Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гончар, Об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в $\bar{C}$ -дробь, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 10, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:52:06

УДК 517.53

А. А. Гончар

Об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в C -дробь

В работе обсуждается известная гипотеза Лейтона об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в C -дробь общего вида. Доказана теорема, из которой следует, в частности, справедливость этой гипотезы для *произвольных* неубывающих последовательностей показателей $\alpha_k \rightarrow \infty$.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим непрерывную дробь вида

$$f(z) = 1 + \frac{a_1 z^{\alpha_1}}{1 + \frac{a_2 z^{\alpha_2}}{1 + \ddots \frac{a_k z^{\alpha_k}}{1 + \ddots}}}, \quad (1)$$

где α_k – произвольные натуральные числа, a_k – комплексные числа, отличные от нуля ($k = 1, 2, \dots$). Такая дробь называется *общей C -дробью* (в терминологии, принятой в теории непрерывных дробей; см. [1], [2]). Предположим, что параметры C -дроби (1) удовлетворяют условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/\alpha_k} = 1. \quad (2)$$

Из хорошо известных результатов теории непрерывных дробей следует, что любая C -дробь вида (1), удовлетворяющая условиям (2), равномерно сходится в сферической метрике внутри (на компактных подмножествах) единичного круга $D: |z| < 1$; тем самым, предельная функция f , заданная непрерывной дробью (1), (2) в D , мероморфна в этом круге (и голоморфна в точке $z = 0$, $f(0) = 1$).

Классический пример – непрерывная дробь Рамануджана

$$\Re(z) = 1 + \frac{z}{1 + \frac{z^2}{1 + \ddots \frac{z^k}{1 + \ddots}}}.$$

Работа выполнена при поддержке Программы ОМН РАН, фонда INTAS (грант № 03-51-6637) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4466.2006.1).

Из результатов Рамануджана следует, что единичный круг D является естественной областью существования функции $\Re$ (это замечание содержится в монографии Уолла [1]). Еще в 1940 году Лейтон (W. Leighton) высказал гипотезу, что тем же свойством (непродолжимости за пределы круга D) обладает функция f , заданная произвольной C -дробью вида (1), где $\alpha_k \rightarrow \infty$ и на a_k наложены надлежащие ограничения; эта гипотеза подробно обсуждается в [1], а также в монографии Джоунса и Трона [2] (изданной в известной серии “Encyclopedia of mathematics and its applications”, т. 11). В том же году Скотт и Уолл [3] доказали соответствующее утверждение для весьма специального случая: $\alpha_k = m^k$, $a_k = a$, $k = 1, 2, \dots$ ($m \geq 2$ – целое, a – вещественное число). В работе Трона [4] гипотеза Лейтона была доказана для дробей вида (1), (2) с неубывающей последовательностью показателей $\{\alpha_k\}$ при сильном дополнительном условии арифметического характера на числа этой последовательности (см. [2; теорема 12.7, условие (б)]). Обзор приведенных выше и последующих результатов в этом направлении содержится в [2]; там же отмечено, что из этих результатов следует справедливость рассматриваемой гипотезы (без каких-либо ограничений арифметического характера на $\{\alpha_k\}$) только для очень быстро возрастающих показателей α_k (а именно при условии $\alpha_k/\alpha_{k-1} \rightarrow \infty$).

В этой работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – мероморфная функция в единичном круге $D: |z| < 1$, заданная C -дробью вида (1), (2). Если при этом последовательность показателей $\{\alpha_k\}$ удовлетворяет условию

$$\beta_k := \alpha_k - \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - \alpha_{k-3} + \dots + (-1)^{k-1} \alpha_1 > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то круг D является естественной областью существования функции f (другими словами, каждая точка окружности $L: |z| = 1$ является особой точкой мероморфной функции $f(z)$, $z \in D$).

Отметим, что из теоремы (1) легко следует справедливость гипотезы Лейтона для C -дробей вида (1), (2) с произвольной неубывающей последовательностью показателей $\{\alpha_k\}$

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (4)$$

(подробнее см. §3 ниже). Отсюда ясно, что дополнительное условие (3) не налагает никаких ограничений на скорость стремления показателей α_k к бесконечности.

