Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Зотьев, Контактные вырождения замкнутых 2-форм, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 4, 47–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:20:59

УДК 514.745.4+514.154+514.763.337+514.763.34

Д. Б. Зотьев

Контактные вырождения замкнутых 2-форм

Пусть замкнутая 2-форма вырождается в точках гиперповерхности и является невырожденной вне ее. В окрестности особенности, которая при некоторых естественных условиях называется контактной, исследовано предельное поведение гамильтоновых полей и найден канонический вид формы (теорема Дарбу). Установлена связь с регулярными структурами Ли. Изучены свойства интегрируемых систем на торах Лиувилля, содержащих контактные вырождения.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Многообразие N , на котором задана невырожденная замкнутая 2-форма Ω , называется симплектическим. Ограничение ω формы Ω на четномерное подмногообразие $M \subset N$ в общем случае почти всюду на M невырождено. При этом в некоторых точках $\rho \in M$ возможно вырождение ω_ρ . Это следует из теоремы Э. Картана, согласно которой

$$\dim \operatorname{Ker}(\omega) = 2m - \operatorname{rk}(\{f_i, f_j\}), \quad 1 \leq i, j \leq 2m,$$

где независимые уравнения $f_1 = 0, \dots, f_{2m} = 0$ определяют вложение $M \subset N$ [1]. Такие особенности могут возникать при ограничении гамильтоновых систем на инвариантные подмногообразия. Примером являются классы Аппельрота движений волчка Ковалевской в двойном поле. Класс I найден в известной работе [2], недавно были открыты классы II, III, IV и сингулярный класс V, не имеющий классического аналога [3].

Пусть замкнутая почти всюду невырожденная 2-форма ω задана на $2n$ -мерном многообразии M и

$$\mathcal{Z}_\rho = \operatorname{Ker}(\omega_\rho) = \{v \in T_\rho M \mid i_v \omega_\rho = 0\}, \quad \Theta = \{\rho \in M \mid \mathcal{Z}_\rho \neq \emptyset\}. \quad (1.1)$$

Заметим, что $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$. В дальнейшем $\Theta \subset M$ непусто и имеет нулевую меру Лебега.

Вырожденные особенности дифференциальных форм исследованы в известной работе Ж. Мартине [4]. В частности, изучен случай общего положения для замкнутых 2-форм. Он характеризуется тем, что

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2, \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho U, \quad d^2(\det \omega(\mathbf{x}))_\rho \neq 0, \quad (1.2)$$

где $U \subset \Theta$ – гладкая гиперповерхность в M и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ – произвольные локальные координаты. Тогда в окрестности точки $\rho \in U$ существуют координаты $(x_1, x_2, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i. \quad (1.3)$$

Заметим, что (1.2) эквивалентно (1.3). В [4] также исследованы типичные вырождения замкнутых 2-форм на $\mathbb{R}^4$, когда Θ является гладкой гиперповерхностью, $\dim \mathcal{Z}_\rho \leq 2$ и найдется такая гладкая кривая $\gamma \subset \Theta$, что

$$\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho \Theta, \quad \rho \in \Theta \setminus \gamma, \quad \mathcal{Z}_\rho \subset T_\rho \Theta, \quad \rho \in \gamma.$$

Если $\rho \in \gamma$, $T_\rho \gamma \not\subset \mathcal{Z}_\rho$, то в окрестности ρ существуют координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) , в которых

$$\omega = d\left(x_1 - \frac{x_3^2}{2}\right) \wedge dx_2 + d\left(x_1 x_3 \pm x_2 x_4 - \frac{x_3^3}{3}\right) \wedge dx_4.$$

За исключением результатов настоящей статьи, в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$ о локальной структуре замкнутой 2-формы ничего не известно. Особенности пуассоновых структур изучены лучше, поскольку при вырождении матрицы $(h^{ij}) = (\{x_i, x_j\})$ все гамильтоновы поля $(\text{sgrad } f)^i = \sum_j h^{ij} \partial f / \partial x_j$ остаются корректно определенными. В окрестности каждой точки ρ матрица Пуассона (h^{ij}) приводится к блочно-диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где A – матрица и $A(\rho) = 0$. Это теорема Вайнштейна о локальном расщеплении [5], [6]. Случаю $\dim A(\rho) = 0 \times 0$ отвечает классическая теорема Дарбу [1].

В точке $\rho \in \Theta$ косые градиенты $\text{sgrad } f$ и скобки Пуассона $\{f, g\} = dg(\text{sgrad } f)$, как правило, не определены. Неизвестны общие условия существования предела

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} \text{sgrad } f(y), \quad (1.5)$$

а также локальных координат, в которых матрица (ω_{ij}) или $(h^{ij}) = (\omega_{ij})^{-1}$ имеет вид (1.4). В работе автора [7] исследован случай, когда $\rho \in \Theta$ удовлетворяет некоторому условию правильности. В настоящей статье такие точки называются *контактными*. Критерий существования предела (1.5), гладко зависящего от ρ , имеет вид

$$df(\mathcal{Z}_y) = 0, \quad y \in \Theta \cap O(\rho), \quad (1.6)$$

где $O(\rho)$ – достаточно малая окрестность ρ [7]. Вопрос о корректной определенности гамильтоновых полей в точках подмножества $\{\det \omega = 0\}$ впервые исследовал С. Пневматикос, сформулировавший критерий (1.6) в [8]. Тожество $df(\text{Ker}(\omega)) \equiv 0$ также встречается в [9] и [10] как условие определенности скобки Пуассона $\{f, g\}$ для всех g в ситуации, когда $\text{rk}(\omega_\rho) = \text{const} < \dim M$ на M . В общем случае доказано только следующее. При условии $df(\mathcal{Z}_\rho) = 0$ существует такой вектор v_ρ , определенный по модулю $\mathcal{Z}_\rho$, что $\omega(u, v_\rho) = df(u)$ для всех $u \in T_\rho M$ [9]. Данное свойство v_ρ характеризует вектор $\text{sgrad } f(\rho)$. Однако для корректной определенности поля $\text{sgrad } f$ или, что эквивалентно, скобки $\{f, g\}$ для всех g условия $df(\text{Ker}(\omega)) \equiv 0$ в общем недостаточно. С. Пневматикос доказал его достаточность для форм локального вида

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} x_{\tau(\alpha, \beta)} dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i, \quad (1.7)$$

где $\tau(\alpha, \beta) \in \{1, \dots, 2k\}$ [11]. Таковы, например, все формы с особенностями общего положения (1.2). Несмотря на то что в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ контактная точка ρ также имеет общее положение, введенный в [11] класс *singulières gnriques* (особенностей форм вида (1.7)) выглядит более естественно. Однако при $k > 1$ неизвестно, какие замкнутые 2-формы заменой координат приводят к виду (1.7).

В окрестности контактной точки множество Θ является гладкой гиперповерхностью, на которой $\dim \mathcal{Z}_\rho = \text{const}$. Таким образом, мы исследуем вырождения, которые в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$ относятся к некоторому специальному классу. Он органично связан с регулярными многообразиями Ли [5], [12] и, в частности, порождает все точные контактные многообразия.

Результаты прошлых лет, полученные автором, отражены в теоремах 1, 2 (см. § 4). Настоящая статья продолжает эти исследования. Найден канонический вид замкнутой 2-формы в окрестности контактной точки (§ 4, теорема 3). Установлена связь новой теории с контактной геометрией и структурами Ли (§ 5, теорема 4 и ее следствия). Исследовано предельное поведение гамильтоновых потоков общего положения (§ 6, теорема 5). В интегрируемом случае доказано, что нерезонансные потоки квазипериодичны на торах Лиувилля, состоящих из контактных точек (§ 6, теорема 6). Приводятся различные примеры, в том числе из электродинамики и общей теории относительности (§ 3, примеры 3, 4, 8).

Автор глубоко признателен А. В. Болсинову за постоянное внимание к его работе, советы и критические замечания.

§ 2. Контактная геометрия

В дальнейшем все дифференцируемые объекты предполагаются гладкими. Подмногообразием называется гомеоморфно вложенное многообразие (гладкая поверхность).

Пусть $n > 0$. Многообразие K размерности $2n + 1$ называется контактным, если на нем фиксировано гладкое поле $2n$ -мерных подпространств Π_ρ , удовлетворяющее следующему условию. Для каждой точки $\rho \in K$ существует такая ее окрестность U и 1-форма θ на U , что

$$\theta_y(\Pi_y) = 0, \quad \theta_y \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n d\theta \right)_y \neq 0, \quad y \in U.$$

Последнее равносильно тому, что форма $d\theta$ невырождена на каждом Π_y . В некоторых координатах $(u, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\theta = du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad (2.1)$$

(теорема Дарбу). Интегральное многообразие распределения Π , имеющее максимально возможную размерность n , называется лежандровым [5]. Векторное поле называется контактным, если его локальные потоки сохраняют контактную структуру.

Если 1-форма θ определена глобально (т.е. $U = K$), то K называется *точным контактным многообразием*. Тогда соответствие $v \mapsto i_v(\theta)$ между контактными векторными полями и гладкими функциями на K есть биекция, в силу чего в $C^\infty(K)$ возникает структура алгебры Ли:

$$f = i_v(\theta), \quad g = i_w(\theta) \quad \Rightarrow \quad [f, g] = i_{[v, w]}(\theta).$$

Операция $[\cdot, \cdot]$ называется скобкой Лагранжа, а функция $f = i_v(\theta)$ – контактным гамильтонианом [5]. На контактном многообразии, не являющемся точным, эти объекты определены локально. В координатах Дарбу контактное поле $v = v_f$ выглядит так:

$$v_f = \left(f - \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.2)$$

Известно, что не каждая контактная структура является точной.

ПРИМЕР 1. В множестве

$$\{(\varphi, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq \varphi \leq \pi, -1 < \tau < 1, -1 < t < 1\}$$

отождествим каждую пару точек $(-\pi, \tau, t)$ и $(\pi, -\tau, -t)$. Получится полноторие $D_0^2 \times S^1$, где $D_0^2 = D^2 \setminus \partial D^2$. Уравнение $(dt + \tau d\varphi)(\Pi_\rho) = 0$ корректно определяет контактное поле 2-плоскостей Π_ρ . Обозначим через μ лист Мёбиуса $\tau = 0$, вложенный в это полноторие. В каждой точке ρ осевой окружности S^1 листа μ плоскость Π_ρ пересекается с $T_\rho \mu$ по прямой, натянутой на вектор $\partial/\partial \varphi$. Если бы на полнотории существовала контактная форма θ , то ее ограничение на μ определяло бы ориентацию листа Мёбиуса. Поэтому контактная структура Π_ρ не является точной.

В 1959 г. Дж. Грэй доказал следующую теорему [13].

ТЕОРЕМА. *Всякое ориентируемое компактное контактное многообразие K является границей такого симплектического многообразия $(N, d\beta)$, что форма $\beta|_{\partial N}$ определяет контактную структуру K .*

Отсюда вытекает, что каждое ориентируемое компактное контактное многообразие является точным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Ориентируемое контактное многообразие K является точным тогда и только тогда, когда поле гиперплоскостей Π_ρ ориентируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_ρ – ортогональное дополнение к плоскости Π_ρ , ориентированное в соответствии с ориентациями Π_ρ и $T_\rho K$. Значениями контактной формы θ_ρ будем считать числа, равные ортогональным проекциям векторов на ось l_ρ . Обратно: глобально заданная контактная форма θ определяет на каждой прямой l_ρ направление своего возрастания. Так как K ориентировано, то непрерывное поле направлений l_ρ определяет ориентацию каждой плоскости Π_ρ , непрерывно зависящую от ρ . Предложение 1 доказано.

