text{def}}{=} L_p[0, 1]$ функций, интегрируемых в p -й степени. В этом случае $\|f\|_{\varphi(L)}$ есть p -я степень нормы $\|f\|_{L_p}$, где

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (5)$$

Если $0 < p < 1$, то величина (5) не является нормой, но мы, тем не менее, сохраним указанное обозначение. При $0 < p < 1$ класс L_p является полным линейным метрическим пространством с метрикой $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_{L_p}^p$.

В работах А. А. Талаляна [7], П. Л. Ульянова [6], [8]–[10] и многих других изучались вопросы представления функций рядами по системе Фабера–Шаудера.

П. Л. Ульянов [8], [9], в частности, доказал, что всякая функция $f(t)$ из класса $\varphi(L)$ представима в виде суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t), \quad c_k \in \mathbb{R},$$

в смысле φ -сходимости, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi \left(f(t) - \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(t) \right) dt = 0$$

тогда и только тогда, когда $\varphi(u+1) = O(\varphi(u))$ при $u \rightarrow \infty$. Аппроксимативные свойства системы (1) также изучали З. Чисельский [3], [11], В. А. Матвеев [5], А. С. Логинов [12] и многие другие. Для произвольной функции $f(x) \in C$ З. Чисельский получил оценки сверху величин $\|f - S_n(f)\|_C$, $n \in \mathbb{N}$, выраженные соответственно через модуль непрерывности первого порядка [11]

$$\omega(f, t) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [0, 1], |x_1 - x_2| \leq t\}$$

и модуль непрерывности второго порядка [3]

$$\omega_2(f, t) = \sup \left\{ \left| f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right| : x_1, x_2 \in [0, 1], |x_1 - x_2| \leq t \right\}.$$

В. А. Матвеев [5] усилил результат З. Чисельского [3] и доказал неравенства

$$\|f - S_n(f)\|_C \leq 4\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

имеющие место для любой функции $f(x) \in C$. А. С. Логинов [12] показал, что для произвольной функции $f(x) \in C$ справедливы соотношения

$$\|f - S_n(f)\|_C \leq \frac{3}{2} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

которые являются уточнением одного результата З. Чисельского [11].

§ 2. Формулировка основных результатов

Под $C^1 \stackrel{\text{def}}{=} C^1[0, 1]$ понимаем класс непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций. Пусть $\omega(t)$, $0 \leq t \leq 1$, – произвольный модуль непрерывности, а $W^1 H_\omega$ есть класс функций $f(x) \in C^1$, у которых модуль непрерывности первой производной $\omega(f^{(1)}, t) \leq \omega(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Введем следующие вспомогательные функции:

$$\Omega(\omega(g); a, b; x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{cases} \omega(g, a + b - 2x), & \text{если } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ -\omega(g, 2x - a - b), & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x \Omega(\omega(g); a, b; t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (7)$$

В случае, когда $g(x) \equiv \omega(x)$, вместо $\Omega(\omega(g); a, b; x)$ и $\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x)$ на основании (6), (7) и [13; гл. 2, § 1] будем писать соответственно $Q(\omega; a, b; x)$ и $\tilde{Q}(\omega; a, b; x)$. Напомним, что функции вида (6) впервые ввел в рассмотрение С. М. Никольский [14].

Обозначим $\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{\varphi(L)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)} : f(x) \in W^1 H_\omega\}$.

В настоящей статье доказаны утверждения, посвященные получению оценок погрешности приближения функций из классов $W^1 H_\omega$ и C^1 частными суммами их рядов Фабера–Шаудера в метрике пространства $\varphi(L)$. Основные результаты опубликованы авторами без доказательства в работах [15], [16].

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полусегменте $[0, \infty)$, $h \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-(m+1)}$. Тогда для любого $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{\varphi(L)} \leq 2k \int_0^h \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, h; x)) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, 2h; x)) dx. \quad (8)$$

Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то в (8) имеет место знак равенства.