В §2 приводится доказательство теоремы 1, в §3 – ряд замечаний, связанных с условием (3).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы разобьем на несколько пунктов.

1. В этом пункте мы приведем необходимые для дальнейшего формулы, лежащие в основе теории непрерывных дробей (в применении к C -дробям вида (1), удовлетворяющим условию (3); подробнее см. [1], [2]).

Подходящие дроби C -дроби (1) будем обозначать через

$$f_k(z) = \frac{p_k(z)}{q_k(z)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Числители p_k и знаменатели q_k подходящих дробей f_k удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям (с указанными ниже начальными условиями)

$$\begin{aligned} p_k(z) &= p_{k-1}(z) + a_k z^{\alpha_k} p_{k-2}(z), & p_{-1} &= 1, & p_0 &= 1, \\ q_k(z) &= q_{k-1}(z) + a_k z^{\alpha_k} q_{k-2}(z), & q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1; \end{aligned} \quad (5)$$

$p_k(z)$, $q_k(z)$ – многочлены от z , $p_k(0) = q_k(0) = 1$ для всех $k \geq 0$.

Для любого $k \geq 1$ положим

$$n_1 = \alpha_1, \quad n_2 = \alpha_2, \dots, \quad n_k = \alpha_k + \alpha_{k-2} + \alpha_{k-4} + \dots \quad (n_0 = 0) \quad (6)$$

(суммирование заканчивается числом α_1 для нечетных k и α_2 для четных k).
Условие (3) означает, что $\{n_k\}$ – *возрастающая* последовательность

$$n_k = n_{k-1} + \beta_k > n_{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (7)$$

С учетом неравенств (7) из рекуррентных соотношений (5) получаем

$$\deg p_k = n_k, \quad \deg q_k \leq n_k, \quad k \geq 1; \quad (8)$$

точнее, $\deg q_k = n_k$ для четных k и $\deg q_k < n_k$ для нечетных k (доказательство – по индукции). Из (8) следует, что *порядок рациональной функции f_k равен n_k для всех $k \geq 1$* (по определению порядок $f_k = \max\{\deg p_k, \deg q_k\}$).

Введем также следующие обозначения:

$$A_k = (-1)^{k-1} a_1 a_2 \dots a_k, \quad d_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k; \quad (9)$$

отметим сразу, что из (6), (9) вытекают равенства

$$d_k = n_{k-1} + n_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

В обозначениях (9) детерминантная формула для дроби (1) записывается в виде

$$(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)(z) = A_k z^{d_k};$$

тем самым,

$$(f_k - f_{k-1})(z) = \frac{A_k z^{d_k}}{(q_{k-1} q_k)(z)}. \quad (11)$$

Сходимость непрерывной дроби (1) эквивалентна сходимости ряда

$$f(z) \cong 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{k-1})(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k z^{d_k}}{(q_{k-1} q_k)(z)} \quad (12)$$

(знак “ $\cong$ ” означает, что последовательность подходящих дробей непрерывной дроби (1) совпадает с последовательностью частных сумм ряда (12)).

Равномерная сходимость в сферической метрике C -дроби (1) внутри (на компактных подмножествах) единичного круга D следует из условий (2) и, например, теоремы Ворпицкого [2] (а также из приведенных ниже результатов). Наша цель – доказать, что все точки единичной окружности L являются особыми точками соответствующей мероморфной функции $f(z)$, $z \in D$ (совпадающей с суммой ряда (12) в круге D).

2. В этом пункте докажем следующее утверждение: для любой дроби вида (1), параметры которой удовлетворяют условиям (2), (3), справедливы соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\|_L^{1/n_k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_k\|_L^{1/n_k} = 1 \quad (13)$$

($\|\cdot\|_L$ – суп-норма на единичной окружности L).

