Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 4, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:51:38

УДК 517.958

Д. И. Борисов

Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном

В работе исследуется дискретный спектр пары несимметричных квантовых двумерных волноводов, имеющих общую границу, в которой вырезано окно конечной длины. Изучается эффект появления новых собственных значений из границы существенного спектра при прохождении длины окна через критические значения. Для возникающих собственных значений строятся асимптотические разложения по малому параметру – разности длины окна и ближайшего критического значения. Также исследуется поведение спектра при неограниченном увеличении ширины окна, строятся асимптотические разложения собственных значений по большому параметру – длине окна.

Библиография: 22 названия.

Введение

Изучению спектральных свойств эллиптических операторов в неограниченных областях с различными возмущениями в последние годы уделялось достаточно много внимания. В первую очередь это связано с богатыми приложениями таких задач в квантовой механике и акустике. Кроме того, эти задачи обладают разнообразными свойствами, интересными с математической точки зрения. Одним из таких примеров является задача о связанных состояниях двух квантовых волноводов, соединенных окном. Математически это соответствует задаче о собственных значениях оператора Лапласа с условием Дирихле в области, составленной из двух параллельных полос с общей границей, из которой исключен отрезок конечной длины (см. рис. 1). Такая модель была предложена в работе [1]; там же были обсуждены физические аспекты поставленной задачи (см. также [2]). Кроме того, в [1] были получены двусторонние оценки для собственных значений и доказано, что наличие окна приводит к непустому дискретному спектру, число изолированных собственных значений растет с увеличением длины окна, собственные значения возникают, когда длина окна проходит некоторые критические значения, а также был получен ряд численных результатов. Наличие по крайней мере одного изолированного собственного значения для случая полос одинаковой ширины было независимо доказано в [3]. Для достаточно малого окна система имеет ровно одно изолированное собственное значение; в [4] для него были получены двусторонние асимптотические оценки в случае симметричных полос. В [5] аналогичный результат был установлен для нескольких окон малой длины и несимметричных

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Программы поддержки ведущих научных школ РФ. Работа также была поддержана стипендией “Marie Curie International Fellowship” в рамках 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-СТ-2005-006254).

Рис. 1

полос, а также для двух параллельных трехмерных слоев, соединенных малым окном. Случай окна малой длины рассматривался и в [6], где формально была построена асимптотика вышеупомянутого собственного значения по длине окна. Строгое доказательство асимптотических разложений для малого окна недавно было дано в [7]. В [8] изучался случай полос одинаковой ширины и конечного окна и исследовался эффект возникновения следующих собственных значений у системы. Для возникающих собственных значений были получены асимптотические разложения при длинах окна, близких к критическому значению. Также было описано поведение соответствующей собственной функции. Рассеяние для системы из двух волноводов рассматривалось в [1], [9]. Случай, когда на границе области ставится краевое условие Неймана вместо краевого условия Дирихле, изучался в [10]; было доказано существование по крайней мере одного изолированного собственного значения. В работе [11] рассматривалась система из двух симметричных квантовых волноводов, помещенных в магнитное поле. Было показано, что магнитное поле способно нейтрализовать эффект наличия окна, а именно, для достаточно малого окна система не имеет изолированных собственных значений. В то же время для окна достаточно большого размера система имеет изолированное собственное значение.

В настоящей работе мы рассматриваем пару несимметричных волноводов, соединенных конечным окном. Первая часть работы посвящена изучению эффекта возникновения собственных значений при увеличении длины окна. Как уже было отмечено, собственные значения возникают, когда длина окна проходит некоторые критические значения; в работе мы даем критерий “критичности” заданного значения длины. Также получены асимптотические разложения возникающих собственных значений и описано поведение соответствующих собственных функций. Кроме того, мы улучшаем двусторонние оценки для собственных значений, полученные ранее в [1]. Вторая часть работы посвящена изучению поведения дискретного спектра при неограниченном расширении окна. Получены асимптотические разложения для собственных значений в этом случае. При расширении окна “в пределе” происходит сдвиг существенного спектра; описано, каким образом происходит данный сдвиг.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты,

$$\Pi^+ := \{x : 0 < x_2 < \pi\}, \quad \Pi^- := \{x : -d < x_2 < 0\}.$$

Ширину d полосы Π^- будем считать не превосходящей ширины полосы Π^+ .

На оси $x_2 = 0$ выделим интервал γ_l длины $2l$ с центром в нуле, который далее будем называть *окном*. Объединение полос Π^- и Π^+ и интервала γ_l обозначим через Π , т.е. множество Π – это полосы Π^+ и Π^- , соединенные окном γ_l . Границу области Π будем обозначать через Γ_l (см. рис. 1).

Основным объектом изучения настоящей работы является спектр оператора $H_l := -\Delta_l^{(\mathcal{D})}$ в $L_2(\Pi)$, где $\Delta_l^{(\mathcal{D})}$ – расширение по Фридрихсу оператора Лапласа с $C_0^\infty(\Pi)$. Существенный спектр оператора H_l совпадает с вещественной полуосью $[1, +\infty)$. Для $l = 0$ (т.е. в случае $\gamma_l = \emptyset$, $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$) это очевидно. При $l > 0$ существенные спектры операторов H_0 и H_l совпадают. Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство теоремы 2.1 из [11] и основано на идеях работы [12]; необходимо лишь учесть, что область Π обладает свойством конуса (см. определение в [13; гл. IV, п. 4.3]), а потому вложение $W_2^1(Q \cap \Pi) \rightarrow L_2(Q \cap \Pi)$ компактно по теореме Реллиха–Кондрашова [13; гл. VI, теорема 6.2] для любой ограниченной подобласти $Q \subset \Pi$ с гладкой границей.

Как уже было отмечено во введении, наличие окна ($l > 0$) приводит к непустой дискретной части спектра оператора H_l , т.е. к наличию изолированных собственных значений $\lambda_m(l)$, $m \geq 1$. Расположим данные собственные значения в порядке неубывания с учетом кратности.

В [1] было доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Для любого значения $l > 0$ оператор H_l имеет непустой дискретный спектр, состоящий из конечного числа собственных значений. Существует бесконечный набор критических значений $0 = l_1 < l_2 < \dots < l_n < \dots$ длин окна γ_l такой, что при $l \in (l_n, l_{n+1}]$ оператор H_l имеет ровно n изолированных собственных значений. Данные собственные значения являются невозрастающими функциями аргумента l и удовлетворяют двусторонним оценкам:*

$$\Lambda_{m-1}(l) \leq \lambda_m(l) \leq \Lambda_m(l), \quad m \geq 1, \quad l > l_m, \quad (1.1)$$

где

$$\Lambda_m(l) := \frac{\pi^2}{(\pi + d)^2} + \frac{\pi^2 m^2}{4l^2}.$$

Число собственных значений $\lambda_m(l)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\lfloor \frac{2l}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{(\pi + d)^2}} \right\rfloor \leq \text{card}(\sigma_{\text{disc}}(H_l)) \leq \left\lceil \frac{2l}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{(\pi + d)^2}} \right\rceil + 1,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа.

Всюду в работе через $W_2^1(\Omega, \gamma)$ будем обозначать пополнение по норме $W_2^1(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, имеющих компактный носитель и обращающихся в нуль в окрестности множества γ . Положим также $\Pi_a := \{x : |x_1| < a\} \cap \Pi$, $\Gamma_l^a := \Gamma_l \cap \partial \Pi_a$. Через Ξ обозначим множество всех ограниченных подобластей $Q \subset \Pi$ с гладкой границей, отделенных от концов окна γ_l на положительное расстояние; случай $\partial Q \cap \partial \Pi \neq \emptyset$ не исключается.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.1. Верны следующие утверждения.

1) Собственные значения $\lambda_m(l)$ оператора H_l непрерывны по l , простые и удовлетворяют оценкам

$$\Lambda_{m-1}(l) < \lambda_m(l) < \Lambda_m(l), \quad m \geq 1, \quad l > l_m. \quad (1.2)$$

Соответствующие собственные функции являются четными по x_1 при нечетных m и нечетными по x_1 при четных m .

2) Длина $l = l_n$ является критической, если и только если существует ограниченное решение краевой задачи

$$-\Delta \phi_n = \phi_n, \quad x \in \Pi, \quad \phi_n = 0, \quad x \in \Gamma_l, \quad (1.3)$$

принадлежащее $W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a)$ для любого $a > 0$, четное по x_2 в случае $d = \pi$ и удовлетворяющее асимптотике

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x_2 + O(e^{-\sqrt{3}x_1}), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad x_2 \in (0, \pi). \quad (1.4)$$

Если такое решение существует, то оно единственно и является четным по x_1 при нечетных n и нечетным по x_1 при четных n .

3) При $l \rightarrow l_n + 0$ асимптотика собственного значения $\lambda_n(l)$, $n \geq 2$, имеет следующий вид:

$$\lambda_n(l) = 1 - \mu_n^2(l - l_n)^2 + O((l - l_n)^3), \quad (1.5)$$

$$\mu_n = \frac{1}{l_n} \int_{\Pi} \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \right|^2 dx \quad \text{при } d < \pi, \quad (1.6)$$

$$\mu_n = \frac{1}{2l_n} \int_{\Pi} \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \right|^2 dx \quad \text{при } d = \pi. \quad (1.7)$$

Соответствующую собственную функцию можно выбрать удовлетворяющей асимптотике

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\sqrt{1-\lambda_n(l)}|x_1|} \sin x_2 + O(e^{-\sqrt{3-\lambda_n(l)}x_1}), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad x_2 \in (0, \pi), \quad (1.8)$$

при этом для любого $R > 0$ будет выполнено равенство

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) + O((l - l_n)^{1/2}) \quad \text{в норме } W_2^1(\Pi_R). \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В п. 2) теоремы 1.1 решение краевой задачи (1.3) мы понимаем в обобщенном смысле. А именно, решение есть функция из пространства $W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a)$ для любого $a > 0$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\nabla_x \phi_n, \nabla_x \zeta)_{L_2(\Pi)} = (\phi_n, \zeta)_{L_2(\Pi)} \quad (1.10)$$

для всех функций $\zeta \in C_0^\infty(\Pi)$. Согласно теоремам о повышении гладкости решений эллиптических задач [14; гл. 4, § 2] функция ϕ_n принадлежит $C^\infty(\bar{Q})$ для всех $Q \in \Xi$, а потому асимптотику (1.4) следует понимать в обычном смысле. Всюду далее все краевые задачи понимаются в смысле интегрального равенства, аналогичного (1.10). Кроме того, во всех краевых задачах, рассматриваемых в неограниченных областях, в силу теорем о повышении гладкости решения будут бесконечно дифференцируемыми функциями при достаточно больших по модулю x_1 , а потому все утверждения о поведении этих решений на бесконечности мы также будем понимать в обычном смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Функция ϕ_n в п. 2) теоремы 1.1 предполагается четной по x_2 при $d = \pi$. Такое условие необходимо для того, чтобы исключить из рассмотрения функцию $\sqrt{2/\pi} \sin x_2$, которая в случае $d = \pi$ является ограниченным решением задачи (1.3) и удовлетворяет асимптотике (1.4) для всех $l \geq 0$. В случае $d < \pi$ решение, подобное $\sqrt{2/\pi} \sin x_2$, отсутствует, и требование четности по x_2 в этом случае не налагается.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Следует отметить, что утверждение п. 3) теоремы 1.1 в случае симметричных полос ($d = \pi$) было доказано в [8].

ТЕОРЕМА 1.2. *Верны следующие утверждения.*

1) При $l \rightarrow +\infty$ собственные значения $\lambda_m(l)$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_m(l) = \frac{\pi^2}{(\pi + d)^2} + \frac{\pi^2 m^2}{4l^2} + O(l^{-3}). \quad (1.11)$$

2) Каждая точка полуинтервала $[\pi^2/(\pi + d)^2, 1)$ является точкой накопления для собственных значений $\lambda_m(l)$ при $l \rightarrow +\infty$, а именно, для любой точки $\xi \in [\pi^2/(\pi + d)^2, 1)$ существует последовательность номеров $m = m(l, \xi)$, стремящаяся к бесконечности при $l \rightarrow +\infty$, такая, что выполняется

$$\lambda_{m(l, \xi)} \rightarrow \xi \quad \text{при} \quad l \rightarrow +\infty.$$

Остановимся на результатах работы. Теорема 1.1 в большей своей части посвящена эффекту возникновения новых собственных значений у оператора H_l при расширении окна γ_l . Первое утверждение теоремы улучшает оценку (1.1), второе дает критерий, определяющий критические длины окна γ_l , переход через которые приводит к возникновению новых собственных значений. Как следует из третьего утверждения теоремы 1.1, данные собственные значения возникают из границы существенного спектра оператора H_l и имеют асимптотики (1.5)–(1.7). Первый член данной асимптотики отличен от нуля; этот факт очевидным образом следует из формулы для μ_n и краевой задачи для ϕ_n . Из формул (1.6) и (1.7) вытекает, что коэффициент μ_n не обладает свойством непрерывности при $d \rightarrow \pi$. Ранее аналогичный эффект для собственного значения $\lambda_1(l)$ при малых значениях l на формальном уровне был обнаружен в [6].

