Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Э. Клишпонт, К задаче топологической классификации аттракторов лоренцева типа, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 4, 75–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:23:21

УДК 517.938.5

Н. Э. Клишпонт

К задаче топологической классификации аттракторов лоренцева типа

В работе рассмотрено обобщение известной модели Р. Вильямса аттрактора в системе Лоренца, которая представляет собой предел обратного спектра полупотоков на разветвленных многообразиях, являющихся надстройкой над разрывным растягивающим отображением отрезка. Обобщение состоит в рассмотрении отображений с несколькими точками разрыва вместо одной. Построен кардинальнозначный топологический инвариант $L\text{-manuscript}$, различающий континуум негомеоморфных обобщенных моделей. Как следствие получен топологический инвариант, различающий континуум негомеоморфных геометрических аттракторов Лоренца.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

В 1963 году Лоренц [1] провел численное исследование системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2.\end{aligned}$$

Оказалось, что для значений параметров, лежащих в открытой окрестности значений $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, почти все точки фазового пространства притягиваются к странному аттрактору. Внимание специалистов по динамическим системам было привлечено к системе Лоренца благодаря работам [2], [3]. В этих работах были выявлены следующие свойства системы.

L1) Существует ограниченная область U , в которую входят все траектории системы.

L2) Точка $O(0, 0, 0)$ неподвижная. Собственные значения линеаризованной системы вблизи точки O действительны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ и $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$. Точка O имеет двумерное устойчивое многообразие $W^s(O)$ и одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O)$, состоящее из двух траекторий γ_+ и γ_- .

На рис. 1 изображено поведение решений системы Лоренца, полученное в результате численного эксперимента. Рисунок позаимствован из обзора [4].

В. С. Афраимович, В. В. Быков и Л. П. Шильников [5], а также Дж. Гукенхеймер и Р. Вильямс [6], [7] ввели в рассмотрение две геометрические модели, отражающие поведение решений системы Лоренца при значениях параметров, близких к классическим, полученное с помощью компьютерного счета. Мы не будем давать дословное описание каждой из этих моделей. Вместо этого

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-96739, 05-01-00431, 04-01-97204).

Рис. 1. Геометрический поток Лоренца

постулируем свойства потока Φ_τ , дополнив L1) и L2) еще двумя свойствами. Поток Φ_τ далее будет называться *геометрическим потоком Лоренца*.

L3) Существует двумерная площадка D , трансверсальная к линиям потока; $W^s(O)$ пересекает D по некоторой кривой S . Траектории γ_+ и γ_- пересекают D . Траектории точек $z \in D \setminus S$ возвращаются на D . Отображение последования, определенное на площадке D (обозначим его T), обладает следующими свойствами.

- 1) На линии S отображение T не определено, так как траектории точек $z \in S$ стремятся к неподвижной точке.
- 2) На площадке D можно ввести систему координат (x, y) так, что $D = [-1, 1]^2$, уравнение линии S есть $y = 0$, причем выполнены свойства
 - 2.1) отображение $T(z(x, y)) = (f(x, y), g(x, y))$ является гладким в прямоугольниках $D_2 = [-1, 1] \times (0, 1]$ и $D_1 = [-1, 1] \times [-1, 0)$, причем существуют пределы, не зависящие от x ,

$$\lim_{y \rightarrow 0-} (f(x, y), g(x, y)) = (x_1^*, y_1^*) = P_1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} (f(x, y), g(x, y)) = (x_2^*, y_2^*) = P_2$$

(это первые точки пересечения траекторий γ_+ и γ_- с D , см. рис. 2);

- 2.2) отображение T гиперболично, а именно, существуют константы $\delta > 0$, $\mu > 0$, $0 < \lambda < 1$, $q > 1$ такие, что $\mu\delta < 1$; при этом

- А) если гладкая кривая r есть график функции $y = h(x)$ и $|h'(x)| < \delta$, то кривая $T^{-1}(r \cap T(D_i))$, $i = 1, 2$, также является графиком функции $y = H(x)$, причем $|H'(x)| < \delta$; если точки p и p' принадлежат кривой $r \cap T(D_i)$, то $\rho(T^{-1}p, T^{-1}p') > \rho(p, p')/\lambda$ (ρ – расстояние между точками);
- В) если l – гладкая кривая, представляющая график функции $x = V(y)$, не пересекающая линию разрыва S , и $|V'(y)| < \mu$, то $T(l)$ – гладкая кривая, являющаяся графиком функции $x = \tilde{V}(y)$, причем $|\tilde{V}'(y)| < \mu$; если точки p и p' лежат на l , то $\rho(Tp, Tp') > q\rho(p, p')$.

Отображение T , удовлетворяющее условию L3), называется *отображением лоренцева типа* [5].

Рис. 2. Отображение последования

Рис. 3. Отображение t

Из гиперболичности T следует, что в области D существует инвариантное устойчивое слоение [5]. Это означает, что для каждой точки $z \in D$ существует кривая $W^s(z)$, являющаяся графиком функции $y = h(x)$, определенной на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющей условию Липшица с константой δ . Кривая $W^s(z)$ называется *устойчивым слоем*. Разные устойчивые слои не пересекаются, слоение определено однозначно. Слоение инвариантно, т.е. для каждой точки $z \in D$ справедливо $T(W^s(z)) \subset W^s(T(z))$. Линия S является одним из устойчивых слоев.

Будем считать эквивалентными точки, принадлежащие одному устойчивому слою. Тогда площадка D , профакторизованная по отношению эквивалентности, есть отрезок $[-1, 1]$, отображение T факторизуется в отображение отрезка $t: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$. Пусть 0 – проекция линии разрыва S на $[-1, 1]$. Из свойств отображения T следует, что $\lim_{x \rightarrow 0-} t(x) = p_1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} t(x) = p_2$ (здесь p_k есть проекция слоя, проходящего через точку P_k). На промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ отображение t монотонно (см. рис. 3).

Отметим, что устойчивое слоение, вообще говоря, не гладкое. Поэтому отображение t задается негладкой функцией. Однако слоение обладает свойством абсолютной непрерывности (для диффеоморфизмов и потоков Аносова это доказано в [8], позднее доказательство перенесено на случай отображений с разрывами, см., например, [9] или [10]). Мы не будем обсуждать это свойство, заметим только, что из абсолютной непрерывности слоения следует абсолютная непрерывность отображения t . Это означает, что t дифференцируема почти всюду и

$$t(s_2) - t(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} t'(s) ds.$$

Далее условие $t' > k$ будет означать, что это неравенство выполнено почти всюду. Заметим, что если $t' > k$, то

$$t(s_2) - t(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} t'(s) ds > k(s_2 - s_1).$$

В работах [7], [11], [12] на отображение t налагается дополнительное условие.

L4) Отображение $t|_{[p_1, p_2]}$ удовлетворяет условию полного растяжения¹, т.е. для любого интервала $J \subset [p_1, p_2]$ существует $n \geq 1$ такое, что $t^n(J) = [p_1, p_2]$.

Условия $q > \sqrt{2}$ или $t' > \sqrt{2}$ являются достаточными для полного растяжения (q – коэффициент растяжения, см. L3)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойства L3), L4) для реальной системы Лоренца неоднократно проверялись различными авторами с помощью компьютера. Доказательство ослабленного варианта свойств L3), L4), представляющее собой сочетание аналитических методов и компьютерных вычислений, получено недавно в работе В. Такера [13].

Множество $\Lambda = \bigcap_{\tau \geq 0} \Phi_\tau(U)$ называется *аттрактором потока* Φ_τ . Аттрактор Λ есть замыкание множества всех траекторий, пересекающих площадку D бесконечно много раз в прошлом и в будущем. Если выполнены условия L1)–L4), то поток $\Phi_\tau|_\Lambda$ топологически транзитивен, в Λ всюду плотны периодические траектории [5], [11], [12]. *Аттрактором отображения лоренцева типа* называется $\text{clos} \bigcap_{n \geq 0} T^n D$. В работах [14], [15] исследована геометрическая структура этих множеств и найден топологический инвариант, различающий континуум негомеоморфных аттракторов.

Опишем модель аттрактора Λ потока Φ_τ , принадлежащую Вильямсу [11], [12]. Предположим, что:

- 1) существует окрестность U_1 аттрактора Λ в $\mathbb{R}^3$, которая расслоена инвариантным относительно потока Φ_τ одномерным сжимающимся слоением, трансверсальным к линиям потока;
- 2) в результате отождествления точек, принадлежащих одному слою, множество U_1 проектируется в разветвленное многообразие L (см. рис. 4), а поток Φ_τ соответственно в полупоток φ_τ ; неподвижная точка O потока Φ_τ проектируется в неподвижную точку полупотока φ_τ , которую мы также обозначим O .

Рис. 4. Разветвленное многообразие L и полупоток на нем

Отображения $\varphi_\tau: L \rightarrow L$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, образуют обратный спектр топологических пространств (общее определение см. в [16]). Обратный предел этого

¹В англоязычных источниках это условие называется “locally eventually onto” и применяется аббревиатура l.e.o.

спектра

$$\widehat{L} = \varprojlim (L, \varphi_\tau, \tau \in \mathbb{R}_+)$$

состоит из ветвей отрицательных полутраекторий $\widehat{x} = (x_\theta)_{\theta \geq 0}$, где $\varphi_\tau(x_\theta) = x_{\theta-\tau}$. На пространстве $\widehat{L}$ естественным образом задается поток $\widehat{\varphi}_\tau$: если $\tau > 0$, то $\widehat{\varphi}_\tau \widehat{x} = (y_\theta)_{\theta \geq 0}$, где $y_\theta = \varphi_\tau x_\theta$; если $\tau < 0$, то $\widehat{\varphi}_\tau \widehat{x} = (y_\theta)_{\theta \geq 0}$, где $y_\theta = x_{\theta-\tau}$.

Пространство $\widehat{L}$ гомеоморфно аттрактору Λ , а поток $\widehat{\varphi}_\tau$ топологически эквивалентен $\Phi_\tau|_\Lambda$. Пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi}_\tau)$ называется *геометрическим аттрактором Лоренца*.

Вильямс решал задачу о гомеоморфизме множеств $\widehat{L}$. Подчеркнем, что речь идет о топологической эквивалентности аттракторов как множеств, без учета потоковой динамики на них. В качестве основного инструмента исследования Вильямс использовал нидинг-последовательности, т.е. пары последовательностей, составленных из “0” и “1”, которые характеризуют порядок обхода левым и правым неустойчивыми многообразиями точки O левой и правой “дыры” в разветвленном многообразии L . Вильямс доказал [12], что если множества $\widehat{L}_1$ и $\widehat{L}_2$ гомеоморфны и соответствующий гомеоморфизм в некотором смысле близок к тождественному, то пары нидинг-последовательностей совпадают. Таким образом, нидинг-последовательности являются условным (гомеоморфизм близок к тождественному) топологическим инвариантом.

Оставалась нерешенной задача о построении безусловного топологического инварианта геометрических аттракторов Лоренца. В настоящей работе построен кардинальнозначный топологический инвариант L-manuscript, различающий континуум негомеоморфных геометрических аттракторов Лоренца. Доказано, что этот инвариант не является полным. В действительности, это сделано для обобщения модели Вильямса на случай разветвленных многообразий и полупотоков на них с несколькими гиперболическими неподвижными точками. Такие полупотоки являются надстройками над разрывными растягивающими отображениями отрезка с несколькими точками разрыва.

Статья состоит из пяти параграфов. В §2 приводятся определения и формулировки результатов, в §3 исследуются геометрические свойства обобщенных геометрических аттракторов Лоренца, §4 содержит доказательства основных теорем, в §5 даны доказательства лемм и предложений, носящих технический характер.

Автор выражает благодарность Р. В. Плыкину и Е. А. Сатаеву за плодотворные обсуждения, терпение и поддержку, а также А. Ю. Жирову, чья критика способствовала серьезной переработке первоначального текста статьи.

§ 2. Основные определения и формулировки результатов

Построим разветвленное многообразие и полупоток на нем так, чтобы отображение последования этого полупотока было разрывным отображением отрезка с несколькими точками разрыва.

2.1. Конструкция разветвленного многообразия и полупотока.

Пусть t – отображение отрезка $[0, 1]$ с $n \geq 1$ точками разрыва $s_1, \dots, s_n$, монотонное на каждом из интервалов

$$\Delta_1 = [0, s_1), \quad \Delta_2 = (s_1, s_2), \quad \dots, \quad \Delta_{n+1} = (s_n, 1].$$

Очевидно, что существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow s_i^-} f(x) = p_i^-, \quad \lim_{x \rightarrow s_i^+} f(x) = p_i^+$$

(см. рис. 5).

Рис. 5. Отображение, удовлетворяющее условиям полного растяжения

Дополнительно потребуем, чтобы отображение t удовлетворяло следующим условиям:

- 1) на каждом интервале Δ_i отображение t абсолютно непрерывно;
- 2) если $n = 1$, то $|t'| > \sqrt{2}$;
- 3) если $n \geq 2$, то $|t'| \geq \nu > 2$ и, кроме того, для любого Δ_i найдется такое K_i , что $\bigcup_{m=0}^{K_i} t^m \Delta_i = (0, 1)$.

Эти условия 1)–3) дальше будем называть *условиями полного растяжения для разрывного отображения отрезка*. Условие $|t'| > k$ означает, что это неравенство выполнено почти всюду.

ПРИМЕР. На рис. 5 показано отображение с двумя точками разрыва, удовлетворяющего условиям полного растяжения. Для этого отображения выполнено: $t\Delta_1 \supset \Delta_2$, $t\Delta_2 \supset \Delta_3$ и $t\Delta_3 \supset \Delta_1$, что символически изображено в виде цепочки $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Нетрудно убедиться в том, что для каждого $m = 1, 2, 3$ справедливо $\bigcup_{i=0,1,2} t^i \Delta_m = (0, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Из условий полного растяжения следует, что на отрезке $[0, 1]$

- 1) прообразы любой точки всюду плотны;
- 2) периодические точки всюду плотны;
- 3) t топологически транзитивно.

Доказательства этого и нижеследующих предложений 2.2 и 2.3 см. в § 5. Везде далее будем пользоваться нормой $\|f\| = \sup |f| + \text{ess sup } |f'|$. Принципиально в дальнейшем тексте ничего не изменится, если считать, что $\|f\| = \|f\|_{C^1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть t удовлетворяет условиям полного растяжения и $\tilde{t}$ таково, что

- 1) $\|\tilde{t} - t\| < \varepsilon$;
- 2) существуют x и y такие, что $\tilde{t}(x^+) = 1$ или $\tilde{t}(x^-) = 1$ и $\tilde{t}(y^+) = 0$ или $\tilde{t}(y^-) = 0$ (здесь $\tilde{t}(x^\pm) = \lim_{z \rightarrow x^\pm} \tilde{t}(z)$).

Тогда если ε достаточно мало, то $\tilde{t}$ также удовлетворяет условиям полного растяжения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если t удовлетворяет условиям полного растяжения, то выполняется одно из трех условий:

- a) $0, 1 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$;
- b) $0 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $1 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $t(0) = 1$;
- c) $1 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $0 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $t(1) = 0$.

Построим по отображению t разветвленное многообразие и полупоток на нем. Рассмотрим квадрат $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ с разрезами вдоль линий $s_k \times [0.5, 1]$. Точки левого и правого берегов разреза будем обозначать соответственно $s_k^- \times x$ и $s_k^+ \times x$ (см. рис. 6). Зададим на квадрате Π вертикальный поток с неподвижными точками $O_k = s_k \times 0.5$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= f(x, y), \end{aligned}$$

где $f(x, y)$ – непрерывная функция, $f(x, y) = 1$ вне окрестностей точек O_k , $f(x, y)$ принимает положительные значения везде кроме точек O_k , в которых $f = 0$ (см. рис. 6).

Рис. 6. Прямоугольник с разрезами

Отождествим точки на верхнем и нижнем краях разрезанного квадрата Π : $x \times 1 \sim t(x) \times 0$, если x не является точкой разрыва; $s_k^- \times 1 \sim p_k^- \times 0$; $s_k^+ \times 1 \sim p_k^+ \times 0$. Результат этого отождествления назовем *двумерным разветвленным многообразием* L (см. рис. 7, б)). Поток на квадрате Π порождает полупоток φ_τ , $\tau \in \mathbb{R}_+$, на L . Полупоток φ_τ не является потоком, так как у многообразия L имеется линия $[0, 1] \times \{0\}$ (горизонтальный отрезок на рис. 7), содержащая множество точек ветвления, которые получаются из склеиваемых точек. В каждую такую точку приходят две (и более) траектории, а выходит только одна.

Рис. 7. Отображение отрезка с двумя точками разрыва и соответствующее разветвленное многообразие

У полупотока φ_τ имеются n неподвижных точек O_k , $k = 1, \dots, n$, седлового типа (в топологическом смысле). Заметим, что исходное отображение t есть отображение последования полупотока φ_τ на отрезке $[0, 1] \times \{0\}$. Везде далее будем обозначать этот отрезок I .

Из предложения 2.3 следует, что край ∂L разветвленного многообразия L , построенного по отображению t , состоит из отрезков неустойчивых многообразий неподвижных точек полупотока φ_τ .

Введем обозначение $\widehat{L} = \varprojlim (L, \varphi_\tau, \tau \in \mathbb{R}_+)$. Элементами $\widehat{x} \in \widehat{L}$ являются ветви отрицательных полутраекторий, а именно,

$$\widehat{x} = (x_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}_+}, \quad \text{где} \quad \varphi_\tau x_\theta = x_{\theta-\tau} \quad \text{для любых} \quad \theta \geq 0 \quad \text{и} \quad 0 \leq \tau \leq \theta.$$

На $\widehat{L}$ определяется поток $\widehat{\varphi}_\tau$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } \tau > 0, \text{ то } \widehat{\varphi}_\tau \widehat{x} &= (y_\theta)_{\theta \geq 0}, \quad \text{где } y_\theta = \varphi_\tau x_\theta; \\ \text{если } \tau < 0, \text{ то } \widehat{\varphi}_\tau \widehat{x} &= (y_\theta)_{\theta \geq 0}, \quad \text{где } y_\theta = x_{\theta-\tau}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем пару $(\widehat{L}, \widehat{\varphi}_\tau)$ *обобщенным геометрическим аттрактором Лоренца*.