Фиксируем произвольные r и δ , принадлежащие интервалу $(0, 1)$ (r произвольно близко к 1, δ произвольно мало), и затем натуральное число m такое, что для всех $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$|a_{m+k}|r^{\alpha_{m+k}} < \delta(1 - \delta) \quad (14)$$

(возможность выбора такого m вытекает из соотношений (2)). Рассмотрим остаток

$$\frac{a_{m+1}z^{\alpha_{m+1}}}{1 + \frac{a_{m+2}z^{\alpha_{m+2}}}{1 + \ddots}} \quad (15)$$

C -дроби (1); подходящие дроби непрерывной дроби (15) будем обозначать через $f_{m,k} = p_{m,k}/q_{m,k}$. Числители и знаменатели этих дробей удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} p_{m,k}(z) &= p_{m,k-1}(z) + a_{m+k}z^{\alpha_{m+k}}p_{m,k-2}(z), & p_{m,-1} &= 1, & p_{m,0} &= 0; \\ q_{m,k}(z) &= q_{m,k-1}(z) + a_{m+k}z^{\alpha_{m+k}}q_{m,k-2}(z), & q_{m,-1} &= 0, & q_{m,0} &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим сначала второе из этих соотношений. При $k \geq 1$ положим $w_{m,k} = q_{m,k}/q_{m,k-1}$; из (16) получаем

$$w_{m,k} = 1 + \frac{a_{m+k}z^{\alpha_{m+k}}}{w_{m,k-1}(z)}, \quad k \geq 2. \quad (17)$$

Легко показать по индукции, что для всех $k \geq 1$ и всех z , принадлежащих окружности $L_r: |z| = r$, справедливы оценки

$$1 - \delta < |w_{m,k}(z)| < 1 + \delta. \quad (18)$$

Действительно, при $k = 1$ имеем $w_{m,1} = 1$; предположим, что оценки (18) имеют место для индекса $k - 1 \geq 1$. Учитывая (14), из (17) получаем

$$|w_{m,k}(z)| < 1 + \frac{\delta(1 - \delta)}{1 - \delta} = 1 + \delta, \quad |w_{m,k}(z)| > 1 - \frac{\delta(1 - \delta)}{1 - \delta} = 1 - \delta.$$

Из (18) следуют оценки

$$|(w_{m,1}w_{m,2} \cdots w_{m,k})(z)| = |q_{m,k}(z)| < (1 + \delta)^k, \quad z \in L_r, \quad k \geq 1. \quad (19)$$

Переходя к числителям $p_{m,k}$, заметим, что при всех $k \geq 1$ они имеют общий множитель $a_{m+1}z^{\alpha_{m+1}}$; с учетом этого положим

$$p_{m,k}^*(z) = \frac{p_{m,k}(z)}{a_{m+1}z^{\alpha_{m+1}}}, \quad k \geq 1.$$

Ясно, что при $k \geq 2$ многочлены p_k^* удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и многочлены p_k , но с другими начальными условиями:

$$p_{m,k}^*(z) = p_{m,k-1}^*(z) + a_{m+k} z^{\alpha_{m+k}} p_{m,k-2}^*(z), \quad p_{m,0}^*(z) = 0, \quad p_{m,1}^*(z) = 1$$

(совпадающими с начальными условиями для многочленов $q_{m,k}$ со сдвигом k на единицу; ср. (16)). Аналогично предыдущему, положим $w_{m,k}^* = p_{m,k}^*/p_{m,k-1}^*$, $k \geq 2$; имеем $w_{m,2}^* = 1$ и, как и выше, получаем оценки

$$1 - \delta < |w_{m,k}^*(z)| < 1 + \delta, \quad z \in L_r, \quad k \geq 2.$$

Тем самым, имеем

$$|(w_{m,2}^* w_{m,3}^* \cdots w_{m,k}^*)(z)| = |p_{m,k}^*(z)| < (1 + \delta)^{k-1}, \quad z \in L_r, \quad k \geq 2. \quad (20)$$

Из оценок (20) (с учетом (14)) получаем соответствующие оценки для многочленов $p_{m,k}(z) = a_{m+1} z^{\alpha_{m+1}} p_{m,k}^*(z)$:

$$|p_{m,k}(z)| < (1 + \delta)^{k-1}, \quad z \in L_r, \quad k \geq 1. \quad (21)$$

Теперь используем формулы, связывающие числители и знаменатели подходящих дробей непрерывных дробей (1) и (15). Имеем

$$q_{m+k} = q_{m,k} q_m + p_{m,k} q_{m-1}, \quad k \geq 1;$$

аналогичное соотношение справедливо для p_{m+k} . Учитывая (19) и (21), получаем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|q_k\|_{L_r}^{1/k} \leq 1 + \delta.$$