Симплектизацией K называется многообразие

$$N = \{\zeta_\rho \in T^*K : \zeta_\rho \neq 0, \zeta_\rho(\Pi_\rho) = 0\}$$

с канонической симплектической структурой Ω , индуцированной из T^*K [5]. Форма θ определяет в N локальные координаты $(\chi, u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых

$$\zeta = \chi\theta, \quad \Omega_\zeta = d\left(\chi\left(du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i\right)\right). \quad (2.3)$$

Пусть M – замыкание N , тогда

$$M = N \cup K', \quad K' = \{0 \in T^*K : \rho \in K\}. \quad (2.4)$$

Ограничение симплектической структуры T^*K определяет на M замкнутую 2-форму Ω (2.3). Она невырождена на $N = M \setminus K'$, но вырождается в точках гладкой гиперповерхности $K' \subset M$. Последняя локально определена уравнением $\chi = 0$, при этом

$$\Omega|_{K'} = 0, \quad \text{rk}(\Omega_\rho) = 2, \quad \rho \in K'. \quad (2.5)$$

Точные контактные структуры являются примерами более общей конструкции. Пусть в пространстве $C^\infty(L)$ многообразия L задана билинейная антикоммутативная операция $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющая тождеству Якоби. Предположим, что функция $[\cdot, \cdot]$ непрерывна (в стандартной топологии $C^\infty(L)$) и обращается в нуль на каждом открытом подмножестве L , на котором равен нулю хотя бы один из аргументов. Такие структуры были изучены в работе [12], где они определены в пространствах сечений $\Gamma^\infty(L)$ одномерных векторных расслоений над L (локальные алгебры Ли с одномерным слоем). В случае тривиального расслоения $\Gamma^\infty(L) = C^\infty(L)$. Следуя [5], будем называть скобку $[\cdot, \cdot]$

структурой Ли, а L – многообразием Ли. На L однозначно определены векторное поле a и бивекторное поле c так, что

$$[f, g](\mathbf{x}) = \sum_i a^i \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

Структура Ли $[\cdot, \cdot]$ называется транзитивной, если $\text{rk}(c) = \text{const} = \dim L$ [12]. Тогда в случае $\dim L = 2n+1$ на L существует единственная точная контактная структура, скобка Лагранжа которой совпадает с $[\cdot, \cdot]$. В случае $\dim L = 2n$ для каждой точки $\rho \in L$ найдутся окрестность U , функция f и симплектическая форма Ω на U такие, что

$$\Omega_\rho = f(\rho)c_\rho^{-1}, \quad f(\rho) \neq 0, \quad a_\rho = \text{sgrad } f(\rho), \quad \rho \in U, \quad (2.7)$$

где c^{-1} – внешняя форма, обратная бивектору c . Структура Ли называется регулярной, если $\text{rk}(c) = \text{const}$ на L . Тогда L канонически расслоено на инъ-ективно погруженные многообразия L_α , на каждом из которых операция $[\cdot, \cdot]$ индуцирует транзитивную структуру Ли $[\cdot, \cdot]_\alpha$ [12].

§ 3. Контактные вырождения

Пусть M – четномерное многообразие с замкнутой 2-формой ω , вырождающейся в точках подмножества Θ меры нуль в M (см. (1.1)).

ЛЕММА 1. Пусть $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 2$ и для некоторой окрестности $O(\rho)$ точки ρ множество $\Theta \cap O(\rho)$ является подмногообразием. Тогда если

$$\mathcal{Z}_\rho + T_\rho \Theta = T_\rho M, \quad \dim \mathcal{Z}_y = 2k, \quad y \in \Theta \cap O(\rho),$$

и окрестность $O(\rho)$ достаточно мала, то существует $2k$ -мерное интегрируемое распределение Z на $O(\rho)$ такое, что:

$$Z(y) = \mathcal{Z}_y, \quad y \in \Theta \cap O(\rho).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim \Theta \cap O(\rho) = m$ и $\dim M = 2n$, тогда $m < 2n$. Рассмотрим гладкое $(m + 2k - 2n)$ -мерное распределение $Z_0: y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta$, определенное на m -мерном подмногообразии $\Theta \cap O(\rho)$, и докажем его интегрируемость. Пусть векторные поля u и v на $\Theta \cap O(\rho)$ таковы, что $u_y \in \mathcal{Z}_y$ и $v_y \in \mathcal{Z}_y$ для всех y . Обозначим через Ω ограничение формы ω на $\Theta \cap O(\rho)$. Используя формулу $L_u(\Omega) = i_u(d\Omega) + d(i_u(\Omega)) = 0$ и обозначая через w коммутатор полей u, v , получим $i_w(\Omega) = L_u(i_v(\Omega)) - i_v(L_u(\Omega)) = 0$, т.е. w_y косоортогонален $T_y \Theta$. По условию $\mathcal{Z}_y + T_y \Theta = T_y M$, поэтому $w_y \in \mathcal{Z}_y$ и, следовательно, $w_y \in Z_0(y)$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O(\rho)$. В силу критерия Фробениуса распределение Z_0 интегрируемо.

Фиксируем на $O(\rho)$ такое векторное поле z_1 , что

$$(z_1)_y \in \mathcal{Z}_y, \quad (z_1)_y \notin T_y \Theta, \quad y \in \Theta \cap O(\rho).$$

Тогда интегральные подмногообразия распределения Z_0 , увлекаемые потоком z_1 , заматают интегральные подмногообразия некоторого $(m + 2k - 2n + 1)$ -мерного распределения Z_1 . Оно определено на $(m + 1)$ -мерной поверхности Θ_1 , которую в потоке z_1 заматает $O(\rho) \cap \Theta$. Фиксируем на $O(\rho)$ такое векторное поле z_2 , что

$$(z_2)_y \in \mathcal{L}_y, \quad (z_2)_y \notin T_y \Theta_1, \quad y \in \Theta_1 \cap O(\rho).$$

Тогда интегральные подмногообразия распределения Z_1 , увлекаемые потоком z_2 , заматают интегральные подмногообразия некоторого $(m + 2k - 2n + 2)$ -мерного распределения Z_2 , определенного на $(m + 2)$ -мерной поверхности Θ_2 . Продолжая процесс, еще через $(2n - m - 2)$ шагов получим интегрируемое $2k$ -мерное распределение Z_{2n-m} , определенное в некоторой окрестности точки ρ . Осталось обозначить Z_{2n-m} через Z . Лемма 1 доказана.

В примере 4 поле 6-мерных подпространств $\mathcal{L}_\rho$ в каждой точке касается 7-мерной поверхности Θ , и распределение $Z_0: \rho \mapsto \mathcal{L}_\rho$ неинтегрируемо. Поэтому в лемме 1 условие трансверсальности существенно.

ПРИМЕР 2. Пусть $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_3$ и $f_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_2 + v_1^2$, где $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Уравнения $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ определяют 4-мерное подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^6$. Пусть ω – это ограничение на M стандартной формы $\sum_{i=1}^3 du_i \wedge dv_i$. Тогда $\Theta \subset M$ является 3-мерной плоскостью и определяется уравнениями $u_2 = u_3 = v_1 = 0$. В каждой точке $\rho \in \Theta$ ядро $\mathcal{L}_\rho$ натянуто на векторы $\partial/\partial v_2$ и $\partial/\partial v_3 - u_1 \partial/\partial u_1$, следовательно, $\mathcal{L}_\rho \subset T_\rho \Theta$. В данном случае распределение Z_0 интегрируемо.

Будем считать, что Θ является гладкой гиперповерхностью в M .

В случае $\dim \mathcal{L}_\rho > 2$ это предположение выделяет специальный класс вырождений, не имеющих общего положения (при $\dim \mathcal{L}_\rho = \text{const} = 4$ типична ситуация, когда $\text{codim } \Theta = 6$ [4]). Однако в теоретической физике есть интересные примеры таких особенностей.

ПРИМЕР 3. В координатах (x, y, z, ct) пространства-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ электромагнитное поле определяется 2-формой ω с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы электрического и магнитного полей. Замкнутость ω следует из уравнений Максвелла $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c)\partial \mathbf{H}/\partial t$. Легко видеть, что $\det \omega = (\mathbf{E}, \mathbf{H})^2$. В плоской монохроматической волне $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$. Произвольное электромагнитное поле является суперпозицией таких волн [14]. Поэтому, очевидно, в общем случае $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \neq 0$. Пусть поле распространяется из начала координат. Обозначим через S_t границу области $V_t \subset \mathbb{R}^3$, заполняемой полем в момент времени $t > 0$. Из соображений непрерывности следует, что $\mathbf{E} = 0$ и

$\mathbf{H} = 0$ в каждой точке S_t . Изотропный конус

$$\{(x, y, z, ct) : c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, t > 0\} = \bigcup_{t>0} S_t$$

является гиперповерхностью $\Theta \subset M$, в каждой точке которой $\omega = 0$, где

$$M = \{(x, y, z, ct) : c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, t > 0\} = \bigcup_{t>0} V_t.$$

ПРИМЕР 4. На основе предположения об однородности распределения вещества в 1922 г. Л. А. Фридман получил частные решения уравнений Эйнштейна, из которых родились известные космологические модели расширяющейся и пульсирующей Вселенной. Эти решения определяют псевдориманову метрику пространства-времени $\mathcal{U}^4$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - kt(d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)),$$

где $f(\chi) = \operatorname{sh} \chi$ или $f(\chi) = \sin \chi$ соответственно, χ, θ, φ – сферические координаты на стандартной 3-сфере, k – эмпирическая константа. Мировые линии тел, движущихся в гравитационном поле, суть геодезические метрики ds^2 [14]. Любой геодезический поток гамильтонов относительно симплектической формы $\Omega = d(\sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i dq_j)$ и функции Гамильтона $H = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ [15]. При этом невырожденность формы Ω эквивалентна невырожденности метрики. Если $f(\chi) = \sin \chi$, то

$$\begin{aligned} 2H &= c^2 \dot{t}^2 - kt(\dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)), \\ 2\operatorname{sgrad} H &= \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{k}{2c^2}(\dot{\chi}^2 + \sin^2 \chi(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)) \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \\ &+ \left(\frac{\sin 2\chi}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{\dot{\chi} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\chi}} + \left(\frac{\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta}{2} - 2\dot{\theta} \dot{\chi} \operatorname{ctg} \chi - \frac{\dot{\theta} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \\ &- \left(2\dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\chi} \operatorname{ctg} \chi + \frac{\dot{\varphi} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}. \end{aligned}$$

В случае $f(\chi) = \operatorname{sh} \chi$ следует заменить тригонометрические функции переменной χ на соответствующие гиперболические. Метрика ds^2 вырождается при $t = 0$, поэтому замкнутая 2-форма Ω на $M = T\mathcal{U}^4$ имеет особенности в точках гиперповерхности $\Theta = \{t = 0\}$. В каждой точке $\rho \in \Theta$ ядро $\mathcal{Z}_\rho \subset T_\rho \Theta$ натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\chi}}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\dot{\chi}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{f^2(\chi) \dot{\theta}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{f^2(\chi) \sin^2 \theta \dot{\varphi}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}}.$$

Так как $\omega|_\Theta = 0$, то в силу относительной леммы Пуанкаре $\omega = d\alpha$ для некоторой 1-формы α , заданной в окрестности Θ и равной нулю в каждой точке Θ [5]. Последнее эквивалентно тому, что $\alpha = \chi \nu$ для некоторой 1-формы ν и функции χ , удовлетворяющей условию

$$\chi(\Theta) = 0, \quad d_\rho \chi \neq 0, \quad \rho \in \Theta. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\omega = 0$ в каждой точке гиперповерхности Θ и χ – произвольная функция в окрестности Θ , удовлетворяющая (3.1). Тогда для каждого $\rho \in \Theta$ найдутся окрестность $O(\rho)$ и 1-форма β такие, что $\omega = d(\chi^2\beta/2)$ на $O(\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае $\omega_\rho = d_\rho\chi \wedge \nu_\rho = 0$ для каждого $\rho \in \Theta$, поэтому $\nu|_\Theta = 0$. Следовательно, в окрестности $\rho \in \Theta$ найдутся 1-форма γ и функция φ такие, что $\nu = \varphi d\chi + \chi\gamma$. Отсюда

$$\omega = d(\chi(\varphi d\chi + \chi\gamma)) = d\left(\chi^2\left(\gamma - \frac{d\varphi}{2}\right)\right).$$

ЛЕММА 3. Возьмем трансверсальное Θ векторное поле X и функцию χ в окрестности Θ , удовлетворяющую (3.1). Тогда формула

$$\mu = \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X(\chi^{-1}\omega) \quad (3.2)$$

корректно определяет на Θ 1-форму μ , которая при замене функции χ и поля X умножается на всюду отличную от нуля функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что $\mu = d\chi(X)\beta|_S$. В силу (3.1) $d\chi(X) \neq 0$. Ясно, что замена трансверсального поля X приводит к умножению μ на ненулевую функцию. При замене χ на $\tilde{\chi}$ форма $\lim(\chi^{-1}\omega)$ умножается на ненулевую функцию $\lim \chi/\tilde{\chi}$. Последняя корректно определена, поскольку $\partial\chi/\partial\mathbf{x} = 0$ в точках Θ в любых координатах вида $(\tilde{\chi}, \mathbf{x})$. Лемма 3 доказана.