Допуская некоторую вольность, дальше будем называть *геометрическим аттрактором* само пространство $\widehat{L}$, подразумевая, что поток $\widehat{\varphi}_\tau$ на нем задан.

При $n = 1$ пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi}_\tau)$ совпадает с геометрическими аттракторами Лоренца (в смысле Вильямса). В [5] отображения отрезка с одной точкой разрыва отнесены к одному из трех типов (см. рис. 8):

- ориентируемое (t возрастает на промежутках непрерывности);
- неориентируемое (t убывает на промежутках непрерывности);
- полуориентируемое (в остальных случаях).

Эта терминология объясняется видом соответствующих разветвленных многообразий, изображенных на рис. 9. Стрелками показан полупоток φ_τ . Линия ветвления нарисована жирной.

В случае отображений с несколькими точками разрыва множество типов ориентируемости может иметь значительное комбинаторное разнообразие.

Рис. 8. Отображения отрезка с одной точкой разрыва

Рис. 9

2.2. Конструкция топологического инварианта обобщенных геометрических аттракторов Лоренца. Будет построен инвариант топологической эквивалентности аттракторов $\widehat{L}$ как множеств, без учета потоковой динамики на них. Сначала рассмотрим некоторые геометрические свойства $\widehat{L}$. Сложность геометрической структуры аттрактора $\widehat{L}$ выражается в наличии точек, окрестности которых содержат прямое произведение интервала на конус над канторовым множеством (так называемую канторову книгу).

Обозначим через $\widehat{O}_k$ неподвижную точку потока $\widehat{\varphi}_\tau$: $\widehat{O}_k = (x_\theta)_{\theta \geq 0}$, где $x_\theta = O_k$ для всех $\theta \geq 0$. Обозначим через $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ неустойчивое многообразие точки $\widehat{O}_k$, $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ состоит из точек $\widehat{z} = (z_\theta)_{\theta \geq 0}$ таких, что $z_\theta \rightarrow O_k$ при $\theta \rightarrow \infty$. Будем считать, что $\widehat{O}_k \in \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$. Окрестности точек множества $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ топологически отличаются от окрестностей остальных точек $\widehat{L}$ следующим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Произвольная точка $\widehat{z} \in \widehat{L}$ лежит на корешке канторовой книги, вложенной в $\widehat{L}$, тогда и только тогда, когда

$$\widehat{z} \in \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i).$$

Канторовой книгой называется прямое произведение $C \times J$, где J – некоторый отрезок, а C – конус над канторовым множеством, т.е. совокупность отрезков, соединяющих точки канторова множества, расположенного на некоторой прямой l , с точкой b , не лежащей на этой прямой. *Корешком канторовой книги* называется $\{b\} \times J$.

Предложение 2.4 было доказано Р. Вильямсом в рассмотренном им частном случае [11], [12]. Доказательство предложения 2.4, а также следующих предложений 2.5 и 2.6 см. в § 3.

Для каждой точки $\widehat{z} \in \widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ через $x_1, \dots, x_n, \dots$ обозначим последовательные точки пересечения отрицательной полутраектории $\widehat{z} = (z_\theta)_{\theta \geq 0}$ с отрезком $I = [0, 1] \times \{0\}$. Через $\alpha(\widehat{z}) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ обозначим последовательность, составленную из символов “0”, “1”, ..., “n”, по следующему правилу: $\alpha_i = k - 1$, если $x_i \in \Delta_k$. Назовем $\alpha(\widehat{z})$ *символической предысторией точки $\widehat{z}$* .

Будем говорить, что две последовательности α и β эквивалентны ($\alpha \sim \beta$), если их “хвосты” совпадают, т.е. если найдутся числа m и i такие, что для всех $k \geq 0$ выполняется $\alpha_{i+k} = \beta_{m+k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. 1) Точки $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_2$ лежат в одной компоненте линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\widehat{z}_1) \sim \alpha(\widehat{z}_2)$.

2) Множество компонент линейной связности $\widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ имеет мощность континуума.

3) Каждая компонента линейной связности $\widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ двумерна или одномерна. Одномерная компонента представляет собой полную траекторию некоторой точки. Двумерные компоненты всюду плотны в $\widehat{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одномерные компоненты могут отсутствовать. Это происходит в случае, когда отображение t , порождающее $\widehat{L}$, обладает следующим свойством. Для каждого $k = 1, \dots, n$ поведение траекторий точек $p_k^+(p_k^-)$ таково, что либо образы точки $p_k^+(p_k^-)$ не подходят близко к точкам разрыва, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} t^i p_k^+ \cap \bigcup_{l=1}^n U_\varepsilon(s_l) = \emptyset,$$

либо траектория точки $p_k^+(p_k^-)$ попадает в точку разрыва, т.е. существуют i, m такие, что $t^i p_k^+ = s_m$. В этом случае в аттракторе длина ячеек ограничена снизу положительной константой. Определение ячеек см. в § 3.

Через A_i обозначим множество точек $z \in \widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$, предельных для $\widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$A_i = \text{clos } \widehat{W}^u(\widehat{O}_i) \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k).$$

Множества A_i могут пересекаться. Следующее предложение описывает локальную структуру $\widehat{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Множество $\widehat{L}$ распадается на три подмножества, элементы которых различаются структурой их окрестностей:

- 1) $\widehat{L} \setminus \text{clos } \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$: для каждого $\widehat{z} \in \widehat{L} \setminus \text{clos } \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ существует окрестность, гомеоморфная произведению канторова множества на двумерный диск; множество $\widehat{L} \setminus \text{clos } \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ может быть пустым;

- 2) $\bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$: окрестность точки $\widehat{z} \in \bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ содержит канторову книгу с вершиной в точке $\widehat{z}$;
- 3) $\bigcup_{k=1,\dots,n} A_k$: точки этого множества являются предельными для точек первых двух подмножеств.

Через $\Omega = \{\alpha(\widehat{z}) \mid \widehat{z} \in \bigcup_{k=1}^n A_k\}$ обозначим множество символических предысторий точек из $\bigcup_{k=1}^n A_k$. Пусть $\widehat{\Omega} = \Omega/\sim$ – множество классов по отношению к определенному выше отношению эквивалентности $\sim$. Из предложения 2.5, 1) следует, что имеется взаимно однозначное соответствие между $\widehat{\Omega}$ и множеством компонент линейной связности $\widehat{L} \setminus \text{clos} \bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$, содержащих точки из $\bigcup_{k=1}^n A_k$. Поэтому компоненту линейной связности будем обозначать таким же символом, как соответствующий элемент $\widehat{\Omega}$.

Заметим, что каждая точка $\widehat{z} \in \bigcup_{k=1}^n A_k$ содержится в некоторой компоненте линейной связности вместе со своей полной траекторией. Обозначим эту траекторию $\{\widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z})\}_{\tau \in \mathbb{R}} = l(z)$. Будем называть полные траектории точек $\widehat{z} \in \bigcup_{k=1}^n A_k$ отмеченными траекториями.

Из предложения 2.4 следует, что если H – гомеоморфизм, отображающий $\widehat{L}_1$ на $\widehat{L}_2$, то для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ найдется такое $m \in \{1, \dots, n\}$, что неустойчивое многообразие неподвижной точки $\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_k) \subset \widehat{L}_1$ отображается на $\widehat{W}_2^u(\widehat{O}_m) \subset \widehat{L}_2$. Поэтому множество $A_k \subset \widehat{L}_1$ отображается на множество $A_m \subset \widehat{L}_2$. Компоненты линейной связности $\widehat{L}_1 \setminus \bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}_1^u(\widehat{O}_k)$ отображаются соответственно на компоненты линейной связности $\widehat{L}_2 \setminus \bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}_2^u(\widehat{O}_k)$.

Для каждого $\widehat{\beta} \in \widehat{\Omega}$ через $C_k(\widehat{\beta})$ обозначим множество отмеченных траекторий из A_k , лежащих в компоненте связности $\widehat{\beta}$: $C_k(\widehat{\beta}) = \{l(z) \mid \widehat{z} \in A_k, \alpha(\widehat{z}) \in \widehat{\beta}\}$. Дальше запись $(\dots)_{k=1,\dots,n}$ будет означать упорядоченный набор, $\{\dots\}$ – неупорядоченный набор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\chi = \chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi}) = \{(\text{card } C_k(\widehat{\beta}))_{k=1,\dots,n} \mid \widehat{\beta} \in \widehat{\Omega}\}$ называется *L-manuscript*.

ТЕОРЕМА 1. *L-manuscript является инвариантом гомеоморфности обобщенных геометрических аттракторов Лоренца, а именно, если $\widehat{L}_1$ и $\widehat{L}_2$ гомеоморфны, то $\chi_1 = \chi_2$ с точностью до перестановки, т.е. существует перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ такая, что*

$$\chi_1 = \{(\text{card } C_k(\widehat{\beta}))_{k=1,\dots,n} \mid \widehat{\beta} \in \widehat{\Omega}_1\} = \{(\text{card } C_{i_k}(\widehat{\gamma}))_{k=1,\dots,n} \mid \widehat{\gamma} \in \widehat{\Omega}_2\} = \chi_2.$$

Теорема 1, а также следующие теоремы 2 и 3 доказаны в §4.

Геометрический смысл инварианта *L-manuscript* состоит в следующем. Если из $\widehat{L}$ удалить “особые” линии $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$, то $\widehat{L}$ распадется на несчетное множество двумерных листов и, возможно, некоторое множество одномерных. Таким образом, множество $\widehat{L}$ похоже на “книгу” с n корешками $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ и континуальным набором “страниц” (компонент линейной связности $\widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1,\dots,n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$). На некоторых страницах лежат отмеченные траектории. Инвариант *L-manuscript* есть совокупность мощностей множеств отмеченных траекторий, лежащих на страницах.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Theta = \{\aleph_0, c, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – набор мощностей. Для любого подмножества $Y \subseteq \Theta^n = \Theta \times \Theta \times \dots \times \Theta$, содержащего $(c, c, \dots, c)$ и не содержащего $(0, 0, \dots, 0)$, существует пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ такая, что $\chi = Y$.

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы 2 следует существование континуума попарно негомеоморфных обобщенных геометрических аттракторов Лоренца.

Геометрический смысл теоремы 2 состоит в том, что на компонентах линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$ может располагаться любое (в том числе счетное и несчетное) количество траекторий, предельных для $\widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Переформулируем инвариант L-manuscript в терминах отображения отрезка $t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. При этом мы пользуемся теми же обозначениями, которые введены выше для полупотока. Это не вызовет недоразумений, так как между теми и другими имеются очевидные соответствия.

Для каждого $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ через $Q_m = \text{clos} \bigcup_{k \geq 0} t^k(p_m^\pm)$ обозначим множество точек отрезка $[0, 1]$, предельных для траекторий точек $p_m^\pm$.

Пусть $\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty$ – полная траектория, лежащая в Q_m , т.е. $t(x_{i-1}) = x_i$ и $x_i \in Q_m$ для всех i . Обозначим через X_m множество всех полных траекторий, принадлежащих Q_m , $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Для каждой полной траектории $\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty$ рассмотрим бесконечную в обе стороны символическую последовательность: $\alpha(\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty) = \{\alpha_i\}_{i=-\infty}^\infty$, где $\alpha_i = l - 1$, если $x_i \in \Delta_l$.

Пусть Ω – множество последовательностей $\alpha(\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty)$, построенных для всех полных траекторий, принадлежащих X_m , $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Назовем две последовательности $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=-\infty}^\infty$ и $\beta = \{\beta_i\}_{i=-\infty}^\infty$ эквивалентными $\alpha \sim \beta$, если существуют натуральные числа M и N такие, что $\alpha_{M+i} = \beta_{N+i}$ для любых $i \leq 0$. Через $\widehat{\Omega} = \Omega / \sim$ обозначим множество классов эквивалентности. Для каждого класса эквивалентности $\widehat{\beta} \in \widehat{\Omega}$ рассмотрим множество

$$C_m(\widehat{\beta}) = \{\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty \in X_m \mid \alpha(\{x_i\}) \in \widehat{\beta}\}.$$

Пусть $\chi_t = \{(\text{card}(C_k(\widehat{\beta})))_{k=1, \dots, n} \mid \widehat{\beta} \in \widehat{\Omega}\}$. Если пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ порождена отображением t , то, очевидно, $\chi_t = \chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$.

Теорема 2 вытекает из следующего более сильного утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть t – разрывное отображение отрезка, удовлетворяющее условиям полного растяжения. Тогда для любого подмножества $Y \subset \Theta^n$, содержащего элемент $(c, c, c, \dots, c)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует отображение $\widehat{t}$ такое, что $\|t - \widehat{t}\| < \varepsilon$ и $\chi_{\widehat{t}} = Y$.

Сформулируем следствие из теорем 1 и 2 для геометрических аттракторов Лоренца в смысле Вильямса. Пусть $(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ – геометрический аттрактор Лоренца, $\widehat{O}$ – неподвижная точка, $A = (\text{clos} \widehat{W}^u(\widehat{O})) \setminus \widehat{W}^u(\widehat{O})$, $\Omega = \{\alpha(\widehat{z}) \mid \widehat{z} \in A\}$, $\widehat{\Omega} = \Omega / \sim$. Для $\gamma \in \widehat{\Omega}$ обозначим $C(\gamma) = \{l(\widehat{z}) \mid \widehat{z} \in A, \alpha(\widehat{z}) \in \gamma\}$. В этом случае инвариант L-manuscript имеет вид $\chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi}) = \{\text{card } C(\beta) \mid \beta \in \widehat{\Omega}\}$.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $\chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ является топологическим инвариантом геометрических аттракторов Лоренца, причем для любого набора различных натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \dots$ найдется пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ любого типа ориентируемости такая, что $\chi = \{\aleph_0, c, n_1, n_2, n_3, \dots\}$. Существует континуум попарно негомеоморфных геометрических аттракторов Лоренца.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМАМ 1 и 2. Инвариант L-manuscript не является полным. Более того, можно построить примеры континуума негомеоморфных аттракторов $\widehat{L}$, имеющих одинаковое множество $\chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$, различая их, например, по количеству компонент $\widehat{\beta}$ линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, содержащих соответственно одинаковые количества отмеченных траекторий из $A_1, \dots, A_n$ (для всех таких $\widehat{\beta}$ строка $(\text{card } C_1(\widehat{\beta}), \text{card } C_2(\widehat{\beta}), \dots, \text{card } C_n(\widehat{\beta}))$ одна и та же). А именно, пусть $Y \subseteq \Theta^n = \Theta \times \Theta \times \dots \times \Theta$ – произвольное счетное подмножество, содержащее $(c, c, \dots, c)$ и не содержащее $(0, 0, \dots, 0)$. Занумеруем $\{(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{in}) \mid i = 1, 2, \dots\}$ все элементы Y , кроме $(c, c, \dots, c)$ (здесь g_{ij} есть одна из мощностей $\{0, 1, 2, 3, \dots, \aleph_0, 0\}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ – произвольная бесконечная последовательность натуральных чисел. Тогда существует пара $(\widehat{L}, \widehat{\varphi})$ такая, что $\chi(\widehat{L}, \widehat{\varphi}) = Y$, причем для всех $i \geq 1$ количество компонент линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{m=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_m)$, содержащих в точности $g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}, \dots, g_{in}$ траекторий из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ соответственно, равно k_i . Множество компонент, содержащих континуум траекторий из каждого A_m , $m = 1, \dots, n$, имеет мощность c .

Схему доказательства предложения 2.7 см. в § 4.

§ 3. Доказательство предложений 2.4, 2.5 и 2.6

Опишем план доказательства. Сначала рассматривается отображение T квадрата D , аналогичное отображениям лоренцева типа, имеющее несколько линий разрыва. Это отображение связано с разрывным отображением отрезка t . Доказываются геометрические свойства предельного множества $\Sigma_T = \bigcap_{j \geq 0} T^j D$. Затем доказывается, что “сечение” геометрического аттрактора $\widehat{L}$, порожденного отображением t , гомеоморфно Σ_T . На основе этого доказываются предложения 2.4–2.6.

3.1. Разрывное отображение квадрата, аналогичное отображениям лоренцева типа. Определим отображение квадрата, являющееся обобщением отображений лоренцева типа [5], на случай нескольких линий разрыва.

Рассмотрим квадрат $D = [0, 1]^2$. Пусть $\{s_k\}_{k=1, \dots, n} \in (0, 1)$, $s_k < s_{k+1}$. Обозначим $S_k = [0, 1] \times \{s_k\}$. Линии S_k разбивают квадрат D на $n + 1$ прямоугольников, $D_0 = [0, 1] \times [0, s_1]$, $D_k = [0, 1] \times (s_k, s_{k+1})$, $D_n = [0, 1] \times (s_n, 1]$.