Применяя лемму Бернштейна–Волша (об оценке роста многочленов), получаем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|q_k\|_L^{1/n_k} \leq \frac{1 + \delta}{r}.$$

Наконец, с учетом произвола в выборе r и δ , отсюда приходим к соотношению

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|q_k\|_L^{1/n_k} \leq 1. \quad (22)$$

Аналогично, для числителей p_k подходящих дробей f_k имеем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|p_k\|_L^{1/n_k} \leq 1. \quad (23)$$

Поскольку $p_k(0) = q_k(0) = 1$, из (22), (23) получаем соотношения (13) (принцип максимума модуля).

Отметим, что соотношения (13) доказаны выше для числителей и знаменателей подходящих дробей произвольной C -дроби вида (1), параметры которой удовлетворяют только условиям (2); в случае, если условие (3) не выполнено и равенства (8) не имеют места, под n_k в этих соотношениях нужно понимать степени соответствующих многочленов.

3. Непрерывная дробь (1), (2) сходится в круге D к мероморфной функции $f(z)$, $z \in D$ ($f(0) = 1$). Из представления f в D как суммы ряда (12) следует, что для любого $k \geq 1$ справедливо соотношение

$$(f - f_k)(z) = O(z^{d_{k+1}}), \quad z \rightarrow 0. \quad (24)$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $z = 1$ — особая точка функции f (замена $z \rightarrow e^{it}z$, $t \in (0, 2\pi)$, не меняет вида дроби (1) и сохраняет условия (2), (3)). Мы докажем это утверждение, перейдя в плоскость переменного $\zeta = 1/z$.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения, связанные с заменой $\zeta = 1/z$. Положим

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad P_k(\zeta) = \zeta^{n_k} p_k\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad Q_k(\zeta) = \zeta^{n_k} q_k\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$F_k(\zeta) = f_k\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{P_k(\zeta)}{Q_k(\zeta)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (F_0(\zeta) = 1).$$

Функция $F(\zeta)$ мероморфна в области $G = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ (G — внешность единичного круга в расширенной комплексной плоскости; тем самым, бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$ принадлежит G); $P_k(\zeta)$, $Q_k(\zeta)$ — многочлены от ζ (с единичным старшим коэффициентом, $\deg P_k = \deg Q_k = n_k$); последовательность рациональных функций $\{F_k\}$ равномерно сходится в сферической метрике внутри G к мероморфной функции F (ср. пп. 1, 2). Отметим также, что последовательность $\{F_k(\zeta)\}$ совпадает с последовательностью подходящих дробей непрерывной дроби вида

$$1 + \frac{a_1}{\zeta^{\beta_1} + \frac{a_2}{\zeta^{\beta_2} + \dots \frac{a_k}{\zeta^{\beta_k} + \dots}}}, \quad (25)$$

эквивалентной непрерывной дроби (1) (с заменой $z = 1/\zeta$; последовательность $\{\beta_k\}$ определяется формулами (3)). Формулы (11), (12) в плоскости $\zeta = 1/z$ принимают вид:

$$(F_k - F_{k-1})(\zeta) = \frac{A_k}{\zeta^{n_{k-1} + n_k} (q_{k-1} q_k) (1/\zeta)} = \frac{A_k}{(Q_{k-1} Q_k)(\zeta)}, \quad (26)$$

$$F(\zeta) \cong 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_k - F_{k-1})(\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(Q_{k-1} Q_k)(\zeta)}. \quad (27)$$

Из соотношений (13) вытекают следующие соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|_L^{1/n_k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\|_L^{1/n_k} = 1 \quad (28)$$

(как и выше, L — единичная окружность).

4. Перейдем к доказательству того, что точка $\zeta = 1$ является особой точкой мероморфной функции $F(\zeta)$, $\zeta \in G$ (ср. п. 3). Доказательство – от противного; предположим, что эта функция допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность точки $\zeta = 1$. Пусть U – круг радиуса ε с центром в точке 1; $\varepsilon > 0$ зафиксируем так, чтобы функция F была голоморфной в замыкании круга U .

