Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ант. А. Клячко, SQ -универсальность относительных ко-
представлений с одним соотношением, *Матем. сб.*, 2006,
том 197, номер 10, 87–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 10:03:06

УДК 512.543.7

Ант. А. Клячко

SQ -универсальность относительных копредставлений с одним соотношением

Если к нетривиальной группе без кручения добавить два образующих элемента и одно произвольное соотношение, то всегда получится SQ -универсальная группа. По ходу доказательства этого утверждения мы устанавливаем еще несколько фактов, имеющих самостоятельный интерес. Например, если к свободному произведению двух нетривиальных групп без кручения добавить один образующий и одно соотношение с единичной суммой показателей степеней при добавленном образующем, то также получится SQ -универсальная группа.

Библиография: 27 названий.

§ 1. Введение

Напомним, что группа G называется SQ -универсальной, если каждая счетная группа может быть вложена в некоторую факторгруппу группы G . SQ -универсальными являются все неабелевы свободные группы; все группы, разлагающиеся нетривиальным образом в свободное произведение, кроме бесконечной диэдральной группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (см. [1]); многие свободные произведения с объединенными подгруппами и HNN -расширения [2], [1]; все подгруппы конечного индекса SQ -универсальных групп и все почти SQ -универсальные группы [3]; все неэлементарные гиперболические группы [4] и даже все (кроме некоторых очевидных исключений) относительно гиперболические группы, в частности все группы с бесконечным числом концов [5].

Отправной точкой нашего исследования служит следующая теорема.

ТЕОРЕМА САСЕРДОТА–ШУППА [6] (см. также [1]). *Группа с одним соотношением и по меньшей мере тремя образующими SQ -универсальна.*

На самом деле имеет место значительно более общий факт.

ТЕОРЕМА БАУМСЛАГА–ПРАЙДА [7]. *Группа, обладающая копредставлением, в котором число образующих по меньшей мере на два больше числа соотношений, SQ -универсальна. Более того, каждая такая группа является большой в смысле Громова, т.е. обладает подгруппой конечного индекса, допускающей эпиморфизм на неабелеву свободную группу.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00895).

Дальнейшим обобщением теоремы Сасердота–Шуппа является следующая

ТЕОРЕМА ШТЁРА–ГРОМОВА [8], [9]. *Группа, обладающая копредставлением, в котором число образующих больше числа соотношений и одно из соотношений есть истинная степень, является SQ -универсальной и даже большой в смысле Громова.*¹

Дальнейшие результаты на эту тему можно найти, например, в работах [10]–[14]. В настоящей статье мы обобщаем теорему Сасердота–Шуппа в несколько ином направлении.

Пусть G – некоторая группа. Под группой, заданной относительным копредставлением с одним соотношением над группой G , понимается группа

$$\tilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} G * F(x_1, x_2, \dots, x_n) / \langle\langle w \rangle\rangle.$$

Здесь $x_1, \dots, x_n$ – буквы (не лежащие в G) и w – произвольное слово в алфавите $G \cup \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$ (которое можно трактовать как элемент свободного произведения $G * F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ группы G и свободной группы с базисом $x_1, x_2, \dots, x_n$). Другими словами, копредставление группы $\tilde{G}$ получается из копредставления $G = \langle A \mid R \rangle$ группы G добавлением нескольких новых образующих и одного соотношения: $\tilde{G} = \langle A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \mid R \cup \{w\} \rangle$.

ТЕОРЕМА 1. *Если G – нетривиальная группа без кручения и $n \geq 2$, то группа $\tilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1 \rangle$ является SQ -универсальной при любом $w \in G * F(x_1, \dots, x_n)$.*

СЛЕДСТВИЕ [15]. *В условиях теоремы 1 группа $\tilde{G}$ (как и всякая SQ -универсальная группа) обладает неабелевыми свободными подгруппами.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно показать, что группа $\tilde{G}$ из теоремы 1 уже не обязана быть большой в смысле Громова.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Разумеется, при $n = 1$ утверждение теоремы 1 перестает быть верным (равно как и утверждение теоремы Сасердота–Шуппа перестает быть верным для групп с двумя порождающими). Однако некоторыми свойствами, более слабыми, чем SQ -универсальность, группа $\tilde{G}$ при $n = 1$ все же обладает. В частности, она нетривиальна [16], не является неабелевой простой группой (если $w \neq g_1 x_1^{\pm 1} g_2$) [17], естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ несюрьективно (если $w \neq g_1 x_1^{\pm 1} g_2$) [18]; а в случае, когда сумма показателей степеней при x_1 в слове w равна ± 1 , группа $\tilde{G}$ всегда (кроме нескольких очевидных исключений) содержит неабелеву свободную подгруппу [15].

Теорема 1 говорит об относительных копредставлениях по меньшей мере с двумя дополнительными порождающими, однако важную роль в ее доказательстве играет изучение однопорожденных относительных копредставлений

$$\tilde{G} = \langle G, t \mid w = 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (G * \langle t \rangle_\infty) / \langle\langle w \rangle\rangle, \quad w \equiv \prod g_i t^{\varepsilon_i}, \quad g_i \in G, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}. \quad (1)$$

¹Под *истинной степенью* мы понимаем элемент свободной группы F вида u^k , где $u \in F$ и $\mathbb{Z} \ni k \geq 2$. В частности, единица является истинной степенью, поэтому теорема Штёра–Громова является обобщением теоремы Баумслага–Прайда.

Такое копредставление называется *унимодулярным*, если $\sum \varepsilon_i = \pm 1$. Известно, что унимодулярные относительные копредставления обладают многими хорошими свойствами и лучше поддаются изучению (см., например, [15]–[22]).

В работе [22] было предложено следующее обобщение понятия унимодулярности на так называемые *обобщенные относительные копредставления*:

$$\tilde{G} = \left\langle G * T \left| \prod_{i=1}^n g_i t_i = 1 \right. \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (G * T) / \left\langle \left\langle \prod g_i t_i \right\rangle \right\rangle. \quad (*)$$

Здесь T – произвольная (т.е. не обязательно циклическая) группа, $g_i \in G$ и $t_i \in T$; слово $\prod_{i=1}^n g_i t_i$ мы считаем циклически несократимым.

Обобщенное относительное копредставление $(*)$ над группой G называется *унимодулярным*, если

- 1) $\prod t_i$ является элементом бесконечного порядка в группе T ;
- 2) циклическая подгруппа $\langle \prod t_i \rangle$ нормальна в T ;
- 3) факторгруппа $T / \langle \prod t_i \rangle$ является группой с сильно однозначным умножением.

Напомним, что группа H называется *группой с однозначным умножением* (или *UP-группой*), если для любых двух ее конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ их произведение XY содержит по крайней мере один элемент, разлагающийся в произведение элемента из X и элемента из Y однозначно.²

Мы называем группу H *группой с сильно однозначным умножением*, если для любых двух ее конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ таких, что $|Y| \geq 2$, их произведение XY содержит по крайней мере два однозначно разложимых элемента $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ таких, что $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$.

Насколько мы знаем, все известные примеры UP-групп обладают сильно однозначным умножением. Например, этим свойством обладают все правоупорядочиваемые группы, локально индикательные группы, диффузные группы в смысле Бовдича.

Теорема 1 легко выводится из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть обобщенное относительное копредставление $(*)$ над нециклической группой без кручения G унимодулярно и группа T не является циклической. Тогда группа $\tilde{G}$, заданная копредставлением $(*)$, является SQ-универсальной.