На $D \setminus \bigcup_k S_k$ определено отображение $T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, обладающее следующими свойствами:

1) отображение T является гладким в прямоугольниках D_i , причем

$$\text{clos } T(D_i) \cap \text{clos } T(D_j) = \emptyset, \quad i \neq j;$$

2) существуют пределы, не зависящие от x :

$$\lim_{y \rightarrow s_k^-} (f(x, y), g(x, y)) = (x_{k-}^*, y_{k-}^*) = P_k^-,$$

$$\lim_{y \rightarrow s_k^+} (f(x, y), g(x, y)) = (x_{k+}^*, y_{k+}^*) = P_k^+$$

(см. рис. 10);

3) отображение T гиперболично, а именно, существуют константы $\delta > 0$, $\mu > 0$, $0 < \lambda < 1$, $q > 1$ такие, что $\mu\delta < 1$, причем

- А) если кривая r является графиком функции $y = h(x)$, $|h'(x)| < \delta$, то кривая $T^{-1}(r \cap T(D_i))$ также является графиком функции $y = H(x)$, $|H'(x)| < \delta$; если точки p и p' принадлежат кривой $r \cap T(D_i)$, то $\rho(T^{-1}p, T^{-1}p') > \rho(p, p')/\lambda$ (ρ – расстояние между точками);
- В) если кривая l является графиком функции $x = V(y)$, удовлетворяющей условию $|V'(y)| < \mu$, причем $l \cap S_i = \emptyset$ для всех $i \in 1, \dots, n$, то $T(l)$ – есть график функции $x = \tilde{V}(y)$, $|\tilde{V}'(y)| < \mu$; если точки p и p' лежат на l , то $\rho(Tp, Tp') > q\rho(p, p')$.

Из свойств гиперболичности следует существование в области D устойчивого инвариантного слоения, в которое включаются линии $S_k = [0, 1] \times \{s_k\}$.

Площадка D , профакторизованная по устойчивому слоению, есть отрезок $[0, 1]$, а факторотображением T является разрывное отображение t отрезка $[0, 1]$ с несколькими точками разрыва. Обозначим $\Sigma_T = \text{clos} \bigcap_{n \geq 0} T^n(D)$.

Если t удовлетворяет условиям полного растяжения, то в Σ_T всюду плотны периодические точки $T, T|_{\Sigma_T}$ топологически транзитивно (это следует из предложения 2.1). Назовем Σ_T *аттрактором отображения лоренцева типа*.

Рассмотрим геометрические свойства Σ_T , которые потребуются в дальнейшем. Для точки

$$z \in \Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-)$$

определим *символическую предысторию* следующим образом:

$$\alpha(z) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_i \dots,$$

где $\alpha_i = k$, если $T^{-i}z \in D_k$. Через l_z обозначим компоненту линейной связности множества

$$\Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-),$$

содержащую точку z .

ЛЕММА 3.1. *Множество l_z представляет собой либо непрерывную кривую (график функции, зависящей от y), либо точку $l_z = z$. Включение $y \in l_z$ справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha(y) = \alpha(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $T^{-k}z$. Пусть h_1 и h_2 – ближайшие к $T^{-k}z$ сверху и снизу компоненты множества $\{\{T^{-i}S_m\}_{0 \leq i < k, m=1, \dots, n}, y=1, y=0\}$. Рассмотрим полосу Π_k , ограниченную линиями h_1 и h_2 и отрезками прямых $x = \pm 1$. Обозначим $Q_k = T^k(\Pi_k)$, Q_k имеет вид либо двуугольника (“веретена”), граница которого, за исключением вершин, не лежит в Σ_T , либо

Рис. 10. Отображение лоренцева типа с двумя линиями разрыва

Рис. 11

криволинейного треугольника (рис. 11). В первом случае граница Q_k состоит из двух гладких кривых – графиков функций $l_1(y)$ и $l_2(y)$ (это образы отрезков прямых $x = \pm 1$), удовлетворяющих условию $|l'_i(y)| < \mu$. Эти кривые имеют две общие концевые точки (вершины Q_k), принадлежащие множеству $\bigcup_{i \geq 0, k=1, \dots, n} T^i(P_k^+ \cup P_k^-)$. Во втором случае граница Q_k состоит из двух гладких кривых – графиков функций $l_1(y)$ и $l_2(y)$ (это образы отрезков прямых $x = \pm 1$), удовлетворяющих условию $|l'_i(y)| < \mu$, а также почти горизонтального отрезка, который является образом линии $y = 1$ или $y = -1$.

Рассмотрим последовательность множеств $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$. Для всех $k \geq 1$ выполняется $Q_{k+1} \subset Q_k$. “Толщина” Q_k стремится к 0 с ростом k , так как отображение T сжимает в горизонтальном направлении (свойство 3), А)). Обозначим $l_z = \bigcap_{k \geq 0} Q_k$. Либо l_z – график функции, зависящей от y , удовлетворяющей условию Липшица с константой μ , либо $l_z = z$. Справедливо вложение $l_z \subset \Sigma_T$.

Покажем, что l_z – компонента линейной связности множества

$$\Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-),$$

содержащая точку z . Действительно, если некоторая точка w принадлежит компоненте линейной связности, содержащей z , то существует непрерывная кривая $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [0, 1]\}$ такая, что $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$ и

$$\Gamma \subset \Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-).$$

Но поскольку

$$\partial Q_k \cap \Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-) = \emptyset,$$

то $\Gamma \subset Q_k$ для любого k . Отсюда $\Gamma \subseteq l_z$ и $w \in l_z$.

Покажем, наконец, что $\alpha(y) = \alpha(z)$ тогда и только тогда, когда $y \in l_z$.

Пусть $y \in l_z$. На l_z определено отображение T^{-k} для любых $k > 0$, поэтому для любого $k > 0$ точки $T^{-k}y$ и $T^{-k}z$ не могут быть разделены линией разрыва, следовательно, $\alpha(y) = \alpha(z)$.

Пусть теперь $y \notin l_z$. Тогда для некоторого k выполняется $y \notin Q_k$, точки $T^{-k}y$ и $T^{-k}z$ разделены компонентой множества $\{T^{-i}S_m\}_{0 \leq i < k, m=1, \dots, n}$ и найдется такое $0 < l < k$, что $T^{-l}y$ и $T^{-l}z$ расположены по разные стороны от некоторой линии разрыва. Отсюда следует, что $\alpha(y) \neq \alpha(z)$.

ЛЕММА 3.2. 1) Для любой точки

$$x \in \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-)$$

существует множество, лежащее в Σ_T , гомеоморфное конусу над канторовым множеством с вершиной в точке x .

2) У любой точки

$$x \in \Sigma_T \setminus \text{clos} \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i(P_k^+ \cup P_k^-)$$

существует окрестность в Σ_T , гомеоморфная произведению канторова множества на отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение отрезка $t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Пусть q – некоторая периодическая точка. Пусть m – период точки q . Рассмотрим окрестность U этой точки, не содержащую прообразов точек разрыва степени меньшей или равной m . Тогда $t^m U$ – интервал, содержащий U . Прообразы любой точки разрыва всюду плотны, это следует из условия полного растяжения. Поэтому для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ в U есть прообраз s_k . Пусть $I_0 \subset U$ – произвольный интервал, содержащий какую-нибудь точку $\vartheta \in t^{-j}s_k$ и не содержащий q .

Построим последовательность интервалов $\{I_r\}_{r \geq 0}$, $tI_{r+1} = I_r$, “наматывающуюся” на траекторию периодической точки q . А именно, так как q есть неподвижная точка отображения t^m , то существует последовательность интервалов $\{I_{jm}\}_{j \geq 0}$ такая, что $t^m I_m = I_0$, $t^m I_{2m} = I_m$, $\dots$, $\{I_{jm}\}_{j \geq 0} \rightarrow q$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть $n \geq 0$, $n = km + r$, где r – остаток от деления n на m . Обозначим $I_n = t^{m-r} I_{(k+1)m}$. Вся последовательность $\{I_n\}_{n \geq 0}$ с ростом n неограниченно приближается к периодической траектории $q, tq, \dots, t^m q = q$.

Символическая предыстория $\alpha(\{I_n\}_{n \geq 0}) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ (здесь $\alpha_i = l$, если $I_i \in \Delta_l$) представляет собой периодическую последовательность, состоящую из повторяющихся блоков $\gamma = \gamma_{m-1} \gamma_{m-2} \dots \gamma_0$, где $\gamma_i = k - 1$, если $t^i q \in \Delta_k$.

Пусть θ – прообраз $t^i q$, не совпадающий с $t^{i-1} q$. Хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ такой прообраз найдется, так как прообразы q всюду плотны. Для простоты будем предполагать, что θ – прообраз q , не совпадающий с $t^{m-1} q$ (рис. 12).

Из условия полного растяжения следует, что в окрестности U имеется точка θ_p такая, что $t^p \theta_p = \theta$. Обозначим $\beta = \beta_p \beta_{p-1} \dots \beta_0$, где $\beta_j = l$, если $t^j \theta_p \in \Delta_l$.

Рис. 12

Покажем, что для любой последовательности чисел $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i \in \mathbb{N}$, существует последовательность интервалов $\{J_l\}_{l \geq 0}$ такая, что $I_0 = J_0$, $tJ_{l+1} = J_l$ с символической предысторией

$$\underbrace{\gamma\gamma\cdots\gamma}_{n_1}\beta\underbrace{\gamma\gamma\cdots\gamma}_{n_2}\beta\underbrace{\gamma\gamma\cdots\gamma}_{n_3}\beta\cdots,$$

где блоки γ чередуются с блоками β следующим образом: β отделяют друг от друга цепочки, составленные соответственно из $n_1, n_2, n_3, \dots$ блоков γ . Пусть $J_{m \cdot n_1} \subset U$ так, что $t^{m \cdot n_1} J_{m \cdot n_1} = I_0$. Далее, пусть $J_{m \cdot n_1 + p} \subset U$ – интервал в окрестности θ_p такой, что $t^p J_{m \cdot n_1 + p} = J_{m \cdot n_1}$. Пусть $J_{m \cdot n_1 + p + m \cdot n_2} \subset U$ такой интервал, что $t^{m \cdot n_2} J_{m \cdot n_1 + p + m \cdot n_2} = J_{m \cdot n_1 + p}$. Таким образом, получается вся последовательность $\{J_l\}_{l \geq 1}$.

Пусть теперь пара (I_0, α) поставлена в соответствие последовательности $\{J_l\}_{l \geq 0}$ и α – символическая предыстория $\{J_l\}_{l \geq 0}$. Из предыдущего следует, что множество Θ всех построенных предысторий, наделенное тихоновской топологией в прямом произведении счетного числа экземпляров множества $\{1, 2, \dots, n\}$, гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Каждой паре (I_0, α) поставим в соответствие линию $l_\alpha \subset \Sigma_T$ следующим образом: $l_\alpha = \bigcap_{l \geq 0} T^l V_l$, где $V_l = \pi^{-1} J_l$, здесь π есть проекция квадрата D по устойчивым слоям на отрезок $[0, 1]$.

Объединение всех линий $\{l_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$ гомеоморфно произведению канторова множества на отрезок. Среди компонент $T^{-j} S_k$ найдется такая, которую пересекают все линии $\{l_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$. Множество $\text{clos}\{T^{j+1}(l_\alpha)\}_{\alpha \in \Theta}$ представляет собой два конуса над канторовым множеством, один с вершиной в точке P_k^+ и другой с вершиной в точке P_k^- . Этим доказано первое утверждение леммы.

Докажем вторую часть леммы. Рассмотрим точку $z \notin \text{clos} \bigcup_{i \geq 0} T^i P_k^\pm$ и покажем, что в Σ_T существует ее окрестность, гомеоморфная произведению канторова множества на отрезок. Рассмотрим последовательность $T^{-k} z$ и соответствующую последовательность $\pi(T^{-k} z) = t^{-k} y$. Найдутся такое k и такое ε , что $J = (t^{-k} y - \varepsilon, t^{-k} y + \varepsilon)$ не содержит образов точек разрыва и точек множества $\bigcup_{\substack{0 \leq i \leq k \\ l=1, \dots, n}} t^{-i} s_l$. Рассмотрим полосу $\pi^{-1} J$. Из леммы 3.1 следует, что

всякая точка $w \in \pi^{-1} J$ лежит на компоненте линейной связности l_w , которая пересекает верхнюю и нижнюю границы полосы. Обозначим через $\alpha(l_w)$ символическую предысторию точек дуги l_w (по лемме 3.1 они одинаковы). Покажем, что множество предысторий всех компонент l , содержащихся в полосе $\pi^{-1} J$,

гомеоморфно канторову множеству. Рассмотрим интервал J и последовательность интервалов $\{J_n\}_{n \geq 1}$, где $J_n = \pi(T^{-n}l_w)$. Тогда $tJ_n = J_{n-1}$, $tJ_1 = J$.

Из полного растяжения следует, что для любого n в рассмотренной выше окрестности U периодической точки q имеется интервал W такой, что $t^n W = J_n$. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно построить последовательность $\{W_k\}_{k \geq 1}$ такую, что $tW_k = W_{k-1}$, $tW_1 = W$, “наматывающуюся” на траекторию периодической точки q . Символическая предыстория α последовательности $J, J_1, \dots, J_n, W_1, W_2, \dots$ с ростом n будет сколь угодно близкой к $\alpha(l_w)$. Последовательности интервалов $J, J_1, \dots, J_n, W_1, W_2, \dots$ соответствует компонента $l \subset \Sigma_T$ с предысторией α , пересекающая полосу $\pi^{-1}J$. Таким образом, совокупность символических предысторий компонент $l \subset \Sigma_T$, пересекающих полосу $\pi^{-1}J$, есть совершенное множество. Нетрудно убедиться в том, что оно нигде не плотно. Таким образом, $\pi^{-1}J \cap \Sigma_T$ гомеоморфно произведению канторова множества на отрезок, $T^k(\pi^{-1}J \cap \Sigma_T)$ есть окрестность точки z , гомеоморфная произведению канторова множества на отрезок.

3.2. Сведения о геометрической структуре множества Σ_T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ячейкой $[T^i P_m^+, T^j P_{(\cdot)}]$, $i \geq j \geq 0$, называется образ под действием отображения T^{i+1} полосы, ограниченной снизу линией разрыва S_m , сверху – ближайшей к S_m компонентой $\bigcup_{k=1, \dots, n} T^{-m} S_k$, а по бокам – прямыми $x = \pm 1$.

Ячейкой $[T^i P_m^-, T^l P_{(\cdot)}]$, $i \geq l \geq 0$, называется образ под действием отображения T^{i+1} полосы, ограниченной сверху линией разрыва S_m , снизу – ближайшей к S_m компонентой $\bigcup_{k=1, \dots, n} T^{-m} S_k$, а по бокам – прямыми $x = \pm 1$.

Ячейка $[T^i P_m^+, T^j P_k^-]$ представляет собой двугульник с вершинами $T^i P_m^+$ и $T^j P_k^-$, ограниченный двумя графиками функций вида $x = h(y)$, удовлетворяющих условию Липшица с константой μ .

Пусть $i^* = \max_{l=0, \dots, n} i(l)$, где $i(l)$ – наименьшая степень прообраза линии разрыва, компонента которого пересекает D_l . Тогда если $i > i^*$ и точка $T^i P_m^+$ определена, то ячейка $[T^i P_m^+, T^j P_{(\cdot)}]$, $i > j$, существует и определена однозначно. Аналогично, если точка $T^i P_m^-$ определена, то ячейка $[T^i P_m^-, T^l P_{(\cdot)}]$, $i > l$, существует и определена однозначно.

Число ячеек вида $[T^m P_{(\cdot)}, T^m P_{(\cdot)}]$ не более чем конечно.

Граница ячейки имеет лишь две общие точки с Σ_T – это вершины ячейки.

В следующей лемме перечисляются свойства ячеек.

ЛЕММА 3.3. 1) Две ячейки либо не пересекаются, либо одна вложена в другую, либо они имеют единственную общую точку – вершину.

2) Для любой ячейки $[T^i P_m^\pm, T^k P_j^\pm]$, $i > k > 0$, существует петля, ограничивающая область, содержащую ячейку, находящаяся в сколь угодно малой окрестности ячейки, проходящая через вершину $T^k P_j^\pm$ и более не имеющая общих точек с Σ_T .

3) Пусть $Y_1 = [T^i P_g^\pm, T^k P_l^\pm]$, $i > k > i^*$, – произвольная ячейка. Тогда существует ячейка $Y_2 = [T^m P_{(\cdot)}^\pm, T^k P_l^\pm]$, $k > m$, такая, что $Y_2 \supset Y_1$.

4) Пусть $[T^m P_r, T^n P_d]$ – ячейка, причем $\max\{m, n\} > i^*$. Пусть $Y = [T^i P_l, T^k P_u]$, $0 < k < i$, – произвольная ячейка, вложенная в $[T^m P_r, T^n P_d]$, причем вершины этих ячеек не совпадают. Тогда существует конечная последовательность вложенных ячеек $Y_1 = [T^{i_1} P_s, T^{k_1} P_u]$, $i_1 < k$, $Y_2 = [T^{i_2} P_s, T^{k_2} P_u]$, $i_2 < i_1$, $Y_3 = [T^{i_3} P_s, T^{k_3} P_u]$, $i_3 < i_2$, $\dots$: $Y \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_k = [T^m P_r, T^n P_d]$.

Рис. 13

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем свойство 1) методом от противного. Пусть две ячейки Y_1 и Y_2 пересекаются и $x \in \partial Y_1 \cap \partial Y_2$ их общая точка, не являющаяся вершиной той и другой ячейки. Тогда $Y_1 = T^i G_1$ и $Y_2 = T^j G_2$, где G_1, G_2 – полосы, ограниченные с одной из сторон линией разрыва и с другой стороны линией разрыва или одним из ее прообразов. Тогда $T^{-i}x$ и $T^{-j}x$ принадлежат отрезкам $x = \pm 1$. Предположим, что $i > j$. Тогда точка $T^{-i}x$ с границы D через $i - j$ итераций попадает снова на границу D , что противоречит свойствам отображения T . Если $i = j$, то вследствие взаимной однозначности T^{-j} в точке x получаем, что полосы G_1 и G_2 имеют общую точку. Тогда они совпадают.