Вторая часть результатов работы, теорема 1.2, описывает поведение спектра оператора H_l при возрастании длины окна. Как следует из первого утверждения теоремы 1.2, все собственные значения $\lambda_m(l)$ стремятся к границе существенного спектра “предельного” оператора, с точностью до величины порядка $O(l^{-3})$ совпадая с правыми концами интервалов из п. 1) теоремы 1.1. Подчеркнем, что оценка остатка в (1.11) неравномерна относительно m . Отметим также, что член порядка $O(l^{-2})$ в асимптотике (1.11) не зависит от ширины полос d , в отличие от асимптотик (1.6), где ширина полос оказывала решающее влияние на вид первого члена.

При возрастании длины окна уместно также сравнить спектры исходного оператора H_l и “предельного” оператора $H_* := -\Delta_*^{(\mathcal{D})}$, где $\Delta_*^{(\mathcal{D})}$ – расширение по Фридрихсу оператора Лапласа с $C_0^\infty(\Pi^*)$, $\Pi^* := \{x : -d < x_2 < \pi\} \setminus \{x : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$. Такой “предельный” оператор возникнет, если в исходной задаче сделать сдвиг $x_1 \mapsto x_1 - l$ и формально перейти к пределу при $l \rightarrow +\infty$. Спектр оператора H_* состоит только из его существенной компоненты и совпадает с полуосью $[\pi^2/(\pi + d)^2, +\infty)$. Для доказательства этого факта достаточно

оценить границу существенного спектра оператора H_* сверху и снизу на основе метода вилки Дирихле–Неймана [15; гл. 13, § 15], введя в область Π^* дополнительную границу $\{x : x_1 = 0, -d < x_2 < \pi\}$ и выставив на ней поочередно краевое условие Дирихле и Неймана.

Второе утверждение теоремы 1.2 описывает, каким образом происходит сдвиг существенного спектра при $l \rightarrow +\infty$: каждая точка полуинтервала, на который сдвигается в пределе существенный спектр, является точкой накопления при $l \rightarrow +\infty$ для собственных значений $\lambda_m(l)$ с номерами, неограниченно возрастающими вместе с l .

Опишем кратко структуру настоящей работы. В § 2 будет доказан п. 1) теоремы 1.1, а также сходимость собственных значений к границе существенного спектра при стремлении длины окна к критическому значению. Третий параграф посвящен исследованию поведения резольвенты для существенного спектра. В § 4 на основе результатов § 3 будут доказаны пп. 2) и 3) теоремы 1.1. Доказательство теоремы 1.2 будет проведено в последнем, пятом параграфе.

§ 2. Оценки, непрерывность и сходимость собственных значений

Настоящий параграф посвящен доказательству утверждения п. 1) теоремы 1.1. Также будет доказана сходимость собственных значений $\lambda_n(l)$ к границе существенного спектра при $l \rightarrow l_n + 0$.

ЛЕММА 2.1. *Собственные значения $\lambda_m(l)$ непрерывны по l . Верна сходимость $\lambda_n \rightarrow 1 - 0$ при $l \rightarrow l_n + 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.1 оператор H_l полуограничен снизу с нижней гранью $\pi^2/(\pi + d)^2$. Следовательно, для всех значений l существует ограниченный обратный оператор $H_l^{-1}: L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$. Функции $\lambda_m^{-1}(l)$ являются изолированными собственными значениями оператора H_l^{-1} ; докажем их непрерывность по l . Пусть l_* – некоторое значение длины окна γ_l и $\lambda_m(l_*)$ является изолированным собственным значением оператора H_{l_*} . Докажем сходимость $\lambda_m(l) \rightarrow \lambda_m(l_*)$ при $l \rightarrow l_*$. Собственное значение $\lambda_m(l)$, очевидно, является собственным значением краевой задачи

$$-\Delta\psi = \lambda\psi, \quad x \in \Pi, \quad \psi = 0, \quad x \in \Gamma_l. \quad (2.1)$$

Напомним, решение этой краевой задачи мы понимаем в обобщенном смысле (см. замечание 1.1). В силу теоремы 4.6.8 из [16] это гарантирует принадлежность обобщенного решения области определения оператора H_l , если это решение является элементом $L_2(\Pi)$.

Пусть $\chi_1(x_1)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, нечетная по t , равная минус единице при $x_1 \in [-l_* - \varepsilon_0, -l_* + \varepsilon_0]$, единице при $x_1 \in [l_* - \varepsilon_0, l_* + \varepsilon_0]$ и нулю при $x_1 \in (-\infty, -l_* - 2\varepsilon_0] \cup [-l_* + 2\varepsilon_0, l_* - 2\varepsilon_0] \cup [l_* + 2\varepsilon_0, +\infty)$, где ε_0 – малое фиксированное число. В задаче (2.1) сделаем замену переменных

$$y_1 = x_1 - \varepsilon\chi_1(x_1), \quad y_2 = x_2, \quad \varepsilon = l - l_*, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]. \quad (2.2)$$

Такая замена, как легко проверить, приводит к новой краевой задаче:

$$\begin{aligned} -(\Delta_y + \varepsilon L_\varepsilon)\psi &= \lambda\psi, \quad y \in \Pi, \quad \psi = 0, \quad y \in \Gamma_{l_*}, \\ L_\varepsilon &= A_{11}(y_1, \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + A_1(y_1, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ A_{11}(y_1, \varepsilon) &= -2\chi'_1(x_1(y_1, \varepsilon)) + \varepsilon(\chi'_1(x_1(y_1, \varepsilon)))^2, \\ A_1(y_1, \varepsilon) &= -\chi''_1(x_1(y_1, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Следовательно, функция $\lambda_m^{-1}(l)$ является собственным значением оператора $(H_{l_*} + \varepsilon L_\varepsilon)^{-1}: L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$. Данный оператор существует и ограничен. В самом деле, оператор $H_{l_*}^{-1}$ является ограниченным оператором из $L_2(\Pi)$ в $W_2^1(\Pi)$ и в $W_2^2(Q)$ для всех $Q \in \Xi$. Ограниченность оператора $H_{l_*}^{-1}: L_2(\Pi) \rightarrow W_2^1(\Pi)$ очевидна; ограниченность оператора $H_{l_*}^{-1}: L_2(\Pi) \rightarrow W_2^2(Q)$ следует из теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач [14; гл. 4, § 2]. Учитывая эти факты, финитность и ограниченность коэффициентов оператора L_ε , заключаем, что оператор $H_{l_*}^{-1}L_\varepsilon$ ограничен равномерно по ε как оператор из $L_2(\Pi)$ в $L_2(\Pi)$. Следовательно, оператор $(H_{l_*} + \varepsilon L_\varepsilon)^{-1}: L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$ существует для достаточно малых ε ; нетрудно проверить, что он дается формулой $(H_{l_*} + \varepsilon L_\varepsilon)^{-1} = (I + \varepsilon H_{l_*}^{-1}L_\varepsilon)^{-1}H_{l_*}^{-1}$. Последнее представление также доказывает сходимость оператора $(H_{l_*} + \varepsilon L_\varepsilon)^{-1}$ к $H_{l_*}^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в операторной норме. Из [17; гл. 4, § 2.6, теорема 2.23] следует, что оператор $(H_{l_*} + \varepsilon L_\varepsilon)^{-1}$ сходится к $H_{l_*}^{-1}$ и в обобщенном смысле. В свою очередь, согласно [17; гл. 4, § 3.5] отсюда уже вытекает сходимость $\lambda_m^{-1}(l) \rightarrow \lambda_m^{-1}(l_*)$ при $l \rightarrow l_*$, которая и доказывает требуемую непрерывность собственных значений оператора H_l .

Докажем сходимость собственных значений $\lambda_n(l)$ к границе существенного спектра при $l \rightarrow l_n - 0$. Сходимость $\lambda_1(l) \xrightarrow{l \rightarrow +0} 1$ следует из [5; теорема 2.1]. Собственные значения $\lambda_n(l)$ монотонно не убывают по l и ограничены сверху единицей, что доказывает существование пределов $c_n = \lim_{l \rightarrow l_n + 0} \lambda_n(l)$. Допустим, что какой-то из этих пределов строго меньше единицы. Тогда это число c_n является собственным значением оператора H_l при $l = l_n$ (см. выше доказательство непрерывности собственных значений по l), т.е. при $l = l_n$ оператор H_l имеет n изолированных собственных значений, что противоречит лемме 1.1.

ЛЕММА 2.2. *Верно утверждение п. 1) теоремы 1.1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность собственных значений доказана в предыдущей лемме. Простота собственных значений λ_m , очевидно, является следствием оценок (1.2). Докажем последние. Согласно принципу минимакса изолированные собственные значения оператора H_l задаются формулами

$$\lambda_m(l) := \inf_{\substack{u \in W_2^1(\Pi, \partial\Pi), u \neq 0 \\ (u, \psi_j)_{L_2(\Pi)} = 0 \\ j=1, \dots, m-1}} \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2}, \quad (2.4)$$

где, напомним, ψ_j – собственные функции, соответствующие $\lambda_j(l)$. Введем в рассмотрение функции

$$u_j(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi+d}} \sin\left(\frac{\pi}{\pi+d}(x_2-\pi)\right) \sin\left(\frac{\pi j}{2l}(x_1+l)\right), & x \in \Pi_l; \\ 0, & x \notin \Pi_l. \end{cases}$$

Функции u_j , очевидно, принадлежат пространству $W_2^1(\Pi, \partial\Pi)$. Докажем правую часть двойного неравенства (1.2). Допустим обратное, а именно, пусть для некоторых l и m выполнено равенство $\lambda_m(l) = \Lambda_m(l)$. Функции u_j линейно независимы, а потому в линейном пространстве, натянутом на функции u_j , $j = 1, \dots, m$, найдется ненулевая функция $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$, ортогональная в $L_2(\Pi)$ всем функциям ψ_i , $i = 1, \dots, m-1$. В силу (2.4) имеем

$$\lambda_m(l) \leq \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2} = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \Lambda_j}{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2}. \quad (2.5)$$

Дробь в правой части данного соотношения не превосходит $\Lambda_m(l)$. Равенство

$$\frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \Lambda_j}{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2} = \Lambda_m(l)$$

возможно, только если $\alpha_m \neq 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m-1$. В этом случае функция u_m является собственной функцией оператора H_l , соответствующей собственному значению $\lambda_m(l)$. Это противоречит тому факту, что все собственные функции оператора H_l принадлежат $C^\infty(\Pi)$. Следовательно, по крайней мере одно из чисел α_j , $j = 1, \dots, m-1$, не равно нулю, откуда в силу (2.5) следует оценка для $\lambda_m(l)$:

$$\lambda_m(l) \leq \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Pi)}^2}{\|u\|_{L_2(\Pi)}^2} = \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \Lambda_j}{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2} < \Lambda_m(l),$$

что противоречит исходному предположению $\lambda_m(l) = \Lambda_m(l)$.