Для доказательства теоремы 2 мы устанавливаем следующий факт об обычных (необобщенных) унимодулярных относительных копредставлениях.

ТЕОРЕМА 3. Если $G_1, \dots, G_l$ – нециклические группы без кручения, $l \geq 2$, и относительное копредставление $L = \langle G_1 * \dots * G_l, t \mid w = 1 \rangle$ над группой $G_1 * \dots * G_l$ унимодулярно, то группа L является SQ-универсальной. Более того, каждая счетная группа S вкладывается в некоторую факторгруппу L/N , в которой выполняется теорема о свободе, т.е.

$$\langle t, G_{i_1}, \dots, G_{i_{l-1}} \rangle = \langle t \rangle_\infty * G_{i_1} * \dots * G_{i_{l-1}} \quad \text{в группе } L/N,$$

²Одно время была гипотеза, что всякая группа без кручения является группой с однозначным умножением (обратное, очевидно, верно). Однако выяснилось, что существует контрпример [23], [24].

если слово w не сопряжено в группе $\langle t \rangle_\infty * G_1 * \dots * G_l$ никакому элементу подгруппы $\langle t \rangle_\infty * G_{i_1} * \dots * G_{i_{l-1}}$.

Согласно [22] мы говорим, что копредставление (1) является *магнусовым*, если естественное отображение $G \rightarrow \tilde{G}$ инъективно и в группе $\tilde{G}$ имеет место разложение $\langle H, t \rangle = H * \langle t \rangle_\infty$ (т.е. элемент t *трансцендентен* над H в $\tilde{G}$) для всякого свободного сомножителя H группы G такого, что w не сопряжено в $G * \langle t \rangle_\infty$ с элементами группы $H * \langle t \rangle$.

В работе [22] было показано, что каждое унимодулярное копредставление над группой без кручения является магнусовым. Для доказательства основных результатов этой статьи нам понадобится более сильное свойство унимодулярных копредставлений.

Будем называть копредставление (1) *сильно магнусовым*, если элемент t трансцендентен в $\tilde{G}$ над каждой подгруппой $H \subseteq G$ такой, что

- 1) w не сопряжено в $G * \langle t \rangle_\infty$ с элементами группы $H * \langle t \rangle$;
- 2) каждый коэффициент g_i либо лежит в H , либо трансцендентен над H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если копредставление (1) унимодулярно и неединичные коэффициенты g_i имеют бесконечный порядок в группе G , то копредставление (1) *сильно магнусово*.

Доказательство утверждения 1 опирается на несколько ранее известных результатов, в частности на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A *_C B$ – свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой C , $v = b_0 a_0 \dots b_m a_m b_{m+1} \in A *_C B$, $m \geq 1$, причем каждый коэффициент слова v (кроме, возможно, крайних) трансцендентен над C , т.е. $\langle a_i, C \rangle = \langle a_i \rangle_\infty * C$ в группе A для $i = 0, \dots, m$ и $\langle b_i, C \rangle = \langle b_i \rangle_\infty * C$ в группе B для $i = 1, \dots, m$. Тогда для любого автоморфизма φ группы B естественные отображения

$$A \rightarrow \left\langle A *_C B \mid \{b^v = b^\varphi \mid b \in B\} \right\rangle \leftarrow B$$

инъективны.

Эта теорема была доказана [19], но не была опубликована. В последнем параграфе статьи мы приводим доказательство теоремы 4. В отличие от чисто алгебраических рассуждений всех предыдущих разделов, доказательство теоремы 4 имеет геометрическую природу. Другие ранее известные факты, из которых выводится утверждение 1, доказываются в том же духе.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, x и y – элементы некоторой группы, а φ – гомоморфизм из этой группы в какую-нибудь другую группу, то x^y , x^{ky} , x^{-y} , x^φ , $x^{k\varphi}$ и $x^{-\varphi}$ обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$, $y^{-1}x^{-1}y$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^k)$ и $\varphi(x^{-1})$ соответственно; коммутатор $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$. Если X – подмножество некоторой группы, то $\langle X \rangle$ и $\langle\langle X \rangle\rangle$ означают соответственно подгруппу, порожденную множеством X , и нормальную подгруппу, порожденную множеством X . Символом $|X|$ мы обозначаем мощность множества X .

§ 2. Доказательство теоремы 1

Если группа G является циклической, то группа $\tilde{G}$ является группой с по меньшей мере тремя образующими и одним соотношением. SQ -универсальность таких групп утверждается в теореме Сасердота–Шуппа. В дальнейшем предполагаем, что группа G нециклическая.

Пусть слово w имеет вид $w \equiv g_1 x_{j_1}^{\varepsilon_1} g_2 x_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots g_p x_{j_p}^{\varepsilon_p}$ и слово $w' \in F(x_1, \dots, x_n)$ получается из w стиранием коэффициентов: $w' = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{j_p}^{\varepsilon_p}$.

Случай 1: w' является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$. В этом случае группа $\tilde{G}$ SQ -универсальна, поскольку по теореме Штёра–Громова SQ -универсальна группа с одним соотношением $T_1 = \langle x_1, \dots, x_n \mid w' = 1 \rangle$, которая является гомоморфным образом группы $\tilde{G}$.

Случай 2: w' не является истинной степенью. Рассмотрим группы

$$\begin{aligned} T &= \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_1, w'] = \cdots = [x_n, w'] = 1 \rangle, \\ T_1 &= \langle x_1, \dots, x_n \mid w' = 1 \rangle = T / \langle w' \rangle. \end{aligned}$$

Группа T является свободным центральным расширением группы с одним соотношением T_1 . Хорошо известно, что если w' не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$, то группа T_1 является локально индикательной [25] и, следовательно, группой с сильно однозначным умножением. Элемент w' имеет бесконечный порядок в группе T (см. [1]). Таким образом, обобщенное относительное копредставление $\langle G, T \mid w = 1 \rangle$ является унимодулярным. Группа T не является циклической, поскольку ее факторгруппа по коммутанту является свободной абелевой ранга $n \geq 2$. Значит, по теореме 2 группа $\langle G, T \mid w = 1 \rangle$ SQ -универсальна. Осталось заметить, что эта группа является гомоморфным образом группы $\tilde{G}$, а группа, имеющая SQ -универсальный гомоморфный образ, сама, очевидно, является SQ -универсальной.

§ 3. Итерированные свободные произведения с объединенными подгруппами

В этом параграфе мы воспроизводим в несколько более общей ситуации одну конструкцию из [22].

Пусть I – некоторое множество и Ω – некоторое семейство подмножеств множества I . Для каждого $i \in I$ рассмотрим некоторую группу G_i и для каждого $\omega \in \Omega$ рассмотрим некоторую факторгруппу G_ω свободного произведения $\ast_{i \in \omega} G_i$:

$$G_\omega = \left(\ast_{i \in \omega} G_i \right) / N_\omega.$$

Возникает естественный вопрос: при каких условиях естественные отображения

$$\varphi_\omega: G_\omega \rightarrow G_I \stackrel{\text{def}}{=} \left(\ast_{i \in I} G_i \right) / \left\langle\left\langle \bigcup_{\omega \in \Omega} N_\omega \right\rangle\right\rangle$$

инъективны? Или: при каких условиях группу G_I можно трактовать как свободное произведение с объединенными подгруппами групп G_ω ?