Докажем свойство 2). Предположим для определенности, что ячейка имеет вид $[T^i P_m^+, T^k P_j^-]$. Рассмотрим полосу Y , порождающую эту ячейку, т.е.

$$[T^i P_m^+, T^k P_j^-] = \text{clos } T^{i+1} Y.$$

Множество $\text{clos } T(Y)$ имеет вид криволинейного треугольника (см. рис. 13). Боковые стороны этого треугольника не имеют общих точек с Σ_T , за исключением вершины P_m^+ . Из свойств T следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(P_m^+) \setminus \text{clos } T(Y)$ не содержит точек Σ_T . Отсюда следует существование петли с указанными свойствами (см. рис. 13).

Докажем свойство 3). Пусть для определенности $Y_1 = [T^i P_g^+, T^k P_l^+]$. Так как $k > i^*$, то существует ячейка $Y_2 = [T^m P(\cdot), T^k P_l^+] = T^{k+1} G_2$, $k > m \geq 0$, где G_2 – полоса, ограниченная снизу линией разрыва S_l и сверху ближайшей к S_l компонентой множества $\bigcup_{r=1, \dots, n} T^{-m} S_r$. Обозначим $G_1 = T^{-k-1} Y_1$. Множество G_1 ограничено снизу участком линии разрыва S_l и не пересекается с $\bigcup_{r=1, \dots, n} T^{-m} S_r$. Тогда $G_1 \subset G_2$ и $Y_1 \subset Y_2$.

Рис. 14

Рис. 15

Докажем свойство 4). На множестве внутренних точек $\text{int}[T^m P_r, T^n P_d]$ определено отображение $T^{-\max\{m,n\}}$, следовательно, $\text{int}[T^m P_r, T^n P_d]$ не может содержать $T^i P_{(.)}$ для $i < \max\{m, n\}$.

Из свойства 3) следует, что существует ячейка $[T^{i_1} P_s, T^k P_u]$, $k > i_1$, содержащая внутри себя ячейку Y . Эта ячейка имеет множество общих точек с ячейкой $[T^m P_r, T^n P_d]$, следовательно, одна из этих ячеек содержит другую. Но $T^k P_u \in \text{int}[T^m P_r, T^n P_d]$, следовательно, $[T^{i_1} P_s, T^k P_u] \subset [T^m P_r, T^n P_d]$, $k > i_1 \geq \max\{m, n\}$. Если вершина $T^{i_1} P_s$ совпадает с вершиной $T^m P_r$ или $T^n P_d$, то процесс закончен. Если нет, то существует ячейка $[T^{i_1} P_s, T^{i_2} P_q]$, $i_1 > i_2 \geq \max\{m, n\}$, содержащая $[T^{i_1} P_s, T^k P_u]$ и вложенная в $[T^m P_r, T^n P_d]$, и т.д. За конечное число шагов этот процесс закончится, так как $i_1 > i_2 > \dots > i_n > 0$. Свойство 4) проиллюстрировано на рис. 14.

ЗАМЕЧАНИЕ. В последнем свойстве в цепи $Y \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_k$ ячейки вида $[T^i P_{(.)}, T^k P_{(.)}]$, $i < k$, где $T^k P_{(.)}$ – верхняя вершина, чередуются с ячейками вида $[T^l P_{(.)}, T^m P_{(.)}]$, $l < m$, где $T^m P_{(.)}$ – нижняя вершина.

ЛЕММА 3.4. Пусть $w \in \bigcup_{i \geq 0, k=1, \dots, n} T^i P_k$. Пусть $\Gamma \subset \Sigma_T$, $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [0, 1]\}$ – непрерывная кривая, $w = \gamma(0)$, $\gamma(1) \neq w$. Тогда существует $t^* \in [0, 1]$ такое, что $z = \gamma(t^*) \notin \bigcup_{i \geq 0, k=1, \dots, n} T^i P_k^\pm$ и $z \in \text{int } l_z$.

Множество l_z есть компонента линейной связности множества

$$\Sigma_T \setminus \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i (P_k^+ \cup P_k^-),$$

содержащая точку z (см. лемму 3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем горизонтальную прямую d , не содержащую образов линий разрыва, такую, что существуют точки, принадлежащие кривой Γ , лежащие ниже этой прямой и выше этой прямой. Пусть для определенности точка w лежит выше прямой d . Пусть $M = \inf\{m \mid \gamma(m) \in d\}$.

Обозначим $z = \gamma(M)$. Так как

$$z \notin \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i P_k,$$

то существует счетный набор множеств Q_n такой, что $l_z = \bigcap_{n \geq 1} Q_n$ (лемма 3.1), где множество Q_n является образом полосы, ограниченной сверху и снизу двумя компонентами прообразов линий разрыва, а по бокам – прямыми $x = \pm 1$. Поэтому найдется ячейка $Y_n \supset Q_n$, имеющая такие же вершины, как Q_n . Таким образом, $l_z \subseteq \bigcap_{n \geq 1} Y_n$, т.е. существует бесконечная последовательность ячеек $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$, содержащих точку z . Будем предполагать, что $z \notin \text{int } l_z$. В этом случае либо $z = l_z$, либо z есть один из концов l_z . Возможны два случая: А) $w \notin l_z$ и В) $w \in l_z$.

Рассмотрим случай А). Если оба конца кривой l_z не являются образами линий разрыва или если $z = l_z$, то в последовательности $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ есть бесконечно много ячеек с несовпадающими вершинами. Тогда $l_z = \bigcap_{n \geq 1} Y_n$ и $w \notin Y_n$ начиная с некоторого n . Из замечания к лемме 3.3 следует, что среди $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ найдется ячейка вида $[T^i P(\cdot), T^k P(\cdot)]$, $i > k$, где $T^i P(\cdot)$ – верхняя вершина. Из леммы 3.3 следует, что точка z отделена от точки w петлей, обходящей ячейку $[T^i P(\cdot), T^k P(\cdot)]$ и не пересекающей множество Σ_T , за исключением нижней вершины $T^k P(\cdot)$ (рис. 15). Тогда кривая $\Gamma_1 = \{\gamma(t) \mid t \in [0, M]\}$ проходит через нижнюю вершину ячейки, что противоречит тому, что z – самая низкая точка кривой Γ_1 .

Если ровно один конец l_z является образом линии разрыва, то среди $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ есть счетное множество ячеек, имеющих вид $Y_n = [T^{i_n} P(\cdot), T^{k_0} P(\cdot)]$, $i_n > k_0$, у которых совпадает вершина $T^{k_0} P(\cdot)$. Тогда $l_z = \bigcap_{n \geq 1} Y_n$ и $w \notin Y_n$ начиная с некоторого n .

Если $T^{k_0} P$ – нижняя вершина ячеек, то граница ячейки

$$Y_n = [T^{i_n} P(\cdot), T^{k_0} P(\cdot)]$$

отделяет z от w . Аналогично предыдущему приходим к противоречию.

Если $T^{k_0} P(\cdot)$ – верхняя вершина ячеек, то отрезок кривой $\Gamma_1 = \{\gamma(t) \mid t \in [0, M]\}$ пересекает границу ячейки $Y_n = [T^{i_n} P(\cdot), T^{k_0} P(\cdot)]$ в точке $T^{k_0} P(\cdot)$. Пусть $N = \sup\{r < M \mid \gamma(r) = T^{k_0} P(\cdot)\}$. Очевидно, $N < M$. Рассмотрим отрезок кривой $\Gamma_2 = \{\gamma(t) \mid t \in (N, M)\}$. Для всех n $\Gamma_2 \subset Y_n$, иначе найдется $u \in (N, M)$ такое, что $\gamma(u) \in \partial Y_n$. Но нижняя вершина Y_n находится ниже прямой d , а верхняя совпадает с $T^{k_0} P(\cdot)$. Обе не принадлежат кривой Γ_2 . Следовательно, $\Gamma_2 = l_z$. Таким образом, кривая Γ содержит точку $z_1 \in \text{int } l_z$. Так как $l_{z_1} = l_z$, то $z_1 \in \text{int } l_{z_1}$.

В) Если $w \in l_z$, то w – верхний, а z – нижний концы l_z . Тогда w – общая вершина всех Q_n начиная с некоторого n (w не может находиться в счетном наборе вложенных друг в друга множеств $\text{int } Q_n$). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что кривая l_z является частью кривой Γ .

3.3. Гомеоморфность “сечения” геометрического аттрактора $\widehat{L}$ аттрактору лоренцева типа Σ_T . Введем на $\widehat{L}$ топологию, заданную следующей системой окрестностей $\{U_{\varepsilon, \mu}(\widehat{z}) \mid z \in \widehat{L}, \varepsilon, \mu \in \mathbb{R}_+\}$, где

$$U_{\varepsilon, \mu}(\widehat{z}) = \{\widehat{y} = (y_\tau)_{\tau \geq 0} \in \widehat{L} \mid d(y_\tau, z_\tau) < \varepsilon \text{ для любых } \tau \in [0, \mu]\},$$

здесь $d(\cdot, \cdot)$ – метрика на разветвленном многообразии L , например, индуцированная из $\mathbb{R}^3$. Легко проверить, что $\widehat{L}$ – хаусдорфово топологическое пространство.

Обозначим $\widehat{I} = \{\widehat{z} \in \widehat{L} \mid \widehat{z} = (z_\theta)_{\theta \geq 0}, z_0 \in I\}$. Здесь $I = [0, 1] \times \{0\} \subset L$ – линия склейки на разветвленном многообразии (см. рис. 7).

ЛЕММА 3.5. *Множество $\widehat{I}$ гомеоморфно Σ_T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим для простоты обозначений, что $T(x, y) = (f(x, y), t(y))$. Построим взаимно однозначное соответствие H между элементами множеств $\widehat{I}$ и Σ_T .

Если $\widehat{z} \in \widehat{W}_+^u(\widehat{O}_i)$ ($\widehat{z} \in \widehat{W}_-^u(\widehat{O}_i)$), то $H(\widehat{z}) = T^{N-1}(P_i^+)$ ($H(\widehat{z}) = T^{N-1}(P_i^-)$), здесь “+” и “−” означают соответственно правую и левую ветви неустойчивого многообразия $\widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, N – количество точек пересечения отрицательной полутраектории $(z_\tau)_{\tau \geq 0}$ с отрезком I . Если $\widehat{z} \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, то через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ обозначим последовательные точки пересечения $(z_\tau)_{\tau \geq 0}$ с I . Тогда $t(x_m) = x_{m-1}$. Обозначим $r_m = [0, 1] \times \{x_m\}$, тогда $T(r_m) \subset r_{m-1}$. Обозначим $w = \bigcap_{m \geq 0} T^m r_m$, тогда $w \in \Sigma_T$. Пусть $w = H(\widehat{z})$. Легко проверяется, что отображение H инъективно.

Покажем, что H отображает $\widehat{I}$ на Σ_T сюръективно. Действительно, у каждой точки $w \in \Sigma_T$ есть прообраз. Если $w = T^i(P_k^+)$, то прообразом является $\widehat{z} = (z_\tau)_{\tau \geq 0}$, где $(z_\tau)_{\tau \geq 0}$ – отрезок неустойчивого многообразия $\widehat{W}_+^u(\widehat{O}_k)$ вплоть до $(i+1)$ -го пересечения с I . Если w не является образом линии разрыва, то через x_k обозначим ординату точки $T^{-k}w$. Тогда существует отрицательная полутраектория $\widehat{z} = (z_\tau)_{\tau \geq 0}$, проходящая последовательно через $z_0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. По построению $w = H(\widehat{z})$.

Докажем, что H непрерывно, т.е. для любой окрестности $U(w)$ существует окрестность $V(\widehat{z})$ такая, что $H(V(\widehat{z})) \subset U(w)$. Рассмотрим два случая.

А) Пусть $w = H(\widehat{z})$ не является образом линии разрыва. Тогда существуют такой номер M и такое число δ , что образ прямоугольника $[0, 1] \times (x_M - \delta, x_M + \delta)$ под действием отображения T^M содержится в $U(w)$. Здесь x_M – ордината точки $T^{-M}w$. Существует такое τ , что $x_M = z_\tau$, $\widehat{z} = (z_u)_{u \geq 0}$. Рассмотрим окрестность $V(\widehat{z}) = U_{\delta/2, \tau}(\widehat{z}) \cap \widehat{I}$ и покажем, что $H(V(\widehat{z})) \subset U(w)$. Пусть $\widehat{y} \in U_{\delta/2, \tau}(\widehat{z}) \cap \widehat{I}$. Тогда линия $\widehat{y} = (y_u)_{u \geq 0}$ находится в $(\delta/2)$ -окрестности линии $(z_u)_{u \geq 0}$ на протяжении времени τ . Следовательно, существуют по крайней мере $M+1$ последовательная точка пересечения $(y_u)_{u \geq 0}$ с I . Обозначим их r_i , $i = 0, 1, \dots, M$. Рассмотрим y_τ и $r_M = y_0$. Обе точки располагаются на разветвленном многообразии L , одна на линии I , а другая – вблизи линии I , $d(r_M, x_M) \leq d(y_\tau, r_M) + d(y_\tau, z_\tau) < 2d(y_\tau, z_\tau) < \delta$ (см. рис. 16). Тогда $H(\widehat{y}) \in T^M([0, 1] \times r_M) \subset T^M([0, 1] \times (x_M - \delta, x_M + \delta)) \subset U(w)$. Итак, доказано, что $H(V(\widehat{z})) \subset U(w)$.

В) Пусть $w = H(\widehat{z}) = T^K P_i^+$. Рассмотрим $U(w) \cap \Sigma_T$. Существует такое δ , что $T^{K+1}([0, 1] \times (s_i, s_i + \delta)) \subset U(w)$. Пусть $u \in W_+^u(O_i)$, $d(u, O_i^+) < \delta/2$ (см. рис. 17). Тогда $\varphi_\tau(u) = t^K p_i^+$ для некоторого $\tau > 0$. Покажем, что $H(U_{\delta/2, \tau}(\widehat{z}) \cap \widehat{I}) \subset U(w)$. Пусть $\widehat{y} \in U_{\delta/2, \tau}(\widehat{z}) \cap \widehat{I}$. Тогда линия $\widehat{y} = (y_u)_{u \geq 0}$ пересекает отрезок I по крайней мере $K+1$ раз. Обозначим через r_l последовательные точки пересечения ее с I , $l = 0, 1, \dots, K$. Тогда $r_K \in (s_i, s_i + \delta)$. Действительно,

$$d(r_K, s_i) \leq d(y_\tau, O_i) \leq d(y_\tau, u) + d(u, O_i) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Рис. 16

Рис. 17

(см. рис. 17). Следовательно,

$$H(\widehat{y}) \subset T^{K+1}([0, 1] \times r_k) \subset T^{K+1}[0, 1] \times (s_i, s_i + \delta) \subset U(w).$$

Непрерывность обратного отображения H^{-1} следует из того, что $\widehat{I}$ компактно. Таким образом, H – гомеоморфизм, отображающий $\widehat{I}$ на Σ_T .

3.4. Доказательства геометрических свойств $\widehat{L}$. Для дальнейшего нам понадобятся следующие простые утверждения:

- 1) для любого τ $\widehat{\varphi}_\tau$ – гомеоморфизм;
- 2) пусть $M \subset \widehat{I}$ и $\tau > 0$ таково, что за время τ точки $\widehat{z} \in M$ не возвращаются в M ; тогда если $0 < \tau_2 - \tau_1 < \tau$, то множество $\bigcup_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)} \widehat{\varphi}_\tau(M)$ гомеоморфно $M \times (\tau_1, \tau_2)$;
- 3) для каждой точки $\widehat{z} = (z_\tau)_{\tau \geq 0}$ введем операцию проектирования на $\widehat{I}$: $\text{pr}_{\widehat{I}}(\widehat{z}) = (z_{\mu+\tau})_{\tau \geq 0}$, здесь μ – наименьшее положительное число такое, что $z_\mu \in I$ (эта операция не определена только для точек, лежащих на отрезках $\widehat{W}_+^u(\widehat{O}_i)$ и $\widehat{W}_-^u(\widehat{O}_i)$ от точки $\widehat{O}_i$ до первого пересечения с $\widehat{I}$); операция $\text{pr}_{\widehat{I}}(\widehat{z})$ непрерывна везде, кроме $\widehat{I}$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $K_\alpha \subset \widehat{L}$ – открытый двумерный диск, $\widehat{z} \in K_\alpha$, $K_\alpha \cap \widehat{I} = \emptyset$. Если $\widehat{z} \in \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$, то $\widehat{z}$ содержится в K_α вместе с отрезком своей траектории.

Рис. 18

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\widehat{z} \notin \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k)$. Обозначим $\widehat{w} = \text{pr}_{\widehat{T}} \widehat{z}$. Из гомеоморфности $\widehat{T}$ и Σ_T следует, что $\widehat{w}$ лежит в компоненте линейной связности множества $\widehat{T} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, которую мы обозначим l_w . Предположим, что $\widehat{w} \in \text{int } l_w$. Докажем, что $\widehat{z}$ содержится в K_α вместе с участком своей траектории. Пусть $U(\widehat{z}) \subset K_\alpha$ – достаточно малый открытый диск, содержащий $\widehat{z}$, такой, что $\text{pr}_{\widehat{T}} U(\widehat{z}) \subset l_w$. Существуют τ_1 и τ_2 такие, что $U(\widehat{z}) \subset \bigcup_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)} \widehat{\varphi}_\tau(l_w) \sim l_w \times (\tau_1, \tau_2)$. Отрезок траектории $\bigcup_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)} \widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z})$ пересекает $U(\widehat{z})$ (см. рис. 18), причем существуют τ'_1 и τ'_2 такие, что $\bigcup_{\tau \in (\tau'_1, \tau'_2)} \widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z}) \subset U(\widehat{z})$. Итак, точка $\widehat{z}$ содержится в K_α вместе с отрезком своей траектории.