Докажем теперь левую часть двойного неравенства (1.2). Пусть оператор H_l имеет n собственных значений, откуда в силу леммы 2.1 следует, что $\Lambda_j(l) < 1$, $j = 0, \dots, n-1$. Пусть $\delta > 0$ – некоторое малое число. Через точки $(-l+\delta, 0)$ и $(l-\delta, 0)$ проведем отрезки, параллельные оси $x_1 = 0$ и пересекающие Π на три непересекающиеся части. Изолированные собственные значения лапласиана в Π с краевым условием Дирихле на Γ_l и краевым условием Неймана на проведенных отрезках дают оценки снизу для собственных значений $\lambda_m(l)$. Непрерывный спектр такого оператора совпадает с вещественной полуосью $[1, +\infty)$, что устанавливается так же, как и равенство $\sigma_{\text{ess}}(H_l) = [1, +\infty)$. Дискретная часть спектра этого оператора, очевидно, равна объединению $\sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1 – множество собственных значений оператора S_1 , меньших единицы, S_1 – лапласиан в прямоугольнике $\{x : |x_1| < l-\delta, -d < x_2 < \pi\}$ с условием Неймана на боковых сторонах и условием Дирихле на верхней и нижней границе. Множество σ_2 – дискретный спектр лапласиана в полуполосе $\Pi \cap \{x : x_1 > l-\delta\}$ с краевым условием Неймана на $\{x : x_1 = l-\delta, -d < x_2 < \pi\}$ и условием Дирихле на оставшейся части границы. Обозначим такой оператор через S_2 . Собственные значения, входящие в σ_1 , для достаточно малых δ даются функциями $\Lambda_j(l-\delta)$, $j = 0, \dots, n-1$. Далее, всякую собственную функцию оператора S_2 можно четным образом продолжить по x_1 через границу

$\{x : x_1 = l - \delta, -d < x_2 < \pi\}$. Полученная таким образом функция будет собственной функцией оператора H_δ (с точностью до замены $x_1 \mapsto x_1 - l + \delta$). Следовательно, $\sigma_2 \subseteq \sigma_{\text{disc}}(H_\delta)$. Согласно лемме 1.1 дискретный спектр оператора H_δ при достаточно малых δ состоит из одного собственного значения, сходящегося к единице при $\delta \rightarrow 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы это собственное значение было больше каждой из функций $\Lambda_j(l - \delta)$, $j = 0, \dots, n - 1$. Отсюда в силу метода вилки Дирихле–Неймана [15; гл. 13, § 15] выводим оценки $\Lambda_{j-1}(l) < \Lambda_{j-1}(l - \delta) \leq \Lambda_j(l)$, $j = 1, \dots, n$, что завершает доказательство требуемых неравенств.

В заключение докажем четность собственных функций оператора H_l . В силу симметричности множества Π по переменной x_1 все собственные функции оператора H_l можно считать четными либо нечетными по x_1 . Простота собственных значений $\lambda_m(l)$ означает, что каждому из них соответствует собственная функция определенной четности. Четные собственные функции удовлетворяют краевому условию Неймана при $x_1 = 0$, нечетные – краевому условию Дирихле. Учитывая данное обстоятельство, заключаем, что оператор H_l является прямой суммой операторов H_l^+ и H_l^- , являющихся сужением оператора H_l соответственно на подмножества четных и нечетных по x_1 функций из области определения оператора H_l . Совершенно аналогично тому, как в [1; § 2] были получены оценки (1.1), нетрудно доказать, что изолированные собственные значения оператора H_l^+ удовлетворяют оценкам (1.1) для нечетных значений m , а изолированные собственные – оценкам (1.1) с четными m . Это доказывает требуемую четность собственных функций оператора H_l , если учесть, что $\sigma_{\text{disc}}(H_l) = \sigma_{\text{disc}}(H_l^+) \cup \sigma_{\text{disc}}(H_l^-)$.

§ 3. Поведение резольвенты оператора H_l в окрестности края существенного спектра

Настоящий параграф посвящен изучению поведения оператора $(H_l - \lambda)^{-1}$ при λ , близких к единице. Результаты этого параграфа являются основой для доказательства пп. 2), 3) теоремы 1.1, которое будет дано в следующем параграфе.

Для исследования оператора $(H_l - \lambda)^{-1}$ мы используем здесь тот же подход, что и применявшийся в [8], [18] для случая симметричных полос $d = \pi$. Мы будем изучать зависимость от k решения краевой задачи

$$-\Delta u = (1 - k^2)u + f, \quad x \in \Pi, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (3.1)$$

ведущего себя при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, k) &= c_\pm(k) e^{-k|x_1|} \sin x_2 + O(e^{-\sqrt{3+k^2}|x_1|}), \quad x_2 \in (0, \pi), \\ u(x, k) &= \tilde{c}_\pm(k) e^{-\sqrt{1-\pi^2/d^2+k^2}|x_1|} \sin x_2 \\ &\quad + O(e^{-\sqrt{4-\pi^2/d^2+k^2}|x_1|}), \quad x_2 \in (-d, 0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где f – функция из $L_2(\Pi)$ с носителем в Π_a , $a > l$, $c_\pm(k)$, $\tilde{c}_\pm(k)$ – некоторые константы. В случае $d = \pi$ во второй из асимптотик (3.2) мы полагаем $\sqrt{1-\pi^2/d^2+k^2} = k$. Параметр k считаем принадлежащим малой окрестности нуля на комплексной плоскости; обозначим эту окрестность через B . Отметим также, что решение краевой задачи (3.1), (3.2) экспоненциально убывает

при $\operatorname{Re} k > 0$ и, следовательно, является элементом $L_2(\Pi)$, что влечет с учетом замечания 1.1 и [16; теорема 4.6.8] принадлежность этого решения области определения оператора H_l . То есть функция u совпадает с $(H_l - 1 + k^2)^{-1}f$ (если, разумеется, оператор $(H_l - 1 + k^2)$ обратим). Поэтому линейное отображение $f \mapsto u$, задаваемое краевой задачей (3.1), (3.2), можно рассматривать как продолжение оператора $(H_l - 1 + k^2)^{-1}$ по k в область $\operatorname{Re} k \leq 0$. Такое продолжение, разумеется, расширяет область значений оператора $(H_l - 1 + k^2)^{-1}$, которая выходит за пределы пространства $L_2(\Pi)$. Вместе с тем будет показано, что в определенном смысле такое продолжение является аналитическим по k , а сам оператор $(H_l - 1 + k^2)^{-1}$ после продолжения оказывается мероморфным по k .

Введем обозначения. Пусть X и Y – два банаховых пространства, $\mathcal{L}(X, Y)$ – множество линейных ограниченных операторов из X в Y . Множество голоморфных (мероморфных) по $k \in B$ функций со значениями в X будем обозначать через $\mathcal{H}(X)$ ($\mathcal{M}(X)$). Также обозначим $\mathcal{H}(X, Y) := \mathcal{H}(\mathcal{L}(X, Y))$, $\mathcal{M}(X, Y) := \mathcal{M}(\mathcal{L}(X, Y))$.

Для исследования краевой задачи (3.1) мы воспользуемся схемой, заимствованной из [19; гл. 16, § 4]. Пусть g – некоторая функция из $L_2(\Pi_a)$, продолженная нулем в $\Pi \setminus \overline{\Pi}_a$. Рассмотрим краевые задачи

$$-\Delta v_i = (1 - k^2)v_i + g, \quad x \in \Omega_i, \quad v_i = 0, \quad x \in \partial\Omega_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.3)$$

где $\Omega_1 := \Pi^+ \cap \{x : x_1 > 0\}$, $\Omega_2 := \Pi^- \cap \{x : x_1 > 0\}$, $\Omega_3 := \Pi^+ \cap \{x : x_1 < 0\}$, $\Omega_4 := \Pi^- \cap \{x : x_1 < 0\}$. Задачи (3.3) легко решаются методом разделения переменных:

$$v_i(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} G_j^i(x, t, k) g(t) dt, \quad (3.4)$$

$$G_j^1(x, t, k) := \frac{1}{\pi s_j^+} (e^{-s_j^+ |x_1 - t_1|} - e^{-s_j^+ (x_1 + t_1)}) \sin(jx_2) \sin(jt_2),$$

$$G_j^2(x, t, k) := \frac{1}{s_j^- d} (e^{-s_j^- |x_1 - t_1|} - e^{-s_j^- (x_1 + t_1)}) \sin\left(\frac{\pi j}{d} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi j}{d} t_2\right),$$

$$G_j^3(x, t, k) := \frac{1}{\pi s_j^+} (e^{-s_j^+ |x_1 - t_1|} - e^{s_j^+ (x_1 + t_1)}) \sin(jx_2) \sin(jt_2),$$

$$G_j^4(x, t, k) := \frac{1}{s_j^- d} (e^{-s_j^- |x_1 - t_1|} - e^{s_j^- (x_1 + t_1)}) \sin\left(\frac{\pi j}{d} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi j}{d} t_2\right),$$

где $s_1^+ = k$, $s_j^+ = \sqrt{j^2 - 1 + k^2}$, $j \geq 2$, $s_1^- = \sqrt{\pi^2/d^2 - 1 + k^2}$ при $d < \pi$, $s_1^- = k$ при $d = \pi$, $s_j^- = \sqrt{\pi^2 j^2/d^2 - 1 + k^2}$, $j \geq 2$. Функции G_1^1 , G_3^1 при $k = 0$ доопределим по непрерывности:

$$G_1^1(x, t, 0) := \frac{1}{\pi} (x_1 + t_1 - |x_1 - t_1|) \sin x_2 \sin t_2,$$

$$G_1^3(x, t, 0) := -\frac{1}{\pi} (x_1 + t_1 + |x_1 - t_1|) \sin x_2 \sin t_2.$$

В случае $d = \pi$ функции $G_1^2(x, t, 0)$ и $G_1^4(x, t, 0)$ определяются аналогично. Обозначим $\Omega_i^b := \Omega_i \cap \Pi_b$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $b > 0$. Ряды (3.4) сходятся в норме $W_2^2(\Omega_i^b)$. Функции $v_i(x)$ удовлетворяют асимптотикам (3.2). Линейные операторы $T_i(k)$, определенные по правилу $T_i(k)g := v_i$, являются элементами $\mathcal{L}(L_2(\Pi_a), W_2^2(\Omega_i^b))$. Верно $T_i(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), W_2^2(\Omega_i^b))$.

Для доказательства этой леммы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3.2. В норме $L_2(\Omega_i^a)$ справедливо

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x_1) \sin(jx_2), \quad g_j(x_1) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(jx_2) dx_2, \quad i = 1, 3,$$

$$g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x_1) \sin\left(\frac{\pi j}{d} x_2\right), \quad g_j(x_1) := \frac{2}{d} \int_{-d}^0 g(x) \sin\left(\frac{\pi j}{d} x_2\right) dx_2, \quad i = 2, 4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем только для Ω_1^a , в остальных случаях рассуждения аналогичны. Так как $g \in L_2(\Omega_1^a)$, то согласно теореме Фубини для почти всех $x_1 \in (0, a)$ выполнено $g(x_1, \cdot) \in L_2(0, \pi)$, а потому функции $g_j(x_1)$ определены для почти всех $x_1 \in (0, a)$ и принадлежат $L_2(0, a)$ в силу оценки

$$\|g_j\|_{L_2(0, a)} \leq \|g\|_{L_2(\Pi)}.$$

Рассмотрим функции

$$\mathcal{E}_N(x_1) = \int_0^{\pi} \left| g(x) - \sum_{j=1}^N g_j(x_1) \sin(jx_2) \right|^2 dx_2.$$

Функции $\{\sin(jx_2)\}_{j=0}^{\infty}$ образуют базис в $L_2(0, \pi)$, а потому для почти всех $x_1 \in (0, a)$ верна сходимость $\mathcal{E}_N(x_1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Далее, используя определение функций $\mathcal{E}_N$, легко убедиться, что

$$0 \leq \mathcal{E}_N(x_1) = \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx_1 - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N |g_j(x_1)|^2 \leq \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx_1.$$

Следовательно, неотрицательные функции $\mathcal{E}_N$ равномерно по N ограничены сверху интегрируемой на $[0, a]$ функцией. Учитывая данный факт и сходимость функций $\mathcal{E}_N$ к нулю почти всюду, в силу теоремы Лебега о предельном переходе заключаем

$$\left\| g(x) - \sum_{j=1}^N g_j(x_1) \sin(jx_2) \right\|_{L_2(\Pi_a)}^2 = \int_0^a \mathcal{E}_N(x_1) dx_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1 дадим только для Ω_1^b , остальные случаи доказываются аналогично. Определим функции g_j согласно лемме 3.2. Слагаемые ряда (3.4) обозначим через $V_j(x, k)$. В силу определения этих функций оценки

$$\left\| \sum_{j=N}^M V_j \right\|_{W_2^1(\Omega_1^b)}^2 \leq C \sum_{j=N}^M \|g_j\|_{L_2(0, b)}^2$$

выполнены для всех $b > 0$ с константой C , не зависящей от g , M и N . Правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $M, N \rightarrow \infty$ в силу леммы 3.2. Следовательно, ряд (3.4) сходится в норме $W_2^1(\Omega_1^b)$ для всех $b > 0$ к некоторой функции $v_1(x, k)$, которая удовлетворяет оценке

$$\|v_1\|_{W_2^1(\Omega_1^b)} \leq C\|g\|_{L_2(\Pi_a)}, \quad (3.5)$$

где константа C не зависит от g . Функция v_1 , как нетрудно проверить, является обобщенным решением краевой задачи (3.3), а потому в силу теорем о повышении гладкости и оценки (3.5) функция v_1 является элементом $W_2^2(\Omega_1^b)$ и верна оценка

$$\|v_1\|_{W_2^2(\Omega_1^b)} \leq C\|g\|_{L_2(\Pi_a)},$$

с константой C , не зависящей от g . Отсюда уже вытекает принадлежность $T_1(k) \in \mathcal{L}(L_2(\Pi_a), W_2^2(\Omega_1^b))$ для всех $b > 0$ и всех $k \in B$. Аналогично тому, как была получена последняя оценка для v_1 , доказывается и следующая оценка:

$$\|V^N\|_{W_2^2(\Omega_1^b)} \leq C\|g^N\|_{L_2(\Pi_a)}, \quad (3.6)$$

где константа C не зависит от g^N и N ,

$$V^N(x, k) := v_1(x, k) - \sum_{j=1}^N V_j(x, k), \quad g^N(x) := g(x) - \sum_{j=1}^N g_j(x_1) \sin(jx_2).$$

Из (3.6) и леммы 3.2 вытекает сходимость ряда (3.4) в норме $W_2^2(\Omega_1^b)$.