Заметим, что локально можно полагать

$$\mu_{\mathbf{x}} = \sum_{j=2}^{2n} \frac{\partial\omega_{1,j}}{\partial x_1} dx_j, \quad \dim M = 2n, \quad (3.3)$$

в любых координатах $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, в которых $\mathbf{x} \in \Theta \Leftrightarrow x_1 = 0$.

Пусть S_{2n} – множество перестановок набора $(1, \dots, 2n)$. Для каждой кососимметрической матрицы $\omega = (\omega_{ij})$, где $1 \leq i, j \leq 2n$, существуют ровно два многочлена $\pm P$, удовлетворяющих условию

$$P \in \mathbb{Z}[\omega_{1,2}, \dots, \omega_{i,j}, \dots, \omega_{2n-1,2n}], \quad P^2 = \det(\omega).$$

Один из них, равный

$$\sum_{\substack{\sigma=(i_1,j_1,\dots,i_n,j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1}}} \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_1,j_1} \omega_{i_2,j_2} \cdots \omega_{i_n,j_n},$$

называется пфафффианом и обозначается $Pf(\omega)$. Легко видеть, что в этом случае $i_1 = 1$ для любой перестановки σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $\dim M = 2n > 2$ и $\omega = 0$ в каждой точке Θ . Пусть μ – 1-форма на Θ , определенная формулой (3.2) для функции χ , удовлетворяющей (3.1), и векторного поля X , трансверсального Θ .

Тогда на Θ определено поле $(2n - 2)$ -мерных подпространств $\Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0)$, которое не зависит от выбора функции χ и поля X . Поле Π_ρ является точной контактной структурой тогда и только тогда, когда

$$d^{2n-1}Pf(\omega)_\rho \neq 0, \quad \rho \in \Theta. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности $O(\rho)$ произвольной точки $\rho \in \Theta$ введем локальные координаты $(x_1, \dots, x_{2n})$, в которых поверхность $S = O(\rho) \cap \Theta$ определяется уравнением $x_1 = 0$.

Пусть $1 < i, j \leq 2n$. Из замкнутости ω следует, что $\partial\omega_{ij}/\partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$. Поэтому каждый ω_{1j} делится на x_1 , а каждый ω_{ij} делится на x_1^2 . Следовательно, при вычислении определителя матрицы ω из каждой i -й строки и каждого j -го столбца можно вынести множитель x_1 . Поэтому $\det(\omega)$ делится на x_1^{4n-2} , в силу чего $Pf(\omega) = Ax_1^{2n-1}$, где A – гладкая функция координат $\mathbf{x}$. Следовательно, при $x_1 = 0$ равны нулю все производные $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ порядков от 0 до $2n - 2$ включительно. Из производных порядка $2n - 1$ только производная $\partial^{2n-1}Pf(\omega)/\partial x_1^{2n-1}$ может быть отличной от нуля. Она равна пфаффиану следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial\omega_{1,3}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\omega_{1,2n}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial^2\omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial\omega_{1,3}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2\omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & 0 & \cdots & \frac{\partial^2\omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial\omega_{1,2n}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2\omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2\omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 0. \quad (3.5)$$

В силу леммы 2 $\omega = d(\beta x_1^2/2)$ на $O(\rho)$. Если $\lambda_{i,j}$ – элемент матрицы (3.5), то $\lambda_{1,j} = \beta_j$ и $\lambda_{i,j} = \partial\beta_j/\partial x_i - \partial\beta_i/\partial x_j$. Пусть S_{2n-1} – множество перестановок набора $(2, \dots, 2n)$ и $d\beta|_S = \zeta$. В координатах $(x_2, \dots, x_{2n})$ поверхности S имеем

$$\zeta = \sum_{i < j} \lambda_{i,j} dx_i \wedge dx_j,$$

следовательно,

$$\beta|_S \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \zeta \right) = (n-1)! \sum_{\sigma \in S_{2n-1}} \beta_j \lambda_{i_2, j_2} \cdots \lambda_{i_n, j_n} dx_j \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \wedge dx_{j_n},$$

где $\sigma = (j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)$ и $i_s < j_s$, $i_s < i_{s+1}$. Сумму можно записать как

$$\left(\sum_{\sigma \in S_{2n-1}} \text{sgn}(\sigma) \beta_j \lambda_{i_2, j_2} \cdots \lambda_{i_n, j_n} \right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}.$$

Выражение в скобках совпадает с пфаффианом матрицы (3.5). По условию последний отличен от нуля в каждой точке $S = \Theta \cap O(\rho)$. Следовательно,

$$\beta|_S \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} d\beta|_S \right) \neq 0, \quad y \in S. \quad (3.6)$$

В частности, $\beta|_S$ всюду отлична от нуля. Она совпадает с 1-формой, которая локально определена формулой (3.2) для $\chi = x_1$ и $X = \partial/\partial x_1$. Пусть μ – любая 1-форма на Θ , определенная формулой (3.2). По лемме 3 формы $\mu|_S$ и $\beta|_S$ пропорциональны. Отсюда и из (3.6) в силу произвольности точки $\rho \in \Theta$ вытекает, что поле $\Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0)$ является контактной структурой на Θ . Поскольку форма μ задана глобально, эта структура точна. Предложение 2 доказано.

Заметим, что условие (3.4) инвариантно и что контактная структура Π на Θ однозначно определяется формой ω .

Ниже мы не предполагаем, что Θ – гладкая гиперповерхность в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ω – замкнутая 2-форма, $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$ в некоторой точке $\rho \in \Theta$ и существует такая гладкая гиперповерхность S в M , что $\rho \in S \subset \Theta$ и $\dim \mathcal{Z}_y = 2k$ в каждой точке $y \in S$. Тогда при условиях

- а) $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$,
- б) $d^{2k-1}Pf(\omega)_\rho \neq 0$

точка ρ называется *контактной*.

Множество контактных точек открыто в Θ . Ясно, что в аналитическом случае оно плотно в Θ или пусто. В случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M$ условие а) выполнено автоматически, а условие б) эквивалентно невырожденности матрицы (3.5). Оно естественно в силу следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть в предположениях определения 1 точка ρ удовлетворяет условию а) и в окрестности ρ заданы произвольные координаты $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда в каждой достаточно близкой к ρ точке $y \in \Theta$ равны нулю все производные функции $Pf(\omega_{ij}(\mathbf{x}))$ порядков от 0 до $2k - 2$ включительно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что в окрестности $O(\rho)$ существуют координаты $\mathbf{x}$, в которых многообразие $S \subset \Theta$ определяется уравнением $x_1 = 0$ и $\partial/\partial x_1 \in \mathcal{Z}_\mathbf{x}$ при $x_1 = 0$. Пусть $1 < i, j \leq 2k$. Из замкнутости ω следует, что $\partial\omega_{ij}/\partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$. Поэтому каждый ω_{1j} делится на x_1 , а каждый ω_{ij} делится на x_1^2 . Следовательно, при вычислении определителя матрицы ω из каждой i -й строки и каждого j -го столбца можно вынести множитель x_1 . Поэтому $\det(\omega)$ делится на x_1^{4k-2} , в силу чего $Pf(\omega)$ делится на x_1^{2k-1} . Следовательно, при $x_1 = 0$ равны нулю все частные производные $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ порядков от 0 до $2k - 2$ включительно. То же имеет место в произвольных координатах, поскольку при замене координат пфаффиан делится на определитель матрицы Якоби. Лемма 4 доказана.

Разлагая $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ в конечный ряд Тейлора и используя лемму 4, легко убедиться, что для некоторой достаточно малой окрестности $O(\rho)$ контактной точки ρ форма ω невырождена на $O(\rho) \setminus S$. Поэтому можно считать, что $S = O(\rho) \cap \Theta$.

Условие $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$ необходимо для существования координат, в которых матрица ω имеет блочно-диагональный вид (1.4). В самом деле, пусть в координатах $\mathbf{x}$ матрица ω блочно-диагональна и $2k$ -мерное ядро $\mathcal{Z}_\rho$ касается

гиперповерхности $S \subset \Theta$ в точке ρ . Подпространство $\mathcal{Z}_\rho$ натянуто на векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2k}$, поэтому при $i > 2k$ найдется координатная линия $x_i = t$, которая трансверсальна S в точке ρ . Так как ω замкнута, то подматрица $A(\mathbf{x})$ (1.4) постоянна на этой координатной линии. Однако непрерывная функция $\det(A(\mathbf{x}))$ равна нулю на S и отлична от нуля вне этой поверхности. Получено противоречие.

ПРИМЕР 5. В примере 3 нет математических препятствий для существования контактных точек. Данный вопрос относится к электродинамике и является открытым. В качестве кривой, трансверсальной световому конусу Θ и выходящей из $(p, t_0) \in \Theta$, можно взять мировую линию неподвижной материальной точки $p \in \mathbb{R}^3$. На этом луче пфаффиан $Pf(\omega)(x, y, z, ct) = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ является функцией времени $\tau = t - t_0$, прошедшего с того момента, когда поле достигло p . Точка (p, t_0) является контактной тогда и только тогда, когда при $\tau \rightarrow +0$ бесконечно малые $(\mathbf{E}(p), \mathbf{H}(p)) = EH \cos \varphi$ и τ^3 имеют один порядок. Возможно ли это?

Рассмотрим сферическую электромагнитную волну, которая распространяется в холодной плазме и разогревает ее. Так как в волне $\varphi = \pi/2$, то вполне возможно, что $\lim_{\tau \rightarrow 0} \cos \varphi(p) = 0$. При этом внутри конуса Θ , вообще говоря, $\cos \varphi \neq 0$. Дело в том, что свободные заряды рассеивают волны [14]. Поэтому в процессе разогрева плазмы поле внутри нее хаотично искажается, в силу чего векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перестают быть ортогональными. Итак, можно предположить, что $\cos \varphi(p)$ имеет порядок τ . В волне величины E и H изменяются гармонически. Поэтому возможно, что в точке p они имеют порядок τ , и тогда величина $(\mathbf{E}, \mathbf{H})(p)$ порядка τ^3 .

ПРИМЕР 6. В условиях предложения 2 контактное многообразие Θ состоит из точек, контактных в смысле определения 1.

ПРИМЕР 7. В статье [16] изучена фазовая топология класса I особо замечательных движений (по Аппельроту) волчка Ковалевской в магнитном поле. Соответствующая форма ω на инвариантном подмногообразии M^4 является ограничением симплектической формы Кириллова орбиты $\mathcal{O}^6 \supset M^4$. Все точки вырождения ω имеют общее положение и являются контактными. Соответствующая 3-поверхность Θ есть гладкое некомпактное многообразие $f = 0$, где f – дополнительный к гамильтониану H боттовский интеграл.

Предположим, что поле $(2n - 2)$ -мерных ядер формы Ω касается $(2n - 1)$ -мерной гиперповерхности Θ . Тогда $\text{rk}(\Omega) = 2$ в каждой точке $\rho \in \Theta$ и на многообразии Θ возникает поле гиперплоскостей $\mathcal{Z}_\rho$, которое может породить контактную структуру. Например, при переходе от контактного многообразия к замыканию его симплектизации, когда $\mathcal{Z}_\rho = \Pi_\rho$ в каждой точке $\rho \in K' \cong K$ (2.5). Так как $\Omega|_\Theta = 0$, то из относительной леммы Пуанкаре $\Omega = d(\chi\nu)$ для некоторой 1-формы ν , заданной в окрестности Θ , и функции χ (3.1). Форма

$$\omega = \chi\Omega - \chi^2 \frac{d\nu}{2} = d\left(\frac{\chi^2\nu}{2}\right)$$

обращается в нуль в каждой точке Θ . Из предложения 2 следует, что если поле $\mathcal{Z}_\rho$ порождает контактную структуру Θ , то каждая точка $\rho \in \Theta$ является контактной относительно ω . При этом контактная структура $\mathcal{Z}$ будет точной.

ПРИМЕР 8. В примере 4 поле 6-мерных ядер $\mathcal{Z}_\rho$ касается 7-мерной гиперповерхности Θ и определяет на ней точную контактную структуру. Соответствующая контактная 1-форма равна

$$\frac{1}{c^2} (\dot{\chi} d\chi + f^2(\chi) \dot{\theta} d\theta + f^2(\chi) \sin^2 \theta \dot{\varphi} d\varphi) - dt.$$

Заменой переменных $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ ее легко привести к каноническому виду. Итак, хотя в данном случае точки вырождения формы Ω не являются контактными, канонически определена точная контактная структура многообразия Θ .