Покажем теперь, что в любой окрестности любой точки

$$\widehat{z} \in \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k) \cap K_\alpha$$

найдется точка, содержащаяся в K_α вместе с отрезком своей траектории. Пусть $c \in K_\alpha$, $c \neq \widehat{z}$. Соединим точки $\widehat{z}$ и c кривой $G \subset K_\alpha$. Рассмотрим проекцию G на $\widehat{T}$: $\text{pr}_{\widehat{T}} G = \Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [0, 1]\}$. Из леммы 3.4 следует, что найдется такое t^* , что $u \in \text{int } l_u$, где $u = \gamma(t^*)$. На кривой G есть точка, проектирующаяся в u , она содержится в K_α вместе с отрезком своей траектории.

Покажем, что если точка $\widehat{z}$ содержится в K_α вместе с отрезком своей траектории, то эта траектория продолжается в K_α до выхода на границу ∂K_α . Пусть $m = \inf\{M > 0 \mid \widehat{\varphi}_M(\widehat{z}) \notin K_\alpha\}$, $m > 0$. Тогда $\widehat{\varphi}_m(\widehat{z}) \in \partial K_\alpha$ ($\widehat{\varphi}_m(\widehat{z}) \notin K_\alpha$, иначе найдется отрезок траектории, который содержится в K_α вместе с $\widehat{\varphi}_m(\widehat{z})$). Обозначим $n = \sup\{M < 0 \mid \widehat{\varphi}_M(\widehat{z}) \notin K_\alpha\}$, $n < 0$, $\widehat{\varphi}_n(\widehat{z}) \in \partial K_\alpha$. Итак, существует отрезок траектории $\{\widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z}) \mid \tau \in (n, m)\} \subset K_\alpha$, содержащий $\widehat{z}$ и продолжающийся от границы K_α до границы K_α .

Теперь мы докажем требуемое свойство. Рассмотрим

$$\widehat{z} \in \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_k) \cap K_\alpha.$$

Пусть K_1 – открытый диск, содержащий $\widehat{z}$, $\text{clos } K_1 \subset K_\alpha$. Из предыдущего следует, что существует последовательность точек $\widehat{z}_i \rightarrow \widehat{z}$ таких, что $\widehat{z}_i \in K_1$, $\widehat{z}_i$ содержится в K_1 вместе с отрезком своей траектории, который продолжается от границы K_1 до границы K_1 . Обозначим через $\tau_i > 0$ время, необходимое точке $\widehat{z}_i$, чтобы добраться до границы K_1 , т.е. $\widehat{\varphi}_{\tau_i} \widehat{z}_i \in \partial K_1$. Если $\tau_i \rightarrow 0$, то $\widehat{\varphi}_{\tau_i}(\widehat{z}_i) \rightarrow \widehat{z}$ и $\widehat{z} \in \partial K_1$, $\widehat{z} \notin K_1$. Противоречие. Если $\tau_i \rightarrow \tau_0 > 0$, то $\widehat{\varphi}_{\tau_i}(\widehat{z}_i) \rightarrow \widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z})$ для любого $0 < \tau < \tau_0$, откуда следует, что $\widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z}) \in \text{clos } K_1 \subset K_\alpha$ и отрезок траектории $\bigcup_{\tau \in [0, \tau_0]} \widehat{\varphi}_\tau \widehat{z}$ лежит в K_α .

Предложения 2.2–2.4 вытекают из следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Всякая точка $\widehat{z} \in \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ лежит на корешке канторовой книги, вложенной в $\widehat{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\widehat{z} \in \widehat{T}$, то из лемм 3.2 и 3.3 следует, что в $\widehat{T}$ имеется множество Λ , гомеоморфное канторову конусу с вершиной в точке $\widehat{z}$. Тогда для некоторого ε_0 множество $\bigcup_{s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)} \widehat{\varphi}_s(\Lambda)$ – канторова книга, на корешке

которой лежит $\widehat{z}$. Если $\widehat{z} \notin \widehat{I}$, то существование канторовой книги следует из того, что существует τ такое, что $\widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z}) \in \widehat{I}$, и из того, что $\widehat{\varphi}_\tau$ – гомеоморфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Если $\widehat{z} \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$, то $\widehat{z}$ не лежит на корешке канторовой книги, вложенной в $\widehat{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Предположим, что существует канторова книга $K \subset \widehat{L}$ с точкой $\widehat{z}$ на корешке. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{z} \notin \widehat{I}$ и $K \cap \widehat{I} = \emptyset$. Обозначим через r корешок канторовой книги, а через K_α – ее листы: $K = r \cup \bigcup_\alpha K_\alpha$. Спроектируем точку $\widehat{z}$ и множество K на $\widehat{I}$. Обозначим $\widehat{w} = \text{pr}_{\widehat{I}} \widehat{z}$, $L_\alpha = \text{pr}_{\widehat{I}}(\text{int } K_\alpha)$, $R = \text{pr}_{\widehat{I}}(r)$ (здесь $\text{int } K_\alpha$ – множество внутренних точек листа K_α). Множества L_α и R линейно связные. Введем обозначения для образов этих множеств под действием гомеоморфизма $H: \widehat{I} \rightarrow \Sigma_T$: $\nu = H(\widehat{w})$, $l(\alpha) = H(L_\alpha)$, $R_1 = H(R)$. Так как

$$\nu \notin \bigcup_{\substack{i \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} T^i P_k^\pm,$$

то из леммы 3.1 следует, что существует последовательность вложенных друг в друга множеств $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$ такая, что $\bigcap_{n \geq 1} Q_n = l_\nu \subset \Sigma_T$, где l_ν – непрерывная кривая, возможно вырождающаяся в точку, $\nu \in l_\nu$. Множество $\partial Q_n \cap \Sigma_T$ состоит из двух точек, обе они лежат в $\bigcup_{i \geq 0, k=1, \dots, n} T^i P_k^\pm$. Так как $\nu \in \text{clos}(l(\alpha))$, $\widehat{z} \in \text{clos}(K_\alpha)$, то $l(\alpha) \cap Q_n \neq \emptyset$ для любого n . Далее есть две возможности.

А) Существуют α_i , $i = 1, 2, 3$, такие, что $l(\alpha_i) \subset Q_n$ для любых $n \geq 1$. Тогда $R_1 \subset Q_n$ для любых $n \geq 1$. Тогда $R_1 \cup \bigcup_{i=1,2,3} l(\alpha_i) \subset l_\nu$, откуда $R \cup \bigcup_{i=1,2,3} L_{\alpha_i} \subset H^{-1}l_\nu$, где $H^{-1}l_\nu = l$ есть непрерывная кривая или точка. Таким образом, $\text{pr}_{\widehat{I}}(r \cup \bigcup_{i=1,2,3} K_{\alpha_i}) \subset l$. Следовательно, множество $r \cup \bigcup_{i=1,2,3} K_{\alpha_i}$ содержится в множестве $\bigcup_{\tau \in (\tau_1, \tau_2)} \widehat{\varphi}_\tau(l)$, гомеоморфном $l \times (\tau_1, \tau_2)$, здесь

$$\tau_1 = \min_{\widehat{z} \in r \cup \bigcup_{i=1,2,3} K_{\alpha_i}} \{\tau(\widehat{z})\}, \quad \tau_2 = \max_{\widehat{z} \in r \cup \bigcup_{i=1,2,3} K_{\alpha_i}} \{\tau(\widehat{z})\},$$

$\tau(\widehat{z})$ – наименьшее положительное число такое, что $\widehat{\varphi}_{-\tau(\widehat{z})} \widehat{z} \in \widehat{I}$. Получается, что объединение трех листов с общим ребром гомеоморфно подмножеству двумерного диска (если l – интервал) или интервалу (если l – точка). Противоречие.

В) Для каждого α (может быть, кроме двух) существует n такое, что $l(\alpha) \cap \partial Q_n \neq \emptyset$. Тогда $l(\alpha)$ содержит точки множества $\bigcup_{i \geq 0, k=1, \dots, n} T^i P_k^\pm$. Тогда открытый диск $\text{int } K_\alpha$ содержит точку $\widehat{u} \in \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Из леммы 3.6 следует, что каждая точка содержится в $\text{int } K_\alpha$ вместе с отрезком своей траектории. Поэтому $\widehat{u}$ содержится в $\text{int } K_\alpha$ вместе с отрезком линии $\widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Поскольку мощность множества листов K_α есть континуум, а количество непесекающихся интервалов на линиях $\widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ счетно, то разные листы $\text{int } K_\alpha$ должны иметь общие точки. Противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *У любой точки $z \in \widehat{L} \setminus \text{clos} \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ существует окрестность, гомеоморфная произведению канторова множества на двумерный диск.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3.2 и 3.5 следует, что у точки $\widehat{w} = \text{pr}_{\widehat{I}} \widehat{z}$ в $\widehat{I}$ существует окрестность $U \subset \widehat{I}$, гомеоморфная произведению канторова множества на отрезок. Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что множество $U_1 = \{\widehat{\varphi}_\tau U \mid \tau \in (-r_0, r_0)\} \subset \widehat{L}$ гомеоморфно произведению канторова множества на двумерный диск. Отсюда следует, что всякая достаточно малая окрестность $\widehat{w}$ в $\widehat{L}$ гомеоморфна произведению канторова множества на двумерный диск. Аналогичное свойство, очевидно, имеет место и для $\widehat{z}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Точки $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_2$ лежат в одной компоненте линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\widehat{z}_1) \sim \alpha(\widehat{z}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\alpha(\widehat{z}_1) \sim \alpha(\widehat{z}_2)$, $\alpha(\widehat{z}_1) = \alpha_1 \alpha_2 \dots$, $\alpha(\widehat{z}_2) = \beta_1 \beta_2 \dots$. Тогда существуют такие натуральные числа m и k , что $\alpha_{m+l} = \beta_{k+l}$ для всех $l \geq 1$. Тогда существуют $\tau_1, \tau_2 \leq 0$ такие, что

$$\alpha(\widehat{\varphi}_{\tau_1}(\widehat{z}_1)) = \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots = \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots = \alpha(\widehat{\varphi}_{\tau_2}(\widehat{z}_2)),$$

причем $\widehat{\varphi}_{\tau_i}(\widehat{z}_i) \in \widehat{I}$. Из лемм 3.1 и 3.5 следует, что $\widehat{\varphi}_{\tau_i}(\widehat{z}_i)$ соединены линией $l \subset \widehat{I} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Таким образом, $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_2$ соединены друг с другом двумя отрезками траекторий $\{\widehat{\varphi}_\tau(\widehat{z}_i) \mid \tau_i \leq \tau \leq 0\}$ и линией l . Пусть теперь $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_2$ лежат в одной компоненте линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Тогда существует линия $l = \{l(t), 0 \leq t \leq 1\} \subset \widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ такая, что $l(0) = \widehat{z}_1$ и $l(1) = \widehat{z}_2$.

Пусть $\widehat{z} = l(t)$. Покажем, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что все точки кривой $l[t-\varepsilon, t+\varepsilon] = \{l(s) \mid t-\varepsilon \leq s \leq t+\varepsilon\}$ имеют эквивалентные предыстории. Если $\widehat{z} = l(t) \notin \widehat{I}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $l[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap \widehat{I} = \emptyset$. Рассмотрим $\widetilde{l} = \text{pr}_{\widehat{I}} l[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, $\widetilde{l}$ есть непрерывный образ кривой. Следовательно, $\widetilde{l}$ — непрерывная кривая или точка, $\widetilde{l} \subset \widehat{I} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ и все точки $\widetilde{l}$ имеют одинаковую символическую предысторию. Но тогда точки кривой $l[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ имеют эквивалентную предысторию. Если $\widehat{z} = l(t) \in \widehat{I}$, то существует θ такое, что $\widehat{\varphi}_\theta(\widehat{z}) \notin \widehat{I}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что точки $\widehat{\varphi}_\theta(l[t-\varepsilon, t+\varepsilon])$ имеют эквивалентные предыстории. Но тогда то же самое справедливо и для кривой $l[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Из компактности отрезка следует, что точки $\widehat{z}_1$ и $\widehat{z}_2$ имеют эквивалентные предыстории.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Множество компонент линейной связности*

$$\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$$

имеет мощность континуума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 3.2 следует, что в $\widehat{L}$ есть точки, имеющие неэквивалентные предыстории, причем для любой последовательности чисел $n_1, n_2, n_3, \dots$ существует точка с предысторией

$$\underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{n_1} \underbrace{\beta \alpha \alpha \dots \alpha}_{n_2} \underbrace{\beta \alpha \alpha \dots \alpha}_{n_3} \beta \dots$$

Множество Θ всех таких предысторий имеет мощность континуума. Рассмотрим $\widehat{\Theta} = \Theta / \sim$. Каждый класс эквивалентности содержит не более чем счетное множество элементов. Действительно, пусть $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots$ – представитель некоторого класса эквивалентности. Если $\beta = \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots$ принадлежит этому классу, то β однозначно определяется конечной строкой чисел $(n, m, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$. Здесь n и m – такие числа, что $\forall i \geq 0 \quad \alpha_{m+i} = \beta_{n+i}$. Поскольку множество конечных подмножеств множества натуральных чисел счетно, каждый класс эквивалентности не более чем счетен. Итак, $\text{card}(\widehat{\Theta}) = c$. Каждому элементу $\widehat{\alpha} \in \widehat{\Theta}$ соответствует одна компонента линейной связности $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Таким образом, множество этих компонент имеет мощность континуума.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. *Каждая компонента линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ двумерна или одномерна. Двумерные компоненты всюду плотны в $\widehat{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{z}$ лежит в некоторой компоненте линейной связности множества $\widehat{L} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{z} \in \widehat{I}$. Из лемм 3.5 и 3.1 следует, что компонента линейной связности множества $\widehat{I} \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n} \widehat{W}^u(\widehat{O}_i)$ представляет собой либо непрерывную кривую $l_{\widehat{z}}$, либо точку. Если $l_{\widehat{z}}$ – кривая, то компонента линейной связности, содержащая точку $\widehat{z}$, двумерна, так как содержит двумерный диск. Если $l_{\widehat{z}} = \widehat{z}$, то компонента линейной связности одномерна – это траектория точки $\widehat{z}$.

Докажем, что двумерные компоненты всюду плотны в $\widehat{L}$. Из полного растяжения следует, что образы интервала $l_{\widehat{z}}$ под действием отображения последования всюду плотны в $\widehat{I}$, следовательно, компонента, содержащая $\widehat{z}$, всюду плотна в $\widehat{L}$.

§ 4. Доказательства теорем 1 и 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если G – гомеоморфизм $G(\widehat{L}_1) = \widehat{L}_2$, то для любого $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует $j_m \in \{1, \dots, n\}$ такое, что

$$G(\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_m)) = \widehat{W}_2^u(\widehat{O}_{j_m}),$$

при этом $G(A_m) = A_{j_m}$. Таким образом, возникает перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Компоненты линейной связности $\widehat{L}_1 \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}_1^u(\widehat{O}_k)$ отображаются соответственно на компоненты линейной связности $\widehat{L}_2 \setminus \bigcup_{k=1, \dots, n} \widehat{W}_2^u(\widehat{O}_k)$. Для любого $\beta \in \widehat{\Omega}_1$ существует $\gamma \in \widehat{\Omega}_2$ такое, что компонента линейной связности β отображается на компоненту линейной связности γ . При этом множество точек из A_m , лежащих на первой компоненте, отображается на множество точек из A_{j_m} , лежащих на второй компоненте.

Возможны два случая: либо $\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_m)$ всюду плотно в $\widehat{L}_1$, либо $\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_m)$ нигде не плотно в $\widehat{L}_1$. Если множество $\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_m)$ всюду плотно в $\widehat{L}_1$, то $\widehat{W}_2^u(\widehat{O}_{j_m})$ тоже всюду плотно в $\widehat{L}_2$. В этом случае компоненты β и γ целиком состоят из

траекторий точек из A_m и A_{j_m} . Множество таких траекторий либо несчетно (если компоненты двумерны), либо состоит из одной траектории (если компоненты одномерны). Поэтому $\text{card}(C_m(\beta)) = \text{card}(C_{j_m}(\gamma))$. Если $\widehat{W}_1^u(\widehat{O}_m)$ нигде не плотно в $\widehat{L}_1$, то $\widehat{W}_2^u(\widehat{O}_{j_m})$ нигде не плотно в $\widehat{L}_2$. Множество $C_m(\beta) = \{l(\widehat{z}) \mid \alpha(\widehat{z}) \in \beta, \widehat{z} \in A_m\}$ есть множество полных траекторий точек из A_m , лежащих на компоненте линейной связности β . Гомеоморфизм G отображает траектории $C_m(\beta)$ соответственно в траектории $C_{j_m}(\gamma)$, поэтому $\text{card}(C_m(\beta)) = \text{card}(C_{j_m}(\gamma))$. Итак, для каждого $\beta \in \widehat{\Omega}_1$ найдется $\gamma \in \widehat{\Omega}_2$ такое, что

$$\begin{aligned} &(\text{card } C_1(\beta), \text{card } C_2(\beta), \dots, \text{card } C_n(\beta)) \\ &= (\text{card } C_{j_1}(\gamma), \text{card } C_{j_2}(\gamma), \dots, \text{card } C_{j_n}(\gamma)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\chi(\widehat{L}_1, \widehat{\varphi}_1) = \chi(\widehat{L}_2, \widehat{\varphi}_2)$ с точностью до перестановки. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из предложения 2.3 следует, что существуют три типа отображений t , удовлетворяющих условиям полного растяжения:

- а) $0, 1 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$;
- б) $0 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $1 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $t(0) = 1$;
- с) $1 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $0 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^+ \cup p_i^-)$, $t(1) = 0$.

Мы проведем доказательство только для отображений типа а), доказательство для отображений типа б) и с) проводится аналогично. Сформулируем две технические леммы 4.1 и 4.2, доказательствам которых посвящен § 5. Пусть q – произвольная периодическая точка отображения t .