Из данной теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi(x) = |x|^p$, $0 < p < \infty$, и $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любого $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливо равенство

$$\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{L_p} = \left\{ 2k \int_0^h \tilde{Q}^p(\omega; 0, h; x) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \tilde{Q}^p(\omega; 0, 2h; x) dx \right\}^{1/p}. \quad (9)$$

В результате предельного перехода при $p \rightarrow \infty$ в соотношении (9) получим оценку погрешности аппроксимации класса $W^1 H_\omega$ частными суммами рядов Фабера–Шаудера в метрике пространства C .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\omega(t)$ есть выпуклый вверх модуль непрерывности, то имеют место равенства

$$\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_C = \frac{1}{4} \begin{cases} \int_0^h \omega(x) dx, & \text{если } n = 2^{m+1}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \\ \int_0^{2h} \omega(x) dx, & \text{если } n = 2^m + k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, 2^m - 1}. \end{cases}$$

Рассмотрим экстремальную характеристику

$$\mathcal{L}_n(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \frac{\|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)}}{2k \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{4} \omega(f^{(1)}, h)\right) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi\left(\frac{x}{4} \omega(f^{(1)}, 2h)\right) dx} : \right. \\ \left. f(x) \in C^1, f(x) \not\equiv \text{const} \right\}, \quad (10) \\ n = 2^m + k, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad k = \overline{1, 2^m}.$$

Следующая теорема позволяет на классе C^1 оценить погрешность приближения функций $f(x)$ частными суммами $S_n(f, x)$ в метрике пространства $\varphi(L)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$. Тогда для любого $n = 2, 3, \dots$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_n(\varphi) = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\varphi(x) = |x|^p$, $0 < p < \infty$, и $f(x) \in C^1$. Тогда для произвольного $n = 2^m + k$, $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_{L_p} \leq \frac{h^{1+1/p}}{4(p+1)^{1/p}} \{2k\omega^p(f^{(1)}, h) + (2^m - k)2^{p+1}\omega^p(f^{(1)}, 2h)\}^{1/p}, \quad (11)$$

которое является неумлучшаемым на классе C^1 .

Устремляя в (11) p к ∞ , получаем оценку погрешности приближения любой функции $f(x)$ из класса C^1 частными суммами $S_n(f, x)$ в метрике пространства C .

СЛЕДСТВИЕ 4. Для произвольной функции $f(x) \in C^1$ имеет место неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_C \leq \frac{h}{2} \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(f^{(1)}, h), & \text{если } n = 2^{m+1}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \\ \omega(f^{(1)}, 2h), & \text{если } n = 2^m + k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, 2^m - 1}, \end{cases}$$

неумлучшаемое на всем классе C^1 .

§ 3. Одно вспомогательное утверждение

Нам потребуется один результат, который является в определенном смысле распространением леммы 6.3.2 из работы [17; гл. 6, § 6.1] на случай пространства $\varphi(L)$.

ЛЕММА 1. Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\int_a^b g(x) dx = 0$ и функция $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$. Тогда для функции $G(g; a, b; x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x g(t) dt$, где $a \leq x \leq b$, справедливо неравенство

$$\int_a^b \varphi(G(g; a, b; x)) dx \leq \int_a^b \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x)) dx. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем провести необходимые рассуждения, напомним ряд определений и понятий, связанных с перестановками функций [17; гл. 3, § 3.2]. Пусть $f(x)$ – суммируемая на отрезке $[a, b]$ функция и при любом фиксированном $y \geq 0$ $l_y(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [a, b] : |f(x)| \geq y\}$. Полагаем $m(f, y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{mes } l_y(f)$. Очевидно, что $m(f, y)$ является невозрастающей функцией. Перестановкой функции $f(x)$ на $[a, b]$ называют функцию $y = r(f, x) = r(f; a, b; x)$,