Следующее утверждение дает некоторые достаточные условия для положительного ответа на эти вопросы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть

$$N_\omega \cap \bigstar_{j \in \omega \setminus \{i\}} G_j = \{1\} \quad (**)$$

для каждого $\omega \in \Omega$ и каждого $i \in \omega \setminus (\bigcap \Omega)$. Допустим, что, кроме того, для каждого конечного подсемейства $F \subseteq \Omega$ такого, что $|F| \geq 2$, найдутся такие элементы $\min, \max \in \bigcup F$, что

- 1) элемент $\min$ содержится ровно в одном множестве $\omega_{\min} \in F$;
- 2) элемент $\max$ содержится ровно в одном множестве $\omega_{\max} \in F$;
- 3) $\omega_{\min} \neq \omega_{\max}$.

Тогда все естественные отображения $\varphi_\omega: G_\omega \rightarrow G_I$ инъективны.

ПРИМЕР. Пусть $I = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $\Omega = \{\{a, b, d, e\}, \{b, c, e, f\}, \{d, e, f\}\}$.

Соответствующие шесть групп G_i мы обозначим через $A, \dots, F$, а три группы G_ω – через **ABDE**, **BCEF** и **DEF**. Нетрудно убедиться, что в данном случае условия 1)–3) выполнены для семейства Ω и каждого его подсемейства, состоящего из двух множеств. Допустим, что выполнено также условие (**). Тогда справедливость утверждения 2 (в данном случае) вытекает из следующего разложения группы G_I в свободное произведение с объединенными подгруппами:

$$G_I = \left((\mathbf{DEF} * B) \bigstar_{B * D * E} \mathbf{ABDE} \right) \bigstar_{B * E * F} \mathbf{BCEF}.$$

Для доказательства утверждения в общем случае докажем сперва лемму.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия утверждения 2, Ω' – конечное подсемейство семейства Ω , $\omega \in \Omega$ и $\alpha \subseteq \omega \cap (\bigcup \Omega')$ – некоторое собственное подмножество множества ω , лежащее в $\bigcup \Omega'$ и содержащее $\bigcap \Omega$. Тогда естественное отображение

$$\bigstar_{i \in \alpha} G_i \rightarrow G_{\Omega'} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigstar_{i \in \bigcup \Omega'} G_i \right) / \left\langle \bigcup_{\omega' \in \Omega'} N_{\omega'} \right\rangle$$

инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1: $\omega \in \Omega'$. Воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω' . Если $|\Omega'| = 1$ (т.е. $\Omega' = \{\omega\}$), то утверждение леммы верно по условию (**). Допустим, что $|\Omega'| \geq 2$. В этом случае в соответствии с условиями 1)–3) семейство $F = \Omega'$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $t \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup (\Omega' \setminus \{\omega'\})$.

По предположению индукции (примененному к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \stackrel{\text{def}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup (\Omega' \setminus \{\omega'\}) \right)$$

свободно порождают свое свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. А по условию (***) те же группы G_i , где $i \in \beta$, свободно порождают свое свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m , не лежащий в β). Значит, группа $G_{\Omega'}$ разлагается в свободное произведение групп $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$ и $G_{\omega'}$ с объединенной подгруппой $*_{i \in \beta} G_i$. При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Следовательно, утверждение леммы следует из предположения индукции, примененного к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω' .

Случай 2: $\omega \notin \Omega'$. Доказательство в этом случае устроено похожим образом. Снова воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω' . Если $\Omega' = \emptyset$, то доказывать нечего. Допустим, что $|\Omega'| \geq 1$. В этом случае в соответствии с условиями 1)–3) семейство $F = \Omega' \cup \{\omega\}$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $m \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup (F \setminus \{\omega'\})$ (рис. 1).

Рис. 1

По предположению индукции (примененному к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \stackrel{\text{def}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup (\Omega' \setminus \{\omega'\}) \right)$$

свободно порождают свое свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Значит, группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \beta \cup (\omega \cap \omega') = \omega' \cap \left(\bigcup ((\Omega' \cup \omega) \setminus \{\omega'\}) \right)$$

свободно порождают свое произведение в группе

$$H = \left(\bigast_{j \in (\omega \cap \omega') \setminus \beta} G_j \right) * G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}.$$

Но по условию **(**)** те же группы G_i , где $i \in \gamma$, свободно порождают свое свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m , не лежащий в γ). Значит, группа $G_{\Omega'}$ разлагается в свободное произведение с объединенной подгруппой групп H и $G_{\omega'}$:

$$G_{\Omega'} = H \underset{\langle G_i : i \in \gamma \rangle}{*} G_{\omega'}.$$

При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе H . Следовательно, по предположению индукции, примененному к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω' , группы G_i с номерами $i \in \alpha \cap (\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\}))$ свободно порождают свое свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Отсюда немедленно вытекает, что группы G_i с номерами $i \in \alpha$ свободно порождают свое свободное произведение в группе H и, следовательно, в группе $G_{\Omega'}$, содержащей, как мы видели, H в качестве подгруппы. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Ясно, что утверждение достаточно доказать для конечного семейства Ω мощности большей единицы. Но в этом случае

$$G_I = G_{\Omega} * \left(\underset{i \notin \bigcup \Omega}{*} G_i \right),$$

а группа G_{Ω} разлагается в свободное произведение с объединенной подгруппой:

$$G_{\Omega} = G_{\omega_{\min}} \underset{K}{*} G_{\Omega \setminus \{\omega_{\min}\}},$$

где объединяемая группа K является свободным произведением групп G_i с номерами из множества $\omega_{\min} \cap (\bigcup(\Omega \setminus \{\omega_{\min}\}))$ в силу леммы 1. Поэтому утверждение очевидным образом вытекает из индуктивных соображений.

§ 4. Доказательство теоремы 2. Нерасщепляющийся случай

В этом параграфе мы докажем теорему 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle \subseteq T$ не является циклической.

Зафиксируем произвольную счетную группу S . Положим $t = \prod t_i$. Разложим T в объединение смежных классов:

$$T = \coprod_{x \in T/\langle t \rangle} c_x \langle t \rangle, \quad \text{где } c_1 = 1.$$

Для каждого $x \in T/\langle t \rangle$ рассмотрим изоморфную копию $G^{(c_x)}$ группы G (подразумевая, что изоморфизм отображает элемент $g \in G$ в элемент $g^{(c_x)} \in G^{(c_x)}$) и запишем соотношение $\prod g_i t_i = 1$ в виде

$$t \prod_i g_i^{c_{x_i} t^{k_i}} = 1. \quad (2)$$

Пусть X_1 – это множество всех $x \in T/\langle t \rangle$, встречающихся в несократимой записи соотношения (2). Заметим, что $|X_1| \geq 2$, поскольку в рассматриваемом случае $\langle \{t_i\} \rangle \neq \langle t \rangle$. Положим

$$H_1 = \underset{y \in X_1}{*} G^{(c_y)}$$

и рассмотрим унимодулярное относительное копредставление

$$\tilde{H}_1 = \left\langle H_1, z \mid z \prod_i g_i^{(c_{x_i})} z^{k_i} = 1 \right\rangle$$

над группой H_1 . По теореме 3 группа $\tilde{H}_1$ имеет такую факторгруппу K_1 , что

- 1) группа S вкладывается в K_1 ;
- 2) в группе K_1 имеет место разложение

$$\langle z, \{G^{(c_y)} : y \in Y\} \rangle = \langle z \rangle_\infty * \left(\bigstar_{y \in Y} G_y \right) \quad (3)$$

для каждого собственного подмножества $Y \subset X_1$.