ЛЕММА 4.1. *Сколько угодно малым C^1 возмущением отображения t можно построить отображение t_1 , для которого выполнено*

- 1) в множестве $\{p_1^-, p_1^+, \dots, p_n^-, p_n^+, t_1(0), t_1(1)\}$ нет совпадающих точек, существуют единственные i_0 и j_0 такие, что $p_{i_0}^+ = 0$ (или $p_{i_0}^- = 0$) и $p_{j_0}^+ = 1$ (или $p_{j_0}^- = 1$);
- 2) для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существуют $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $t_1^{k_1}(p_i^+) = q$ и $t_1^{k_2}(p_i^-) = q$;
- 3) для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существуют точки a_i и b_i , расположенные слева и справа от s_i (в сколь угодно малой окрестности s_i), такие, что для всех $k \geq 1$ $t_1^k(a_i), t_1^k(b_i) \notin \bigcup_{m=1, \dots, n} [a_m, b_m]$, причем a_i и b_i – прообразы периодической точки q ;
- 4) $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1, \dots, n, m \geq 0} t_1^{-m}(a_i, b_i)$ – канторово совершенное множество, все точки $p_i^\pm$ принадлежат K и являются точками второго рода².

Предположим для определенности, что $p_{i_0}^- = 0$ и $p_{j_0}^- = 1$. Обозначим $\theta_1 = t_1(a_{i_0}, s_{i_0})$, $\theta_2 = t_1(a_{j_0}, s_{j_0})$. Для любых $x \in \theta_1 \cup \theta_2$ существует единственный прообраз $t_1^{-1}(x) \in (a_{i_0}, s_{i_0}) \cup (a_{j_0}, s_{j_0})$ (см. рис. 19). Обозначим $B = K \setminus (\theta_1 \cup \theta_2)$. Перенумеруем $\{J_i\}_{i \geq 1}$ компоненты связности множества

$$\bigcup_{\substack{k=1, \dots, n \\ m \geq 1}} t_1^{-m}(a_k, b_k),$$

²Канторово множество получается из отрезка вырезанием счетного множества не пересекающихся и не имеющих общих концов интервалов, заполняющих плотным образом весь отрезок. Точка второго рода – это точка, не являющаяся концом вырезаемого интервала.

Рис. 19

не лежащие в θ_1 , θ_2 и в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k)$. Будем говорить, что *интервал* I – *свободный прообраз* J_i (*свободный прообраз* (a_i, b_i)), если существует $k > 0$ такое, что $t_1^k I = J_1$ (соответственно $t_1^k I = (a_i, b_i)$), причем для любых $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и для любых $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ $t_1^l I \cap (a_m, b_m) = \emptyset$. Другими словами, свободный прообраз это тот, который не содержится внутри других прообразов. В условиях леммы 4.1 выполняется следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. 1) Множество B канторово.

2) Можно выбрать a_i и b_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы для любого $n \geq 1$ в любой окрестности любой точки из K существовал свободный прообраз J_n .

Из леммы 4.2 следует, что для любого $i = 1, \dots, n$ в окрестности любой точки из K имеются свободные прообразы (a_i, b_i) .

В дальнейшем через t обозначим отображение t_1 , построенное в лемме 4.1. Пусть точки a_i и b_i , $i = 1, \dots, n$, определены в лемме 4.2.

Рассмотрим все свободные прообразы интервала (a_{i_0}, b_{i_0}) . Они есть в окрестности любой точки из K , следовательно, их счетное число. Обозначим через $W_1, W_2, \dots, W_m, \dots$ те из них, которые не содержатся в $\theta_1 \cup \theta_2$. В любой окрестности любой точки из множества B есть интервалы из набора $\{W_i\}_{i \geq 1}$.

Рассмотрим (a_{i_0}, s_{i_0}) . Так как $p_{i_0}^- \in K$ и является точкой второго рода, то множество $M = (a_{i_0}, s_{i_0}) \cap t^{-1}K$ непусто, M – канторово множество.

Из леммы 4.2 следует, что в любой окрестности любой точки множества M содержится интервал h , обладающий следующим свойством: существует $m > 0$ такое, что $t^m(h) = W_n$ и $t^k(h) \cap \bigcup_{l=1, \dots, n} (a_l, b_l) = \emptyset$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$. Будем называть такой интервал h *свободным прообразом* W_n .

Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – монотонная последовательность точек из M , накапливающаяся к точке $X \neq s_{i_0}$. Построим последовательность интервалов $I_1^k, I_2^k, \dots, I_n^k, \dots$, расположенных в (x_{k-1}, x_k) , таких, что

- 1) для всех k $M \cap I_1^k \neq \emptyset$;
- 2) для любого $i \geq 1$ существует $m_{i+1} > 0$ такое, что $t^{m_{i+1}}(I_{i+1}^k) = I_i^k$; причем $t^j(I_{i+1}^k) \cap \bigcup_{l=1, \dots, n} (a_l, b_l) = \emptyset$, если $j \in \{1, 2, \dots, m_{i+1} - 1\}$;
- 3) $I_n^k \rightarrow x_k$ при $n \rightarrow \infty$.

Эти интервалы можно построить следующим образом (см. рис. 20).

Рис. 20

Пусть I_1^k — произвольный интервал, лежащий на (x_{k-1}, x_k) и содержащий точки из M . Между этим интервалом и x_k есть точка из M . В окрестности этой точки есть свободный прообраз (a_{i_0}, b_{i_0}) , т.е. интервал h такой, что существует $i \geq 1$, для которого выполняется $t^i h = (a_{i_0}, b_{i_0})$, причем $t^j h \cap (a_{i_0}, b_{i_0}) = \emptyset$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$. В интервале h лежит интервал-прообраз I_1^k . Этот интервал назовем I_2^k . Далее, между интервалом I_2^k и x_k есть точка из M , в окрестности которой есть свободный прообраз (a_{i_0}, b_{i_0}) , на котором есть прообраз I_2^k , который мы назовем I_3^k . В результате мы получаем счетный набор интервалов таких, что

$$\dots \rightarrow I_l^k \rightarrow I_{l-1}^k \rightarrow \dots \rightarrow I_2^k \rightarrow I_1^k.$$

Здесь запись " $I_{l+1}^k \rightarrow I_l^k$ " означает, что $t^{m_{l+1}}(I_{l+1}^k) = I_l^k$ для некоторого $m_{l+1} > 0$, причем $t^i I_{l+1}^k \cap \bigcup_{p=1, \dots, n} (a_p, b_p) = \emptyset$ для любых $i \in \{1, \dots, m_{l+1} - 1\}$.

Пусть, как в условии теоремы 3, $Y \subset \Theta^n$ есть произвольное счетное множество, состоящее из серий $(g_{i,k}, g_{2,k}, \dots, g_{n,k})_{k \geq 1}$, где $g_{i,k}$ есть одна из мощностей $\{0, 1, 2, 3, \dots, \aleph_0, c\}$.

На каждом интервале I_1^k выберем n непересекающихся множеств $H_k(i) \subset M$, $i = 1, 2, \dots, n$, мощности которых равны соответственно $g_{i,k}$.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ пусть последовательность $\{c_l(i)\}_{l \geq 1} \subset M$ такова, что предельные точки этой последовательности образуют множество $H_1(i) \cup H_2(i) \cup \dots \cup H_n(i) \cup \dots \cup X$.

Покажем, что отображение t можно изменить на интервалах (a_{i_0}, s_{i_0}) и $\bigcup_{k=1, \dots, n} (s_k, b_k)$ так, чтобы траектории точек p_k^+ , $k = 1, \dots, n$, под действием нового отображения t удовлетворяли следующему условию:

$$\begin{aligned} p_k^+ &\rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)} \rightarrow W_2 \rightarrow I_2^{r(2,k)} \rightarrow c_2(k) \in I_1^{r(2,k)} \\ &\rightarrow \dots \rightarrow W_n \rightarrow I_n^{r(n,k)} \rightarrow I_{n-1}^{r(n,k)} \rightarrow \dots \rightarrow c_n(k) \in I_1^{r(n,k)} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь $r(n, k)$ — номер r интервала (x_{r-1}, x_r) , в котором находится $c_n(k)$. Запись " $p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)}$ " означает, что траектория точки p_k^+ сначала попадает в интервал W_1 , а затем в точку $c_1(k)$ интервала $I_1^{r(1,k)}$, причем в промежутке между попаданиями в W_1 и в $I_1^{r(1,k)}$ траектория точки p_k^+ в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k)$ не заходит. При этом траектории точек p_k^- , $k = 1, \dots, n$, останутся неизменными, так как траектории этих точек не заходят в область, где t будет меняться.

Отображение $\hat{t}$ с указанными свойствами может быть построено в результате следующей процедуры.

Алгоритм построения $\hat{t}$.

Шаг 1. Поменяем отображение t в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (s_k, b_k)$ так, чтобы все точки p_k^+ вели себя следующим образом: $p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)}$. Так как по условию $p_k^+ \in K$ и является точкой второго рода, то в любой (левой и правой)

Рис. 21. Возмущение отображения t

окрестности p_k^+ есть свободный прообраз интервала W_1 . Пусть $\varepsilon_1 > 0$ настолько мало, что $[s_k, s_k + \varepsilon_1] \subset [s_k, b_k)$. Выберем $N_1 > 1$ и пусть $\delta_1 = \varepsilon_1/N_1$. Выберем в $[s_k, s_k + \delta_1]$ свободный прообраз W_1 . Обозначим его через h . В интервале h содержится интервал-прообраз $I_1^{r(1,k)}$, в котором имеется точка y – прообраз $c_1(k)$. Траектория точки y такова, что

- 1) существуют $K_1 > 0$ и $K_2 > K_1$ такие, что $t^{K_1}(y) \in W_1$ и $t^{K_2}(y) = c_1$;
- 2) $t^i(y) \notin \bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k)$ для любых $i \in \{1, \dots, K_2 - 1\}$.

Поменяем отображение t в $[s_k, s_k + \varepsilon_1]$ так, чтобы новое отображение $\bar{t}$ удовлетворяло условиям $\bar{t}(s_k^+) = t(y)$, $\bar{t} \equiv t$ вне $[s_k, s_k + \varepsilon_1]$ (см. рис. 21).

Величина $\|t - \bar{t}\|$ за счет выбора N_1 (в силу близости y к s_k) может быть сделана сколь угодно близкой к 0.

Под действием нового отображения $\bar{t}$ траектория точки p_k^+ совпадает со “старой” траекторией точки y : $p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)}$, поскольку траектория точки $ty = \bar{t}s_k^+ = p_k^+$ не возвращается в область возмущения.

Сделаем аналогичные изменения в окрестностях других точек разрыва. Обозначим получившееся отображение через t_1 . Оно отличается от исходного на интервалах $\bigcup_{k=1, \dots, n} (s_k, b_k)$. После “исправления” траектории s_k^+ в интервале $[s_k, s_k + \varepsilon_1]$ эта траектория не попадает в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (s_k, b_k)$, следовательно, коррекции отображения в окрестностях других точек разрыва не влияют на поведение траектории p_k^+ .

Итак, в результате шага 1 получено следующее поведение:

$$p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Шаг 2. Поменяем отображение t_1 в окрестностях точек $c_1(k)$, $k = 1, \dots, n$, так, чтобы $c_1(k) \rightarrow W_2 \rightarrow I_2^{r(2,k)} \rightarrow c_2(k) \in I_1^{r(2,k)}$. Так как по условию $c_1(k) \in M$, в любой окрестности $c_1(k)$ есть свободный прообраз W_2 . Пусть $\varepsilon_2 > 0$ – произвольное достаточно малое число такое, что интервал $U_{\varepsilon_2}(c_1(k)) = (c_1(k) - \varepsilon_2, c_1(k) + \varepsilon_2)$ не содержит других точек $\{c_m(k)\}_{m,k}$. Выберем $N_2 > 1$ и пусть $\delta_2 = \varepsilon_2/N_2$. Выберем в $U_{\delta_2}(c_1(k))$ свободный прообраз W_2 . Обозначим этот прообраз через h_1 . В h_1 есть интервал-прообраз $I_2^{r(2)}$, а в этом интервале – точка y_1 – прообраз $c_2(k)$. Траектория точки y_1 такова, что

Рис. 22. Возмущение отображения t_1

1) существуют $L_3 > L_2 > L_1 > 0$ такие, что

$$t^{L_1}(y_1) \in W_2, \quad t^{L_2}(y_1) \in I_2^{r(2,k)}, \quad t^{L_3}(y_1) = c_2(k) \in I_1^{r(2,k)};$$

2) для любых $i \in \{1, \dots, L_3 - 1\}$ кроме $i = L_2$

$$t^i(y_1) \notin \bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k).$$

Траектория точки y_1 под действием отображения t_1 такая же, как под действием t , так как для всех $m \geq 0$ $t^m y_1 \notin \bigcup_{j=1, \dots, n} (s_j, b_j)$. Поменяем отображение t_1 в $U_{\varepsilon_2}(c_1(k))$ так, чтобы новое отображение $\tilde{t}$ удовлетворяло условиям $\tilde{t}(c_1(k)) = t_1(y_1)$, $\tilde{t} \equiv t_1$ вне $U_{\varepsilon_2}(c_1(k))$ (см. рис. 22). Величина $\|t_1 - \tilde{t}\|$ за счет выбора N_2 может быть сделана сколь угодно близкой к 0. Под действием нового отображения $\tilde{t}$ траектория точки $c_1(k)$ совпадёт со “старой” траекторией точки y_1 : $c_1(k) \rightarrow W_2 \rightarrow I_2^{r(2,k)} \rightarrow c_2(k) \in I_1^{r(2,k)}$. Изменение отображения t_1 в $U_{\varepsilon_2}(c_1(k))$ не влияет на предыдущий отрезок траектории $p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k)$, поэтому под действием нового отображения $\tilde{t}$ траектория точки p_k^+ выглядит так: $p_k^+ \rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)} \rightarrow W_2 \rightarrow I_2^{r(2,k)} \rightarrow c_2(k) \in I_1^{r(2,k)}$.

Сделаем аналогичные изменения в малых непересекающихся окрестностях всех точек $c_1(k)$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим результирующее отображение через t_2 .

Последующие шаги повторяют шаг 2, т.е. на шаге i происходят коррекции отображения t_{i-1} в малых окрестностях точек $c_{i-1}(k)$ так, что

$$c_{i-1}(k) \rightarrow W_i \rightarrow I_i^{r(i,k)} \rightarrow I_{i-1}^{r(i,k)} \rightarrow \dots \rightarrow I_2^{r(i,k)} \rightarrow c_i(k) \in I_1^{r(i,k)}.$$

В итоге получим отображение $\hat{t}$, при котором траектории точек p_k^+ имеют вид:

$$\begin{aligned} p_k^+ &\rightarrow W_1 \rightarrow c_1(k) \in I_1^{r(1,k)} \rightarrow W_2 \rightarrow I_2^{r(2,k)} \rightarrow c_2(k) \in I_1^{r(2,k)} \\ &\rightarrow \dots \rightarrow W_n \rightarrow I_n^{r(n,k)} \rightarrow I_{n-1}^{r(n,k)} \rightarrow \dots \rightarrow c_n(k) \in I_1^{r(n,k)} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Траектории точек p_k^- остались неизменными. Отображение $\hat{t}$ отличается от исходного t на интервалах $\bigcup_{j=1, \dots, n} (a_j, b_j)$, величина $\|t - \hat{t}\|$ может быть сделана

сколь угодно малой за счет выбора констант N_i на каждом шаге. Описание алгоритма завершено.

Для доказательства того, что полученное отображение $\hat{t}$ таково, что $\chi_{\hat{t}}$ удовлетворяет всем требуемым в формулировке теоремы 3 свойствам, нам понадобятся следующие свойства $\hat{t}$. Скорректируем обозначения, полагая, что множества K , $B = K \setminus (\theta_1 \cup \theta_2)$ и $Q_m = \text{clos} \bigcup_{i \geq 0} \hat{t}^i p_m^\pm$ определены по отображению $\hat{t}$. Заметим, что множество B не изменилось, так как оно состоит из точек, траектории которых не попадают в область, где $\hat{t} \neq t$.

Свойства $\hat{t}$.

Свойство 1. Для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ $B \subset Q_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по построению траектория каждой точки p_k^+ проходит через все интервалы W_n , а эти интервалы есть в окрестности любой точки из множества B . Поэтому все точки множества B являются предельными для траекторий точек p_k^+ и $B \subset Q_k$.

Свойство 2. Справедливо равенство $Q_m \cap I_1^k = H_k(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению траектория точки p_m^+ попадает в интервал I_1^k только в точки из множества $\{c_i(m)\}_{i \geq 1}$, а предельные точки этой последовательности в I_1^k образуют множество $H_k(m)$. Траектория p_m^- в I_1^k не попадает.

Свойство 3. Все точки $H_k(m)$ имеют одинаковую и единственную символическую предысторию в Q_m , не зависящую от m . То есть для каждой точки $x \in H_k(m)$ существует единственная последовательность $\{x_i\}_{i \leq 0} \subset Q_m$ такая, что $\hat{t}x_i = x_{i+1}$, $x_0 = x$, причем $\alpha\{x_i\}_{i \leq 0}$ одинаково для всех $x \in H_k(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого свойства проведем от противного. Предположим, что $z \in H_k(m)$, $\hat{t}^r u = z$ и $\hat{t}^r w = z$, $u, w \in Q_m$, причем u и w находятся по разные стороны от какой-либо точки разрыва. Тогда существуют последовательности натуральных чисел $\{k_i\}_{i \geq 1}$ и $\{l_i\}_{i \geq 1}$ такие, что $\hat{t}^{k_i} p_m^+ \rightarrow u$, $\hat{t}^{l_i} p_m^+ \rightarrow w$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, $\hat{t}^{k_i+r} p_m^+ \rightarrow z$, $\hat{t}^{l_i+r} p_m^+ \rightarrow z$. Поскольку $z \in H_k(m) \subset I_1^k$, а траектория точки p_m^+ попадает в интервал I_1^k только в точки из множества $\bigcup_{i \geq 1} c_i(m)$, то найдутся номера $M(i), N(i) > m$ такие, что $\hat{t}^{k_i+r} p_m^+ = c_{N(i)}(m)$, $\hat{t}^{l_i+r} p_m^+ = c_{M(i)}(m)$, $c_{M(i)}(m), c_{N(i)}(m) \in I_1^k$. По построению перед тем как попасть в $c_{N(i)}(m)$, траектория точки p_m^+ проходит через последовательность интервалов

$$\rightarrow I_{N(i)}^k \rightarrow \dots \rightarrow I_2^k \rightarrow c_{N(i)}(m) \in I_1^k.$$

Аналогично, перед тем как попасть в $c_{M(i)}(m)$, траектория точки p_m^+ проходит через такую же последовательность интервалов

$$\rightarrow I_{M(i)}^k \rightarrow \dots \rightarrow I_2^k \rightarrow c_{M(i)}(m) \in I_1^k$$

(отображение t на интервалах I_i^k , $i \geq 2$, совпадает с отображением $\hat{t}$). Пусть $\{L_n\}_{n \geq 0}$ есть последовательность интервалов со свойствами:

$$\{L_n\}_{n \geq 0}, \quad \hat{t}L_n = L_{n-1}, \quad \hat{t}^n L_n = I_1^k, \quad L_0 = I_1^k,$$

для любого i найдется n такое, что $L_n = I_i^k$.