При $x_1 > a$ функции V_j имеют вид:

$$V_j(x, k) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{s_j^+ \pi} e^{-s_j^+ x_1} \sin(jx_2) \int_{\Omega_1^a} g(x) \operatorname{sh}(s_j^+ x_1) \sin(jx_2) dx.$$

Следовательно, при $x_1 > a$ верны оценки

$$|V_j(x, k)| \leq C e^{-s_j^+(x_1-a)} \|g\|_{L_2(\Pi_a)},$$

где C – некоторая константа, не зависящая от j и x_1 . С учетом этой оценки при $x_1 \geq 2a$ функцию $(v_1 - V_1)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |v_1(x, k) - V_1(x, k)| &\leq C\|g\|_{L_2(\Pi_a)} \sum_{j=2}^{\infty} e^{-s_j^+(x_1-a)} \\ &\leq C\|g\|_{L_2(\Pi_a)} e^{-s_2^+(x_1-a)} \sum_{j=2}^{\infty} e^{-(s_j^+ - s_2^+)(x_1-a)} \\ &\leq C\|g\|_{L_2(\Pi_a)} e^{-s_2^+(x_1-a)} \sum_{j=2}^{\infty} e^{-(s_j^+ - s_2^+)a} \leq \tilde{C}\|g\|_{L_2(\Pi_a)} e^{-s_2^+ x_1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}$ – некоторая константа, не зависящая от x_1 . Из полученной оценки следует, что при $x_1 \geq 2a$, $x_2 \in [0, \pi]$ ряд (3.4) является непрерывной по x функцией и верна асимптотика (3.2) для функции v_1 при $x_1 \rightarrow +\infty$, $x_2 \in (0, \pi)$.

Очевидно, что для любой функции g выполнено $V_j(x, \cdot) \in \mathcal{H}(W_2^2(\Omega_1^b))$. Так как ряд (3.4) сходится в норме $W_2^2(\Omega_1^b)$, то по теореме Вейерштрасса сумма ряда также будет голоморфной по k в норме $W_2^2(\Omega_1^b)$, т.е. для любой функции $g \in L_2(\Pi_a)$ и любого $b > 0$ верно $T_1(\cdot)g \in \mathcal{H}(W_2^2(\Omega_1^b))$. Так как понятия голоморфности для ограниченных операторнозначных функций в смысле слабой, сильной и равномерной сходимостей совпадают (см., например, [17; гл. 7, § 1.1]), то заключаем, что $T_1(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), W_2^2(\Omega_1^b))$ для всех $b > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Так как v_i являются элементами пространств $W_2^2(\Omega_i^b)$, то уравнения (3.3) выполнены не только в смысле соответствующего интегрального равенства (см. замечание 1.1), а также как равенства двух функций из $L_2(\Omega_i^b)$.

Обозначим $v(x, k) := v_i(x, k)$, $x \in \Omega_i$. Рассмотрим еще одну краевую задачу:

$$\Delta w = \Delta v, \quad x \in \Pi_a, \quad w = v, \quad x \in \partial \Pi_a. \quad (3.7)$$

Функция v имеет разрывы первых производных на границах множеств Ω_i , а потому следует объяснить, что мы понимаем здесь под Δv : эта функция определяется равенством $\Delta v := \Delta v_i$, $x \in \Omega_i$. Очевидно, что определенная таким образом функция Δv является элементом $L_2(\Pi_a)$. Множество Π_a обладает свойством конуса, а потому вложение $W_2^1(\Pi_a) \subset L_2(\Pi_a)$ компактно в силу теоремы Реллиха–Кондрашова [13; гл. VI, теорема 6.2]. Правая часть в граничном условии в (3.7) является следом некоторой функции из $W_2^1(\Pi_a)$. В качестве такой функции можно взять $v(x)\chi_2(x_1)$, где $\chi_2(x_1)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $|x_1| < (a + 2l)/3$ и единице при $|x_1| > (2a + l)/3$. Так как в силу леммы 3.1 функции v_i являются элементами пространств $W_2^2(\Omega_i^a)$, то $v\chi_2 \in W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a)$. Равенство $v(x)\chi_2(x_1) = v(x)$, $x \in \partial \Pi_a$, следует из определения функции χ_2 и соотношения $v(x) = 0$, $x \in \Gamma_l$. Используя вышеперечисленные факты и следуя идее доказательства теоремы 10 из [14; гл. IV, § 1.8], нетрудно убедиться, что краевая задача (3.7) однозначно разрешима в пространстве $W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a)$. Более того, w является элементом пространства $W_2^2(Q)$ для всех $Q \in \Xi$ в силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач. Это, в частности, означает, что помимо интегрального равенства, соответствующего задаче (3.7) (см. замечание 1.1), уравнение в (3.7) выполнено также как равенство двух функций из $L_2(Q)$ для всех $Q \in \Xi$. Следовательно, $\Delta w \in L_2(\Pi_a)$ и уравнение в (3.7) выполнено также как равенство двух функций из $L_2(\Pi_a)$. Функцию w также можно рассматривать как значение линейного ограниченного оператора

$$T_5: \bigoplus_{i=1}^4 W_2^2(\Omega_i^a, \partial \Omega_i^a \cap \partial \Omega_i) \rightarrow W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a), \quad T_5 v := w.$$

Ясно, что T_5 также является линейным ограниченным оператором из

$$\bigoplus_{i=1}^4 W_2^2(\Omega_i^a, \partial \Omega_i^a \cap \partial \Omega_i)$$

в $W_2^2(Q)$ для всех $Q \in \Xi$.

Пусть $\chi_3(x_1)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, четная по x_1 , равная единице при $|x_1| < (a + 2l)/3$ и нулю при $|x_1| > (2a + l)/3$. Построим функцию u по правилу

$$u(x, k) := w(x, k)\chi_3(x_1) + v(x, k)(1 - \chi_3(x_1)). \quad (3.8)$$

Функцию u можно также рассматривать как $u = T_6(k)g$, где $T_6(k)$ – линейный ограниченный оператор из $L_2(\Pi_a)$ в $W_2^1(\Pi_b, \Gamma_l^b)$ и $W_2^2(Q)$ для любого $b > 0$ и всех $Q \in \Xi$. Кроме того, $T_6(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), W_2^1(\Pi_b, \Gamma_l^b))$ и $T_6(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), W_2^2(Q))$.

Применим оператор $-(\Delta + 1 - k^2)$ к u и учтем уравнения для v и w (см. (3.3), (3.7)). Тогда получим

$$-(\Delta + 1 - k^2)u = g + (v - w)(\Delta + 1 - k^2)\chi_3 + 2(\nabla\chi_3, \nabla(v - w))_{\mathbb{R}^2} = g + T_7(k)g. \quad (3.9)$$

Функция u , определенная согласно (3.8), удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на $\partial\Pi$ и асимптотикам из (3.2). Следовательно, эта функция будет решением краевой задачи (3.1), (3.2), если и только если она удовлетворяет уравнению из (3.1), что согласно (3.9) приводит к уравнению для функции g :

$$g + T_7(k)g = f. \quad (3.10)$$

Совершенно аналогично утверждениям 3.1 и 3.2 из [8] доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *Оператор $T_7(k)$ является линейным компактным оператором из $L_2(\Pi_a)$ в $L_2(\Pi_a)$ для всех $k \in B$ и $T_7(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), L_2(\Pi_a))$. Для всех $k \in B$ уравнение (3.10) эквивалентно краевой задаче (3.1), (3.2). А именно, для каждого решения g уравнения (3.10) существует решение краевой задачи (3.1), (3.2), задаваемое формулой $u = T_6(k)g$. Для каждого решения u краевой задачи (3.1), (3.2) существует единственное решение уравнения (3.10), связанное с u равенством $u = T_6(k)g$.*

Так как оператор T_7 компактен, то к уравнению (3.10) применимы альтернативы Фредгольма. В силу леммы 3.3 это решает вопросы разрешимости краевой задачи (3.1), (3.2). Следует также отметить, что в случае однозначной разрешимости уравнения (3.10) решение u задачи (3.1), (3.2), построенное по решению уравнения (3.10) по правилу $u = T_6(k)(I + T_7(k))^{-1}f$, совпадает с функцией $(H_l - 1 + k^2)^{-1}f$ при $\operatorname{Re} k > 0$ (см. асимптотики (3.2)). Поэтому оператор $T_6(k)(I + T_7(k))^{-1}$ можно трактовать как (аналитическое) продолжение оператора $(H_l - 1 + k^2)^{-1}f$. При этом следует подчеркнуть, что при $\operatorname{Re} k \leq 0$ функция $u = T_6(k)(I + T_7(k))^{-1}f$, вообще говоря, не является элементом пространства $L_2(\Pi)$.

ЛЕММА 3.4. *Существует точка $k_* \in B$ такая, что оператор $(I + T_7(k_*))$ имеет ограниченный обратный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно найти точку $k_* \in B$, для которой уравнение (3.10) однозначно разрешимо. Однозначная разрешимость последнего эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи (3.1), (3.2). Точку k_* выберем в виде $k_* = \delta(1 + i)$, $\delta > 0$. При таких k_* задача (3.1) с $f = 0$ не имеет нетривиальных решений с асимптотикой (3.2), так как иначе эта функция была бы элементом $L_2(\Pi)$, а $\lambda_* = 1 - k_*^2$ – комплекснозначным собственным значением оператора H_l , что противоречит вещественности спектра оператора H_l .

Доказанная лемма, компактность и голоморфность оператора $T_7(k)$ позволяют применить теорему 7.1 из [19; гл. 15, § 7] к оператору $(I + T_7(k))^{-1}$, что приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.5. *Справедливо $(I + T_7(\cdot))^{-1} \in \mathcal{M}(L_2(\Pi_a), L_2(\Pi_a))$.*

В силу этой леммы оператор $(I + T_7(k))^{-1}$ может иметь в качестве особенностей только изолированные полюсы. Нас будет интересовать только наличие или отсутствие полюса в точке $k = 0$, а потому считаем, что окрестность нуля B не содержит никаких других полюсов, кроме возможного полюса в нуле. Наличие полюса в нуле означает существование нетривиального решения уравнения (3.10) с $k = 0$, $f = 0$, что эквивалентно существованию нетривиального ограниченного решения краевой задачи (3.1) (см. асимптотики (3.2)) с $k = 0$, $f = 0$. Следующая лемма описывает возможные варианты наличия таких решений.

ЛЕММА 3.6. *Пусть $k = 0$, $f = 0$. Тогда*

- 1) *краевая задача (3.1) имеет не больше одного нетривиального решения с асимптотикой (3.2), четного по x_2 в случае $d = \pi$; это решение четно либо нечетно по x_1 ;*
- 2) *если $d = \pi$, то краевая задача (3.1) имеет единственное нетривиальное нечетное по x_2 решение с асимптотикой (3.2), где $c_+(0) = 1$, и это решение равно $\sin x_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $k = 0$ краевая задача (3.1) эквивалентна уравнению (3.10), то благодаря компактности оператора $T_7(0)$ задача (3.1) может иметь только конечное число ограниченных линейно независимых решений. Ограниченность в данном случае является следствием асимптотик (3.2). Обозначим эти решения через u_j , $j = 1, \dots, q$. Далее, замена переменной $x_1 \mapsto -x_1$ переводит решение задачи (3.1) в решение, а потому без ограничения общности можно считать, что каждое из решений u_j обладает определенной четностью по x_1 . В случае $d = \pi$ мы также считаем, что каждое из этих решений четно по x_2 . Кроме того, все функции u_j можно считать вещественнозначными. Отметим также, что в силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач $u_j \in C^\infty(\bar{Q})$ для всех $Q \in \Xi$.