Группа K_1 является факторгруппой группы

$$L_1 = H_1 * \langle z \rangle_\infty = \left(\bigstar_{y \in X_1} G^{(c_y)} \right) * \langle z \rangle_\infty$$

по некоторой нормальной подгруппе N_1 .

Рассмотрим теперь свободное произведение

$$L = \left(\bigstar_{y \in T/\langle t \rangle} G^{(c_y)} \right) * \langle z \rangle_\infty.$$

Группа T действует справа на группе L автоморфизмами по формулам

$$z^x = z^{\varepsilon_x}, \quad (g^{(c_y)})^x = g^{(c_{yx})} z^l,$$

где $x \in T$, $y \in T/\langle t \rangle$, $\varepsilon_x = \pm 1$ в зависимости от того, коммутирует x с t или нет, а целое число l однозначно определяется из равенства $c_y x = c_{yx} t^l$.

Для каждого $x \in T/\langle t \rangle$ рассмотрим множество $X_x = X_1 x \subseteq T/\langle t \rangle$ и подпроизведение

$$L_x = \left(\bigstar_{y \in X_x} G^{(c_y)} \right) * \langle z \rangle_\infty$$

свободного произведения L . В группе L_x имеется нормальная подгруппа $N_x = N_1^x \stackrel{\text{def}}{=} N_1^\chi$, где $\chi \in T$ – это любой представитель элемента $x \in T/\langle t \rangle$.

Покажем, что семейство подпроизведений $\{L_x \mid x \in T/\langle t \rangle\}$ вместе с подгруппами $N_x \triangleleft L_x$ удовлетворяет условиям утверждения 2. Действительно, условия 1)–3) этого утверждения непосредственно вытекают из сильной однозначности умножения в группе $T/\langle t \rangle$. Выполнение условия (**) для пары групп $N_1 \triangleleft L_1$ следует из разложения (3). Выполнение этого условия для других пар $N_x \triangleleft L_x$ вытекает из того, что группа L_x изоморфна группе L_1 ; причем изоморфизм (действие элемента $x \in T$) переводит подгруппу N_1 в подгруппу N_x , а каждый из сомножителей $G^{(c_y)}$ группы L_1 – в подгруппу $(G^{(c_{yx})})^{z^l}$ группы L_x .

Мы видим, что условия утверждения 2 выполнены. Следовательно, естественные отображения

$$K_x = L_x/N_x \rightarrow K \stackrel{\text{def}}{=} L / \left\langle\left\langle \bigcup_{y \in T/\langle t \rangle} N_y \right\rangle\right\rangle$$

инъективны.

Группа T действует на K автоморфизмами. Возьмем соответствующее полупрямое произведение $T \ltimes K$ и профакторизуем его по циклической нормальной подгруппе $\langle zt^{-1} \rangle$. Получившаяся группа

$$P = (T \ltimes K) / \langle zt^{-1} \rangle$$

и будет искомой факторгруппой группы $\tilde{G}$.

Действительно, группа G вкладывается в P в качестве подгруппы: $G = G^{(1)} \subseteq K \subseteq P$. Согласно определению действия мы имеем $G^{(c_x)} = G^{c_x}$, значит, соотношение группы $\tilde{H}_1$, выполненное в K , и равенство $t = z$ в группе P дают соотношение (2). То есть группа $P = \langle T, G \rangle$ является факторгруппой группы $\tilde{G}$, содержащей подгруппу K_1 , которая, в свою очередь, содержит произвольную наперед заданную счетную группу S . Теорема 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle$ не является циклической, доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2. Расщепляющийся случай

Докажем теперь теорему 2 в случае, когда группа $\langle \{t_i\} \rangle$ циклическая. Если копредставление $(*)$ имеет вид $\tilde{G} = \langle G * T \mid t = 1 \rangle$, то группа $\tilde{G}$ представляет собой свободное произведение двух бесконечных групп G и $T/\langle t \rangle$ и, следовательно, является SQ -универсальной (см. [1]). В дальнейшем предполагаем, что копредставление $(*)$ имеет другой вид.

Из условия унимодулярности следует, что $\langle \{t_i\} \rangle = \langle t \rangle_\infty$, где $t = \prod t_i$. Рассмотрим группу R , заданную унимодулярным относительным копредставлением

$$R = \left\langle G, z \mid \prod_{i=1}^n g_i z^{k_i} = 1 \right\rangle,$$

где показатели k_i определяются из равенств $t_i = t^{k_i}$, при этом $k_i \neq 0$ и $\sum k_i = 1$. Известно, что элемент z имеет бесконечный порядок в группе R и равенство $R = \langle z \rangle$ имеет место только в случае, когда $n = 1$ и $G = \langle g_1 \rangle$ [18]. В этом случае теорема в доказательстве не нуждается. В остальных случаях возьмем элемент r группы R , не лежащий в $\langle z \rangle$. Выберем также такую бесконечную последовательность элементов $\{t_{ij} : i = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, 1000\}$ группы T , что все $t_{ij}^{\pm 1}$ лежат в разных смежных классах по нормальной подгруппе $\langle t \rangle$. Такая последовательность найдется, поскольку $T/\langle t \rangle$ является нетривиальной группой без кручения.

Возьмем произвольную счетную группу $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ и произвольную группу K , содержащую R и S в качестве тривиально пересекающихся подгрупп таких, что $K = \langle R, S \rangle$ (например, $K = R * S$ или $K = R \times S$). Рассмотрим группу

$$L = (K \underset{z=t}{*} T) / \left\langle \left\langle s_i \prod_{j=1}^{1000} r t_{ij} : i = 1, 2, \dots \right\rangle \right\rangle.$$

Это копредставление группы L удовлетворяет условию малого сокращения $C'(1/100)$ для свободных произведений с объединенной подгруппой (см. [1]). Следовательно, естественные отображения $S \rightarrow K \rightarrow L$ инъективны. Для

завершения доказательства осталось заметить, что группа L является фактор-группой группы $\tilde{G} = R \underset{z=t}{*} T$.

§ 6. Доказательство теоремы 3

ЛЕММА 2. *Никакая бесконечная нециклическая группа не может быть объединением конечного числа своих циклических подгрупп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G является объединением конечного числа циклических подгрупп. Такая группа, очевидно, обладает следующим свойством:

любые два бесконечных множества $X, Y \subseteq G$ содержат пару коммутирующих элементов $x \in X, y \in Y$.

Хорошо известно, что бесконечные группы с таким свойством являются абелевыми.³ Поскольку всякая подгруппа и факторгруппа группы G также является объединением конечного числа своих циклических подгрупп, достаточно показать, что $G \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$. Но в группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ имеется бесконечно много максимальных циклических подгрупп: $\langle (1, 1) \rangle, \langle (p, 1) \rangle, \langle (p^2, 1) \rangle, \dots$; следовательно, эта группа не может быть объединением конечного числа своих циклических подгрупп.