Классической механике ближе случай, когда замкнутая 2-форма ω на четномерной поверхности $M \subset N$ индуцирована из симплектического многообразия (N, Ω) . Косой градиент функции f на M , вычисленный относительно формы $\omega = \Omega|_M$, обозначаем $\text{sgrad}_M f$. Пусть $\rho \in M$ и L_ρ – косоортогональное дополнение $T_\rho M$ в $T_\rho N$. Если плоскость L_ρ трансверсальна $T_\rho M$, то для любой функции $F: N \rightarrow \mathbb{R}$ вектор $\text{sgrad}_M(F|_M)(\rho)$ является косоортогональной проекцией $\text{sgrad} F(\rho)$ на $T_\rho M$ [1]. Как правило, эта проекция не определена в точках вырождения формы ω . В каждой точке $\rho \in \Theta \subset M$

$$\dim(L_\rho + T_\rho M) < \dim T_\rho N, \quad \mathcal{Z}_\rho = \text{Ker}(\omega_\rho) = L_\rho \cap T_\rho M.$$

ЛЕММА 5. Пусть в $(2n+2m)$ -мерном симплектическом многообразии (N, Ω) задано подмногообразие $M \subset N$, являющееся поверхностью нулевого уровня независимых функций $F_1, \dots, F_{2m}$, и $\omega = \Omega|_M$. Тогда в любых координатах вида $(\mathbf{F}, \mathbf{x}) = (F_1, \dots, F_{2m}, x_1, \dots, x_{2n})$ при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} Pf(\omega_{ij}(\mathbf{x})) &= \pm Pf(\Omega_{rs}(\mathbf{0}, \mathbf{x})) Pf(\{F_\alpha, F_\beta\}), \\ 1 \leq i, j \leq 2n, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2m, \quad 1 \leq r, s \leq 2n + 2m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области O , пересекающейся с $\Theta \subset M$, введем координаты $(\mathbf{F}, \mathbf{x})$ и рассмотрим матрицы $A = (\omega_{ij})$, $B = (\{F_\alpha, F_\beta\})$. Матрица Пуассона P и матрица формы Ω суть взаимно обратные. Поскольку векторы $\partial/\partial x_j$ при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ касаются поверхности Θ , то A есть правый нижний угловой $2n$ -минор матрицы Ω . А так как B есть левый верхний угловой $2m$ -минор матрицы P , то $\det(A) = \det(B) \det(\Omega)$. Отсюда сразу получаем формулу (3.7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В условиях леммы 5 пусть $\rho \in \Theta \subset M$ и S – такая гладкая гиперповерхность в M , что $\rho \in S \subset \Theta$ и для некоторого $k > 0$

$$\text{rk}(\{F_\alpha, F_\beta\})(y) = 2m - 2k, \quad y \in S. \quad (3.8)$$

Точка ρ является контактной тогда и только тогда, когда найдутся набор индексов $p = (p_1, \dots, p_{2n})$ и нетривиальное решение $(c_1, \dots, c_{2m})$ системы (3.10) такие, что для некоторой окрестности $O(\rho)$ и всех $(0, \mathbf{x}) \in S \cap O(\rho)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2k-2} Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{2n}^{p_{2n}}} (0, \mathbf{x}) \equiv 0, \\ & \sum_{\gamma=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2n} c_\gamma \frac{\partial^{2k-1} Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{2n}^{p_{2n}} \partial x_j} \{F_\gamma, x_j\}(\rho) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.10) определяет набор коэффициентов c_γ , для которого вектор $v_\rho = \sum_{\gamma=1}^{2m} c_\gamma \operatorname{sgrad} F_\gamma(\rho)$ касается подмногообразия M :

$$\sum_{\gamma=1}^{2m} \{F_\alpha, F_\gamma\}(\rho) c_\gamma = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq 2m. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. По формуле Э. Картана $\dim \operatorname{Ker}(\omega) = \operatorname{const} = 2k$ на S , при этом $\mathcal{Z}_\rho = T_\rho M \cap L_\rho$, где подпространство L_ρ натянуто на векторы $\operatorname{sgrad} F_\alpha$ [1].

Из леммы 4 и формулы (3.7) следует, что в контактной точке $\rho \in S$ равны нулю все производные $Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})(0, \mathbf{x})$ порядков от 0 до $2k-2$ включительно. При этом найдется мультииндекс $p = (p_1, \dots, p_{2n})$, для которого функция $\partial_{\mathbf{x}^p}^{2k-2} Pf$ имеет ненулевой дифференциал в точке ρ . Тогда неравенство (3.9) эквивалентно $v_\rho \notin T_\rho S$. Такой вектор v_ρ , а значит, и набор чисел c_γ найдутся в силу условия $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$.

Обратно, в силу (3.9) найдется мультииндекс $p = (p_1, \dots, p_{2n})$, для которого функция $\partial_{\mathbf{x}^p}^{2k-2} Pf$ имеет ненулевой дифференциал в точке ρ . Тогда $v_\rho \notin T_\rho S$, а значит, и $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$. Следовательно, в силу леммы 4 из (3.8) и формулы (3.7) вытекает, что все производные $Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})(0, \mathbf{x})$ порядков от 0 до $2k-2$ включительно равны нулю на S . С учетом этого факта и (3.9), используя (3.7), легко проверить, что $d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$. Следовательно, точка ρ контактная.

ПРИМЕР 9. Применим предложение 3 в ситуации, когда подмногообразие $M \subset N$ определяется уравнением $F_1 = F_2 = 0$. Тогда $m = 1$ и (3.8) означает, что $\{F_1, F_2\}|_S \equiv 0$. В данном случае $k = 1$ и ядро $\mathcal{Z}_\rho$ натянуто на векторы $\operatorname{sgrad} F_1$ и $\operatorname{sgrad} F_2$. Условие (3.8) и тождество (3.9) выполнены автоматически. Решением (3.10) является любая пара чисел (c_1, c_2) , и соотношение (3.9) можно переписать в виде $c_1 \{\{F_1, F_2\}, F_1\} + c_2 \{\{F_1, F_2\}, F_2\} \neq 0$.

Итак, в случае $\operatorname{codim} M = 2$ множество $\Theta \subset M$ определяется уравнением $\{F_1, F_2\} = 0$. Точка $\rho \in \Theta$ является контактной тогда и только тогда, когда

$$\{\{F_1, F_2\}, F_1\}(\rho) \neq 0 \quad \text{или} \quad \{\{F_1, F_2\}, F_2\}(\rho) \neq 0. \quad (3.11)$$

При условии (3.11) форма ω имеет общее положение в точке ρ (1.2). Тогда

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2, \quad d_\rho(Pf(\omega))(\mathcal{Z}_\rho) \neq 0. \quad (3.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Любая точка ρ при условии (3.12) является контактной и имеет общее положение (1.2). Обратно, в любой контактной точке ρ в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ имеет место (3.12), при этом ρ удовлетворяет условию (1.2).

Заметим, что в предположениях примера 9 условия (3.11) и (3.12) эквивалентны.

§ 4. Теорема Дарбу

В этом параграфе рассматривается $2n$ -мерное многообразие M с замкнутой почти всюду невырожденной 2-формой ω . Множество Θ точек вырождения ω непусто и имеет меру нуль (см. (1.1)).

Как отмечалось в § 1, существование предела (1.5) влечет $df(\mathcal{Z}_\rho) = 0$:

$$df_\rho(v) = \omega_\rho\left(v, \lim_{y \rightarrow \rho} \text{sgrad } f(y)\right) = 0, \quad v \in \mathcal{Z}_\rho.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v_1$ в примере 2 (см. § 3). Легко проверить, что

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} |\text{sgrad } f(y)| = +\infty$$

для всех $\rho \in \Theta$, хотя $df(\mathcal{Z})_\rho \equiv 0$. Однако если все точки $\rho \in \Theta$ являются контактными, то в случае $df(\mathcal{Z})_\rho \equiv 0$ на M корректно определено гладкое гамильтоново поле $\text{sgrad } f$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ρ – контактная точка и f – гладкая функция на M . Если $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in \Theta$ достаточно близких к ρ , то существует

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} \text{sgrad } f(y),$$

лежащий в $T_\rho\Theta$ и гладко зависящий от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем координаты $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$ в окрестности $U(\rho)$ так, что $\mathbf{x}(\rho) = \mathbf{0}$ и поверхность $\Theta \cap U(\rho)$ определяется уравнением $x_1 = 0$. Тогда $df(\mathcal{Z}_\mathbf{x}) = 0$ означает $\partial f / \partial x_\alpha = 0$ при всех $1 \leq \alpha \leq 2k$.

Пусть $\sigma \in S_{2n}$ – такая перестановка вида $(i, j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)$, что $i_s < j_s$ и $i_s < i_{s+1}$, и $\sum_\sigma$ обозначает суммирование по всем перестановкам указанного вида. Тогда

$$\begin{aligned} \omega^{ij} Pf(\omega) &= - \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \cdots \omega_{i_n j_n} = -A_{ij}, \\ (\text{sgrad } f(\mathbf{x}))^i &= - \frac{\sum_{j=1}^{2n} A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}}{Pf(\omega)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Pf(\omega)(\mathbf{x}) \cdot \text{sgrad } f(\mathbf{x}), \quad F^i(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^{2n} A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

Докажем, что все ее производные порядка от 0 до $2k-2$ равны нулю при $x_1 = 0$. Каждое A_{ij} состоит из слагаемых вида

$$\omega_{i_2, j_2} \cdots \omega_{i_t, j_t} \omega_{i_{t+1}, j_{t+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_t \leq 2k, \quad i_{t+1} > 2k, \quad t \geq k. \quad (4.1)$$

Если $i_2 > 1$, то все $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ вместе с производными 1-го порядка равны нулю при $x_1 = 0$ (§3, лемма 4). Так как элементов $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ не меньше чем $k-1$, то из всех слагаемых, составляющих любую частную производную (4.1) порядка от 0 до $2k-2$, только

$$\frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_k \leq 2k, \quad i_{k+1} > 2k,$$

может быть отличным от нуля. Тогда $(i, j, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k, i_{k+1}, j_{k+1}, \dots, i_n, j_n)$ есть перестановка набора $(1, \dots, 2n)$, в которой $2n-2k$ чисел больше $2k$ и отлично от j , в силу чего $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$.

Если $i_2 = 1$, то из всех слагаемых, составляющих производную (4.1) порядка от 0 до $2k-3$, только

$$\frac{\partial \omega_{1, j_2}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_3, j_3}}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \cdots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_k \leq 2k, \quad i_{k+1} > 2k,$$

может быть отличным от нуля. Но тогда снова $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$.

Итак, все производные функции $A_{ij} \partial f / \partial x_j$ порядка от 0 до $2k-3$ включительно равны нулю при $x_1 = 0$. Следовательно, из тех, что имеют порядок $2k-2$, только производная по x_1 может быть отличной от нуля. Тогда все ее ненулевые слагаемые являются произведениями на $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j$ производных порядка $2k-3$ от (4.1) по x_1 , где $i_2 = 1$. Однако в этом случае $j > 1$, откуда $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j = 0$.

Доказано, что все производные $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ порядка от 0 до $2k-2$ равны нулю при $x_1 = 0$. Тогда из производных порядка $2k-1$ только производная $\partial^{2k-1} \mathbf{F} / \partial x_1^{2k-1}$ может быть отличной от нуля. Используя лемму 4, получаем конечные ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^{2k-1} \mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} \mathbf{F}(\mu \mathbf{x})}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!}, \\ Pf(\omega)(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^{2k-1} Pf(\omega)(\mathbf{0})}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} Pf(\omega)(\eta \mathbf{x})}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!} \end{aligned}$$

для некоторых $0 < \mu < 1$ и $0 < \eta < 1$. Тогда

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} \text{sgrad } f(y) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, x_1 \neq 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{Pf(\omega)(\mathbf{x})} = \frac{\partial^{2k-1} \mathbf{F}(\mathbf{0}) / \partial x_1^{2k-1}}{\partial^{2k-1} Pf(\omega)(\mathbf{0}) / \partial x_1^{2k-1}}.$$

Итак, на $U(\rho)$ определено гладкое поле $\text{sgrad } f$, которое по непрерывности сохраняет форму ω , в силу чего касается поверхности $\Theta \cap U(\rho)$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $\rho \in \Theta$ – контактная точка и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$, то в некоторой окрестности ρ существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i, \quad (4.2)$$

где $\det(\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$ и все $\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ равны нулю при $x_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольно малое положительное число. Линейную оболочку векторов $v_1, \dots, v_m$ обозначаем $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$. При $k = n$ утверждение теоремы тривиально. Полагаем $1 \leq k < n$.