Для любого ρ , $1 \leq \rho < 1 + \varepsilon$, положим

$$G_\rho = \{\zeta : |\zeta| > \rho\}, \quad \Omega_\rho = G_\rho \cup U \quad (G_1 = G).$$

Пусть φ_ρ – функция, конформно отображающая область Ω_ρ на единичный круг D , $\varphi_\rho(\infty) = 0$, $\varphi'_\rho(\infty) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta \varphi_\rho(\zeta) > 0$ (Ω_ρ – область, поскольку $\rho < 1 + \varepsilon$). Это отображение продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей, и мы будем считать, что функция φ_ρ соответствующим образом определена в $\bar{\Omega}_\rho$; в частности, имеем

$$|\varphi_\rho(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \partial\Omega_\rho. \quad (29)$$

Из симметрии области Ω_ρ относительно вещественной оси следует, что функция φ_ρ положительна и монотонно убывает (от 1 до 0) на луче $[1 - \varepsilon, +\infty)$; в частности, $0 < \varphi_\rho(1) < 1$. Отметим, что $\varphi_\rho(1)$ (как функция от $\rho \in [1, 1 + \varepsilon)$) монотонно убывает при $\rho \downarrow 1$ (принцип расширения области). Отсюда ясно, что для всех $\rho > 1$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки 1, имеет место неравенство

$$\rho^2 \varphi_\rho(1) < 1. \quad (30)$$

Выберем и зафиксируем произвольное $\rho > 1$, для которого справедливо неравенство (30). С учетом убывания функции $\varphi_\rho(\zeta)$ (как функции от ζ) на луче $[1, +\infty)$ для этого ρ получаем следующее неравенство:

$$\rho^2 \varphi_\rho(\rho) < 1. \quad (31)$$

Подчеркнем, что число $\rho > 1$, для которого справедливо неравенство (31), фиксировано всюду в дальнейшем.

5. Из (24) (см. также (27)) получаем соотношение

$$(F - F_k)(\zeta) = O(\zeta^{d_{k+1}}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (32)$$

(функция $F - F_k$ имеет нуль порядка $d_{k+1} = n_k + n_{k+1}$ в точке $\zeta = \infty$).

Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ – полюсы функции F в замкнутой области $\bar{\Omega}_\rho$ (каждый полюс выписывается столько раз, какова его кратность); положим

$$\omega_\rho(\zeta) = \prod_{j=1}^p \left(1 - \frac{\zeta_j}{\zeta}\right).$$

Функция

$$Q_k(\zeta)\omega_\rho(\zeta)(F - F_k)(\zeta) = (Q_k\omega_\rho F - \omega_\rho P_k)(\zeta), \quad \zeta \in \bar{\Omega}_\rho,$$

голоморфна в замыкании области Ω_ρ и имеет нуль порядка n_{k+1} в точке $\zeta = \infty$ (ср. (32)). Положим

$$\Phi_{k,\rho}(\zeta) = \frac{(Q_k \omega_\rho F - \omega_\rho P_k)(\zeta)}{\varphi_\rho^{n_{k+1}}(\zeta)}, \quad \zeta \in \overline{\Omega}_\rho; \quad (33)$$

из сказанного выше ясно, что функция $\Phi_{k,\rho}$ голоморфна в области Ω_ρ и непрерывна в ее замыкании. С учетом (29) на границе этой области получаем оценку

$$|\Phi_{k,\rho}(\zeta)| \leq 2M_\rho M_{k,\rho}, \quad \zeta \in \partial\Omega_\rho,$$

где

$$M_\rho = \max\{\|\omega_\rho F\|_{\partial\Omega_\rho}, \|\omega_\rho\|_{\partial\Omega_\rho}\}, \quad M_{k,\rho} = \max\{\|P_k\|_{\partial\Omega_\rho}, \|Q_k\|_{\partial\Omega_\rho}\}.$$

По принципу максимума модуля последнее неравенство справедливо для всех $\zeta \in \Omega_\rho$:

$$|\Phi_{k,\rho}(\zeta)| \leq 2M_\rho M_{k,\rho}, \quad \zeta \in \Omega_\rho. \quad (34)$$