ЛЕММА 3. *Пусть $l \geq 2$ – натуральное число, $G_1, \dots, G_l$ – нециклические бесконечные группы, $u_1, \dots, u_s \in G_1 * \dots * G_l$ и S – произвольная счетная группа. Тогда в группе $G_1 * \dots * G_l$ найдется такая нормальная подгруппа N , что*

- 1) *группа S вкладывается в $(G_1 * \dots * G_l)/N$;*
- 2) *$N \cap \langle u_i, G_{i_1}, \dots, G_{i_{l-1}} \rangle = \{1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, s\}$ и $i_1, \dots, i_{l-1} \in \{1, \dots, l\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \subseteq G_1 \cup \dots \cup G_l$ – конечное множество, состоящее из всех коэффициентов всех слов u_i . Из леммы 2 следует, что множество

$$M_k = G_k \setminus \left(\bigcup_{u \in U} \langle u \rangle \right)$$

бесконечно для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$. Рассмотрим счетное множество слов

$$v_i = \prod_{j=1}^{2006} \prod_{k=1}^l g_{ijk} \in G_1 * \dots * G_l,$$

где $g_{ijk} \in M_k$ и все $g_{ijk}^{\pm 1}$ различны. Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots\}$. Положим

$$H = (G_1 * \dots * G_l * S) / \langle\langle v_1 s_1^{-1}, v_2 s_2^{-1}, \dots \rangle\rangle.$$

Ясно, что указанное копредставление группы H удовлетворяет условию малого сокращения $C'(1/(100l))$ (см. [1]), из которого вытекает, что естественное

³Это легко следует теоремы Б. Неймана [26] (ответ на вопрос П. Эрдёша): *группы, в которых любое бесконечное подмножество содержит пару различных коммутирующих элементов, – это в точности группы, у которых индекс центра конечен.*

отображение $S \rightarrow H$ инъективно, а каждое слово, содержащееся в ядре N естественного эпиморфизма $G_1 * \dots * G_l \rightarrow H$, содержит коэффициенты из каждого множества M_k . В частности, $N \cap \langle u_i, G_{i_1}, \dots, G_{i_{l-1}} \rangle = \{1\}$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 3. Пусть слово w имеет вид $u_1 t^{\varepsilon_1} \dots u_s t^{\varepsilon_s}$, где $u_i \in G_1 * \dots * G_l$ и $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Заметим, что в группе $G_1 * \dots * G_l$ каждый неединичный элемент u_i имеет бесконечный порядок и трансцендентен над каждой из подгрупп $G_{i_1} * \dots * G_{i_k}$, не содержащей этот элемент u_i .

Выберем нормальную подгруппу $N \triangleleft G_1 * \dots * G_l$ в соответствии с леммой 3 и положим $G = (G_1 * \dots * G_l)/N$. По лемме 3 группа G содержит произвольную наперед заданную счетную группу S и образ каждого неединичного элемента u_i в группе G по-прежнему остается элементом бесконечного порядка, трансцендентным над каждой из подгрупп $G_{i_1} * \dots * G_{i_k}$, не содержащей этот элемент u_i . Для завершения доказательства осталось сослаться на утверждение 1.

§ 7. Доказательство утверждения 1

Отметим несколько простых фактов.

ЛЕММА 4. Пусть $u \in X * Y$ – элемент свободного произведения групп X и Y , а Z – подгруппа группы Y , причем элемент u алгебраичен (т.е. нетрансцендентен) над $X * Z$. Тогда либо $u \in (X * Z)Y(X * Z)$, либо u имеет вид $x_1 u' x_2$, где $x_1, x_2 \in X * Z$, а элемент $u' \in X * Y$ имеет конечный порядок.

Доказательство этой леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

ЛЕММА 5. Пусть A – нетривиальная подгруппа группы B и $b \in B$. Тогда b трансцендентен над A в том и только том случае, когда

$$\langle \{A^{b^i} : i \in \mathbb{Z}\} \rangle = \ast_{i \in \mathbb{Z}} A^{b^i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно, а в другую – следует из того, что если $u \in A * \langle b \rangle_\infty$ – нетривиальное соотношение между A и b в группе B и $a \in A \setminus \{1\}$, то $[a, u]$ – нетривиальное соотношение между группами A^{b^i} . Лемма 5 доказана.

До конца этого параграфа будем предполагать, что подгруппа H группы G удовлетворяет условиям 1) и 2) из определения сильной магнусовости, копредставление (1) является унимодулярным и все неединичные коэффициенты g_i имеют бесконечный порядок в группе G . Будем доказывать, что элемент t трансцендентен над H в группе $\tilde{G}$.

ЛЕММА 6. Если

$$\langle \{H^{t^i} : i \in \mathbb{Z}\} \rangle = \ast_{i \in \mathbb{Z}} H^{t^i} \quad (4)$$

в группе $\tilde{G}$, то элемент $t \in \tilde{G}$ является трансцендентным над H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда группа H нетривиальна, утверждение немедленно вытекает из леммы 5. Если же $H = \{1\}$, то утверждается лишь то, что элемент $t \in \tilde{G}$ имеет бесконечный порядок (если w не сопряжено с $t^{\pm 1}$); в явном виде этот факт отмечен в [18]. Лемма 6 доказана.

Положим

$$\overline{H} = \ast_{i \in \mathbb{Z}} H_i, \quad \overline{G} = \overline{H} \ast_{H_0=H} G,$$

где H_i – это изоморфные копии группы H . Ясно, что $\tilde{G}$ обладает копредставлением

$$\tilde{G} \simeq \langle \overline{G}, t \mid w(t) = 1, \{H_i^t = H_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \rangle.$$

Передвигая в слове w все буквы $t^{\pm 1}$ влево через коэффициенты, лежащие в H , с помощью соотношений $H_i t^{\pm 1} = t^{\pm 1} H_{i \pm 1}$, мы перепишем копредставление группы $\tilde{G}$ в виде

$$\tilde{G} \simeq \left\langle \overline{G}, t \mid \prod_{i=1}^p \bar{g}_i t^{k_i} = 1, \{H_i^t = H_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle,$$

где $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\sum k_i = 1$ и $\bar{g}_i \in \overline{G}$. Причем каждый коэффициент $\bar{g}_i$ имеет вид

$$\bar{g}_i = \prod_{j=1}^s \bar{h}_j f_j, \quad s \geq 1, \quad f_j \in \{g_1, g_2, \dots\} \setminus H, \quad \bar{h}_j \in \overline{H} \setminus H, \quad j \neq 1, \quad \bar{h}_1 \in \overline{H}.$$

Здесь $f_j, \bar{h}_j$ и s зависят от i . Заметим, что $f_1, \dots, f_s$ и $\bar{h}_2, \dots, \bar{h}_s$ трансцендентны над H в $\overline{G}$.

Если $p = 1$, т.е. первое соотношение рассматриваемого копредставления группы $\tilde{G}$ переписывается в виде

$$t = u, \quad u = \bar{g}_1 = \prod_{j=1}^s \bar{h}_j f_j \in \overline{G},$$

то все копредставление переписывается в виде

$$\tilde{G} \simeq \left\langle \overline{H} \ast_{H_0=H} G \mid \{H_i^u = H_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle.$$

По лемме 6 достаточно доказать инъективность естественного отображения $f: \overline{H} \rightarrow \tilde{G}$.

Если $s > 1$, т.е. $u \notin \overline{H}G\overline{H}$, то гомоморфизм f является инъективным в силу теоремы 4.