Рассуждаем по индукции. Пусть O – достаточно малая окрестность точки ρ . На O определено такое интегрируемое $2k$ -мерное распределение Z , что $Z_y = \mathcal{Z}_y$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O$ (§ 3, лемма 1). Вложим в O диск D^{2n-2k} так, что ρ – его центр и $\mathcal{Z}_\rho$ трансверсально D^{2n-2k} . Пусть f – такая функция на D^{2n-2k} , что $df_\rho \neq 0$ и $f(\rho) = 0$. Можно считать, что D^{2n-2k} тривиально расслаивается на $(2n - 2k - 1)$ -мерные диски $f^{-1}(t)$, где $|t| \leq \varepsilon$. Через каждую точку диска $f^{-1}(t)$ проведем интегральное подмногообразие распределения Z . Получится гладкая гиперповерхность W_t , которая соприкасается с $\mathcal{Z}_y$ в каждой точке $y \in W_t \cap \Theta$. Гладко продолжим функцию f на O так, что $f^{-1}(t) = W_t$ при $|t| \leq \varepsilon$. Получили функцию f на O , для которой $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in O \cap \Theta$. По теореме 1 на O определено гладкое векторное поле $\text{sgrad } f$. Пусть $D^{2n-2k-1}$ – вложенный в D^{2n-2k} диск с центром ρ , трансверсальный $(2n - 2k - 1)$ -мерному диску $W_0 \cap D^{2n-2k}$. Через каждую точку $D^{2n-2k-1}$ проведем интегральное подмногообразие Z . Получится гладкая гиперповерхность V , которая соприкасается с $\mathcal{Z}_y$ в каждой точке $y \in V \cap \Theta$. Если мы выберем диск $D^{2n-2k-1}$ так, чтобы он был трансверсален в D^{2n-2k} прямой

$$(\mathcal{L}(\text{sgrad } f(\rho)) \oplus \mathcal{Z}_\rho) \cap T_\rho D^{2n-2k},$$

то вектор $\text{sgrad } f(\rho)$ будет трансверсален V . Если окрестность O достаточно мала, то каждая точка $y \in O$ получается из некоторой точки $y' \in V$ сдвигом на t вдоль траектории $\text{sgrad } f$, проходящей через y' . Положим $g(y) = t$. Получаем такую функцию g , что $g^{-1}(0) = V$. Очевидно, $\{f, g\} \equiv 1$, откуда $dg_\rho \neq 0$. Так как поток $\text{sgrad } f$ сохраняет ω и разносит V по семейству гиперповерхностей $g^{-1}(t)$, то $dg(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in O \cap \Theta$. Следовательно, в окрестности O определено гладкое векторное поле $\text{sgrad } g$. Так как $\{f, g\} \equiv 1$, то ковекторы dg_ρ и df_ρ линейно независимы. Пусть

$$N = \{y \in O : f(y) = g(y) = 0\}, \quad \Omega = \omega|_N.$$

Так как $N = W_0 \cap V$, то $\mathcal{Z}_y \subset T_y N$ для всех $y \in N$. Ясно, что векторы $\text{sgrad } f(y)$ и $\text{sgrad } g(y)$ косоортогональны $T_y N$ при всех $y \in N$ и касаются Θ при всех $y \in \Theta$. Плоскость $\mathcal{L}(\text{sgrad } f(\rho), \text{sgrad } g(\rho))$ трансверсальна $T_\rho N$, так как

$$v = \lambda \text{sgrad } f(\rho) + \mu \text{sgrad } g(\rho) \in T_\rho N \quad \Rightarrow \quad df(v) = dg(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0.$$

Отсюда следует, что N трансверсально Θ . Следовательно, форма Ω вырождается в точках множества $\Theta_N = \Theta \cap N$, являющегося гладкой гиперповерхностью в N , и $\text{Ker}(\Omega) = \mathcal{Z}_y = \text{Ker}(\omega_y)$ для всех $y \in \Theta_N$.

Проверим, что ρ – контактная точка в N . Очевидно, $\dim \text{Ker}(\Omega) \equiv 2k$. Так как $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho \Theta$, то и $\text{Ker}(\Omega_\rho) \not\subset T_\rho \Theta_N$. Подмногообразие N в потоке $\text{sgrad } g$ замечает гиперповерхность S . В свою очередь S в потоке $\text{sgrad } f$ замечает окрестность точки ρ . Поля $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } g$ коммутируют в силу тождества $\{f, g\} \equiv 1$. Следовательно, для любых координат $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n-2}$ на N , в которых подмногообразие Θ_N определяется уравнением $z_1 = 0$, существуют такие координаты $(\mathbf{z}, a, b)$ на O , что:

- а) $\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } g$ являются векторами скорости координатных линий $a = t$ и $b = t$ соответственно;
- б) подмногообразие N определяется уравнением $a = b = 0$;
- в) подмногообразие $\Theta \cap O$ определяется уравнением $z_1 = 0$.

Так как $\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = 1$, то $\det(\omega_{(\mathbf{z}, 0, 0)}) = \det(\Omega_{\mathbf{z}})$. Следовательно, $Pf(\omega)(\mathbf{z}, 0, 0) = \pm Pf(\Omega)(\mathbf{z})$. Очевидно, что координатная линия $z_1 = t$ в N , проходящая через точку ρ , является таковой в M . Согласно лемме 4 условие $d^{2k-1}Pf(\Omega)_\rho \neq 0$ сводится к тому, что ограничение функции $Pf(\Omega)(\mathbf{z})$ на эту координатную линию имеет ненулевую производную порядка $2k - 1$ в точке $z_1(\rho)$. Поэтому данное условие выполняется (или не выполняется) в M и N одновременно. Следовательно, ρ является контактной точкой вырождения формы Ω .

По индуктивному предположению на N существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ такие, что

$$\Omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k-1} dp_i \wedge dq_i.$$

При этом $\Omega_{\alpha\beta} = 0$ при $x_1 = 0$ и $\det(\Omega) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Введем в O координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, a, b)$ и обозначим a, b через p_{n-k}, q_{n-k} соответственно. Все координатные поверхности, отвечающие фиксированным значениям a и b , получаются из N сдвигами в потоках $\text{sgrad } g$ и $\text{sgrad } f$, при этом поверхность Θ_N замечает $\Theta \cap O$. Поскольку данные потоки сохраняют форму ω и

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_{n-k}}, \frac{\partial}{\partial q_{n-k}}\right) = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = \{f, g\} = 1,$$

то имеет место (4.2). Теорема 2 доказана.

Заметим, что перенумерацией координат p_i и q_i матрица формы ω приводится к блочно-диагональному виду (1.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть ρ – контактная точка. Если $\dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M = 2n$, то в окрестности ρ существуют координаты $\mathbf{x}$, в которых

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(dx_2 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j}\right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то локально $\omega = \omega_{1,2}(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$ и $\omega_{1,2}(0, x_2) \equiv 0$. Так как $(0, x_2)$ – контактная точка, то $\partial\omega_{1,2}(0, x_2)/\partial x_1 \neq 0$. Предполагая $\partial\omega_{1,2}(0, x_2)/\partial x_1 > 0$, сделаем гладкую замену

$$\tilde{x}_1 = \operatorname{sgn}(x_1) \sqrt{2 \int_0^{x_1} \omega_{1,2}(t, x_2) dt}, \quad \frac{\partial \tilde{x}_1(0, x_2)}{\partial x_1} = \sqrt{\frac{\partial \omega_{1,2}(0, x_2)}{\partial x_1}}.$$

Легко проверить, что $\tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_1 / \partial x_1 = \omega_{1,2}$, следовательно, $\omega = \tilde{x}_1 d\tilde{x}_1 \wedge dx_2$.

Рассмотрим случай $n > 1$. По лемме 2 найдутся окрестность $O(\rho)$ с координатами $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ и 1-форма μ такие, что локально

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2} \mu\right) = x_1 dx_1 \wedge \mu + \frac{x_1^2}{2} d\mu. \quad (4.3)$$

Пусть $S = \Theta \cap O(\rho)$ – гиперповерхность $x_1 = 0$ и d' – внешний дифференциал по переменным $x_2, \dots, x_{2n}$. Из предложения 2 следует, что форма $\mu|_S$ определяет контактную структуру S , поэтому $d\mu|_S$ невырождена на $(2n-2)$ -мерном подпространстве $(\mu|_S)_\rho^{-1}(0)$. Следовательно, $d\mu|_S$ имеет одномерное ядро в точке ρ . По непрерывности форма $d'\mu$, рассматриваемая в открытой связной области U пространства $\mathbb{R}^{2n-1}(x_2, \dots, x_{2n})$ и гладко зависящая от параметра x_1 , имеет одномерное ядро в каждой точке $\mathbf{x}' \in U$ (достаточно близкой к $\mathbf{x}'(\rho) \in U$). Поэтому при фиксированном достаточно малом x_1 форма $d'\mu$ определяет на координатной поверхности $x_1 = \text{const}$ предканоническую структуру [1]. Следовательно, заменой координат вида

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_i = f_i(x_1, \mathbf{x}'), \quad 2 \leq i \leq 2n,$$

каждую из форм $d'\mu$ можно локально привести к виду $\sum_{r=1}^{n-1} d\tilde{x}_{2r+1} \wedge d\tilde{x}_{2r+2}$. Сделаем это и обозначим новые координаты $x_1, \dots, x_{2n}$. Из (4.3) следует, что матрица ω имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_2 x_1 & \beta_3 x_1 & \beta_4 x_1 & \dots & \beta_{2n-1} x_1 & \beta_{2n} x_1 \\ -\beta_2 x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_3 x_1 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_4 x_1 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{2n-1} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1^2}{2} \\ -\beta_{2n} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) вытекает, что для некоторой гладкой функции $f(x_1, \dots, x_{2n})$

$$d\left(\sum_{s=3}^{2n} \beta_s dx_s\right) = \sum_{s=3}^{2n} d\beta_s \wedge dx_s = \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} = d\left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j}\right),$$

тем самым,

$$\sum_{s=3}^{2n} \beta_s dx_s = \sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + d'' f,$$

где d'' – дифференциал по переменным $x_3, \dots, x_{2n}$. Поэтому

$$\beta_{2j} = x_{2j-1} + \frac{\partial f}{\partial x_{2j}}, \quad \beta_{2j-1} = \frac{\partial f}{\partial x_{2j-1}}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (4.5)$$

В силу (4.4) $\partial\beta_2/\partial x_s - \partial\beta_s/\partial x_2 = 0$ и тогда согласно (4.5)

$$\frac{\partial\beta_2}{\partial x_s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_s},$$

откуда

$$\beta_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(f(\mathbf{x}) + \Phi(x_1, x_2)), \quad (4.6)$$

где $\varphi(x_1, x_2)$ – некоторая функция и $\Phi(x_1, x_2)$ – ее первообразная по x_2 , не зависящая от x_s при $s \geq 3$. Очевидно, что в (4.5) можно заменить функцию f на $\tilde{f} = f + \Phi$. Тогда

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge \left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + \sum_{k=2}^{2n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k} dx_k \right) + \frac{x_1^2}{2} \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}.$$

Поскольку $\beta_2 \neq 0$, то из (4.6) следует $\partial\tilde{f}/\partial x_2 \neq 0$. Осталось заменить координату x_2 функцией $\tilde{f}$. Предложение 5 доказано.

Заметим, что после замены x_2 на $\tilde{x}_2 = x_2 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1}x_{2j} + F(x_1)$, где $F(x_1)$ – произвольная функция, имеем

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(d\tilde{x}_2 - \sum_{j=2}^n x_{2j} dx_{2j-1}\right)\right). \quad (4.7)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть ρ – контактная точка и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 2$. Тогда в некоторой окрестности ρ существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1} dx_{2j}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i. \quad (4.8)$$

Доказательство сразу следует из теоремы 2 и предложения 5. Будем говорить, что в координатах $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ форма ω имеет канонический вид (4.8).

В силу предложения 4 при $k = 1$ утверждение теоремы 3 означает следующее. В случае общего положения (1.2) в окрестности ρ форма ω имеет локальный вид (1.3). Этот результат был получен Ж. Мартине в 1970 г. [4].

§ 5. Структуры Ли

В этом параграфе мы рассматриваем замкнутую 2-форму ω на $2n$ -мерном многообразии M и предполагаем, что для некоторого k

$$\mathrm{rk}(\omega_x) = 2n - 2k, \quad x \in \Theta, \quad (5.1)$$

и что Θ – гладкая гиперповерхность, состоящая из контактных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В предположении (5.1) z -распределением называется любое $2k$ -мерное интегрируемое распределение Z , определенное в окрестности гиперповерхности Θ так, что $Z_\rho = \mathcal{Z}_\rho$ в каждой точке $\rho \in \Theta$.