Сначала докажем, что коэффициенты $c_\pm(0)$ всегда отличны от нуля. Допустим противное, а именно, пусть существует нетривиальное решение $u = u_j$, для которого коэффициенты $c_\pm(0)$ равны нулю. В силу асимптотик (3.2) это означает, что функция u экспоненциально убывает при $|x_1| \rightarrow \infty$, $x_2 \in (-d, \pi)$. Пусть функция u четна по x_1 . Рассмотрим функцию

$$U(x) := x_1 \int_0^{x_1} u(t, x_2) dt. \quad (3.11)$$

Функция U , очевидно, бесконечно дифференцируема во всех внутренних точках Π . Кроме того, она является элементом пространства $W_2^1(\Pi_a, \Gamma_l^a)$ для любого $a > 0$. Так как функция u четна по x_1 , то ее производная по x_1 обращается в нуль при $x_1 = 0$. Учитывая данный факт и уравнение для u , нетрудно проверить, что функция U является решением уравнения

$$(\Delta + 1)U = 2u, \quad x \in \Pi.$$

Кроме того, функция U удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле на прямых $x_2 = -d$ и $x_2 = \pi$. Докажем, что она также обращается в нуль и на множестве Γ_l . Для этого с учетом четности u по x_1 достаточно доказать равенство

$$\int_{\gamma_l} u dx_1 = 0.$$

Данное равенство легко доказывается с помощью интегрирования по частям:

$$0 = \int_{\Pi^+} \sin x_2 (\Delta + 1) u dx = \int_{\gamma_l} u dx_1. \quad (3.12)$$

Здесь мы также учли краевые условия для функции u и ее экспоненциальное убывание на бесконечности. Функция U ведет себя как $O(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \pm\infty$, что следует из экспоненциального убывания u на бесконечности.

Учитывая свойства функций u и U и интегрируя по частям, получаем

$$0 = \int_{\Pi} U (\Delta + 1) u dx = 2 \int_{\Pi} |u|^2 dx,$$

откуда $u = 0$. Это же равенство аналогично доказывается в случае нечетной по x_1 функции u . Здесь функцию U следует определять как

$$U(x) := \int_0^{x_1} t u(t, x_2) dt.$$

Такая функция обладает теми же свойствами, что и функция U из (3.11). Единственным отличием в доказательстве этих свойств является модификация (3.12), в данном случае в качестве исходного интеграла для интегрирования по частям следует брать $0 = \int_{\Pi^+} x_1 \sin x_2 (\Delta + 1) u dx$. Также следует отметить, что функция U в данном случае будем ограниченной при $x_1 \rightarrow +\infty$.

Таким образом, каждая из функций u_j имеет ненулевые коэффициенты $c_{\pm}(0)$ в (3.2). Это означает, что число функций u_j не может быть больше двух. В самом деле, иначе можно было бы выбрать комбинацию функций u_j , у которой коэффициенты $c_{\pm}(0)$ были бы нулевыми. Это означало бы равенство нулю этой комбинации и как следствие линейную зависимость функций u_j . Также очевидно, что в случае наличия двух функций u_j эти функции имеют разную четность по x_1 . Подчеркнем, что при $d = \pi$ предполагаемая четность u_j по x_2 весьма важна в этих рассуждениях, так как иначе число возможных функций u_j вырастает до четырех.

Пусть число функций u_j равно двум; u_1 – четная по x_1 , u_2 – нечетная. Без ограничения общности будем считать, что коэффициенты $c_{\pm}(0)$ для функций u_1 и u_2 соответственно имеют вид $c_{\pm}(0) = \sqrt{2/\pi}$, $c_{\pm}(0) = \pm\sqrt{2/\pi}$. Положим

$$U_1(x) := \int_0^{x_1} u_1(t, x_2) dt.$$

Аналогично тому, как были выяснены свойства функции U из (3.11), несложно показать, что U_1 – решение краевой задачи (3.1) с асимптотиками

$$U_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x_1 \pm c) \sin x_2 + O(e^{-\sqrt{3}|x_1|}), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad x_2 \in (0, \pi),$$

где c – некоторая константа. В случае $d = \pi$ функция U_1 имеет в точности такую же асимптотику при $x_2 \in (-\pi, 0)$. Если $d < \pi$, то функция U_1 экспоненциально убывает при $x_1 \rightarrow \pm\infty$, $x_2 \in (-d, 0)$, что следует из краевой задачи для U_1 и ограниченности при $x_1 \rightarrow \pm\infty$, $x_2 \in (-d, 0)$. Учитывая свойства функций U_1 и u_2 , интегрируя по частям в интеграле $\int_{\Pi_R} U_1(\Delta + 1)u_2 dx$ и переходя затем к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$0 = \int_{\Pi} U_1(\Delta + 1)u_2 dx = \begin{cases} -2, & d < \pi; \\ -4, & d = \pi, \end{cases}$$

противоречие. Таким образом, число функций u_j не превышает единицы и в случае существования данная функция единственна и имеет определенную четность по x_1 . Пункт 1) доказан.

Утверждение п. 2) очевидно, если учесть, что в силу нечетности по x_2 данное решение обращается в нуль при $x_2 = 0$.

Введем вспомогательные обозначения. В случае наличия нетривиального решения задачи (3.1) с асимптотикой (3.2), описанного в п. 1) леммы 3.6, обозначим это решение через $\phi(x)$. Соответствующее решение уравнения (3.10) обозначим через $\Phi(x)$, $\phi(x) = (T_6(0)\Phi)(x)$. Если такое решение отсутствует, то положим $\phi = 0$, $\Phi = 0$. В случае $d = \pi$ решение уравнения (3.10), соответствующее $\sin x_2$, обозначим через $\tilde{\Phi}(x)$, $\sin x_2 = (T_6(0)\tilde{\Phi})(x)$.

Следующая лемма описывают структуру оператора $(I + T_7(k))^{-1}$ при малых k .

ЛЕММА 3.7. *Оператор $(I + T_7(k))^{-1}$ представим в виде*

$$(I + T_7(k))^{-1} = \frac{1}{k} T_8 + T_9(k),$$

где

$$\begin{aligned} T_8 f &:= \frac{1}{2} \Phi \int_{\Pi} f(x) \phi(x) dx, & d < \pi, \\ T_8 f &:= \frac{1}{4} \Phi \int_{\Pi} f(x) \phi(x) dx + \frac{1}{2\pi} \tilde{\Phi} \int_{\Pi} f(x) \sin x_2 dx, & d = \pi, \end{aligned}$$

$$a T_9(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), L_2(\Pi_a)).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 3.4 из [8].

§ 4. Асимптотические разложения возникающих собственных значений

В настоящем параграфе мы докажем пп. 2), 3) теоремы 1.1, завершив тем самым доказательство этой теоремы. Для вычисления асимптотик мы используем схему, аналогичную применявшейся в [8] для случая $d = \pi$. Основные идеи этой схемы были заимствованы из работ [20], [21]. Пусть l_* – некоторое значение длины окна γ_l , которому мы придадим малое приращение длины $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, ε_0 – из (2.2). Как уже было показано в доказательстве леммы 2.1, собственные

значения оператора $H_{l_*+\varepsilon}$ являются собственными значениями краевой задачи (2.3). Обозначим $\lambda = 1 - k^2$, тогда согласно результатам предыдущего параграфа краевая задача (2.3) эквивалентна операторному уравнению в $L_2(\Pi_a)$:

$$(I + T_7(k) - \varepsilon L_\varepsilon T_6(k))g = 0. \quad (4.1)$$

Параметр a здесь следует выбирать достаточно большим и не зависящим от ε так, чтобы носители коэффициентов оператора L_ε лежали внутри Π_a для всех достаточно малых ε .

Так как $T_6(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), W_2^2(Q))$ для всех $Q \in \Xi$, то с учетом вида коэффициентов оператора L_ε (см. (2.3)) заключаем, что

$$L_\varepsilon T_6(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a), L_2(\Pi_a)).$$

Кроме того, оператор $L_\varepsilon T_6(k)$ ограничен равномерно по ε .

Вопрос о существовании собственных значений оператора H_l , возникающих из границы существенного спектра, очевидно, эквивалентен вопросу о существовании функции $k = k_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, при которой уравнение (4.1) будет иметь нетривиальное решение g_ε , так что $T_6(k_\varepsilon)g_\varepsilon \in L_2(\Pi)$. Поэтому достаточно исследовать вопрос о существовании такой функции k_ε .

ЛЕММА 4.1. *Пусть при $l = l_*$ не существует решения ϕ , описанного в п. 2) теоремы 1.1. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $|l - l_*| < \varepsilon_0$ оператор H_l не имеет собственных значений в интервале $(1 - \delta, 1 + \delta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $d < \pi$. Тогда согласно предположению и лемме 3.7 оператор $(I + T_7(k))$ обратим при всех $k \in B$. Так как оператор $L_\varepsilon T_6(k)$ ограничен равномерно по ε и $k \in B$, то при достаточно малых ε оператор в (4.1) также обратим при всех $k \in B$. Следовательно, у уравнения (4.1) отсутствуют нетривиальные решения.

В случае $d = \pi$ доказательство в целом аналогично. В силу симметричности Π относительно оси $x_2 = 0$ все собственные функции оператора H_l четны по x_2 , так как нечетные собственные функции удовлетворяли бы краевому условию Дирихле при $x_2 = 0$ и являлись бы потому собственными функциями оператора H_0 . Дискретный спектр последнего же пуст. Учитывая четность собственных функций по x_2 , достаточно рассмотреть уравнение (4.1) лишь на четных по x_2 функциях g (оператор $T_6(k)$, очевидно, сохраняет свойство четности по x_2). Обозначим через $\mathcal{V}$ подпространство $L_2(\Pi_a)$, состоящее из четных по x_2 функций. Тогда оператор $(I + T_7(k))^{-1} L_\varepsilon T_6(k): \mathcal{V} \rightarrow L_2(\Pi_a)$ ограничен равномерно по ε (см. лемму 3.7). Отсюда уже легко вывести отсутствие нетривиальных четных по x_2 решений у уравнения (4.1).

Докажем теперь, что из наличия нетривиального решения ϕ из леммы 3.7 для $l = l_*$ следует существование функции $k = k_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, для которой уравнение (4.1) имеет нетривиальное решение, а функция k_ε удовлетворяет равенству

$$k_\varepsilon = \varepsilon \mu + O(\varepsilon^2), \quad (4.2)$$

где μ определяется формулами (1.6), (1.7) с заменой l_n и ϕ_n на l_* , ϕ соответственно. Доказательство проведем только для случая $d < \pi$; случай $d = \pi$ был доказан в [8].

В уравнении (4.1) обратим оператор $(I + T_7(k))$ с учетом леммы 3.7:

$$g - \frac{\varepsilon}{2k} \Phi \int_{\Pi} \phi L_{\varepsilon} T_6(k) g dy + \varepsilon T_9(k) L_{\varepsilon} T_6(k) g = 0.$$

Оператор $T_9(k) L_{\varepsilon} T_6(k)$ ограничен равномерно по ε , а потому при малых ε существует ограниченный обратный $T_{10}(k, \varepsilon) := (I + \varepsilon T_9(k) L_{\varepsilon} T_6(k))^{-1}$. Применяя этот оператор к последнему уравнению, получаем

$$g - \frac{\varepsilon}{2k} \left(\int_{\Pi} \phi L_{\varepsilon} T_6(k) g dy \right) T_{10}(k, \varepsilon) \Phi = 0. \quad (4.3)$$

Если интеграл в (4.3) равен нулю, то это немедленно приводит к тривиальному решению $g = 0$. Следовательно, для нетривиального решения этот интеграл обязательно отличен от нуля. Учитывая данный факт, применим к уравнению (4.3) оператор $L_{\varepsilon} T_6(k)$, умножим на $2k\phi$ и проинтегрируем по Π , что даст нам следующее уравнение:

$$2k - \varepsilon \int_{\Pi} \phi L_{\varepsilon} T_6(k) T_{10}(k, \varepsilon) \Phi dy = 0. \quad (4.4)$$

Данное уравнение фактически является уравнением на функцию $k = k_{\varepsilon}$, при которой уравнение (4.1) имеет нетривиальное решение, само решение в силу (4.3) задается формулой

$$g_{\varepsilon} = C T_{10}(k_{\varepsilon}, \varepsilon) \Phi, \quad (4.5)$$

где C – произвольная константа. Функция

$$(k, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \int_{\Pi} \phi L_{\varepsilon} T_6(k) T_{10}(k, \varepsilon) \Phi dy$$