Допустим теперь, что $s = 1$, т.е. $u = \bar{h}_1 f_1$, где $\bar{h}_1 \in \overline{H}$, а элемент $f_1 \in G$ трансцендентен над H . В этом случае вложимость $\overline{H}$ в $\tilde{G}$ очевидным образом вытекает из разложения

$$\tilde{G} = G \ast_{K=L} (H \ast \langle t \rangle_{\infty}),$$

где $G \supseteq K = \langle f_1, H \rangle = \langle f_1 \rangle_{\infty} \ast H \simeq L = \langle (\bar{h}_1)^{-1} t, H \rangle = \langle (\bar{h}_1)^{-1} t \rangle_{\infty} \ast H \subseteq H \ast \langle t \rangle_{\infty}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $p > 1$. Рассмотрим следующие подгруппы группы $G * \langle t \rangle_\infty$: $G_i = t^{-i} G t^i$, $H_i = t^{-i} H t^i$,

$$\overline{H} = \bigstar_{i=-\infty}^{\infty} H_i, \quad K^{(m)} = \bigstar_{i=0}^m G_i, \quad G^{(m)} = \overline{H} \underset{H_0 * \dots * H_m}{*} K^{(m)}. \quad (5)$$

Рассмотрим все возможные записи соотношения $w = 1$ в виде

$$ct \prod_{i=1}^n b_i t^{-1} a_i t = 1, \quad a_i, b_i, c \in G^{(m)}. \quad (6)$$

Из всех таких записей выберем те, в которых m минимально, после чего из всех записей с минимальным m выберем запись с наименьшим n . Для такой минимальной записи (6) будем иметь:

- 1) $n \geq 1$ (т.е. длина этой записи не меньше трех);
- 2) $a_i \notin G^{(m-1)}$ и $b_i \notin (G^{(m-1)})^t$;
- 3) каждый коэффициент a_i трансцендентен над $G^{(m-1)}$, а каждый коэффициент b_i трансцендентен над $(G^{(m-1)})^t$.

Первое свойство обеспечивается тем, что $p > 1$, значит, в записи длины 1 $m > 0$; следовательно, m можно уменьшить, заменив все вхождения элементов группы G_m на фрагменты вида $t^{-1} g t$, где $g \in G_{m-1}$. Второе свойство очевидным образом следует из условий минимальности n и m . Для доказательства свойства 3) надо заметить, что в нормальной форме, соответствующей разложению

$$G^{(m)} = X * Y, \quad X = \left(\bigstar_{j \neq m} H_j \right) * G_0 * \dots * G_{m-1}, \quad Y = G_m,$$

каждый Y -слог каждого коэффициента a_i лежит в $(H\{f_1, \dots, f_p\}H)^{t^m}$, и воспользоваться леммой 4, положив $Z = H_m$. Аналогичным образом устанавливается трансцендентность b_i над $(G^{(m-1)})^t$.

Пусть теперь символы H_i и G_i обозначают абстрактные изоморфные копии групп H и G , а группы $\overline{H}$, $K^{(m)}$ и $G^{(m)}$ определены формулами (5). Рассмотрим следующее копредставление группы $\tilde{G}$:

$$\tilde{G} = \left\langle G^{(m)}, t \left| ct \prod_{i=1}^n b_i a_i^t = 1, \{G_i^t = G_{i+1} : i \in \{0, \dots, m-1\}\}, \{H_i^t = H_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \right. \right\rangle. \quad (7)$$

Для завершения доказательства утверждения 1 остается только заметить, что свойства 1) и 3) копредставления (7) влекут инъективность естественного отображения $G^{(m)} \rightarrow \tilde{G}$ в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА [16] (см. также [20]). Пусть M и N – изоморфные подгруппы группы L , $\varphi: M \rightarrow N$ – изоморфизм, $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n$ – элементы группы L , трансцендентные над M , $b_1, \dots, b_n$ – элементы группы L , трансцендентные над N ,

и $c \in L$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x^{-1}gx = g^\varphi, & g \in M, \\ cx \prod_{i=1}^n b_i x^{-1} a_i x = 1 \end{cases} \quad (***)$$

разрешима над L , т.е. естественное отображение $L \rightarrow \langle L, x \mid (***) \rangle$ инъективно.

Воспользовавшись этой теоремой для $L = G^{(m)}$ и $M = G^{(m-1)}$, мы получаем, что естественное отображение $\bar{H} \subset G^{(m)} \rightarrow \tilde{G}$ инъективно и элемент $t \in \tilde{G}$ трансцендентен над H в силу леммы 6.

§ 8. Доказательство теоремы 4

Нам будет удобно переформулировать теорему 4 на языке уравнений над группами. Напомним, что *уравнением над группой G с неизвестным (или переменной) t* называют формальное выражение вида

$$g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \cdots g_n t^{\varepsilon_n} = 1, \quad (8)$$

где $g_i \in G$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$. Уравнение (8) называют *разрешимым над группой G* , если найдется большая группа $\tilde{G}$, содержащая группу G в качестве подгруппы, и элемент $\tilde{t} \in \tilde{G}$ (называемый решением уравнения $(*)$) такой, что

$$g_1 \tilde{t}^{\varepsilon_1} g_2 \tilde{t}^{\varepsilon_2} \cdots g_n \tilde{t}^{\varepsilon_n} = 1$$

в группе $\tilde{G}$. Аналогичным образом определяется понятие *разрешимости системы уравнений с несколькими неизвестными над группой G* .

ЛЕММА 7. Пусть $G = A *_C B$ – свободное произведение некоторых групп A и B с объединенной подгруппой C , $v = b_0 a_0 \cdots b_m a_m b_{m+1} \in G$, φ – автоморфизм группы B и

$$\hat{G} = \langle A *_C B \mid \{b^v = b^\varphi \mid b \in B\} \rangle.$$

Тогда инъективность естественных отображений $A \rightarrow \hat{G} \leftarrow B$ равносильна разрешимости следующей системы уравнений с неизвестными t и x над группой G :

$$\begin{cases} b^{-x} b^\varphi = 1 & \text{при } b \in B \setminus \{1\}, \\ [t, c] = 1 & \text{при } c \in C \setminus \{1\}, \\ x^{-1} b_0 a_0^t \cdots b_m a_m^t b_{m+1} = 1. \end{cases} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{t}, \tilde{x} \in \tilde{G} \supseteq G$ – решение системы (9), то отображения $a \mapsto a^{\tilde{t}}$ и $b \mapsto b$ продолжаются до инъективного на A и на B гомоморфизма $\hat{G} \rightarrow \tilde{G}$.

Наоборот, если естественные отображения $A \rightarrow \hat{G} \leftarrow B$ инъективны, то рассмотрим изоморфную копию

$$\bar{G} = \langle \bar{A} *_C \bar{B} \mid \{\bar{b}^{\bar{v}} = \bar{b}^{\bar{\varphi}} \mid b \in B\} \rangle$$

группы $\widehat{G}$. Непосредственно видно, что элементы $\tilde{t}$ и $\tilde{x} = b_0 a_0^{\tilde{t}} \cdots b_m a_m^{\tilde{t}} b_{m+1} = \bar{v}$ HNN -расширения

$$\left\langle G \underset{B=\overline{B}}{*} \overline{G}, \tilde{t} \mid \{a^{\tilde{t}} = \bar{a} : a \in A\} \right\rangle$$

являются решениями системы (9). Лемма 7 доказана.