Докажем, что в последовательности $\{L_n\}_{n \geq 0}$ нет пересекающихся интервалов. От противного, пусть существуют числа $j \neq l$ такие, что $L_j \cap L_l \neq \emptyset$. Тогда если $j > l$, то $\hat{t}^l L_j \cap \hat{t}^l L_l \neq \emptyset$, или $\hat{t}^l L_j \cap L_0 = \hat{t}^l L_j \cap I_0^k \neq \emptyset$, что по построению невозможно. Точки u и w попадают в $L_0 = I_1^k$ на r -й итерации, следовательно, они находятся в одном L_r , поэтому они находятся по одну сторону от любой точки разрыва. Противоречие доказывает, что для каждой точки $z \in H_k(m)$ существует единственная символическая предыстория. Аналогично доказывается, что эта предыстория одинакова для всех точек множества $\bigcup_{m=1, \dots, n} H_k(m)$.

СВОЙСТВО 4. Пусть $\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset \bigcup_{m=1, \dots, n} Q_m$ и $\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset \bigcup_{m=1, \dots, n} Q_m$ — полные траектории (т.е. $\hat{t} z_i = z_{i+1}$, $\hat{t} y_i = y_{i+1}$) такие, что для всех i $y_i \notin (x_{k-1}, x_k)$ и существует j такое, что $z_j \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда последовательности $\alpha(\{z_i\})$ и $\alpha(\{y_i\})$ не эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Предположим, что эти последовательности эквивалентны. Тогда существуют числа m и n такие, что для всех $i \leq 0$ z_{m+i} и y_{n+i} находятся по одну сторону от всех точек разрыва. Тогда

$$|z_{m+i} - y_{n+i}| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

Но если $z_j \in (x_{k-1}, x_k)$, то по построению существует $\delta > 0$ такое, что $z_i \cap (x_{k-1} - \delta, x_k) \neq \emptyset$ для бесконечного числа номеров i . С другой стороны, $y_i \notin [x_{k-1}, x_k + \delta]$ для всех номеров i кроме, может быть, одного. Следовательно, (1) невозможно. Противоречие.

Теперь мы готовы доказать, что $\chi_{\hat{t}} = Y$. Пусть $\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — полная траектория, лежащая в Q_m . Обозначим через $\widehat{\alpha}$ класс эквивалентности, в котором лежит $\alpha(\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty})$. Есть две возможности:

- А) $z_l \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ для некоторого l ;
- В) для всех l $z_l \notin (a_{i_0}, b_{i_0})$.

Рассмотрим случай В). Докажем, что $\text{card } C_m(\widehat{\alpha}) = c$. Поскольку траектории точек $p_m^{\pm}$ не попадают в (a_k, b_k) , $k \neq i_0$, то $Q_m \cap (a_k, b_k) = \emptyset$. Тогда получается, что для всех l и j $z_l \notin (a_j, b_j)$ и, следовательно, $z_l \notin \theta_1 \cup \theta_2$. Поэтому $\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset B$. Зафиксируем i . Рассмотрим $y_i \in B$ такое, что (y_i, z_i) не содержит точек множества $\bigcup_{k \geq 0, j=1, \dots, n} \hat{t}^k(a_j \cup b_j)$ и $(y_i, z_i) \cap B \neq \emptyset$. Такую точку y_i всегда можно выбрать, так как множество $\bigcup_{k \geq 0, j=1, \dots, n} \hat{t}^k(a_j \cup b_j)$ конечно (траектории точек a_j, b_j не изменились в результате изменения t), а B — канторово множество. Рассмотрим z_{i-1} вместе с окрестностью V , продолжающейся до ближайших к z_{i-1} точек из множества $\bigcup_{k \geq 0, j=1, \dots, n} \hat{t}^k(a_j \cup b_j)$. Тогда $\hat{t}V \supset [y_i, z_i]$ и существует точка $y_{i-1} \in V$ такая, что $\hat{t}y_{i-1} = y_i$, $y_{i-1} \notin \bigcup_{j=1, \dots, n} (a_j, b_j) \cup \theta_1 \cup \theta_2$, следовательно, $y_{i-1} \in B \subset Q_m$. Аналогично строится вся последовательность $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, \dots \subset Q_m$. Обозначим $y_{i+n} = \hat{t}^n y_i$ для $n \geq 1$. Получилась полная траектория $\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset B$. Так как для всех $j \geq 1$ y_{i-j} и z_{i-j} не могут быть разделены точкой разрыва, то $\alpha(\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) \sim \alpha$. На интервале (y_i, z_i) имеется несчетное множество точек из B , для каждой такой точки строится аналогичная последовательность, поэтому $\text{card } C_m(\widehat{\alpha}) = c$. Из $\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset B$ следует, что $\{y_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \subset Q_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда $(\text{card } C_1(\widehat{\alpha}), \text{card } C_2(\widehat{\alpha}), \dots, \text{card } C_n(\widehat{\alpha})) = (c, c, \dots, c)$.

Рассмотрим случай А): $\exists l \quad z_l \in (a_{i_0}, b_{i_0})$. Тогда либо $z_l = x_k$ для некоторого k , либо $z_l = X$, либо найдется такое k , что $z_l \in (x_{k-1}, x_k)$. Других возможностей нет, так как по построению траектория точки p_m^+ попадает в интервал (a_{i_0}, b_{i_0}) только в $\bigcup_{k \geq 1} (x_{k-1}, x_k)$. Рассмотрим первые две возможности. Тогда для всех остальных $j \neq l \quad z_j \notin (a_{i_0}, b_{i_0})$. Поскольку траектории точек $p_m^\pm$ не попадают в интервал (a_r, b_r) , $r \neq i_0$, то $Q_m \cap (a_r, b_r) = \emptyset$. Тогда получается, что для всех $i \geq 1$ и для всех $j \in 1, \dots, n \quad z_{l-i} \notin (a_j, b_j)$. Рассмотрим z_{l-1} . Пусть x_{-1} и y_{-1} – ближайшие к z_{l-1} точки множества B . Интервал (x_{-1}, y_{-1}) не содержит точек разрыва $\{s_g\}_{g=1, \dots, n}$, иначе (x_{-1}, y_{-1}) совпадает с (a_r, b_r) и $z_{l-1} \in (a_r, b_r)$. Легко убедиться, что $\hat{t}(x_{-1}, y_{-1}) = (a_{i_0}, b_{i_0})$. Рассмотрим z_{l-2} вместе с ближайшими точками множества B : x_{-2} и y_{-2} . Тогда $\hat{t}(x_{-2}, y_{-2}) = (x_{-1}, y_{-1})$. Аналогично строится последовательность интервалов $\{(x_{-i}, y_{-i})\}_{i \geq 1}$, $z_{l-i} \in (x_{-i}, y_{-i})$. Заметим, что $\alpha(\{x_{-i}\}_{i \geq 1}) = \alpha(\{z_{l-i}\}_{i \geq 1})$. Рассмотрим полную траекторию $\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty$, $\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty \in C(\hat{\alpha})$. Для $\{x_i\}_{i=-\infty}^\infty$ выполнены условия случая В), следовательно, $\text{card } C_m(\hat{\alpha}) = c$ и $(\text{card } C_1(\hat{\alpha}), \text{card } C_2(\hat{\alpha}), \dots, \text{card } C_n(\hat{\alpha})) = (c, c, \dots, c)$.

Рассмотрим следующий случай: $\exists k \quad z_l \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда для некоторого и только одного $l \quad z_l \in H_k(m)$. Из свойств 2, 3 отображения $\hat{t}$ следует, что для каждой полной траектории $\{z_i\}_{i=-\infty}^\infty \in C(\hat{\alpha})$ существует и только один номер l такой, что $z_l \in H_k(m)$. И наоборот, каждой точке $z \in H_k(m)$ соответствует единственная последовательность $\{z_i\}_{i=-\infty}^\infty \in C(\hat{\alpha})$. Таким образом, последовательности $\{z_i\}_{i=-\infty}^\infty \in C_m(\hat{\alpha})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками множества $z_l \in H_k(m)$, откуда $\text{card } C_m(\hat{\alpha}) = g_{m,k}$. Докажем, что $(\text{card } C_1(\hat{\alpha}), \text{card } C_2(\hat{\alpha}), \dots, \text{card } C_n(\hat{\alpha})) = (g_{1k}, g_{2k}, \dots, g_{nk})$. Рассмотрим $C_j(\hat{\alpha})$. Пусть $\{y_l\}_{l=-\infty}^\infty \in C_j(\hat{\alpha})$. Тогда существует номер j_1 такой, что $y_{j_1} \in (x_{k-1}, x_k)$, поскольку предыстория, эквивалентная $\hat{\alpha}$, имеется только у точек из (x_{k-1}, x_k) (см. свойство 4 отображения $\hat{t}$). Тогда существует единственный номер i такой, что $y_i \in H_k(j)$. Таким образом, каждой последовательности, лежащей в $C_j(\hat{\alpha})$, ставится в соответствие элемент множества $H_k(j)$. Следовательно, $\text{card } C_j(\hat{\alpha}) = g_{j,k}$, что и требовалось доказать. Таким образом, $\chi_{\hat{t}} = Y$ и теорема 3 доказана.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7. Небольшой модификацией построения можно сделать так, чтобы существовало несколько символических предысторий $\hat{\alpha}$ таких, что

$$(\text{card } C_1(\hat{\alpha}), \text{card } C_2(\hat{\alpha}), \dots, \text{card } C_n(\hat{\alpha})) = (g_{1k}, g_{2k}, \dots, g_{nk}).$$

А именно, на интервале (x_{k-1}, x_k) вместо одной последовательности интервалов $\rightarrow I_m^k \rightarrow \dots \rightarrow I_2^k \rightarrow I_1^k$ строится несколько таких подпоследовательностей, причем ровно столько, сколько должно быть неэквивалентных предысторий $\hat{\alpha}$.

§ 5. Доказательства предложений 2.1–2.3 и лемм 4.1 и 4.2

Предложения 2.1 и 2.2 будут доказаны для отображений с $n \geq 2$ точками разрыва. Для отображений с одной точкой разрыва предложение 2.1 – известный результат [11], [12], предложение 2.2 тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. 1) Пусть $x \in (0, 1)$ – произвольная точка, $J_1 \subset (0, 1)$ – произвольный интервал. Обозначим $J_{k+1} = t(J_k)$, если J_k

не содержит точек разрыва, J_{k+1} – большая из двух половин $t(J_k)$, если J_k содержит одну точку разрыва. Тогда

$$|J_{k+1}| \geq \frac{\nu}{2} |J_k|$$

(здесь $|J_k|$ – длина интервала J_k , $\nu > 2$ – наименьшее значение модуля t') до тех пор, пока не найдется такое k , что $J_k \supset \Delta_m$ для некоторого m . Следовательно, $t^k(J_1) \supset \Delta_m$. Но по условию полного растяжения $\bigcup_{l=0, \dots, K_m} t^l \Delta_m = (0, 1)$. Отсюда следует, что $\bigcup_{l=0}^{k+K_m} t^l(J_1) = (0, 1)$. Найдется $l > 0$ такое, что $x \in t^l(J_1)$. Поэтому J_1 содержит прообраз x . Итак, прообразы любой точки всюду плотны.

2) Пусть $J \subset (0, 1)$ – произвольный интервал. Для некоторого k

$$t^k J \supset \Delta_m. \quad (2)$$

По условию полного растяжения $\bigcup_{j=0, \dots, K_m} t^j \Delta_m = (0, 1)$. Интервал Δ_m разбивается точками множества $\bigcup_{m=1, \dots, n, 0 \leq l < j} t^{-l} s_m$ на непересекающиеся интервалы $\{J_i\}_{i=1, \dots, p}$: $\Delta_m = \text{clos}(J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p)$. Будем называть $t^j J_i$ *компонентой*³ $t^j \Delta_m$. Совокупность всех компонент множества $\{t^j \Delta_m\}_{j=1, \dots, K_m}$ представляет собой конечный набор пересекающихся интервалов. Если длина J достаточно мала (меньше наименьшего диаметра пересечения компонент множества $\{t^k \Delta_m\}_{k=0, \dots, K_m}$), то J вложен в одну из этих компонент: $J \subset t^j J_i$. Из (2) следует, что существует интервал $I_1 \subset J$ такой, что $t^k I_1 = J_i$. Таким образом, $t^{k+j} I_1 \supset I_1$. Отсюда следует существование периодической точки периода $k+j$ на интервале I_1 .

3) Построим всюду плотную траекторию. Пусть $(0, 1) = \delta_1^1 \cup \delta_2^1 \cup \dots \cup \delta_m^1$, где δ_i^1 – интервал и $\max_{i=1, \dots, m} \text{diam } \delta_i^1 < \varepsilon_1$. В любом интервале J имеется прообраз δ_1^1 , т.е. интервал J_1 такой, что $t^k(J_1) = J$ для некоторого $k > 0$. В интервале $J_1 \subset J$ имеется интервал J_2 – прообраз δ_2^1 . Получаем набор вложенных интервалов $J_m \subset \dots \subset J_2 \subset J_1 \subset J$. Выберем разбиение $(0, 1) = \delta_1^2 \cup \delta_2^2 \cup \dots \cup \delta_k^2$ диаметра $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и построим соответствующую последовательность интервалов, вложенных друг в друга и в J_m : $J_{m+k} \subset J_{m+k-1} \subset \dots \subset J_m$. Повторим это построение для разбиений диаметра $\varepsilon_n \rightarrow 0$. В результате получится бесконечная последовательность вложенных интервалов $\{J_i\}_{i \geq 1}$. Обозначим $x = \bigcap_{i \geq 1} J_i$. Траектория точки x проходит через все δ_m^i , следовательно, она всюду плотна в $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Пусть $\tilde{t}$ таково, что $\|t - \tilde{t}\| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \frac{d\tilde{t}}{dx} \right| \geq \nu_1 > 2$$

при достаточно малом ε . Покажем, что для любого i найдется M_i такое, что $\bigcup_{m=0}^{M_i} \tilde{t}^m \Delta_i = (0, 1)$. Множество $\bigcup_{m=0}^{K_i} t^m \Delta_i = (0, 1)$ можно представить как конечный набор пересекающихся интервалов, $\bigcup_{m=0}^{K_i} t^m \Delta_i = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p$, где каждый интервал J_k является компонентой (определение см. в доказательстве предложения 2.1) $t^{m_k} \Delta_i$ для некоторого $0 \leq m_k \leq K_i$, причем J_k пересекается

³В строгом смысле интервалы $\{t^j J_i\}_{i=1, \dots, p}$ не являются компонентами связности, так как могут пересекаться.

только с парой соседних интервалов J_{k-1} и J_{k+1} . Каждый интервал J_k является образом некоторого интервала $I_k \subseteq \Delta_i$: $J_k = t^{m_k} I_k$ (t^m определено для всех точек I_k , т.е. для всех $m \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ $t^m I_k$ не содержит точек разрыва). Пусть $(A, B) = I_k$. Предположим для простоты обозначений, что t монотонно возрастает на всех $t^m I_k$, где $m \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$.