$0 \leq x \leq b-a$, обратную к функции $x = m(f, y)$. Если функция $m(f, y)$ разрывна и не является строгой монотонной, то для корректности определения перестановки $r(f, x)$ график $m(f, y)$ исправляют определенным образом (см., например, [17; гл. 3, § 3.2]). В силу монотонного возрастания функции $\varphi(x)$ на $[0, \infty)$ и ее четности на $\mathbb{R}$ для любого $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x : 0 < x < b-a, r(\varphi(f), x) > y\} &= \text{mes}\{x : a < x < b, \varphi(f(x)) > y\} \\ &= \text{mes}\{x : a < x < b, |f(x)| > \varphi^{-1}(y)\} \\ &= \text{mes}\{x : 0 < x < b-a, \varphi(r(f, x)) > y\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя определение интеграла Лебега и формулу (13), имеем

$$\int_a^b \varphi(f(x)) dx = \int_0^{b-a} r(\varphi(f), x) dx = \int_0^{b-a} \varphi(r(f, x)) dx. \quad (14)$$

В силу леммы 6.3.2 из [17; гл. 6, § 6.1] запишем неравенство

$$r(G(g); a, b; x) \leq r(\tilde{\Omega}(\omega(g)); a, b; x), \quad 0 \leq x \leq b-a. \quad (15)$$

Полагая в (14) $f(x) \equiv G(g; a, b; x)$ и используя (15), получаем, что

$$\int_a^b \varphi(G(g; a, b; x)) dx \leq \int_a^b \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x)) dx. \quad (16)$$

Лемма 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in W^1 H_\omega$. Поскольку функция Хаара $\chi_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет на отрезке $[0, 1]$ конечное изменение, а $f(x)$ абсолютно непрерывна на нем, то формулу (3) запишем в виде

$$a_n(f) = \int_0^1 \chi_n(t) f^{(1)}(t) dt. \quad (17)$$

Используя (1), (4) и (17), получаем, что

$$S_n(f, x) = f(0) + \int_0^x \left\{ \int_0^1 K_n(t, \tau) f^{(1)}(t) dt \right\} d\tau, \quad (18)$$

где

$$K_n(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \chi_i(t) \chi_i(\tau). \quad (19)$$

Из определения функций $\chi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и (19) следует, что [18; гл. 1, § 1] $K_1(t, \tau) = 1$ при $0 \leq t, \tau \leq 1$, а при $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$, $K_n(t, \tau) = h^{-1}$ в квадратах $(i-1)h < t, \tau < ih$, $i = \overline{1, 2k}$, и $K_n(t, \tau) = (2h)^{-1}$ в квадратах $(j-1) \times 2h < t, \tau < j2h$, $j = \overline{k+1, 2^m}$. На границе каждого из указанных квадратов значения функции $K_n(t, \tau)$ равны среднему арифметическому своих значений внутри и вне квадрата. Во всех остальных точках $K_n(t, \tau) = 0$.

В силу (18) имеем

$$f(x) - S_n(f, x) = \int_0^x F(\tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

где

$$F(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} f^{(1)}(\tau) - \int_0^1 K_n(t, \tau) f^{(1)}(t) dt, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Учитывая, что на множестве $[0, 1] \setminus \mathcal{D}_n$ справедливо представление

$$F(\tau) = \begin{cases} f^{(1)}(\tau) - \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f^{(1)}(t) dt, & \text{если } \tau \in \delta_{m+1}^i, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ f^{(1)}(\tau) - \frac{1}{2h} \int_{(j-1)2h}^{j2h} f^{(1)}(t) dt, & \text{если } \tau \in \delta_m^j, \quad j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (21)$$

из очевидных соображений имеем

$$\int_{(i-1)h}^{ih} F(\tau) d\tau = 0, \quad i = \overline{1, 2k}, \quad \int_{(j-1)2h}^{j2h} F(\tau) d\tau = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \quad (22)$$