голоморфна по k и равномерно по k стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, на границе области B для достаточно малых ε ее можно сделать по модулю меньшей чем $2|k|$. В силу теоремы Руше отсюда следует, что при достаточно малых ε уравнение (4.4) имеет в B столько же решений, сколько и функция $k \mapsto 2k$, т.е. ровно одно решение. Обозначим это решение через k_{ε} . Сходимость $T_{10}(k, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I$, очевидно, выполнена в операторной норме равномерно по $k \in B$. С учетом равенства $\phi = T_6(0)\Phi$ и (2.3) это позволяет переписать уравнение (4.4) в виде

$$k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Pi} \phi L_0 \phi dy + O(\varepsilon |k_{\varepsilon}| + \varepsilon^2),$$

$$L_0 := -2\chi_1'(y_1) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \chi_1''(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Здесь мы также учли вид коэффициентов оператора L_{ε} . Так как $k_{\varepsilon} \rightarrow 0$, то из полученных равенств вытекает, что $k_{\varepsilon} = O(\varepsilon)$, а потому

$$k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Pi} \phi L_0 \phi dy + O(\varepsilon^2). \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.2. Функция $\phi(x)$ в окрестности правого конца окна γ_l ведет себя следующим образом:

$$\phi(y) = \alpha r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r), \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(y) = \alpha \frac{\partial}{\partial y_i} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.7)$$

где (r, θ) – полярные координаты с центром в правом конце γ_l , α – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_4 = \tilde{\chi}_4(r)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $r \leq \delta$ и нулю при $r \geq 2\delta$. Обозначим $\Theta := \{y : r < 2\delta, 0 < \theta < 2\pi\}$. Число δ выберем так, чтобы множество Θ не пересекалось с левым концом окна γ_l и лежало полностью внутри Π . Как уже было отмечено в замечании 1.1, $\phi \in C^\infty(\Pi)$. Учитывая этот факт, легко убедиться, что функция $\tilde{\phi}(y) = \chi_4(r)\phi(y) \in W_2^1(\Theta, \partial\Theta)$ является решением краевой задачи

$$-\Delta \tilde{\phi} = \tilde{\phi} + \tilde{f}, \quad y \in \Theta, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad y \in \partial\Theta,$$

где $\tilde{f} \in C^\infty(\bar{\Theta})$, $\tilde{f} \equiv 0$ при $r \leq \delta$. Производя теперь в этой задаче замену переменных $\tilde{r} = r^{1/2}$, $\tilde{\theta} = \theta/2$, приходим к следующей краевой задаче:

$$-\Delta_{\tilde{y}} \tilde{\phi} = 4\tilde{r}^2 \tilde{\phi} + 4\tilde{r}^2 \tilde{f}, \quad \tilde{y} \in \tilde{\Theta}, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{y} \in \partial\tilde{\Theta},$$

где $\tilde{y}$ – декартовы координаты, соответствующие $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$, $\tilde{\Theta} := \{\tilde{y} : \tilde{r} < \sqrt{2\delta}, \tilde{\theta} \in (0, \pi)\}$. Так как $\tilde{\phi} \in W_2^1(\tilde{\Theta})$,

$$\int_{\tilde{\Theta}} |\nabla_{\tilde{y}} \tilde{\phi}|^2 d\tilde{y} = \int_{\Theta} |\nabla_y \tilde{\phi}|^2 dy < \infty$$

и функция $\tilde{\phi}$ обращается в нуль на границе области $\tilde{\Theta}$, то справедливо $\tilde{\phi} \in W_2^1(\tilde{\Theta}, \partial\tilde{\Theta})$. Функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\phi}$ продолжим в область $\{y : \tilde{r} < 2\delta, \pi < \tilde{\theta} < 2\pi\}$ нечетно по $\tilde{y}_2$, т.е. $\tilde{\phi}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = -\tilde{\phi}(-\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, $\tilde{f}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = -\tilde{f}(-\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, $\tilde{y}_2 < 0$. Для указанных продолжений сохраним прежние обозначения $\tilde{\phi}$ и $\tilde{f}$. Обозначим $\hat{\Omega} := \{\tilde{y} : \tilde{r} < \sqrt{2\delta}\}$. Ясно, что $\tilde{f} \in L_2(\hat{\Omega})$, $\tilde{f} \equiv 0$ при $\tilde{r} \leq \sqrt{\delta}$, а функция $\tilde{\phi} \in W_2^1(\hat{\Omega}, \partial\hat{\Omega})$ является решением краевой задачи

$$-\Delta \tilde{\phi} = 4\tilde{r}^2 \tilde{\phi} + \tilde{f}, \quad \tilde{y} \in \hat{\Omega}, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{y} \in \partial\hat{\Omega}.$$

В силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач (см. [14; гл. 4, §2]) функция $\tilde{\phi}$ бесконечно дифференцируема в нуле, причем с учетом краевой задачи для $\tilde{\phi}$ выполнено

$$\tilde{\phi}(\tilde{y}) = \alpha \tilde{y}_2 + O(\tilde{r}^2), \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i} \tilde{\phi}(y) = \alpha \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial \tilde{y}_i} + O(\tilde{r}), \quad \tilde{r} \rightarrow 0.$$

Возвращаясь теперь к переменным y и учитывая определение функции χ_4 , приходим к утверждению леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Идея доказательства леммы 4.2 заимствована из доказательства леммы 3.1 из [22; гл. III, §2].

Функция ϕ обладает определенной четностью по x_1 , а потому формулы, аналогичные (4.7), верны и на левом конце окна γ_l . Учитывая поведение функции $\phi(x)$ в окрестности концов окна γ_l и краевую задачу для ϕ , мы можем подсчитать интеграл в (4.6), дважды проинтегрировав по частям:

$$\int_{\Pi} \phi L_0 \phi dy = - \int_{\Pi} \phi(\Delta + 1) \left(\chi(y_1) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) dy = \pi \alpha^2. \quad (4.8)$$

Аналогично проверяется, что

$$0 = \int_{\Pi} y_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} (\Delta + 1) \phi dy = \pi l_* \alpha^2 + 2 \int_{\Pi} \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1^2} dy = \pi l_* \alpha^2 - 2 \int_{\Pi} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right|^2 dy, \quad (4.9)$$

откуда и из (4.8) получаем равенство

$$\int_{\Pi} \phi L_0 \phi dy = \frac{2}{l_*} \int_{\Pi} \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1^2} dy = 2\mu, \quad (4.10)$$

где μ определяется формулой (1.6) с заменой l_n и ϕ_n на l_* и ϕ . Подставляя теперь соотношения (4.10) в (4.6), приходим к асимптотике (4.2).

Положим $C = 1$ в (4.5); тогда с учетом вида оператора $T_{10}(k, \varepsilon)$ полученное решение уравнения (4.1) удовлетворяет асимптотической формуле

$$g_\varepsilon = \Phi + O(\varepsilon) \quad \text{в норме } L_2(\Pi_a). \quad (4.11)$$

Из этого равенства в силу леммы 3.3 и соотношения $\Phi \neq 0$ следует, что функция $\psi^\varepsilon(y) = (T_6(k_\varepsilon)g_\varepsilon)(y)$ не равна тождественно нулю. Следовательно, она является нетривиальным решением краевой задачи (2.3). В силу асимптотик (3.2), (4.2) и (4.10) неравенство $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$ выполнено лишь при $\varepsilon > 0$, а потому функция ψ^ε является элементом $L_2(\Pi)$ только при $\varepsilon > 0$. Переходя к переменным x (см. (2.2)), заключаем, что только при $\varepsilon > 0$ величина $\lambda^\varepsilon := 1 - k_\varepsilon^2$ является собственным значением оператора $H_{l_*+\varepsilon}$, а $\psi^\varepsilon(y(x, \varepsilon))$ — соответствующей собственной функцией. При $\varepsilon \leq 0$ оператор $H_{l_*+\varepsilon}$ не имеет собственных значений, близких к границе существенного спектра, т.е. собственное значение λ^ε исчезает при $\varepsilon \leq 0$. Следовательно, l_* — одно из критических значений длины окна γ_l , а соответствующее возникающее при $l > l_*$ собственное значение имеет асимптотику (1.5), (1.6), что следует из (4.2) и (4.10). Будем считать, что $l_* = l_n$, тогда $\lambda_n = \lambda^\varepsilon$, $\psi_n(x) = c_\varepsilon \psi^\varepsilon(y(x, \varepsilon))$, где c_ε — некоторая константа.

Для завершения доказательства осталось показать, что выполняются соотношения (1.8), (1.9); совпадение четности по x_1 у функций ψ_n и ϕ_n следует из (1.9) и п. 1) теоремы 1.1.

Определенная выше функция $\psi_n(x)$ удовлетворяет асимптотике (3.2), где $c_+(k_\varepsilon) = c_\varepsilon (\sqrt{2/\pi} + O(\varepsilon))$. Данное равенство вытекает из (4.11), определения оператора $T_6(k)$ и функций ϕ и Φ , установленной выше асимптотики для k_ε и равенства $y_1(x_1, \varepsilon) \equiv x_1$ для достаточно больших x_1 . Следовательно, константу c_ε можно выбрать так, что функция ψ_n будет удовлетворять асимптотике (1.8), причем в этом случае выполнено $c_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon)$. Из этого равенства и (4.11) выводим

$$\psi_n(x) = \phi_n(y(x, \varepsilon)) + O(\varepsilon)$$

в норме $W_2^1(\Pi_R)$ для любого $R > 0$ (здесь норма понимается в терминах переменных x). Таким образом, для доказательства соотношений (1.8) достаточно

показать выполнение соотношения

$$\|\phi_n(x) - \phi_n(y(x, \varepsilon))\|_{W_2^1(\Pi_R)} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad (4.12)$$

для всех $R > 0$. Ясно, что достаточно показать ее лишь для $R > l$. В области Π_R выделим два прямоугольника $P_{\pm} := \{x : \pm x_1 \in (l - 2\varepsilon_0, l + 2\varepsilon_0), -d < x_2 < \pi\}$, ε_0 — из (2.2). Выберем ε_0 достаточно малым, так чтобы минимальное собственное значение оператора Лапласа в прямоугольниках $P_{\pm}$ с краевым условием Дирихле было больше единицы; обозначим это собственное значение через τ . Положим $\varphi(x) := \phi_n(x) - \phi_n(y(x, \varepsilon))$. Функция φ является элементом $W_2^1(P_{\pm}, \partial P_{\pm})$, а потому верна оценка

$$\tau \|\varphi\|_{L_2(P_{\pm})}^2 \leq \|\nabla \varphi\|_{L_2(P_{\pm})}^2. \quad (4.13)$$

Далее, интегрируя по частям в равенстве

$$\int_{P_+} \varphi(x) ((\Delta_x + 1)\varphi(x) + \varepsilon L_{\varepsilon} \phi_n(y)) dx = 0,$$

с учетом свойств ϕ_n получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi\|_{L_2(P_+)}^2 &= \|\varphi\|_{L_2(P_+)}^2 + \varepsilon \int_{P_+} \varphi L_{\varepsilon} \phi_n(y) dx \\ &+ \int_{l_* - \varepsilon}^{l_*} \phi_n(x_1, 0) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \phi_n(y_1(x_1, \varepsilon), -0) - \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_n(y_1(x_1, \varepsilon), +0) \right) dx_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Последнее слагаемое в правой части данного равенства легко оценить, учитывая (4.7):

$$\left| \int_{l_* - \varepsilon}^{l_*} \phi_n(x_1, 0) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \phi_n(y_1(x_1, \varepsilon), -0) - \frac{\partial}{\partial x_2} \phi_n(y_1(x_1, \varepsilon), +0) \right) dx_1 \right| \leq C_1 \varepsilon,$$

где C_1 — некоторая константа, не зависящая от ε . Второе слагаемое в правой части (4.14) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{P_+} \varphi L_{\varepsilon} \phi_n(y) dx \right| \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(P_+)},$$

где C_2 — некоторая константа, не зависящая от ε . Для доказательства последней оценки достаточно учесть гладкость функции $\phi_n(y(x, \varepsilon))$ и то обстоятельство, что носители коэффициентов оператора L_{ε} отделены от концов окна γ_{l_*} на положительное расстояние равномерно по ε . Подставляя последние две оценки в (4.14), получаем

$$\|\nabla \varphi\|_{L_2(P_+)}^2 \leq C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon \|\varphi\|_{L_2(P_+)} + \|\varphi\|_{L_2(P_+)}^2. \quad (4.15)$$

Аналогичная оценка верна и для P_- .