Эта лемма показывает, что теорема 4 будет вытекать из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4'. Пусть G – некоторая группа, содержащая некоторые подгруппы C , B и B^φ , $\varphi: B \rightarrow B^\varphi$ – изоморфизм, $m \geq 1$, $b_i, a_i \in G$, причем элементы $a_0, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_m$ трансцендентны над C . Тогда система уравнений (9) разрешима над группой G .

Для доказательства теоремы 4' нам понадобится лемма Хауи, которую мы здесь излагаем для простоты в частном случае, относящемся к системе уравнений (9).

Пусть на ориентированной двумерной сфере имеется карта, углы которой помечены элементами группы G , а ребра ориентированы (на рисунках на них имеются стрелки) и помечены переменными t и x .

Метка вершины в такой ситуации определяется как произведение меток всех углов при этой вершине, перечисленных по часовой стрелке. Метка вершины является элементом группы G , определенным с точностью до сопряженности. Например, метка вершины, изображенной на рис. 2, равна $a_0^{-1} c a_0^2 c'$.

Рис. 2

Чтобы получить метку грани, надо обойти ее границу против часовой стрелки, выписывая метки всех углов и ребер этой грани, причем метку ребра надо записывать в минус первой степени, если мы его проходим против стрелки. Метка грани является элементом группы $G * F(t, x)$ (свободного произведения G и свободной группы с базисом $\{t, x\}$), определенным с точностью до циклической перестановки. Например, метка грани, изображенной на рис. 3 вверху слева, равна $b^{-x} b^\varphi$.

Размеченную таким образом карту мы называем *сферической диаграммой Хауи* (или просто *диаграммой*) над системой уравнений (9), если

- 1) одна из вершин выделена и называется *внешней*, остальные вершины называются *внутренними*;

Рис. 3

- 2) метка каждой внутренней вершины равна единице в группе G ;
- 3) метка каждой грани равна левой части одного из уравнений системы (9) или слову, обратному к левой части одного из уравнений системы (9); все возможные типы граней изображены на рис. 3, на котором буквы b и c означают произвольные неединичные элементы групп B и C соответственно, а ребра, не помеченные буквой x , считаются помеченными буквой t (на числа, написанные с внешних сторон клеток, пока не следует обращать внимание).

Диаграмма Хауи называется *приведенной*, если она не содержит такого ребра e , что две грани, его содержащие, являются различными, а их метки, написанные начиная с ребра e , взаимнообратны; такая пара клеток с общим ребром называется *сократимой парой*.

ЛЕММА 8 [27]. Система уравнений (9) не является разрешимой над группой G тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над

этой системой, метка внешней вершины которой не равна единице в группе G . Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм является приведенной.

Назовем диаграмму над системой (9) *сильно приведенной*, если она приведена и различные клетки с метками вида $b^{-x}b^\varphi$ или $[c, t]$ не имеют общих ребер.

ЛЕММА 9. *Минимальная (по числу клеток) из всех сферических диаграмм, метка внешней вершины которой не равна единице, является сильно приведенной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если в какой-то диаграмме пара клеток с метками, например $b^{-x}b^\varphi$ и $(b')^{-x}(b')^\varphi$, имеет общее ребро, то либо такая пара клеток есть сократимая пара, либо общее ребро можно стереть, перемножив метки сливающихся при этом углов (рис. 4), и получить диаграмму с меньшим числом клеток и такой же меткой внешней вершины, что означает неминимальность исходной диаграммы и доказывает лемму.

Рис. 4

Представим себе теперь, что по контуру каждой грани D некоторой карты на сфере движется точка (автомобиль) α_D . Автомобиль α_D движется непрерывно против часовой стрелки (т.е. оставляя внутренность грани D слева) без остановок, разворотов и “бесконечных замедлений”, т.е. проезжая каждое ребро за конечное время. Такое движение автомобилей мы называем *правильным*.

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени τ в точке p сферы, равно кратности этой точки (иными словами, либо во внутренней точке некоторого ребра в момент τ оказываются два автомобиля, либо в вершине кратности k в момент τ оказываются k автомобилей одновременно), то мы говорим, что в точке p в момент τ происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. На рис. 5 изображены полные столкновения на ребре и в вершине кратности три.

Рис. 5

ЛЕММА 10 [16] (см. также [20]). *При любом правильном движении на сфере по крайней мере в двух точках происходит полное столкновение.*

Возьмем теперь в качестве карты сферическую диаграмму над копредставлением (9). Рассмотрим следующее правильное движение на этой карте:

- а) автомобиль, объезжающий грань с меткой $b^{-x}b^y$, движется против часовой стрелки равномерно со скоростью, равной $\frac{1}{2m}$ -й части ребра в единицу времени, проезжая в нулевой момент времени угол с меткой b^{-1} ;
- б) автомобиль, объезжающий грань с меткой $[t, c]$, движется против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени), проезжая в нулевой момент времени угол с меткой c^{-1} ;
- в) автомобиль, объезжающий против часовой стрелки грань с меткой $x^{-1}b_0a_0^t \cdots b_m a_m^t b_{m+1}$, в нулевой момент времени находится в углу с меткой a_0 , далее проезжает $2m$ ребер с меткой t с единичной скоростью и оказывается в момент $2m$ в углу с меткой a_m , следующее ребро с меткой t проезжает со скоростью 2, следующее за ним ребро с меткой x проезжает со скоростью $1/(2m - 1)$, после чего проезжает ребро с меткой t со скоростью 2 и оказывается в момент $4m$ в исходном углу с меткой a_0 ; далее все повторяется с периодом $4m$;
- г) автомобиль, объезжающий против часовой стрелки грань с меткой $(x^{-1}b_0a_0^t \cdots b_m a_m^t b_{m+1})^{-1}$, в нулевой момент времени находится в углу с меткой a_0^{-1} , первое ребро с меткой t проезжает со скоростью 2, следующее за ним ребро с меткой x проезжает со скоростью $1/(2m - 1)$, после чего проезжает ребро с меткой t со скоростью 2, оказывается в момент $2m$ в углу с меткой a_m^{-1} , следующие $2m$ ребер с меткой t проезжает с единичной скоростью и оказывается в момент $4m$ в исходном углу с меткой a_0^{-1} ; далее все повторяется с периодом $4m$.

Это движение является правильным и периодическим с периодом $4m$ (при этом на гранях с меткой $[t, c]$ минимальный период равен двум). На рис. 3 показано подробное расписание движения на протяжении интервала времени $0 \leq \tau \leq 4m$, числа в рамках около ребер означают скорость автомобиля на этих ребрах (по умолчанию скорость единичная).

ЛЕММА 11. *При описанном режиме движения на сильно приведенной диаграмме над системой (9) полные столкновения могут происходить только во внешней вершине.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Столкновение на ребре с меткой t в момент времени τ означает, что в этот момент направление движения одного из автомобилей совпадает с направлением ребра, а направление движения другого автомобиля противоположно направлению ребра (рис. 5 слева). Но расписание рассматриваемого движения устроено таким образом, что в каждый момент времени τ либо все автомобили, находящиеся на ребрах с меткой t , едут в направлении ребра (это происходит, когда целая часть τ четна), либо все автомобили, находящиеся на ребрах с меткой t , едут в направлении, противоположном направлению ребра (это происходит, когда целая часть τ нечетна).

По аналогичным причинам не может произойти столкновения на ребре с меткой x : на протяжении интервалов времени $[0, 2m] + 4m\mathbb{Z}$ все автомобили, находящиеся на ребрах с меткой x , едут в направлении ребра, а на протяжении интервалов времени $[2m, 4m] + 4m\mathbb{Z}$ все автомобили, находящиеся на ребрах с меткой x , едут в направлении, противоположном направлению ребра.