Используя введенные в лемме 1 обозначения и соотношения (22), перепишем формулу (20) в следующем виде:

$$f(x) - S_n(f, x) = \begin{cases} G(F; (i-1)h, ih; x), & \text{если } x \in \overline{\delta_{m+1}^i}, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ G(F; (j-1)2h, j2h; x), & \text{если } x \in \overline{\delta_m^j}, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \end{cases} \quad (23)$$

С учетом (23) запишем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)} &= \sum_{i=1}^{2k} \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(G(F; (i-1)h, ih; x)) dx \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{(j-1)2h}^{j2h} \varphi(G(F; (j-1)2h, j2h; x)) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим отрезок $\overline{\delta_{m+1}^i}$ и доопределим на его концах функцию $F(\tau)$ по непрерывности. Из (21), (22) следует, что функция $F(\tau)$ на отрезке $\overline{\delta_{m+1}^i}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда в силу (12) имеем

$$\int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(G(F; (i-1)h, ih; x)) dx \leq \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (i-1)h, ih; x)) dx. \quad (25)$$

Рассматривая отрезок $\overline{\delta_m^j}$, на основании аналогичных рассуждений получаем, что

$$\int_{(j-1)2h}^{j2h} \varphi(G(F; (j-1)2h, j2h; x)) dx \leq \int_{(j-1)2h}^{j2h} \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (j-1)2h, j2h; x)) dx. \quad (26)$$

Из (24)–(26) имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)} &\leq \sum_{i=1}^{2k} \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (i-1)h, ih; x)) dx \\ &+ \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{(j-1)2h}^{j2h} \varphi(\tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (j-1)2h, j2h; x)) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \Delta((i-1)h, ih; x) &\stackrel{\text{def}}{=} Q(\omega; (i-1)h, ih; x) - \Omega(\omega(f^{(1)}); (i-1)h, ih; x), \\ x &\in \overline{\delta_{m+1}^i}, \quad i = \overline{1, 2k}. \end{aligned} \quad (28)$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Delta((i-1)h, ih; (i-1/2)h) = 0$. В силу определения класса $W^1 H_\omega$ для $0 \leq t \leq 1$ имеем $\omega(f^{(1)}, t) \leq \omega(t)$. Очевидно, что при $(i-1)h \leq x \leq (i-1/2)h$ из (28) следует неравенство

$$\Delta((i-1)h, ih; x) \geq 0. \quad (29)$$

Используя данные в §2 определения функций $Q(\cdot)$ и $\Omega(\cdot)$, а также (28), получаем, что

$$\Delta\left((i-1)h, ih; \left(i - \frac{1}{2}\right)h - t\right) = -\Delta\left((i-1)h, ih; \left(i - \frac{1}{2}\right)h + t\right), \quad (30)$$

где $0 \leq t \leq h/2$. Из (29), (30) при $(i-1)h \leq x \leq ih$ следует неравенство

$$\int_{(i-1)h}^x \Delta((i-1)h, ih; t) dt \geq 0.$$

Воспользовавшись приведенными в §2 определениями функций $\tilde{Q}(\cdot)$ и $\tilde{\Omega}(\cdot)$, при $(i-1)h \leq x \leq ih$, $i = \overline{1, 2k}$, имеем

$$\tilde{Q}(\omega; (i-1)h, ih; x) \geq \tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (i-1)h, ih; x). \quad (31)$$

Аналогичным образом показываем справедливость неравенства

$$\tilde{Q}(\omega; (j-1)2h, j2h; x) \geq \tilde{\Omega}(\omega(f^{(1)}); (j-1)2h, j2h; x) \quad (32)$$

для $(j-1)2h \leq x \leq j2h$, $j = \overline{k+1, 2^m}$.