Из (34) (см. также (33)) получаем следующую оценку:

$$|(F - F_k)(\zeta)| \leq \frac{2M_\rho M_{k,\rho} |\varphi_\rho(\zeta)|^{n_{k+1}}}{|\omega_\rho(\zeta)| |Q_k(\zeta)|}, \quad \zeta \in \Omega_\rho. \quad (35)$$

6. Воспользуемся теперь соотношениями (28). Из равномерной сходимости последовательности F_k к функции F внутри G (в сферической метрике) вытекает, что нули полиномов Q_k (полюсы рациональных функций F_k) стремятся к полюсам функции F в G (при этом каждый полюс F “притягивает” столько полюсов F_k , какова его кратность). В частности, число полюсов функций F_k во внешности любого круга радиуса $R > 1$ с центром в нуле мажорируется константой, зависящей только от F и R (и не зависящей от k). С учетом сказанного простым следствием второго из соотношений (28) является следующее утверждение: *в каждой точке $\zeta \in G$, не являющейся полюсом функции F , имеет место соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Q_k(\zeta)|^{1/n_k} = |\zeta|, \quad \zeta \in G \setminus \mathcal{P}_F, \quad (36)$$

где $\mathcal{P}_F$ – множество полюсов функции $F(\zeta)$, $\zeta \in G$. (Заметим, что это утверждение является простейшим частным случаем хорошо известных результатов, относящихся к существенно более общим ситуациям; см., например, гл. 7 монографии Уолша [5], а также статью [6], близкую по своей тематике к настоящей работе.) Аналогичное соотношение для многочленов P_k (вне множества нулей F в G) является следствием первого из соотношений (28):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |P_k(\zeta)|^{1/n_k} = |\zeta|, \quad \zeta \in G \setminus \mathcal{N}_F \quad (37)$$

($\mathcal{N}_F$ – множество нулей функции $F(\zeta)$ в области G).

Поскольку фиксированная нами точка $\zeta = \rho > 1$ принадлежит кругу U , в котором функция F голоморфна (см. п. 4 выше), из (36) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Q_k(\rho)|^{1/n_k} = \rho. \quad (38)$$

С другой стороны, из (36) и (37) вытекают следующие соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|_{\partial\Omega_\rho}^{1/n_k} = \rho, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\|_{\partial\Omega_\rho}^{1/n_k} = \rho; \quad (39)$$

тем самым,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{k,\rho}^{1/n_k} = \rho. \quad (40)$$

Объединяя (38) и (40), получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{k,\rho}}{|Q_k(\rho)|} \right)^{1/n_k} = 1; \quad (41)$$

легко видеть, что последнее соотношение остается в силе и после замены (в показателе степени) $1/n_k$ на $1/n_{k+1}$.

7. Рассмотрим оценку (35) в точке $\zeta = \rho \in U$; имеем

$$|(F - F_k)(\rho)| \leq C_\rho \frac{M_{k,\rho}(\varphi_\rho(\rho))^{n_{k+1}}}{|Q_k(\rho)|} < C_\rho \frac{M_{k,\rho}(\varphi_\rho(\rho))^{n_k}}{|Q_k(\rho)|}, \quad (42)$$

где $C_\rho = 2M_\rho/|\omega_\rho(\rho)|$ – положительная константа (напомним, что $\rho < 1 + \varepsilon$ фиксировано, функция F не имеет полюсов в U и, тем самым, $\omega_\rho(\rho) \neq 0$). Из оценки (42) (с учетом соотношения (41)) вытекает неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |(F - F_k)(\rho)|^{1/n_k} \leq \varphi_\rho(\rho) < 1. \quad (43)$$

Заменяя k на $k - 1$ и используя первое из неравенств в (42), получаем оценку

$$|(F - F_{k-1})(\rho)| \leq C_\rho \frac{M_{k-1,\rho}(\varphi_\rho(\rho))^{n_k}}{|Q_{k-1}(\rho)|};$$

ясно также, что соотношение (41) остается в силе, если в скобках заменить k на $k - 1$, но сохранить показатель степени $1/n_k$ (ср. замечание в конце п. 6). Тем самым, имеем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |(F - F_{k-1})(\rho)|^{1/n_k} \leq \varphi_\rho(\rho). \quad (44)$$