Из доказательства леммы 1 следует, что z -распределение существует.

ТЕОРЕМА 4. Пусть S – произвольное интегральное многообразие z -распределения Z такое, что $K = \Theta \cap S \neq \emptyset$. Тогда на $(2k-1)$ -мерном многообразии K корректно определена 1-форма

$$\mu = \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X(\chi^{-1}\omega|_S),$$

где X и χ заданы на S , векторное поле X трансверсально K , а функция χ такова, что $\chi(K) = 0$ и $d_\rho \chi \neq 0$ для всех $\rho \in K$.

Если $k > 1$, то форма μ определяет на K точную контактную структуру $\Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0)$, которая не зависит от выбора распределения Z , поля X и функции χ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности $O(\rho)$ произвольной точки $\rho \in K$ введем координаты $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, в которых поверхность $\Theta \cap O(\rho)$ определяется уравнением $x_1 = 0$ и ядро $\mathcal{Z}_y$ натянуто на векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2k}$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O(\rho)$. Заметим, что S инъективно погружено в M и, вообще говоря, не является подмногообразием. Можно считать, что локальными координатами S являются функции $x_1, \dots, x_{2k}$. Заметим также, что K является подмногообразием S и не зависит от выбора z -распределения.

Инвариантность контактной структуры Π относительно поля X и функции χ , а также корректная определенность формы μ на K следуют из предположения 2. Аналогично (3.3) для локального задания контактной структуры можно выбрать 1-форму

$$\beta_{\mathbf{x}} = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial \omega_{1,j}}{\partial x_1} dx_j.$$

Осталось проверить независимость контактной структуры от выбора z -распределения. Рассмотрим произвольные координаты $\mathbf{x}$ и $\tilde{\mathbf{x}}$, в которых 2-форма имеет компоненты $\omega_{i,j}$ и $\tilde{\omega}_{i,j}$. При доказательстве леммы 4 было установлено, что

$$\omega_{1m}(\mathbf{x}) = x_1 \beta_m(\mathbf{x}), \quad \omega_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} \alpha_{ij}(\mathbf{x}), \quad \omega_{js}(\mathbf{x}) = x_1 \gamma_{js}(\mathbf{x})$$

для всех $2 \leq m \leq 2n$, $2 \leq i, j \leq 2k$ и $2k+1 \leq s \leq 2n$. Аналогичным свойством обладают элементы матрицы $(\tilde{\omega}_{i,j})$, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 \tilde{\beta}_i &= x_1 \sum_{j=2}^{2k} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \right) \beta_j + x_1 \sum_{s=2k+1}^{2n} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \right) \beta_s \\ &+ \frac{x_1^2}{2} \sum_{j,l=2}^{2k} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_i} \alpha_{jl} + x_1 \sum_{j=2}^{2k} \sum_{s=2k+1}^{2n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \gamma_{js} \\ &+ \sum_{r,s=2k+1}^{2n} \frac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} \omega_{rs}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Координатная поверхность, отвечающая $x_1 = 0$ и фиксированным значениям координат x_j при $j > 2k$, является интегральным подмногообразием распределения Z_0 (лемма 1), в силу чего совпадает с K . То же имеет место в отношении координат $\tilde{x}$. Следовательно, $\partial x_s / \partial \tilde{x}_i = 0$ для всех $s > 2k$ и $s = 1$, если $1 < i \leq 2k$ и $x_1 = 0$. Далее, при $x_1 = 0$ для всех $s > 2k$

$$\frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} = dx_s \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \right) = dx_s \left(\sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Пусть $1 < i \leq 2k$. Разделим (5.2) на x_1 и при $x_1 \rightarrow 0$ в пределе получим

$$\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} \tilde{\beta}_i = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \beta_j + \sum_{r,s=2k+1}^{2n} \frac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial^2 x_s}{\partial \tilde{x}_i \partial x_1} \omega_{rs} = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \beta_j.$$

Итак, псевдотензорный закон преобразования чисел $(\beta_2, \dots, \beta_{2k})$ обеспечивает инвариантность нулевых подпространств формы $\beta = \sum_{i=2}^{2k} \beta_i dx_i$ на K . Теорема 4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\dim \text{Ker}(\omega) = 2k > 2$ и связная гиперповерхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек, то она канонически расслоена на инъективно погруженные точные контактные многообразия размерности $2k - 1$.

В частности, если $2k = \dim M$, то Θ – точное контактное многообразие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\dim \text{Ker}(\omega) > 2$ и связная гиперповерхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек, то она является регулярным многообразием Ли. Соответствующая структура Ли канонически определена формой ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Любое точное контактное многообразие K является гладкой гиперповерхностью внутри многообразия M , на котором определена замкнутая 2-форма ω , равная нулю в каждой точке K . При этом каждая точка K является контактной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ – контактная форма на K и M – замыкание симплектизации K (см. (2.4)). Многообразие K отождествляется с нулевым сечением T^*K , в силу чего $K \subset M$. Поскольку $\Omega|_K = 0$, то по относительной

лемме Пуанкаре $\Omega = d(\chi\theta)$, где функция χ такая, что $\chi(K) = 0$ и $d\chi \neq 0$ в каждой точке K . Тогда форма $\omega = d(\chi^2\theta)$ искомая. Из предложения 2 следует, что все точки K являются контактными.

Пусть L – нечетномерное регулярное многообразие Ли, расслоенное на точные контактные многообразия L_α , и M_α – замыкание симплектизации L_α . Очевидно, что на множестве $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ существует единственная гладкая структура, относительно которой каждое $M_\alpha \subset M$ является инъективно погруженным многообразием. Соответствующее гладкое многообразие обозначим $M(L)$. Можно считать, что $L \subset M(L)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для любой точки ρ нечетномерного регулярного многообразия Ли L существуют ее окрестность $O(\rho) \subset M(L)$ и замкнутая 2-форма ω на $O(\rho)$ такие, что каждая точка $L \cap O(\rho)$ является контактной относительно ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в $O(\rho)$ координаты $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, трансверсальные каждому M_α . Многообразия M_α расслаивают $O(\rho)$ на точные контактные подмногообразия $O_{\alpha'}$. В соответствии с предложением 6 на каждом $O_{\alpha'}$ определим форму $d(\chi_{\alpha'}^2\theta_{\alpha'})$. Полученное семейство очевидным образом задает вырожденную форму $d(\chi^2\theta)$. Прибавляя к ней $\sum_i dp_i \wedge dq_i$, получим ω . Предложение 7 доказано.

ПРИМЕР 10. В случае $\dim L = \text{rk}(c) = 2n$ локальная структура регулярного (и транзитивного) многообразия Ли описана в конце §2. Если функция $f(\rho)$ (2.7) обращается в нуль на гиперповерхности $\Theta = \partial L$, то $\Omega = 0$ в точках Θ .

В пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ рассмотрим бивектор с матрицей

$$(c^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & -2x_3 & 0 & \dots & -2x_{2n-1} & 0 \\ 0 & 2x_3 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2x_{2n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор $a = (0, 2, 0, \dots, 0)$. В данном случае $f(\mathbf{x}) = x_1^2$ и в точках гиперповерхности $\Theta = \{x_1 = 0\}$ имеем $\text{rk}(c) = 2n - 2$, поэтому $L = \{x_1 \neq 0\}$. Все точки $\Theta = \partial L$ являются контактными, и форма $\Omega_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})c_{\mathbf{x}}^{-1}$ на $\mathbb{R}^{2n}$ имеет канонический вид (см. предложение 5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если M ориентируемо и многообразие $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек, то оно также ориентируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 следует, что в канонических координатах $Pf(\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = x_1^{2k-1}/2^{k-1}$. Поэтому связная достаточно малая окрестность каждой точки $\rho \in \Theta$ разрезана на непересекающиеся подмножества $\{Pf(\omega) > 0\}$ и $\{Pf(\omega) < 0\}$. Они определены инвариантно, поскольку при замене координат

(из ориентирующего атласа) $Pf(\omega)$ делится на положительный якобиан. Так как вне гиперповерхности $Pf(\omega) \neq 0$, то корректно определены две стороны поверхности Θ : на одной $Pf(\omega) > 0$, а на другой $Pf(\omega) < 0$. Предложение 8 доказано.

В отличие от симплектических многообразий M не обязано быть ориентируемым. Замкнутую 2-форму с контактными вырождениями легко задать, например, на $K^2 \times T^2$, где K^2 – бутылка Клейна и T^2 – тор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть ω – замкнутая 2-форма на компактном ориентируемом замкнутом многообразии M . Если все точки вырождения ω являются контактными, то группа когомологий де Рама $H^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что замкнутость M означает $\partial M = \emptyset$. Пусть $\dim M = 2n$ и S – произвольная связная компонента Θ . В силу предложения 8 гиперповерхность S ориентируема. Пусть V – замыкание любого из двух связных подмножеств, на которые S разрезает связную компоненту M . Если форма ω точна на V , то $\omega = d\alpha$ и по формуле Стокса

$$\int_V \bigwedge_{i=1}^n \omega = \int_S \alpha \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \omega \right) = \int_S 0 = 0$$

в силу того, что $\omega = 0$ в каждой точке S . При $n = 1$ результат тот же, так как $\alpha = \chi^2 \beta + df$ для некоторой функции χ (3.1), в силу чего

$$\int_S \alpha = \int_{\partial S} f = \int_{\emptyset} f = 0, \quad \chi(S) = 0.$$

Итак, V имеет нулевой объем, что невозможно, поскольку $Pf(\omega)$ имеет постоянный знак на W . Следовательно, форма ω не точна на M и, значит, группа $H^2(M, \mathbb{R})$ отлична от нуля.

Аналогичным свойством обладают все компактные замкнутые симплектические многообразия [15]. Без ограничений на особенности формы ω топология M может быть какой угодно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. На любом четномерном многообразии M существует замкнутая почти всюду невырожденная 2-форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим $2n$ -многообразие M в $\mathbb{R}^{4n+2}$ (теорема Уитни позволяет вложить его даже в $\mathbb{R}^{4n+1}$). Ограничим на M стандартную симплектическую структуру Ω из $\mathbb{R}^{4n+2}$. Получим замкнутую 2-форму ω . Пусть она вырождается в точке $x \in M$. Выберем в этой точке произвольное $2n$ -мерное подпространство $L_x \subset T_x \mathbb{R}^{4n+2}$, на котором Ω невырождена. В малой окрестности x гладко продеформируем поверхность M так, чтобы добиться $L_x = T_x M$. Тогда в некоторой окрестности точки x форма ω станет невырожденной. Очевидно, что после конечного или счетного множества таких деформаций мы избавимся от всех внутренних точек множества $\Theta \subset M$. Предложение 10 доказано.

§ 6. Гамильтоновы поля

В дальнейшем мы считаем выполненными предположения (5.1).

Обозначим через $[v_1, \dots, v_m]$ линейную оболочку векторов $v_1, \dots, v_m$, через $[v]_+$ – ориентированную прямую, определенную вектором $v \neq 0$ (его направление).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\rho \in \Theta$ и f – функция на M . Если для некоторой последовательности точек $\rho_n \in M \setminus \Theta$, сходящейся к ρ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sgrad } f(\rho_n) = w \in T_\rho M,$$

то вектор w называется *собственным предельным положением* $\text{sgrad } f$ в точке ρ . Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{sgrad } f(\rho_n)| = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{sgrad } f(\rho_n)]_+ = l_\rho^+ \subset T_\rho M,$$

то ориентированная прямая l_ρ^+ называется *несобственным предельным положением* $\text{sgrad } f$ в точке ρ .

Мы различаем предел и предельное положение. Последнее является предельной точкой множества косых градиентов или их направлений.

Из теоремы 3 следует, что в окрестности контактной точки $\rho \in \Theta$ гамильтонова система $\dot{x} = \text{sgrad } H(x)$, рассматриваемая на $M \setminus \Theta$, приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2}, & \dot{x}_2 &= \frac{1}{x_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1^2} \left(x_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial H}{\partial x_5} + \dots + x_{2k-1} \frac{\partial H}{\partial x_{2k-1}} \right), \\ \dot{x}_{2j+1} &= \frac{2}{x_1^2} \left(x_{2j+1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_{2j+2}} \right), & \dot{x}_{2j+2} &= \frac{2}{x_1^2} \frac{\partial H}{\partial x_{2j+1}}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ 1 \leq i \leq n-k, & & 1 \leq j \leq k-1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть H – гладкая функция на M . Гамильтонова система $\text{sgrad } H$ называется *корректно определенной* на M , если существует такое гладкое векторное поле X на M , что $X_\rho = \text{sgrad } H(\rho)$ для всех $\rho \in M \setminus \Theta$.