Учитывая соотношения (31), (32) и возрастающий характер функции $\varphi(x)$ на полусегменте $[0, \infty)$, из (27) получаем, что

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)} &\leq \sum_{i=1}^{2k} \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(\tilde{Q}(\omega; (i-1)h, ih; x)) dx \\ &+ \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{(j-1)2h}^{j2h} \varphi(\tilde{Q}(\omega; (j-1)2h, j2h; x)) dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Из геометрических соображений, основанных на определении функций $Q(\cdot)$ и $\tilde{Q}(\cdot)$, и из (33) имеем оценку сверху

$$\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{\varphi(L)} \leq 2k \int_0^h \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, h; x)) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, 2h; x)) dx,$$

где $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности.

Пусть $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности. Рассмотрим функцию [19]

$$q_*(\omega, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-1)^\nu Q(\omega; (\nu - 1)h, \nu h; x), & \text{если } x \in \overline{\delta_{m+1}^\nu}, \nu = \overline{1, 2k}, \\ (-1)^{\mu-k} Q(\omega; (\mu - 1)2h, \mu 2h; x) + \frac{\omega(2h) - \omega(h)}{2}, & \text{если } x \in \overline{\delta_m^\mu}, \mu = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (34)$$

которая принадлежит классу $H_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \in C : \omega(f, t) \leq \omega(t) \quad \forall t \in [0, 1]\}$. Очевидно, что функция

$$Q_*(\omega, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x q_*(\omega, t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (35)$$

является элементом класса $W^1 H_\omega$. Из определения функции $Q(\cdot)$ и (34), (35) имеем

$$\begin{cases} Q_*(\omega, \nu h) = 0, & \nu = \overline{0, 2k}, \\ Q_*(\omega, \mu 2h) = (\omega(2h) - \omega(h))(\mu - k)h, & \mu = \overline{k+1, 2^m}. \end{cases} \quad (36)$$

Полагая в (4) $f(x) \equiv Q_*(\omega, x)$ и учитывая (36), получаем, что

$$S_n(Q_*(\omega), x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2kh, \\ \frac{(\omega(2h) - \omega(h))(x - 2kh)}{2}, & \text{если } 2kh \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (37)$$

Учитывая (34)–(37), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{\varphi(L)} &\geq \|Q_*(\omega) - S_n(Q_*(\omega))\|_{\varphi(L)} \\ &= 2k \int_0^h \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, h; x)) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi(\tilde{Q}(\omega; 0, 2h; x)) dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Сопоставив полученную ранее оценку сверху величины $\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{\varphi(L)}$ с ее оценкой снизу (38), убеждаемся в том, что для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\cdot)$ соотношение (8) обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Отметим, что если, например, $\varphi(x) = |x|$, то, используя процедуру вычисления интегралов по частям, для выпуклого вверх модуля непрерывности получаем, что

$$\mathcal{E}_n(W^1 H_\omega)_{L_1} = \frac{k}{2} \int_0^h x \omega(x) dx + \frac{2^m - k}{4} \int_0^{2h} x \omega(x) dx.$$

§ 5. Доказательство теоремы 2

Используя принятые в § 3 обозначения и сведения из работы [20; гл. 5, § 5.2], отметим, что график перестановки $r(\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x))$ лежит ниже графика прямой $\Gamma = \gamma(x)$, которая определяется условиями $\gamma(b-a) = 0$ и $\gamma^{(1)}(x) = -\omega(g, b-a)/4$, т.е.

$$r(\tilde{\Omega}(\omega(g); a, b; x)) \leq \frac{\omega(g, b-a)(b-a-x)}{4}, \quad 0 \leq x \leq b-a. \quad (39)$$

Из (14)–(16) и (39) следует соотношение

$$\int_a^b \varphi(G(g; a, b; x)) dx \leq \int_0^{b-a} \varphi\left(\frac{x}{4} \omega(g, b-a)\right) dx. \quad (40)$$

Для произвольной функции $f(x) \in C^1$ на основании (21)–(24) и (40), где $g \equiv F$, получаем, что

$$\|f - S_n(f)\|_{\varphi(L)} \leq 2k \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{4} \omega(f^{(1)}, h)\right) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi\left(\frac{x}{4} \omega(f^{(1)}, 2h)\right) dx.$$