Из (43) и (44) вытекает следующая оценка:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |(F_k - F_{k-1})(\rho)|^{1/n_k} \leq \varphi_\rho(\rho) < 1. \quad (45)$$

С другой стороны, имеем (см. (26))

$$(F_k - F_{k-1})(\rho) = \frac{A_k}{Q_{k-1}(\rho)Q_k(\rho)}, \quad A_k = (-1)^{k-1}a_1a_2 \cdots a_k, \quad (46)$$

Из условий (2) следует соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|^{1/(n_{k-1}+n_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_1a_2 \cdots a_k|^{1/(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)} = 1. \quad (47)$$

Из (47), учитывая очевидные оценки

$$1 < \frac{n_{k-1} + n_k}{n_k} < 2,$$

получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|^{1/(n_{k-1} + n_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|^{1/n_k} = 1. \quad (48)$$

Наконец, еще раз воспользуемся соотношением (38); имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} |Q_{k-1}(\rho)|^{1/n_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} |Q_{k-1}(\rho)|^{(1/n_{k-1})(n_{k-1}/n_k)} \leq \rho, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |Q_k(\rho)|^{1/n_k} &= \rho. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (46), учитывая (48), (49), получаем

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |(F_k - F_{k-1})(\rho)|^{1/n_k} \geq \frac{1}{\rho^2}. \quad (50)$$

Сравнение неравенств (45) и (50) приводит к следующему неравенству:

$$\frac{1}{\rho^2} \leq \varphi_\rho(\rho). \quad (51)$$

Неравенство (51) для рассматриваемого (фиксированного) ρ противоречит неравенству (31). Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Замечания

1. Утверждение о непродолжимости мероморфной функции f за пределы единичного круга D достаточно доказать для произвольного остатка непрерывной дроби (1); поэтому при доказательстве этого утверждения для C -дроби вида (1), (2) без ограничения общности можно считать, например, что имеет место неравенство $\alpha_2 > \alpha_1$ (поскольку $\alpha_k \rightarrow \infty$, при необходимости можно перейти к соответствующему остатку дроби (1)). Ниже неравенство $\alpha_2 > \alpha_1$ ($\beta_2 > 0$) будем считать выполненным независимо от того, предполагается ли выполненным условие (3).

Легко видеть, что из условия (4) (с $\alpha_2 > \alpha_1$) следует условие (3). Действительно, расставляя скобки в выражении для β_k , получаем

$$\begin{aligned} \beta_k &= (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + (\alpha_{k-2} - \alpha_{k-3}) + \cdots + (\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1 && \text{для нечетных } k; \\ \beta_k &= (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + (\alpha_{k-2} - \alpha_{k-3}) + \cdots + (\alpha_2 - \alpha_1) && \text{для четных } k. \end{aligned}$$

Из (4) следует, что и в том, и в другом случае все слагаемые, кроме последних, неотрицательны; последние слагаемые > 0 . Тем самым, $\beta_k > 0$ для всех $k \geq 1$ (ср. (3)). Этим подтверждается сказанное в конце § 1 (о справедливости гипотезы Лейтона для произвольных неубывающих последовательностей $\{\alpha_k\}$).

С другой стороны, условие (3) можно представить в следующей форме:

$$\alpha_k = \beta_k + \beta_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\beta_0 = 0), \quad (3^*)$$

где $\{\beta_k\}$ – произвольная последовательность натуральных чисел.

Равенства (3*) показывают, что любая последовательность $\{\alpha_k\}$, удовлетворяющая условию (3), получается в результате минимального “сглаживания” произвольной последовательности натуральных чисел β_k . Отсюда ясно, что условие (3) налагает существенно более слабые, чем условие монотонности (4), ограничения на структуру последовательностей $\{\alpha_k\}$, для которых справедливо утверждение теоремы 1.