Таким образом, столкновения могут происходить только в вершинах.

Полные столкновения в вершинах, в которых начинается или кончается ребро с меткой x , произойти не могут, поскольку из сильной приведенности диаграммы следует, что каждое ребро с меткой x разделяет клетку с меткой $b^{-x}b^\varphi$ и клетку с меткой $(x^{-1}b_0a_0^t \cdots b_m a_m^t b_{m+1})^{\pm 1}$ (рис. 6). Это значит, что в начале ребра с меткой x один из автомобилей бывает в моменты $4m\mathbb{Z}$, а другой – в моменты $4m\mathbb{Z} \pm 1/2$, т.е. полного столкновения не происходит. По аналогичным причинам полного столкновения не происходит в конце ребра с меткой x : один из автомобилей там бывает в моменты $4m\mathbb{Z} + 2m$, а другой – в моменты $4m\mathbb{Z} + 2m \pm 1/2$.

Рис. 6

Полные столкновения во внутренних вершинах, не являющихся началом или концом ребра с меткой x , также происходить не могут. В таких вершинах автомобили появляются только в целые моменты времени τ , причем в каждый такой момент времени τ каждый автомобиль, находящийся в такой вершине, проезжает либо угол с меткой $c \in C \setminus \{1\}$, либо угол с меткой $d \in \{a_0^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}, a_m^{\pm 1}\}$. Причем если один из автомобилей проезжает в момент τ угол с меткой d и одновременно другой автомобиль проезжает угол с меткой d' , где $d, d' \in \{a_0^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \dots, b_m^{\pm 1}, a_m^{\pm 1}\}$, то либо $d' = d$, либо $d' = d^{-1}$.⁴ Это означает, что метка вершины, в которой в момент τ происходит полное столкновение, имеет вид $\prod z_i$, где $z_i \in \{d, d^{-1}\} \cup C \setminus \{1\}$, причем в силу приведенности диаграммы d и d^{-1} не могут быть соседними в последовательности (z_i) , а в силу сильной приведенности диаграммы два элемента из $C \setminus \{1\}$ не могут

⁴Последний случай возможен лишь при $\tau \in [0, 2m] + 4m\mathbb{Z}$, при этом $d = a_0^{\pm 1}$ или $d = a_m^{\pm 1}$. Это позволяет несколько ослабить условия теорем 4 и 4', но мы не будем здесь этим заниматься.

быть соседними в этой последовательности. Значит, метка $\prod z_i$ вершины полного столкновения не может быть единицей группы G в силу трансцендентности элемента d над группой C . Следовательно, вершина полного столкновения не может быть внутренней вершиной диаграммы. На рис. 2 показана гипотетическая вершина, в которой происходит полное столкновение в момент $\tau = 0$. Эта вершина не может быть внутренней, поскольку $a_0^{-1}ca_0^2c' \neq 1$ в группе G . Лемма 11 доказана.

Теорема 4' легко следует из всего сказанного. Действительно, предположим, что система (9) неразрешима. Тогда по лемме 8 существует диаграмма над этой системой. По лемме 9 эту диаграмму можно считать сильно приведенной. По лемме 11 на этой диаграмме можно задать правильное движение с не более чем одной точкой полного столкновения, что противоречит лемме 10. Тем самым теоремы 4' и 4 доказаны.

Список литературы

- [1] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980.
- [2] К. И. Лоссов, “SQ-универсальность свободных произведений с конечными объединенными подгруппами”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:6 (1986), 128–139.
- [3] P. M. Neumann, “The SQ-universality of some finitely presented groups”, *J. Austral. Math. Soc.*, **16** (1973), 1–6.
- [4] А. Ю. Ольшанский, “SQ-универсальность гиперболических групп”, *Матем. сб.*, **186**:8 (1995), 119–132.
- [5] G. Arzhantseva, A. Minasyan, D. Osin, *The SQ-universality and residual properties of relatively hyperbolic groups*, [arXiv: math.GR/0601590](https://arxiv.org/abs/math/0601590).
- [6] G. S. Sacerdote, P. E. Schupp, “SQ-universality in HNN groups and one relator groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **7** (1974), 733–740.
- [7] B. Baumslag, S. Pride, “Groups with two more generators than relators”, *J. London Math. Soc.* (2), **17** (1978), 425–426.
- [8] R. Stöhr, “Groups with one more generator than relators”, *Math. Z.*, **182**:1 (1983), 45–47.
- [9] M. Gromov, “Volume and bounded cohomology”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **1982**:56 (1983), 5–99.
- [10] M. Edjvet, “Groups with balanced presentations”, *Arch. Math. (Basel)*, **42**:4 (1984), 311–313.
- [11] J. Howie, “Free subgroups in groups of small deficiency”, *J. Group Theory*, **1**:1 (1998), 95–112.
- [12] J. O. Button, *Large mapping tori of free group endomorphisms*, [arXiv: math.GR/0511715](https://arxiv.org/abs/math/0511715).
- [13] M. Lackenby, “A characterisation of large finitely presented groups”, *J. Algebra*, **287**:2 (2005), 458–473; [arXiv: math.GR/0403129](https://arxiv.org/abs/math/0403129).
- [14] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, *Large groups and their periodic quotients*, [arXiv: math.GR/0601589](https://arxiv.org/abs/math/0601589).
- [15] Ант. А. Клячко, “Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением”, *Алгебра и логика* (в печати).
- [16] Ant. A. Klyachko, “A funny property of a sphere and equations over groups”, *Comm. Algebra*, **21** (1993), 2555–2575.
- [17] Ант. А. Клячко, “Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп”, *Алгебра и логика*, **44**:4 (2005), 399–437; [arXiv: math.GR/0409146](https://arxiv.org/abs/math/0409146).

- [18] M. M. Cohen, C. Rourke, “The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups”, *Geom. Topol.*, **5** (2001), 127–142; [arXiv:math.GR/0009101](#).
- [19] Ант. А. Клячко, *Гипотеза Кервера–Лауденбаха и уравнения над группами*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1994.
- [20] R. Fenn, C. Rourke, “Klyachko’s methods and the solution of equations over torsion-free groups”, *Enseign. Math.* (2), **42** (1996), 49–74.
- [21] M. Forester, C. Rourke, “Diagrams and the second homotopy group”, *Comm. Anal. Geom.*, **13** (2005), 801–820; [arXiv:math.AT/0306088](#).
- [22] Ант. А. Клячко, “Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами”, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 409–419; [arXiv:math.GR/0406382](#).
- [23] S. D. Promislow, “A simple example of a torsion-free nonunique product group”, *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988), 302–304.
- [24] E. Rips, Y. Segev, “Torsion-free groups without unique product property”, *J. Algebra*, **108** (1987), 116–126.
- [25] С. Д. Бродский, “Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением”, *Сиб. матем. журн.*, **25**:2 (1984), 84–103.
- [26] B. H. Neumann, “A problem of Paul Erdős on groups”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **21**:4 (1976), 467–472.
- [27] J. Howie, “The solution of length three equations over groups”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **26** (1983), 89–96.

Ант. А. Клячко (Ant. A. Klyachko)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: klyachko@daniil.math.msu.su

Поступила в редакцию

27.03.2006