Все точки вырождения формы ω являются контактными, поэтому условие $dH(\mathcal{Z}_\rho) \equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система $\text{sgrad } H$ была корректно определена на M (теорема 1). В последнем случае в каждой точке $\rho \in \Theta$ существует только одно предельное положение $\text{sgrad } f$, и оно является собственным.

ПРИМЕР 11. Пусть v_f – контактное поле на многообразии K и M – замыкание симплектизации K (см. (2.4)). Из (2.2) и (6.1) следует, что

$$v_f = \lim_{\chi \rightarrow 0} \text{sgrad}(\chi^2 f/2),$$

где χ удовлетворяет (3.1) и контактный гамильтониан f рассматривается как функция на M (постоянная на слоях расслоения $M \rightarrow K$). Поле $\text{sgrad}(\chi^2 f/2)$ корректно определено на M .

Обозначим через $\mathcal{H}_\rho(f)$ касательную плоскость в точке ρ к гиперповерхности $f^{-1}(f(\rho))$ при условии, что $df(\rho) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 4$ и f — гладкая функция на M , для которой $df(\Pi_\rho) \neq 0$ в контактной точке ρ . Тогда

- 1) найдется такая окрестность O точки ρ , что для всех $y \in O \cap \Theta$ поле $\text{sgrad} f$ имеет только одно предельное положение в точке y ; оно инцидентно $(2k-3)$ -мерной плоскости $\Pi_y \cap \mathcal{H}_y(f)$ и является несобственным;
- 2) на O определено гладкое поле направлений потока $\text{sgrad} f$.

Напомним, что $(2k-2)$ -плоскость $\Pi_\rho \subset \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho \Theta$ определена в теореме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности O точки ρ введем канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. В силу условия $df(\Pi_\rho) \neq 0$ при $3 \leq j \leq 2k$ найдется отличная от нуля производная $\partial f / \partial x_j$. Из (4.8) следует $Pf(\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = x_1^{2k-1} / 2^{k-1}$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = Pf(\omega) \text{sgrad} f = \frac{x_1^{2k-1}}{2^{k-1}} \text{sgrad} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Все производные функции $\mathbf{F}$ порядка от 0 до $2k-4$ включительно равны нулю при $x_1 = 0$, однако $\partial^{2k-3} \mathbf{F} / \partial x_1^{2k-3} \neq 0$. Используем ряд Тейлора с остаточным членом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{\partial^{2k-3} \mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial x_1^{2k-3}} \frac{x_1^{2k-3}}{(2k-3)!} + \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial^{2k-2} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{p}, \lambda \mathbf{q})}{\partial x_1^{2k-3} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-3} x_j}{(2k-2)!} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{n-k} \left(\frac{\partial^{2k-2} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{p}, \lambda \mathbf{q})}{\partial x_1^{2k-3} \partial p_s} \frac{x_1^{2k-3} p_s}{(2k-2)!} + \frac{\partial^{2k-2} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{p}, \lambda \mathbf{q})}{\partial x_1^{2k-3} \partial q_s} \frac{x_1^{2k-3} q_s}{(2k-2)!} \right), \\ \lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} \left[\text{sgrad} f(y) \right]_+ &= \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}, x_1 \neq 0} \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{Pf(\omega(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}))} \right]_+ \\ &= \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}, x_1 \neq 0} \left[2^{k-1} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{x_1^{2k-1}} \right]_+ = \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}, x_1 \neq 0} \left[\frac{1}{x_1^2} \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{x_1^{2k-3}} \right) \right]_+. \end{aligned}$$

Если $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{0}$, то $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) / x_1^{2k-3}$ стремится к вектору $\partial^{2k-3} \mathbf{F}(\mathbf{0}) / \partial x_1^{2k-3}$, который задает несобственное предельное положение $\text{sgrad} f$ в точке ρ . Теорема 5 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ и $df(\mathcal{Z}_\rho) \neq 0$ в контактной точке ρ . Тогда

- 1) найдется такая окрестность O точки ρ , что для всех $y \in O \cap \Theta$ поле $\text{sgrad} f$ имеет только два предельных положения в точке y ; они инцидентны прямой $\mathcal{Z}_y \cap \mathcal{H}_y(f)$, взаимно противоположны и являются несобственными;

- 2) гиперповерхность Θ разделяет O на два подмногообразия, пересекающихся по $O \cap \Theta$; на каждом из них определено гладкое поле направлений потока $\text{sgrad } f$.

Доказательство сразу следует из (6.1).

Для любой точки $\rho \in \Theta$ при условии $df(\Pi_\rho) \neq 0$ или $df(\mathcal{Z}_\rho) \neq 0$ гамильтоново поле $\text{sgrad } f$ имеет общее положение. В этом смысле его поток является типичным. Из неинтегрируемости распределения Π_ρ следует, что если $df(\Pi_\rho) \equiv 0$, то и $df(\mathcal{Z}_\rho) \equiv 0$. Последнее означает, что функция f постоянна на интегральных многообразиях Z_0 (лемма 1).

Подведем итог. В окрестности точки, в которой $\dim \text{Ker}(\omega) = 2$, типичный поток $\text{sgrad } f$ имеет гладкое поле направлений с каждой стороны от гиперповерхности Θ . Эти два поля гладко продолжаются на Θ и определяют два встречных потока, текущих по гиперповерхности с бесконечной скоростью.

В окрестности точки, в которой $\dim \text{Ker}(\omega) > 2$, типичный поток $\text{sgrad } f$ имеет гладкое поле направлений и с бесконечной скоростью течет по гиперповерхности Θ .

ПРИМЕР 12. Рассмотрим уравнение в частных производных 1-го порядка

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = 0, \quad n > 1, \quad (6.2)$$

относительно неизвестной функции $u(q_1, \dots, q_n)$. Частные решения уравнения (6.2) являются лежандровыми подмногообразиями в пространстве 1-струй $K = J^1\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n+1}$, снабженном контактной формой $\theta = du - \sum_i p_i dq_i$ [5]. Как и в примере 11, поднимем функцию f с K на M . Тогда характеристики уравнения (6.2) являются интегральными кривыми 1-мерного распределения, образованного несобственными предельными положениями поля $\text{sgrad } f$.

Пространству Π_ρ можно дать другое определение. Пусть χ – гладкая функция, удовлетворяющая (3.1). Из (6.1) следует, что для любой функции f каждое несобственное предельное положение $\text{sgrad } f$ в точке $\rho \in \Theta$ определяется вектором

$$\lim_{\Theta \ni x \rightarrow \rho} |\chi(x)|^m \text{sgrad } f(x), \quad m = 1 \quad \text{или} \quad m = 2.$$

Число m является порядком бесконечно большой величины $|\text{sgrad } f(x)|$ при $x \rightarrow \rho$. Оно определяется функцией f и не зависит от χ . Если при этом существует

$$\lim_{\Theta \ni x \rightarrow \rho} [\chi(x)^m \text{sgrad } f(x)]_+,$$

то сам вектор $\text{sgrad } f(x)$ является бесконечно большой величиной порядка m по отношению к χ^{-1} . Заметим, что в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ порядок $m = 2$ невозможен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. В контактной точке ρ , в которой $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$, пространство Π_ρ натянуто на несобственные предельные положения косых градиентов, являющихся бесконечно большими величинами второго порядка.

Доказательство сразу следует из (6.1), если выбрать канонические координаты, в которых $\mathbf{x}(\rho) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть на ориентируемом $2n$ -мерном многообразии M корректно определена гамильтонова система $\text{sgrad } H$. Если она имеет первые интегралы $F_1, \dots, F_{n-1}$, заданные на M так, что $\{F_i, F_j\} = 0$ на множестве $M \setminus \Theta$ и функции $H, F_1, \dots, F_{n-1}$ почти всюду независимы на M , то система $\text{sgrad } H$ называется *интегрируемой по Лиувиллю*.

Интегрируемой системе $\text{sgrad } H$ отвечает так называемое отображение момента

$$\mathcal{F}: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}(\rho) = (H(\rho), F_1(\rho), \dots, F_{n-1}(\rho)) = (h, \mathbf{f}). \quad (6.3)$$

Предположим, что неособое подмногообразие $M_{h, \mathbf{f}} = \mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ компактно и не пересекается с Θ . Согласно теореме Лиувилля каждая компонента $M_{h, \mathbf{f}}$ есть вложенный тор T^n [15]. Он называется тором Лиувилля (мы будем использовать этот термин и в случае, когда регулярный тор $T^n \subset M_{h, \mathbf{f}}$ пересекается с Θ). Каждая траектория $\text{sgrad } H$, проходящая через точку T^n , замкнута или всюду плотна на торе T^n . В первом случае тор Лиувилля называется резонансным, а во втором – нерезонансным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть на ориентируемом многообразии M корректно определена интегрируемая по Лиувиллю система $\text{sgrad } H$ с отображением момента (6.3). Предположим, что множество $\mathcal{F}(\Theta) \subset \mathbb{R}^n(h, \mathbf{f})$ имеет меру нуль и почти все торы Лиувилля, отвечающие регулярным значениям $\mathcal{F}$, являются нерезонансными. Тогда система $\text{sgrad } H$ называется *нерезонансной*.

Ниже мы предполагаем, что многообразие M ориентируемо и на гиперповерхности Θ фиксировано поле внешних (ориентирующих) нормалей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Если интегрируемая система $\text{sgrad } H$ является нерезонансной, то каждый регулярный тор $T^n \subset M_{h, \mathbf{f}}$ не пересекается с множеством Θ или целиком лежит в нем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F'_i = F_i|_{\Theta}$. Из условия, что $\mathcal{F}(\Theta)$ имеет меру нуль, следует функциональная зависимость $F'_1, \dots, F'_n$ на Θ . Пусть $\rho \in T^n \cap \Theta$, тогда в некоторой окрестности $O(\rho) \cap \Theta$ одна из функций F'_i выражается через остальные, например $F'_n = G(F'_1, \dots, F'_{n-1})$. Интеграл $F = F_n - G(F_1, \dots, F_{n-1})$ обращается в нуль на $O(\rho) \cap \Theta$ и $dF_\rho \neq 0$. Так как $F = \text{const}$ на торе T^n , проходящем через ρ , то $O(\rho) \cap T^n \subset \Theta$ (если $O(\rho)$ достаточно мала). В силу произвольности $\rho \in T^n \cap \Theta$ и связности тора T^n каждая его точка лежит в Θ .

Регулярные компактные вложенные в Θ компоненты $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ также называются торами Лиувилля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть на M задана нерезонансная интегрируемая система $\text{sgrad } H$. Тогда для любого тора Лиувилля $T^n \subset \Theta$ найдутся его окрестность U и интеграл F системы $\text{sgrad } H$ такие, что

$$x \in U \cap \Theta \Leftrightarrow F(x) = 0, \quad dF(x) \neq 0, \quad x \in U \cap \Theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_0^n \subset \Theta$ и $H(T_0^n) = 0$, $F_k(T_0^n) = 0$ для всех $1 \leq k \leq n-1$. Некоторая окрестность U тора T_0^n диффеоморфна $T^n \times D^n$, при этом в диске D^n заданы координаты $(h, f_1, \dots, f_{n-1})$, являющиеся значениями интегралов H , F_k . Точка $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ является центром диска $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Если при диффеоморфизме $i: U \rightarrow T^n \times D^n$ точке $p \in U$ отвечает пара $(x, \mathbf{y})$, то

$$\mathbf{y} = (h, f_1, \dots, f_{n-1}) \in D^n, \quad h = H(p), \quad f_k = F_k(p).$$

Заметим, что $i^{-1}(x, \mathbf{0})$ – центр диска $D_x^n = i^{-1}(x \times D^n)$, трансверсального тору T_0^n . Пусть $p \in T_0^n$, тогда $i(p) = (x, \mathbf{0})$. Так как D_x^n трансверсален Θ , то $D_x^n \cap \Theta$ есть вложенный диск D_x^{n-1} с центром p . Диффеоморфизм $i: D_x^n \rightarrow x \times D^n$ индуцирует на D_x^n координаты $(h, f_1, \dots, f_{n-1})$ из D^n . В этих координатах подмногообразие $D_x^{n-1} \subset D_x^n$ определяется уравнением $F = 0$ для некоторой функции $F(h, f_1, \dots, f_{n-1})$. Функция $F = F(H, F_1, \dots, F_{n-1})$ на U является интегралом $\text{sgrad } H$. Докажем, что $F^{-1}(0) = U \cap \Theta$. Пусть $\tilde{p} \in U \cap \Theta$ и $i(\tilde{p}) = (\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}})$, тогда

$$F(\tilde{p}) = F(H(\tilde{p}), \mathbf{F}(\tilde{p})) = F(h, \mathbf{f}),$$

где $(h, \mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{y}}$. Так как точка $i^{-1}(x, \tilde{\mathbf{y}}) \in D_x^n$ лежит на том же торе Лиувилля, что и $\tilde{p}$, то она лежит в Θ . Следовательно, $F(h, \mathbf{f}) = 0$, т.е. $F(\tilde{p}) = 0$. Итак, $U \cap \Theta \subset F^{-1}(0)$. Обратное включение доказывается аналогично. Предложение 14 доказано.