2. Как показано выше (см. пп. 1, 3, § 2), при любом $k \geq 1$ подходящая дробь $f_k = p_k/q_k$ непрерывной дроби вида (1)–(3) является рациональной функцией порядка n_k , для которой имеет место соотношение:

$$(f - f_k)(z) = O(z^{n_k + n_{k+1}}), \quad z \rightarrow 0;$$

здесь f – функция, к которой сходится рассматриваемая непрерывная дробь (для произвольной дроби вида (1) – соответствующий ей степенной ряд). Это означает, что последовательность $\{f_k\}$ совпадает с последовательностью диагональных аппроксимаций Паде $\{[n_k/n_k]_f\}$, $k = 1, 2, \dots$, n_k – нормальные индексы на главной диагонали таблицы Паде функции f ; более того, последнее утверждение эквивалентно условию (3) (об аппроксимациях Паде см. монографию Бейкера и Грейвс-Морриса [7]). Связь с аппроксимациями Паде позволяет существенно расширить рамки рассматриваемых задач. Приведем здесь один из результатов в этом направлении, сформулировав его в терминах P -дробей:

$$F(\zeta) = 1 + \frac{a_1}{b_1(\zeta) + \frac{a_2}{b_2(\zeta) + \ddots \frac{a_k}{b_k(\zeta) + \ddots}}}, \quad (52)$$

где $\{a_k\}$ – последовательность комплексных чисел, отличных от нуля, $\{b_k(\zeta)\}$ – последовательность многочленов от ζ с единичным старшим коэффициентом, $\deg b_k = m_k > 0$ (приведенная выше непрерывная дробь (25), эквивалентная дроби (1), (3), соответствует случаю $b_k(\zeta) = \zeta^{\beta_k}$, $m_k = \beta_k$). Положим $n_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $k = 1, 2, \dots$; подходящие дроби непрерывной дроби (52) обозначим через $F_k(\zeta) = P_k(\zeta)/Q_k(\zeta)$ (числитель P_k и знаменатель Q_k – многочлены от ζ степени n_k с единичным старшим коэффициентом, определяемые стандартными рекуррентными соотношениями). Конструкция P -дроби (52) такова, что последовательность ее подходящих дробей $\{F_k\}$ совпадает с последовательностью аппроксимаций Паде $\{[n_k/n_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, степенного ряда с центром в точке $\zeta = \infty$

$$1 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \dots, \quad (53)$$

ассоциированного с этой непрерывной дробью (n_k – нормальные индексы на главной диагонали таблицы Паде ряда (53)).

Пусть J – замкнутая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, область G – внешность кривой J ($\infty \in G$), $\text{cap}(J)$ – логарифмическая емкость J .

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что непрерывная дробь вида (52) равномерно сходится в сферической метрике внутри области G ; F – предельная мероморфная функция. Если выполнены условия:*

$$1^\circ. \lim_{k \rightarrow \infty} |a_1 a_2 \cdots a_k|^{1/(n_{k-1} + n_k)} = \text{cap}(J),$$

$$2^\circ. \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\|_J^{1/n_k} = \text{cap}(J),$$

то все точки кривой J являются особыми точками мероморфной функции $F(\zeta)$, $\zeta \in G$ (а область G – естественной областью существования этой функции).

Многочлены Q_k , $k = 1, 2, \dots$, фигурирующие в условии 2° (знаменатели подходящих дробей F_k) определяются из рекуррентных соотношений

$$Q_k(\zeta) = b_k(\zeta)Q_{k-1}(\zeta) + a_k Q_{k-2}(\zeta), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1; \quad \deg Q_k = n_k.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, изложенной в пп. 3–7, § 2 (ср. формулы (28), (48)).

Список литературы

- [1] H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, Van Nostrand Company, New York, NY, 1948.
- [2] У. Джоунс, В. Трон, *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*, Мир, М., 1985.
- [3] W. T. Scott, H. S. Wall, “Continued fraction expansions for arbitrary power series”, *Ann. of Math.* (2), **41**:2 (1940), 328–349.
- [4] W. J. Thron, “Twin convergence regions for continued fractions $b_0 + K(1/b_n)$. II”, *Amer. J. Math.*, **71**:1 (1949), 112–120.
- [5] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.
- [6] А. А. Гончар, К. Н. Лунгу, “Полюсы диагональных аппроксимаций Паде и аналитическое продолжение функций”, *Матем. сб.*, **111(153)**:2 (1980), 279–292.
- [7] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, М., 1986.

А. А. Гончар (A. A. Gonchar)

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gonchar@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

26.12.2005