Из данного неравенства и приведенного в (10) определения величины $\mathcal{L}_n(\varphi)$ следует оценка сверху

$$\mathcal{L}_n(\varphi) \leq 1. \quad (41)$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{L}_n(\varphi)$ рассмотрим функцию

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_0^x \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi t}{h}\right) dt, & \text{если } -\delta \leq x \leq 2kh, \\ \int_{2kh}^x \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{2h}(t - 2kh)\right) dt, & \text{если } 2kh \leq x \leq 1 + \delta, \end{cases} \quad (42)$$

где δ , $0 < \delta \ll h$, – достаточно малое число. Нетрудно проверить, что $\Psi(x)$ является ломаной линией. На отрезке $[0, 1]$ оси абсцисс ее вершины проектируются в точки $(i-1/2)h$, $i = \overline{1, 2k}$, и $(2j-1)h$, $j = \overline{k+1, 2^m}$. При этом

$$\Psi(ih) = 0, \quad i = \overline{0, 2k}, \quad \Psi(2jh) = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \quad (43)$$

При малых H , $0 < H < \delta$, для $\Psi(x)$ запишем функцию Стеклова

$$\Psi_H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2H} \int_{x-H}^{x+H} \Psi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (44)$$

которая принадлежит классу C^1 , $\Psi_H(x) \not\equiv \text{const}$. Из (42), (43) следует, что

$$\Psi_H(ih) = 0, \quad i = \overline{0, 2k}, \quad \Psi_H(2jh) = 0, \quad j = \overline{k+1, 2^m}. \quad (45)$$

При этом справедливы равенства

$$\begin{cases} \Psi_H\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h - x\right) = \Psi_H\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h + x\right), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{h}{2}, \quad i = \overline{1, 2k}, \\ \Psi_H((2j-1)h - x) = \Psi_H((2j-1)h + x), & \text{если } 0 \leq x \leq h, \quad j = \overline{k+1, 2^m}, \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \Psi_H(ih - x) = -\Psi_H(ih + x), & \text{если } 0 \leq x \leq h, \ i = \overline{1, 2k-1}, \\ \Psi_H(2jh - x) = -\Psi(2jh + x), & \text{если } 0 \leq x \leq 2h, \ j = \overline{k+1, 2^m-1}. \end{cases} \quad (47)$$

Учитывая (45) и отмеченное в § 1 свойство интерполяции функции f частными суммами (4) ее ряда Фабера–Шаудера (2), для любого $x \in [0, 1]$ имеем $S_n(\Psi_H, x) \equiv 0$. Используя (46), (47), получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Psi_H - S_n(\Psi_H)\|_{\varphi(L)} &= \|\Psi_H\|_{\varphi(L)} \\ &= 2k \int_0^h \varphi(\Psi_H(x)) dx + (2^m - k) \int_{2kh}^{2(k+1)h} \varphi(\Psi_H(x)) dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку [21; гл. 5, § 5.2] $(\Psi_H(x))^{(1)} = \Psi_H^{(1)}(x) \equiv (\Psi^{(1)}(x))_H$, то в силу (42) имеем

$$\omega(\Psi_H^{(1)}, h) = \omega(\Psi_H^{(1)}, 2h) = 2. \quad (49)$$

Из (42) и (44) получаем следующее равенство:

$$\int_0^h \varphi(\Psi_H(x)) dx = \int_0^{h/2-H} \varphi(x) dx + \int_{h/2-H}^{h/2+H} \varphi(\Psi_H(x)) dx + \int_{h/2+H}^h \varphi(h-x) dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^h \varphi(\Psi_H(x)) dx = \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx + \varepsilon_1(H), \quad (50)$$

где $\varepsilon_1(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$. С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что

$$\int_{2kh}^{2(k+1)h} \varphi(\Psi_H(x)) dx = \int_0^{2h} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx + \varepsilon_2(H), \quad (51)$$