Обозначим через $\text{sgrad}^\infty f(\rho)$ несобственное предельное положение $\text{sgrad } f$ в точке $\rho \in \Theta$, если оно существует и единственно в том смысле, что нет никаких других предельных положений.

Пусть $\lim_{x \rightarrow \rho} |\text{sgrad } f(x)| = +\infty$ и гиперповерхность Θ в окрестности ρ определяется уравнением $x_1 = 0$, где x_1 возрастает в направлении внешней нормали. Тогда обозначим

$$\text{sgrad}_+^\infty f(\rho) = \lim_{x \rightarrow \rho, x_1 > 0} [\text{sgrad } f(x)]_+, \quad \text{sgrad}_-^\infty f(\rho) = \lim_{x \rightarrow \rho, x_1 < 0} [\text{sgrad } f(x)]_+,$$

если оба эти предела существуют и единственны в том смысле, что нет никаких других предельных положений.

ТЕОРЕМА 6. Пусть на M задана нерезонансная интегрируемая система $\text{sgrad } H$ с отображением момента (6.3) и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$ в каждой точке $\rho \in \Theta$. Тогда для любого тора Лиувилля $T_0^n \subset \Theta$ в некоторой его окрестности $U(T_0^n)$ существуют независимые попарно коммутирующие интегралы $f_1, \dots, f_n$ системы $\text{sgrad } H$ такие, что имеет место следующее.

- 1) Все поля $\text{sgrad } f_i$, поля направлений $\text{sgrad } f_\alpha$ и распределение прямых $[\text{sgrad } f_1]$ гладко продолжаются на $U(T_0^n)$ при всех $2 \leq \alpha \leq k$ и $k+1 \leq i \leq n$. При этом $\Theta \cap U(T_0^n) = f_1^{-1}(0)$ и $f_n = H$.
- 2) В каждой точке $\rho \in T_0^n$ каждое поле $\text{sgrad } f_\alpha$ имеет несобственное предельное положение $\text{sgrad}^\infty f_\alpha(\rho) = [v_\alpha(\rho)]_+$, а поле $\text{sgrad } f_1$ имеет два несобственных предельных положения $\text{sgrad}_\pm^\infty f(\rho) = \pm[v_1(\rho)]_+$.

3) Гладкие векторные поля v_α и v_1 определены на $U(T_0^n)$, при этом

$$T_\rho T_0^n = (\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T_0^n) \oplus [\text{sgrad } f_{k+1}(\rho), \dots, \text{sgrad } f_n(\rho)], \\ \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T_0^n = [v_1(\rho), \dots, v_k(\rho)], \quad \Pi_\rho = [v_2(\rho), \dots, v_k(\rho)].$$

4) На торе T_0^n существуют угловые координаты φ_s , в которых интегральные траектории полей $\text{sgrad } f_i$, v_α и v_1 являются линейными функциями времени $\varphi_s(t) = \nu_s t + c_s$ для некоторых частот ν_s , постоянных на торе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k > 1$, $2 \leq \alpha \leq k$, $k+1 \leq i \leq n$, $\rho \in T_0^n \subset \Theta$. Введем в окрестности $O(\rho)$ канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых $\mathbf{x}(\rho) = \mathbf{0}$. Координатные поверхности $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{const}$ и $\mathbf{x} = \text{const}$ являются интегральными подмногообразиями $2k$ -мерного распределения Z и $(2n - 2k)$ -мерного распределения P , так что:

- а) в каждой точке $y \in O(\rho) \cap \Theta$ имеет место $Z_y = \mathcal{Z}_y$;
- б) подпространства Z_y и P_y трансверсальны и косоортогональны в каждой точке $y \in O(\rho)$.

Пусть T^n – тор Лиувилля, пересекающий $O(\rho) \setminus \Theta$, и $y \in T^n$ – произвольная точка. Поскольку каждое из Z_y и P_y является симплектическим пространством, а плоскость $T_y T^n$ изотропна [1], то

$$\dim(T_y T^n \cap Z_y) = k, \quad \dim(T_y T^n \cap P_y) = n - k. \quad (6.4)$$

При построении канонических координат (4.8) сначала вводятся симплектические координаты $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ на каждом подмногообразии распределения P , а затем координаты $(x_3, \dots, x_{2k})$ на каждой координатной поверхности, отвечающей фиксированным значениям $x_1, x_2, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ (см. доказательство предложения 5).

По предложению 14 можно считать, что $x_1 \equiv f_1$. Из $\{f_1, f_s\} = 0$ и (6.1) вытекает $\partial f_s / \partial x_2 \equiv 0$ для всех $1 \leq s \leq n$. Отсюда и из (6.4) следует, что координаты $x_2, x_4, \dots, x_{2k}, \mathbf{p}$ можно выбирать на торах Лиувилля $T^n \subset U$, а $x_3, \dots, x_{2k-1}, \mathbf{q}$ – в поперечных им направлениях. Функции $f_i \equiv q_{i-k}$, $f_\alpha \equiv x_{2\alpha-1}$ и f_1 являются независимыми попарно коммутирующими интегралами $\text{sgrad } H$. Заметим, что они определены в некоторой окрестности $U(T_0^n)$ тора T_0^n . Из (6.1) вытекает, что если $y \in O(\rho) \setminus \Theta$, то $\text{sgrad } f_i(y) \in P_y$ и $\text{sgrad } f_\alpha(y) \in \mathcal{Z}_y$.

Из теоремы 5 следует, что каждое поле направлений $\text{sgrad } f_\alpha$ гладко продолжается на $O(\rho)$. На U определено гладкое поле прямых $[\text{sgrad } f_1] = [\partial / \partial x_2]$. Из (6.1) следует, что в каждой точке $y \in O(\rho) \cap \Theta$ векторы направлений $\text{sgrad}^\infty f_\alpha(y)$ образуют базис $(k-1)$ -мерного подпространства $\Pi_y \cap T_y T^n$, где $T^n \subset \Theta$ – тор Лиувилля, проходящий через точку y . Добавляя вектор $\partial / \partial x_2$, получим базис пространства $\mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$. Согласно теореме 1 каждое поле $\text{sgrad } f_i$ гладко продолжается на $O(\rho)$. Из линейной независимости ковекторов $df_i(\rho)$ следует

$$[\text{sgrad } f_1(\rho), \dots, \text{sgrad } f_{n-k}(\rho)] \cap (\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n) = 0.$$

В силу произвольности точки $\rho \in T_0^n$ можно считать $O(\rho) = U(T_0^n)$. Поскольку по условию теоремы поле $\text{sgrad } H$ гладко продолжается на M , один из интегралов f_i можно заменить на H . Обозначим его f_n и перенумеруем оставшиеся. Доказаны пп. 1)–3).

Рассмотрим векторные поля $v_1 = f_1 \text{sgrad } f_1$ и $v_\alpha = f_1^2 \text{sgrad } f_\alpha$. Поскольку локально $f_1 \equiv x_1$, то из (6.1) следует, что каждое из полей v_α и v_1 корректно определено на $U(T_0^n)$. Эти поля коммутируют между собой и с $\text{sgrad } f_i$. Отсюда следует п. 4).

Случай $k = 1$ очевиден. Имеем $f_2 = H$ и интеграл f_1 , равный нулю на особой поверхности Θ . Теорема 6 доказана.

Заметим, что несобственные предельные положения векторов $\text{sgrad } f_\alpha$, где $2 \leq \alpha \leq k$, порождают $(k - 1)$ -мерное интегрируемое распределение на Θ . Из доказательства видно, что его интегральные многообразия суть лежандровы в $(2k - 1)$ -мерных контактных многообразиях, на которые расслоено Θ (см. следствие 1 из теоремы 4).

В условиях теоремы 6 тор T^n расслоен на k -мерные интегральные многообразия распределения $\rho \mapsto \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n$ и на $(n - k)$ -мерные интегральные многообразия распределения $\rho \mapsto P_\rho \cap T_\rho T^n$. В следующем примере каждое из этих многообразий является инъективно погруженной в T^2 прямой $\mathbb{R}$ для почти всех торов Лиувилля $T^2 \subset \Theta$.

ПРИМЕР 13. В задаче из примера 7 гамильтонова система $\text{sgrad } H$ корректно определена на $M \cong S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ и 3-многообразие Θ расслоено на торы Лиувилля T^2 . Для каждого из них при $k = 1$ выполнены условия теоремы 6. В качестве интеграла f_1 здесь можно взять дополнительный интеграл f , при этом $f_2 = H$. Из найденных в [16] значений инвариантов Фоменко–Цишанга $W^*(Q_h^3)$ [15] следует, что для почти всех $T^2 \subset \Theta$ интегральные кривые распределения прямых $[\text{sgrad } f_1]$, а также траектории поля $\text{sgrad } f_2$ являются всюду плотными обмотками тора.

Список литературы

- [1] А. Т. Фоменко, *Symplectic geometry*, 2nd ed., Adv. Stud. Contemp. Math., **5**, Gordon and Breach, Luxembourg, 1995; пер. с рус.: А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [2] О. И. Богоявленский, “Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 883–938; англ. пер.: О. И. Bogoyavlenskii, “Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:2 (1985), 207–257.
- [3] М. Р. Kharlamov, “Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **10**:4 (2005), 381–398.
- [4] J. Martinet, “Sur les singularités des formes différentielles”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **20**:1 (1970), 95–178.
- [5] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, “Симплектическая геометрия”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр. Динамические системы*–4, ВИНТИ, М., 1985, 7–139; англ. пер.: V. I. Arnol'd, A. B. Givental', “Symplectic

- geometry”, *Dynamical systems*. Vol. IV. *Symplectic geometry and its applications*, Encyclopedia Math. Sci., **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 1–136.
- [6] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds*, Expository lectures from the CBMS Regional Conference (University of North Carolina, 1976), Regional Conference Series in Mathematics, **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [7] Д. Б. Зотьев, “О симплектической геометрии многообразий с почти всюду невырожденной замкнутой 2-формой”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 66–77; англ. пер.: D. B. Zot’ev, “Symplectic geometry of manifolds with almost nowhere vanishing closed 2-form”, *Math. Notes*, **76**:1–2 (2004), 62–72.
- [8] S. N. Pnevmatikos, “Structures hamiltoniennes en presence de contraintes”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A*, **289**:16 (1979), 799–802.
- [9] T. Nôno, F. Mimura, “Poisson bracket under mappings”, *Hokkaido Math. J.*, **1** (1972), 232–241.
- [10] R. Hermann, *Lie algebras and quantum mechanics*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1970.
- [11] S. N. Pnevmatikos, “Structures symplectiques singulières génériques”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **34**:3 (1984), 201–218.
- [12] А. А. Кириллов, “Локальные алгебры Ли”, *УМН*, **31**:4 (1976), 57–76; англ. пер.: A. A. Kirillov, “Local Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **31**:4 (1976), 55–75.
- [13] J. W. Gray, “Some global properties of contact structures”, *Ann. of Math. (2)*, **69**:2 (1959), 421–450.
- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля*, 7-е изд., Наука, М., 1988; англ. пер. 6-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics. Vol. 2. The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford–New York–Toronto, 1975.
- [15] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. I, II, Удмуртский ун-т, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [16] Д. Б. Зотьев, “Фазовая топология I класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле”, *Фундам. и прикл. матем.*, **12**:1 (2006), 95–128.

Д. Б. Зотьев (D. B. Zot’ev)
 Волгоградский государственный
 технический университет
E-mail: zotев@inbox.ru

Поступила в редакцию
 27.02.2006 и 18.08.2006