Учитывая полученные оценки для $\|\nabla \varphi\|_{L_2(P_{\pm})}^2$, из (4.13) выводим

$$(\tau - 1) \|\varphi\|_{L_2(P_{\pm})}^2 - C_2 \varepsilon \|\varphi\|_{L_2(P_{\pm})} - C_1 \varepsilon \leq 0.$$

Решая данное квадратное неравенство с учетом соотношений $\tau > 1$ и (4.15), выводим

$$\|\varphi\|_{L_2(P_{\pm})} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \|\nabla \varphi\|_{L_2(P_{\pm})} = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Для завершения доказательства (4.12) осталось лишь отметить, что оценка

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\Pi_R \setminus (P_+ \cup P_-))} = O(\varepsilon)$$

верна в силу бесконечной дифференцируемости функции ϕ_n на $\overline{\Pi_R} \setminus (P_+ \cup P_-)$ и определения функции φ . Теорема 1.1 полностью доказана.

§ 5. Асимптотические разложения собственных значений при $l \rightarrow +\infty$

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 1.2. Доказательство начнем с п. 1). Так как согласно теореме 1.1 все собственные функции оператора H_l обладают определенной четностью по x_1 , то мы можем разделить множество Π пополам отрезком $\{0\} \times [-d, \pi]$ и выставить на этом отрезке краевое условие Дирихле или Неймана в зависимости от четности изучаемой собственной функции, рассмотрев после задачу на собственные значения оператора Лапласа в правой половине Π . Затем сделаем сдвиг переменной x_1 по правилу $x_1 \mapsto x_1 - l$, что приведет к задаче об изучении спектра лапласиана в области $\Pi^{*,l} := \Pi \cap \{x : x_1 > -l\}$ с соответствующими краевыми условиями. Ниже будет показано, что при $l \rightarrow +\infty$ такую задачу можно рассматривать как задачу о возмущении оператора H_* , определенного в § 1, что позволит получить требуемые асимптотики (1.11).

Сначала исследуем поведение оператора $(H_* - \lambda)^{-1}$ при λ , близких к $\varkappa := \pi/(\pi + d)$. Для этого мы применим тот же подход, что и в § 3.

Положим $\Pi_a^* := \Pi^* \cap \{x : |x_1| < a\}$, $\lambda = \varkappa^2 + k^2$. Для малых комплексных $k \in B$ рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = (\varkappa^2 + k^2)u + f, \quad x \in \Pi^*, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Pi^*, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} u(x, k) &= c(k)e^{ikx_1} \sin(\varkappa(x_2 - \pi)) + O(-e^{-\sqrt{3\varkappa^2 - k^2}x_1}), \quad x_1 \rightarrow -\infty, \\ u(x, k) &= O(e^{-\sqrt{1 - \varkappa^2 - k^2}x_1}), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad x_2 \in (0, \pi), \\ u(x, k) &= O(e^{-\sqrt{\pi^2/d^2 - \varkappa^2 - k^2}x_1}), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad x_2 \in (-d, 0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь носитель функции $f \in L_2(\Pi^*)$ лежит в Π_a^* , $a > 0$ – некоторое фиксированное число, $c(k)$ – некоторая константа. Пусть g – функция из $L_2(\Pi_a^*)$, продолженная нулем в $\Pi^* \setminus \Pi_a^*$. Обозначим $\Omega_0 := \Pi^* \cap \{x : x_1 < 0\}$. Краевые задачи

$$-\Delta v_i = (\varkappa^2 + k^2)v_i + g, \quad x \in \Omega_i, \quad v_i = 0, \quad x \in \partial\Omega_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (5.3)$$

решаются разделением переменных:

$$v_i(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_i} G_j^i(x, t, k) g(t) dt, \quad (5.4)$$

$$G_j^0(x, t, k) := \frac{1}{(\pi + d)s_j^0} (e^{-s_j^0|x_1 - t_1|} - e^{s_j^0(x_1 + t_1)}) \sin(j\varkappa(x_2 - \pi)) \sin(j\varkappa(t_2 - \pi)),$$

$$G_j^1(x, t, k) := \frac{1}{\pi s_j^1} (e^{-s_j^1|x_1 - t_1|} - e^{-s_j^1(x_1 + t_1)}) \sin(jx_2) \sin(jt_2),$$

$$G_j^2(x, t, k) := \frac{1}{s_j^2 d} (e^{-s_j^2|x_1 - t_1|} - e^{-s_j^2(x_1 + t_1)}) \sin\left(\frac{\pi j}{d} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi j}{d} t_2\right),$$

где $s_1^0 = ik$, $s_j^0 = \sqrt{\varkappa^2 j^2 - \varkappa^2 - k^2}$, $j \geq 2$, $s_j^1 = \sqrt{j^2 - \varkappa^2 - k^2}$, $s_j^2 = \sqrt{\pi^2 j^2 / d^2 - \varkappa^2 - k^2}$. При $k = 0$ функция G_1^0 доопределяется по непрерывности:

$$G_1^0(x, t, 0) := -\frac{1}{(\pi + d)s_1^0}(|x_1 - t_1| + x_1 + t_1) \sin(\varkappa(x_2 - \pi)) \sin(\varkappa(t_2 - \pi)).$$

Положим $\Omega_0^b := \Omega_0 \cap \Pi_b$. Верен аналог леммы 3.1.

ЛЕММА 5.1. Пусть $b > 0$. Ряды (5.4) сходятся в норме $W_2^2(\Omega_i^b)$. Функции v_i удовлетворяют асимптотикам (5.2). Отображения $g \mapsto v_i$ являются линейными ограниченными операторами из $L_2(\Pi_a^*)$ в $W_2^2(\Omega_i^b)$ и как функции k принадлежат $\mathcal{H}(L_2(\Pi_a^*), W_2^2(\Omega_i^b))$.

Пусть $v(x, k) := v_i(x, k)$, $x \in \Omega_i$. Функцию $w(x, k)$ определим как решение краевой задачи

$$\Delta w = \Delta v, \quad x \in \Pi_a^*, \quad w = v, \quad x \in \partial \Pi_a^*. \quad (5.5)$$

Здесь Δv понимается в том же смысле, что и в (3.7). Обозначим $\Gamma_a^* := \partial \Pi^* \cap \{x : |x_1| < a\}$. Функцию w можно рассматривать как $w = T_{11}v$, где

$$T_{11} : \bigoplus_{i=0}^2 W_2^2(\Omega_i^a, \partial \Omega_i^a \cap \partial \Omega_i) \rightarrow W_2^1(\Pi_a^*, \Gamma_a^*)$$

– линейный ограниченный оператор. Кроме того, оператор T_{11} ограничен как оператор из $\bigoplus_{i=0}^2 W_2^2(\Omega_i^a, \partial \Omega_i^a \cap \partial \Omega_i)$ в $W_2^2(Q)$ для всех $Q \in \Xi^*$, где Ξ^* – множество всех ограниченных подобластей Π_* с гладкой границей, отделенных от нуля на положительное расстояние. Пусть $\chi_5(x_1)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|x_1| < a/3$ и нулю при $|x_1| > 2a/3$. Определим функцию $u(x, k)$ по правилу

$$u(x, k) := w(x, k)\chi_5(x_1) + v(x, k)(1 - \chi_5(x_1)). \quad (5.6)$$

Функция u рассматривается как значение линейного оператора $T_{12}(k)g$, определенного по правилу $T_{12}(k)g := u$. Оператор

$$T_{12} : L_2(\Pi_a^*) \rightarrow W_2^1(\Pi_b^*, \Gamma_b^*), \quad T_{12} : L_2(\Pi_a^*) \rightarrow W_2^2(Q)$$

ограничен для всех $b > 0$ и всех $Q \in \Xi^*$. Кроме того,

$$T_{12}(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a^*), W_2^1(\Pi_b^*, \Gamma_b^*)), \quad T_{12}(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a^*), W_2^2(Q))$$

для всех $b > 0$ и всех $Q \in \Xi^*$.

Аналогично выводу уравнения (3.10) показывается, что функция u из (5.6) является решением краевой задачи (5.1), (5.2), если g является решением уравнения

$$g + T_{13}(k)g = f, \quad (5.7)$$

где

$$T_{13}(k)g := (v - w)(\Delta + \varkappa^2 + k^2)\chi_5(x_1) + 2(\nabla_x \chi_5, \nabla_x(v - w))_{\mathbb{R}^2}.$$

Аналогично леммам 3.3–3.5 доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 5.2. *Оператор $T_{13}(k)$ является линейным компактным оператором из $L_2(\Pi_a^*)$ в $L_2(\Pi_a^*)$ для всех $k \in B$ и $T_{13}(\cdot) \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a^*), L_2(\Pi_a^*))$. Для всех $k \in B$ уравнение (5.7) эквивалентно краевой задаче (5.1), (5.2): для каждого решения уравнения (5.7) функция $u = T_{12}(k)g$ является решением краевой задачи (5.1), (5.2) и для всякого решения u краевой задачи (5.1), (5.2) существует единственное решение g уравнения (5.7), связанное с u равенством $u = T_{12}(k)g$. Справедливо $(I + T_{13}(\cdot))^{-1} \in \mathcal{M}(L_2(\Pi_a^*), L_2(\Pi_a^*))$.*

Как и в § 3, нас будет интересовать поведение оператора $(I + T_{13}(k))^{-1}$ при малых k , а именно, наличие полюса у данного оператора в точке $k = 0$. Как показывает следующее утверждение, в отличие от леммы 3.7 здесь ответ всегда отрицателен.

ЛЕММА 5.3. *Если окрестность нуля B достаточно мала, то*

$$(I + T_{13}(\cdot))^{-1} \in \mathcal{H}(L_2(\Pi_a^*), L_2(\Pi_a^*)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно показать отсутствие полюса в нуле у оператора $(I + T_{13}(k))^{-1}$. Наличие полюса в нуле эквивалентно наличию нетривиального решения u уравнения (5.7) при $k = 0$, $f = 0$. Последнее эквивалентно наличию нетривиального решения краевой задачи (5.1) с асимптотикой (5.2). Допустим, что существует такое решение краевой задачи (5.1), обозначим его через $U(x)$. Функцию U , очевидно, можно выбрать вещественнозначной. Кроме того, в точке $x = 0$ функция U обладает следующим асимптотическим поведением:

$$U(x) = \alpha r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} U(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + O(r), \quad r \rightarrow 0,$$

где (r, θ) – полярные координаты, соответствующие x . Данные асимптотики доказываются аналогично лемме 4.2. Интегрируя по частям и учитывая данные асимптотики и (5.2), получаем

$$0 = \int_{\Pi^*} x_1 U(\Delta + \varkappa^2) \frac{\partial U}{\partial x_1} dx = 2 \int_{\Pi^*} \left| \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|^2 dx.$$

Следовательно, функция U не зависит от x_1 , что с учетом асимптотик (5.2) при $x_1 \rightarrow +\infty$ приводит к равенству $U = 0$. Лемма доказана.

Как уже было отмечено в начале параграфа, спектр оператора H_l совпадает со спектром следующей пары краевых задач:

$$-\Delta \Psi = \lambda \Psi, \quad x \in \Pi^{*,l}, \quad \Psi = 0, \quad x \in \partial \Pi^{*,l} \setminus K_l, \quad pu = 0, \quad x \in K_l, \quad (5.8)$$

где $K_l := \{x : x_1 = -l, x_2 \in (-d, 0)\}$, p – граничный оператор, который следует брать в виде $pu = u$ или $pu = \partial u / \partial x_1$. При $x_1 \rightarrow \pm\infty$ для функций Ψ предполагается выполнение асимптотик (5.2) с $k = \sqrt{\lambda - \varkappa^2}$. Собственные функции оператора H_l связаны с собственными функциями краевых задач (5.8) равенствами $\Psi_m(x) = \psi_m(x_1 + l, x_2)$, $x_1 > -l$, поэтому граничный оператор p описывает краевое условие Дирихле в случае нечетных по x_1 функций $\psi_m(x)$ и краевое условие Неймана в случае четных по x_1 функций $\psi_m(x)$.

Нашей основной целью на данном этапе является сведение краевых задач (5.8) к операторному уравнению, аналогичному (5.7). Для этого мы вновь

применим подход, позволивший получить уравнение (5.7). Начнем со случая $pu = u$. Считаем, что $l > a$. Определим функцию v_0^l как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v_0^l &= (\varkappa^2 + k^2)v_0^l, & x \in \Omega_0^l, \\ v_0^l &= 0, & x \in \partial\Omega_0^l \setminus K_l, & v_0^l = -v_0, & x \in K_l. \end{aligned}$$

Решение такой задачи с учетом формулы (5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} v_0^l(x, k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-s_j^0 l}}{\text{sh}(s_j^0 l)} \beta_j(k)[g] \text{sh}(s_j^0 x_1) \sin(\varkappa j(x_2 - \pi)), \\ \beta_j(k)[g] &= -\frac{2}{(\pi + d)s_j^0} \int_{\Omega_0^a} g(x) \text{sh}(s_j^0 x_1) \sin(j\varkappa(x_2 - \pi)) dx. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Первое слагаемое данного ряда содержит в знаменателе функцию $\text{sh}(s_j^0 l) = i \sin(kl)$, которая обращается в нуль при $kl = \pi q$, $q \in \mathbb{Z}$. Вместе с тем согласно п. 1) теоремы 1.1 значения k , соответствующие собственным значениям оператора H_l , лежат строго внутри интервалов $(\pi(m-1)/(2l), \pi m/(2l))$. Поэтому значения $k = \pi m/(2l)$ мы исключим из рассмотрения, что позволит избежать неопределенности в определении функции v_0^l .