где $\varepsilon_2(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$. Используя (48)–(51), получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_{n,\varphi}(\Psi_H) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\Psi_H - S_n(\Psi_H)\|_{\varphi(L)}}{2k \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{4}\right) \omega(\Psi_H^{(1)}, h) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi\left(\frac{x}{4}\right) \omega(\Psi_H^{(1)}, 2h) dx} \\ &= 1 + \frac{2k\varepsilon_1(H) + (2^m - k)\varepsilon_2(H)}{2k \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dx} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \varepsilon(H). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$, то для любого $\delta > 0$ существует такое положительное число $H_* = H_*(\delta)$, что для функции Стеклова $\Psi_{H_*}(x) \in C^1$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_n(\varphi) \geq \Delta_{n,\varphi}(\Psi_{H_*}) > 1 - \delta.$$

Используя это соотношение, неравенство (41) и определение точной верхней грани, получаем требуемое равенство $\mathcal{L}_n(\varphi) = 1$, чем и завершим доказательство теоремы 2.

Список литературы

- [1] Б. И. Голубов, “О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1271–1296.
- [2] G. Faber, “Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar”, *Deutsche Math.-Ver.*, **19** (1910), 104–112.
- [3] Z. Ciesielski, “On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{(0,1)}$ ”, *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. Astron. Phys.*, **7**:4 (1959), 227–232.
- [4] J. Schauder, “Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen”, *Math. Z.*, **26** (1927), 47–65.
- [5] В. А. Матвеев, “О рядах по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **2**:3 (1967), 267–278.
- [6] П. Л. Ульянов, “Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ ”, *УМН*, **27**:2 (1972), 3–52.
- [7] А. А. Талалян, “Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера”, *Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук*, **12**:3 (1959), 3–14.
- [8] П. Л. Ульянов, “О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **7**:4 (1970), 431–442.
- [9] П. Л. Ульянов, “Представление функций класса $\varphi(L)$ рядами”, *Труды МИАН*, **112**:1 (1971), 372–384.
- [10] П. Л. Ульянов, “Некоторые вопросы теории ортогональных и биортогональных рядов”, *Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук*, **6** (1965), 11–13.
- [11] Z. Ciesielski, “Properties of the orthonormal Franklin system”, *Studia Math.*, **23** (1963), 141–157.
- [12] А. С. Логинов, “Приближение непрерывных функций ломаными”, *Матем. заметки*, **6**:2 (1969), 149–160.
- [13] И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, ЛГУ, Л., 1977.
- [14] С. М. Никольский, “Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности”, *Докл. АН СССР*, **52**:3 (1946), 191–194.
- [15] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Некоторые вопросы приближения частными суммами рядов Фабера–Шаудера в метрике пространства $\varphi(L)$ ”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2004, № 10, 82–85.
- [16] А. Н. Щитов, С. Б. Вакарчук, “О приближении функций полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов по системе Фабера–Шаудера”, *Тезисы докладов международной конференции памяти В. Я. Буняковского (1804–1889)*, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 2004, 136–137.
- [17] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [18] И. М. Соболев, *Квадратурные формулы и функции Хаара*, Наука, М., 1969.
- [19] Н. П. Хорошко, “О наилучшем приближении в метрике L некоторых классов функций полиномами по системе Хаара”, *Матем. заметки*, **6**:1 (1969), 47–53.
- [20] Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения*, Наука, М., 1984.
- [21] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.

С. Б. Вакарчук (S. B. Vakarchuk)

Академия таможенной службы Украины,
г. Днепропетровск

E-mail: academy@amsu.dnp.ukrpack.net

Поступила в редакцию

29.03.2005

А. Н. Щитов (A. N. Shchitov)

Академия таможенной службы Украины,
г. Днепропетровск

E-mail: academy@amsu.dnp.ukrpack.net