Аналогично лемме 3.1 доказывается, что ряд (5.9) сходится в норме $W_2^2(\Omega_0^l)$. Положим $v^l(x, k) := v_0^l(x, k)$, $-l < x_1 < 0$, $v^l(x, k) := 0$, $x_1 > 0$. Функцию w^l определим как решение краевой задачи (5.5) с функцией v^l в правой части, т.е. $w^l = T_{11}v^l$. Решение краевой задачи (5.8) будем искать в виде

$$\Psi(x) := (w(x) + w^l(x))\chi_5(x_1) + (1 - \chi_5(x_1))(v(x) + v^l(x)), \quad (5.10)$$

где $v(x)$, $w(x)$ — из (5.3), (5.5). Функция $\Psi(x)$ удовлетворяет граничным условиям (5.8), асимптотикам (5.2) при $x_1 \rightarrow +\infty$ и является решением уравнения из (5.8), если выполнено операторное уравнение

$$g + T_{13}(k)g + T_{14}(k, l)g = 0, \quad (5.11)$$

где оператор $T_{14}(k, l)$ определяется по правилу

$$T_{14}(k, l)g := (v^l - w^l)(\Delta + \varkappa^2 + k^2)\chi_5(x_1) + 2(\nabla\chi_5, \nabla(v^l - w^l))_{\mathbb{R}^2}.$$

Уравнение (5.11) эквивалентно краевой задаче (5.8), что доказывается аналогично лемме 3.1.

Пусть $k = k(l)$ соответствует собственному значению $\lambda_m(l)$ оператора H_l по правилу $\lambda_m(l) = \varkappa^2 + k^2(l)$, а соответствующее решение g уравнения (5.11) порождает собственную функцию Ψ_m по правилу (5.10). Из леммы 1.1 следует, что всякое собственное значение оператора H_l стремится к $\varkappa$ при $l \rightarrow +\infty$, т.е. $k(l) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$. Следовательно, выбирая l достаточно большим, мы всегда можем добиться того, чтобы $k(l)$ лежало в B для всех достаточно больших l . Всюду ниже считаем, что величина l выбрана именно таким образом.

Обозначим $\hat{v}(x, k) := \sin(kx_1) \sin(\varkappa(x_2 - \pi))$, $x_1 < 0$, $\hat{v}(x, k) := 0$, $x_1 > 0$, $\hat{w} := T_{11}\hat{v}$,

$$\hat{F} := (\hat{v} - \hat{w})(\Delta + \varkappa^2 + k^2)\chi_5 + 2(\nabla\chi_5, \nabla(\hat{v} - \hat{w}))_{\mathbb{R}^2}.$$

ЛЕММА 5.4. При достаточно малых k оператор T_{14} представим в виде

$$T_{14}(k, l) = T_{15}(k, l) + T_{16}(k, l), \quad T_{15}(k, l)g = \frac{e^{-ikl}}{\sin(kl)} \beta_0(k)[g]\widehat{F},$$

где оператор $T_{16}(k, l) \in \mathcal{L}(L_2(\Pi_a^*), L_2(\Pi_a^*))$ удовлетворяет оценке

$$\|T_{16}\| \leq C e^{-(2\sqrt{3}\kappa - \delta)l},$$

C, δ – некоторые константы, не зависящие от l , $0 < \delta < 2\sqrt{3}\kappa$.

Утверждение данной леммы очевидно следует из определения функции v_0^l (см. (5.9)) и определения оператора T_{14} .

В силу леммы 5.4 уравнение (5.11) можно переписать в виде

$$g + T_{13}(k)g + T_{15}(k, l)g + T_{16}(k, l)g = 0. \quad (5.12)$$

Оператор $(I + T_{13}(k))$ имеет ограниченный обратный в силу леммы 5.3, а оператор $T_{16}(k, l)$ экспоненциально мал по норме при $l \rightarrow +\infty$ в силу леммы 5.4. Следовательно, оператор $(I + T_{13}(k) + T_{16}(k, l))^{-1}$ также имеет ограниченный обратный при достаточно больших l . Применим данный оператор к (5.12), тогда получим

$$g + \frac{e^{-ikl}}{\sin(kl)} \beta_0(k)[g](I + T_{13}(k) + T_{16}(k, l))^{-1}\widehat{F} = 0. \quad (5.13)$$

Ясно, что $\beta_0(k)[g] \neq 0$, так как иначе из полученного уравнения следовало бы, что $g = 0$, в то время как g соответствует собственной функции Ψ_m . Применив теперь функционал $\beta_0(k)[g]$ к (5.13), приходим к уравнению

$$1 + \frac{e^{-ikl}}{\sin(kl)} \beta_0(k)[(I + T_{13}(k) + T_{16}(k, l))^{-1}\widehat{F}] = 0. \quad (5.14)$$

Непосредственно из определения функции $\widehat{F}$ и лемм 5.3, 5.4 вытекает равенство

$$\beta_0(k)[(I + T_{13}(k) + T_{16}(k, l))^{-1}\widehat{F}] = ck + O(k^2 + e^{-(2\sqrt{3}\kappa - \delta)l}), \quad (5.15)$$

где c – некоторая константа, δ то же, что и в лемме 5.4. Так как $k = k(l)$ соответствует собственному значению λ_m , то из леммы 1.1 следует, что $k(l) = O(l^{-1})$ при $l \rightarrow +\infty$. Учитывая это равенство и вещественность k , подставим (5.15) в (5.14):

$$\sin(kl) = O(l^{-1}), \quad (5.16)$$

откуда выводим

$$kl = \pi q + O(l^{-1}), \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

В силу п. 1) теоремы 1.1 индекс m у собственного значения λ_m должен быть четным и, кроме того, должно быть выполнено двойное неравенство

$$\frac{\pi(m-1)}{2} \leq \pi q \leq \frac{\pi m}{2}.$$

Так как m четно, то отсюда следует $q = m/2$, что в силу (5.17) и равенства $\lambda_m(l) = \kappa^2 + k^2(l)$ доказывает асимптотические разложения (1.11).

Случай четной по x_1 функции ψ_m доказывается в целом аналогично. Функцию v_0^l следует выбирать как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v_0^l &= (\varkappa^2 + k^2)v_0^l, & x \in \Omega_0^l, \\ v_0^l &= 0, & x \in \partial\Omega_0^l \setminus K_l, \quad \frac{\partial v_0^l}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_0}{\partial x_1}, & x \in \partial\Omega_0^l, \end{aligned}$$

которая решается разделением переменных

$$v_0^l(x, k) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-s_j^0 l}}{\operatorname{ch}(s_j^0 l)} \beta_j(k)[g] \operatorname{sh}(s_j^0 x_1) \sin(\varkappa j(x_2 - \pi)),$$

где $\beta_j(k)$ те же, что и в (5.9). Остальные рассуждения до леммы 5.4 остаются в силе, если под v_l^0 понимать только что определенную функцию. Утверждение леммы 5.4 также верно, если под T_{15} понимать оператор

$$T_{15}(k, l)g = -\frac{e^{-ikl}}{\cos(kl)} \beta_0(k)[g] \widehat{F}.$$

Вывод аналога уравнения (5.14) остается без изменений; в данном случае он будет иметь вид

$$1 - \frac{e^{-ikl}}{\cos(kl)} \beta_0(k) [(I + T_{13}(k) + T_{16}(k, l))^{-1} \widehat{F}] = 0.$$

Отсюда уже несложно вывести аналог уравнения (5.16):

$$\cos(kl) = O(l^{-1}),$$

что дает равенство

$$kl = \frac{\pi}{2} + \pi q + O(l^{-1}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Вновь в силу п. 1) теоремы 1.1 индекс m у собственного значения λ_m должен быть нечетным и должны быть выполнены неравенства

$$\frac{\pi(m-1)}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi q \leq \frac{\pi m}{2},$$

откуда следует $q = (m-1)/2$. Это доказывает асимптотические разложения в случае четной по x_1 собственной функции ψ_m . Пункт 1) теоремы 1.2 полностью доказан.

Докажем утверждение п. 2) теоремы 1.2. Пусть ξ – произвольная точка отрезка $[\varkappa, 1)$. Для каждого значения l выберем число $m = m(l, \xi)$ так, чтобы выполнялось $\xi \in [\Lambda_{m-1}, \Lambda_m)$. Тогда в силу п. 1) теоремы 1.1 верна оценка

$$|\lambda_{m(l, \xi)}(l) - \xi| \leq \Lambda_m - \Lambda_{m-1} = \frac{\pi^2(2m-1)}{4l^2}.$$

Так как $\Lambda_{m-1} \leq \xi < 1$, то

$$m \leq 1 + \frac{2l\sqrt{1-\varkappa^2}}{\pi}.$$

Из последних двух оценок выводим

$$|\lambda_{m(l,\xi)}(l) - \xi| \leq \frac{\pi^2}{4l^2} \left(1 + \frac{4l\sqrt{1 - \kappa^2}}{\pi} \right),$$

откуда следует $\lambda_{m(l,\xi)} \rightarrow \xi$ при $l \rightarrow +\infty$. Теорема 1.2 полностью доказана.

В заключение хотелось бы выразить благодарность Р. Гадыльшину, П. Экнеру (Р. Exner) и Т. Вайдлу (Т. Weidl) за обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] P. Exner, P. Šeba, M. Tater, D. Vaněk, “Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window”, *J. Math. Phys.*, **37**:10 (1996), 4867–4887.
- [2] Y. Hirayama, Y. Tokura, A. D. Wieck, S. Koch, R. J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog, “Transport characteristics of a window-coupled in-plane-gated wire system”, *Phys. Rev. B*, **48**:11 (1993), 7991–7998.
- [3] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [4] P. Exner, S. Vugalter, “Asymptotics estimates for bound states in quantum waveguides coupled laterally through a narrow window”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **65**:1 (1996), 109–123.
- [5] P. Exner, S. Vugalter, “Bound-state asymptotic estimate for window-coupled Dirichlet strips and layers”, *J. Phys. A*, **30**:22 (1997), 7863–7878.
- [6] I. Yu. Popov, “Asymptotics of bound states for laterally coupled waveguides”, *Rep. Math. Phys.*, **43**:3 (1999), 427–437.
- [7] R. Gadyl’shin, “On regular and singular perturbation of acoustic and quantum waveguides”, *C. R. Mecanique*, **332**:8 (2004), 647–652.
- [8] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl’shin, “Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip”, *J. Math. Phys.*, **43**:12 (2002), 6265–6278.
- [9] Ch. Kunze, “Leaky and mutually coupled wires”, *Phys. Rev. B*, **48**:19 (1993), 14338–14346.
- [10] J. Dittrich, J. Kříž, “Bound states in straight quantum waveguide with combined boundary condition”, *J. Math. Phys.*, **43**:8 (2002), 3892–3915.
- [11] D. Borisov, T. Ekholm, H. Kovařík, “Spectrum of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide with combined boundary conditions”, *Ann. Henri Poincaré*, **6**:2 (2005), 327–342.
- [12] М. Ш. Бирман, “Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при возмущении границы и граничных условий”, *Вестн. ЛГУ*, **17**:1 (1962), 22–55.
- [13] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure Appl. Math., **65**, Academic Press, New York, 1975.
- [14] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Физматлит, М., 1976.
- [15] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [16] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, *Hilbert space operators in quantum physics*, AIP Press, New York, 1994.
- [17] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [18] D. Borisov, P. Exner, “Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows”, *J. Phys. A*, **37**:10 (2004), 3411–3428.

- [19] Е. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.
- [20] Р. Р. Гадыльшин, “О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси”, *ТМФ*, **132**:1 (2002), 97–104.
- [21] Р. Р. Гадыльшин, “О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на плоскости”, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 41–54.
- [22] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, Физматлит, М., 1989.

Д. И. Борисов (D. I. Borisov)

Башкирский государственный педагогический
университет, г. Уфа;

Институт ядерной физики, г. Ржеж, Чехия

E-mail: borisovdi@yandex.ru

<http://borisovdi.narod.ru/>

Поступила в редакцию

17.08.2004 и 24.11.2005