Выясним, насколько интервал $\tilde{J}_k = \tilde{t}^{m_k} I_k$ отличается от интервала $J_k = t^{m_k} I_k$. Так как $\|t - \tilde{t}\| < \varepsilon$, то $|\tilde{t}(x) - t(x)| < \varepsilon$ для любого x . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{t} I_k &= (\tilde{t}(A), \tilde{t}(B)) \supset (t(A) + \varepsilon, t(B) - \varepsilon), \\ \tilde{t}^2 I_k &\supset (\tilde{t}(t(A) + \varepsilon), \tilde{t}(t(B) - \varepsilon)) \supseteq (t(t(A) + \varepsilon) + \varepsilon, t(t(B) - \varepsilon) - \varepsilon) \\ &\supseteq (t^2(A) + \varphi(\varepsilon) + \varepsilon, t^2(B) - \varphi(\varepsilon) - \varepsilon) \supseteq (t^2(A) + E(\varepsilon, 2), t^2(B) - E(\varepsilon, 2)). \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(\varepsilon) = \max(t(x + \varepsilon) - t(x))$ по всем интервалам $(x, x + \varepsilon)$, которые не пересекают точки разрыва (из равномерной непрерывности t на каждом Δ_i следует, что $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), $E(\varepsilon, 2) = \varphi(\varepsilon) + \varepsilon$. Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{t}^3 I_k &\supset (\tilde{t}(t^2(A) + E(\varepsilon, 2)), \tilde{t}(t^2(B) - E(\varepsilon, 2))) \\ &\supseteq (t(t^2(A) + E(\varepsilon, 2)) + \varepsilon, t(t^2(B) - E(\varepsilon, 2)) - \varepsilon) \\ &\supseteq (t^3(A) + \varphi(E(\varepsilon, 2)) + \varepsilon, t^3(B) - \varphi(E(\varepsilon, 2)) - \varepsilon) \\ &= (t^3(A) + E(\varepsilon, 3), t^3(B) - E(\varepsilon, 3)). \end{aligned}$$

Здесь $E(\varepsilon, 3) = \varphi(E(\varepsilon, 2)) + \varepsilon$. Аналогично, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{t}^{m_k} I_k &\supset (\tilde{t}(t^{m_k-1}(A) + E(\varepsilon, m_k - 1)), \tilde{t}(t^{m_k-1}(B) - E(\varepsilon, m_k - 1))) \\ &\supseteq (t(t^{m_k-1}(A) + E(\varepsilon, m_k - 1)) + \varepsilon, t(t^{m_k-1}(B) - E(\varepsilon, m_k - 1)) - \varepsilon) \\ &\supseteq (t^{m_k}(A) + \varphi(E(\varepsilon, m_k - 1)) + \varepsilon, t^{m_k}(B) - \varphi(E(\varepsilon, m_k - 1)) - \varepsilon) \\ &= (t^{m_k}(A) + E(\varepsilon, m_k), t^{m_k}(B) - E(\varepsilon, m_k)), \end{aligned}$$

где $E(\varepsilon, n) = \varphi(E(\varepsilon, n - 1)) + \varepsilon$. Если n фиксировано, то $E(\varepsilon, n) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выберем ε настолько малым, что

$$E = \max_{n=0, \dots, K_i} E(\varepsilon, n) < \frac{1}{10} \min_{k=1, \dots, p-1} \{\text{diam}(J_k \cap J_{k+1})\}.$$

Пусть $J_k = t^{m_k} I_k = (t^{m_k}(A), t^{m_k}(B))$, $J_{k+1} = t^{m_{k+1}} I_{k+1} = (t^{m_{k+1}}(C), t^{m_{k+1}}(D))$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{J}_k &= \tilde{t}^{m_k} I_k \supset (t^{m_k}(A) + E, t^{m_k}(B) - E), \\ \tilde{J}_{k+1} &= \tilde{t}^{m_{k+1}} I_{k+1} \supset (t^{m_{k+1}}(C) + E, t^{m_{k+1}}(D) - E). \end{aligned}$$

Так как $\text{diam}(J_k \cap J_{k+1}) > 10E$, то $\tilde{J}_k \cap \tilde{J}_{k+1} \neq \emptyset$ для всех k . Поэтому $\bigcup_{m=0, \dots, K_i} \tilde{t}^m \Delta_i = \tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_2 \cup \dots \cup \tilde{J}_p$ представляет собой один интервал. Концы этого интервала отстоят от точек 0 и 1 не более чем на E . По условию существуют точки x, y такие, что $\tilde{t}x^+ = 0$ или $\tilde{t}x^- = 0$, $\tilde{t}y^+ = 1$ или $\tilde{t}y^- = 1$.

Рассмотрим случай $x, y \in (0, 1)$. При достаточно малом ε $x, y \in (E, 1 - E)$. Тогда

$$\tilde{t}(E, 1 - E) = (0, 1), \quad \bigcup_{m=0, \dots, K_i+1} \tilde{t}^m \Delta_i = (0, 1).$$

Рассмотрим случай $x = 0$, $t(x) = 1$, $y \in (0, 1)$, $t(y) = 0$. При достаточно малом ε $y \in (0 + E, 1 - E)$. Тогда

$$\bigcup_{m=0, \dots, K_i+1} \tilde{t}^m \Delta_i \supseteq (0, 1 - E), \quad \bigcup_{m=0, \dots, K_i+2} \tilde{t}^m \Delta_i \supseteq (0, 1).$$

Аналогично для всех Δ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.3. Предположим сначала, что $0, 1 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^- \cup p_i^+)$. Обозначим

$$x = \min_{i=1, \dots, n} \{s_i, p_i^-, p_i^+\}, \quad y = \max_{i=1, \dots, n} \{s_i, p_i^-, p_i^+\}.$$

Из предположения следует, что $0 < x < y < 1$. Из полного растяжения следует, что $t(0) = 1$ и $t(1) = 0$, либо $t(0) = 0$ и $t(1) = 1$. В противном случае часть отрезка $[0, 1]$ будет отображаться в себя.

Рис. 23

Рассмотрим случай $t(0) = 0$ и $t(1) = 1$. Предположим, что x и y не являются точками разрыва. На интервалах $[0, x]$ и $(y, 1]$ отображение t монотонно возрастает (см. рис. 23). Следовательно, $t(x) > x$, $t(y) < y$. Заметим, что $t(x) \leq t(s_1^-) \leq y$, $t(y) \geq t(s_n^+) \geq x$. Итак, $t(x), t(y) \in [x, y]$. Покажем, что $t[x, y] \subseteq [x, y]$. Пусть $z \in [x, y]$. Тогда либо $z \in [x, s_1]$, либо $z \in [s_i, s_{i+1}]$, либо $z \in [s_n, y]$. В первом случае $t(z) \in [t(x), p_1^-] \subset [x, y]$, во втором случае $t(z) \in [p_i^+, p_{i+1}^-] \subset [x, y]$, в третьем случае $t(z) \in [p_n^+, t(y)] \subset [x, y]$. Таким образом, $t[x, y] \subseteq [x, y]$, что противоречит полному растяжению. Если $x = s_1$ (или $y = s_n$), то $t(x^+) \in [x, y]$ ($t(y^-) \in [x, y]$). В этих случаях получается $t(x, y) \subseteq (x, y)$, противоречие.

Рассмотрим случай $t(0) = 1$ и $t(1) = 0$. Тогда на интервалах $[0, x]$ и $(y, 1]$ отображение t монотонно убывает (см. рис. 24). Предположим сначала, что x и y не являются точками разрыва. Пусть для определенности $x \leq 1 - y$. Поскольку отображение t растягивает, то $t(y) > x$, $t(y) < t(s_n^+) \leq y$. Таким образом, $t(y) \in [x, y]$. Рассмотрим $t(x)$. Очевидно, что $t(x) > t(s_1^-) \geq x$. Если $t(x) \in [x, y]$, то получается, что $t[x, y] \subseteq [x, y]$, откуда следует противоречие с условием полного растяжения.

Пусть $t(x) \in (y, 1]$ (см. рис. 24). Тогда $t^2(x) < t(y) \leq y < t(x)$. Если $t^2(x) \geq x$, то $t[x, t(x)] \subseteq [x, t(x)]$, что противоречит условию полного растяжения. Если

Рис. 24

Рис. 25

$t^2(x) < x$, то $t^3(x) > t(x)$, $t^4(x) < t^2(x)$, $t^5(x) > t^3(x)$ и т.д. Получаем две монотонные последовательности:

$$\begin{aligned} x &> t^2(x) > t^4(x) > \dots > t^{2n}(x) > \dots, \\ t(x) &< t^3(x) < t^5(x) < \dots < t^{2n+1}(x) < \dots. \end{aligned}$$

Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} t^{2n}x = x^*$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t^{2n+1}x = x^{**}$. Тогда $t(x^*) = x^{**}$ и $t(x^{**}) = x^*$. Получается периодическая точка периода 2 притягивающего типа. Это противоречит условию полного растяжения. Если $x = s_1$ и $y = s_n$, то $t(x^+) \in [x, y]$, $t(y^-) \in [x, y]$. Отсюда следует $t(x, y) \subseteq (x, y)$, противоречие. Случай $x \neq s_1$ и $y = s_n$ разбирается аналогично и приводит к противоречию. Итак, предположение $0, 1 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^- \cup p_i^+)$ оказалось неверным.

Пусть теперь $1 \notin \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^- \cup p_i^+)$. Тогда $0 \in \bigcup_{i=1, \dots, n} (p_i^- \cup p_i^+)$. Покажем, что $t(0) = 1$. От противного. Обозначим $y = \max_{i=1, \dots, n} \{p_i^- \cup p_i^+ \cup s_i \cup t(0)\}$. Из предположения следует, что $y < 1$. На промежутке $(y, 1]$ отображение t монотонно, причем $t(1) = 1$ (см. рис. 25). Легко показать что $t(y^-) \in [0, y)$. Таким образом, $t[0, y) \subset [0, y)$, что противоречит условию полного растяжения. Таким образом, $t(0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. 1) Сохраняя условие полного растяжения, можно сколь угодно мало (в C^1 топологии) изменить t в окрестностях точек разрыва так, чтобы в наборе $\{t(0), t(1), p_1^-, p_1^+, \dots, p_n^-, p_n^+\}$ не было совпадающих точек. При этом останутся единственные i_0 и j_0 такие, что $p_{i_0}^+ = 0$ (или $p_{i_0}^- = 0$) и $p_{j_0}^+ = 1$ (или $p_{j_0}^- = 1$).

2) Покажем, что малым C^1 возмущением отображения t можно построить такое отображение, чтобы образы точек разрыва не подходили близко к точкам разрыва. Пусть $x \in \{p_1^+, p_1^-, p_2^+, p_2^-, \dots, p_n^+, p_n^-\} = V$. Поведение точки x может быть одного из следующих трех типов.

Тип 1. Траектория x не заходит в окрестности точек $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Тип 2. Образы x накапливаются хотя бы к одной из точек $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Тип 3. Существуют k и m такие, что $t^k(x) = s_m$.

Опишем конструкцию, состоящую из нескольких этапов, которая позволит малым C^1 возмущением исходного отображения t сделать так, чтобы все точки множества V имели тип 1.

Обозначим через M количество тех точек множества V , которые имеют тип 2 или 3. На каждом этапе с помощью одного и того же алгоритма отображение t

будет изменено таким образом, чтобы число M уменьшилось по крайней мере на 1: $M \rightarrow M - 1$.

Для описания этого алгоритма потребуется некоторая подготовка. Выберем произвольное $\varepsilon_0 > 0$ такое, что точки типа 1 не попадают в $U_{\varepsilon_0}(s_i)$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $L_k = q \cup t^{-1}q \cup \dots \cup t^{-k}q$ (q – периодическая точка). Так как t удовлетворяет условиям полного растяжения, то совокупность всех прообразов q всюду плотна в $[0, 1]$. Пусть k настолько велико, что в каждом интервале $U_{\varepsilon_0}(s_i)$ имеются по крайней мере две точки из множества L_k слева и справа от s_i . Обозначим через c_i и d_i ближайшие к s_i точки из L_k такие, что $c_i < s_i < d_i$. Тогда для всех $m \geq 0$ и для любых $k, i \in \{1, \dots, n\}$

$$t^m c_i, t^m d_i \notin (c_k, d_k). \quad (3)$$

Обозначим $K_0 = [0, 1] \setminus \bigcup_{i,k} t^{-k}(c_i, d_i)$. Множество K_0 замкнуто, нигде не плотно, K_0 состоит из точек, положительные траектории которых никогда не попадают в $\bigcup_{i=1, \dots, n} (c_i, d_i)$. Точки $p_i^+(p_i^-)$, принадлежащие к типу 1, лежат в K_0 . Точки второго и третьего типа находятся в множестве $\bigcup_{m \geq 0, k=1, \dots, n} t^{-m}(c_k, d_k)$.

Рассмотрим интервал (c_k, d_k) и все его прообразы. Пусть J – компонента связности $t^{-1}(c_k, d_k)$. Из (3) следует, что интервал J не может содержать точек из набора $\{c_k, d_k\}_{k=1, \dots, n}$. Есть следующие возможности:

- 1) J имеет вид $[0, z_1]$ или $(z_2, 1]$ (случаи а) и е) на рис. 26);
- 2) J находится внутри одного из интервалов (c_m, d_m) , $m = 1, \dots, n$ (случаи б) и с));
- 3) J есть интервал, не пересекающийся с $\bigcup_{k=1, \dots, n} (c_k, d_k)$, такой, что $tJ = (c_k, d_k)$ (случай д)).

Рис. 26

Если имеет место случай а) или е), то под действием t^{-1} интервал $[0, z_1]$ или $(z_2, 1]$ попадает в один из интервалов (c_m, d_m) , $m = 1, \dots, n$. Таким образом, для дальнейшего построения прообразов остаются интервалы J такие, что $tJ = (c_k, d_k)$, не пересекающиеся с множеством $\bigcup_{k=1, \dots, n} (c_k, d_k)$. Рассматривая теперь эти интервалы, получаем их прообразы J' , удовлетворяющие условию $tJ' = J$, и т.д. За счет условия (3) эти интервалы не могут перекрываться, они

либо не пересекаются, либо один вложен в другой. Концы таких интервалов могут совпадать.

Таким образом, компоненты связности множества $\bigcup_{m \geq 0, k=1, \dots, n} t^{-m}(c_k, d_k)$ представляют собой интервалы J такие, что $t^k(J) = (c_m, d_m)$ для некоторых $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $k \geq 0$, и, возможно, еще два интервала вида $[0, z_1)$ и $(z_2, 1]$, где

$$z_1, z_2 \in \bigcup_{\substack{m \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} t^{-m}(c_k \cup d_k).$$

Компоненты связности множества

$$\bigcup_{\substack{m \geq 0 \\ k=1, \dots, n}} t^{-m}(c_k, d_k)$$

всюду плотны в $[0, 1]$, так как прообразы точек разрыва всюду плотны в $[0, 1]$.

Алгоритм изменения отображения t . Выберем самый большой интервал из (c_i, s_i) и (s_i, d_i) , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть для определенности это (c_i, s_i) . Есть три возможности:

- А) p_i^- относится к 1 типу;
- В) p_i^- относится к 2, 3 типу, $p_i^- \neq 1$ и $p_i^- \neq 0$;
- С) p_i^- относится к 2, 3 типу, $p_i^- = 0$ или $p_i^- = 1$.

Случай А). Если p_i^- относится к типу 1, то можно приблизить c_i к s_i . Так как траектория p_i^- не попадает в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (c_k, d_k)$, то $p_i^- \in K_0$. Точка p_i^- не является прообразом c_m или d_m для $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, следовательно, p_i^- предельная точка для точек из K_0 (слева и справа). В качестве c_i можно взять прообраз t^{-1} любой такой точки. Уменьшив (c_i, s_i) , строим новое множество $K_0 = [0, 1] \setminus \bigcup_{i,k} t^{-k}(c_i, d_i)$ и возвращаемся к началу алгоритма.

Случай В). Пусть $p_i^- \in (0, 1)$, $p_i^- \in J$, где J – компонента связности прообраза некоторого (c_m, d_m) . Тогда $t^k(p_i^-) \in (c_m, d_m)$ и $t^k(J) \in (c_m, d_m)$,

$$|t^k J| = |(c_m, d_m)| > \lambda^k |J|$$

(здесь $|\cdot|$ – длина отрезка, $\lambda = \sqrt{2}$ в случае $n = 1$ и $\lambda = 2$ в случае $n > 1$). Отсюда

$$|J| < \frac{1}{\lambda^k} |(c_m, d_m)| \leq \frac{2}{\lambda^k} |(c_i, s_i)|.$$

Если точка p_i^- принадлежит к типу 2, то число k в последнем неравенстве может быть сделано сколь угодно большим за счет уменьшения ε_0 . Если p_i^- принадлежит к типу 3, то можно “пошевелить” отображение в окрестности s_i^- , в результате чего k можно увеличить или вообще перевести точку p_i^- в точки первого или второго типов.

Обозначим через ζ граничную точку интервала J (рис. 27). Тогда $t^k \zeta = c_m$ (для определенности) и для любых $0 < i < k$ $t^i \zeta \notin (c_r, d_r)$, $r = 1, \dots, n$. Изменим отображение t в (c_i, s_i) так, чтобы $\tilde{t}(s_i^-) = \zeta$, $\tilde{t}(c_i) = t(c_i)$. За счет того, что расстояние от точки ζ до p_i^- намного меньше длины (c_i, s_i) , возмущение может быть сделано C^1 малым (величина возмущения определяется отношением $2/\lambda^k$). В результате возмущения точка p_i^- становится точкой первого типа, так

Рис. 27

Рис. 28

как “новая” траектория точки p_i^- совпадает со “старой” траекторией точки ζ . А точка ζ на $k - 1$ итерации попадает в c_m и далее не приближается к точкам разрыва.

Те точки, которые ранее принадлежали к первому типу, там же и остаются, так как их траектории не попадают в зону возмущения. Итак, количество точек второго и третьего типа уменьшилось по крайней мере на 1.

Случай С). Пусть $p_i^- = 0$. Тогда $tp_i^- \in J'$, где J' – компонента связности прообраза некоторого (c_m, d_m) . Изменим отображение в $[0, tc_i)$ так, чтобы новая траектория точки tp_i^- совпала со старой траекторией точки $\zeta = \inf J'$ (рис. 28). В результате этого возмущения точка p_i^- становится точкой первого типа.

Описание алгоритма завершено.

В результате конечного числа повторений этого алгоритма мы получим, что все точки p_i^+ и p_i^- становятся точками первого типа, т.е. их траектории не заходят в окрестности точек $s_1, s_2, \dots, s_n$. Исходное отображение t изменено.

Измененное отображение обозначим $\check{t}$.

3) Построим возмущение отображения $\check{t}$, в результате которого все точки p_i^+ и p_i^- станут прообразами периодической точки q . Выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы траектории точек p_i^+ и p_i^- не попадали в $U_{\varepsilon_1}(s_k)$, $k, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Аналогично тому, как это было сделано раньше, выберем в каждом $U_{\varepsilon_1}(s_i)$ по две точки из $L_k = q \cup \check{t}^{-1}q \cup \dots \cup \check{t}^{-k}q$ слева и справа от s_i . Обозначим эти точки так же, как раньше: c_i и d_i . Обозначим $K_1 = [0, 1] \setminus \bigcup_{i,k} \check{t}^{-k}(c_i, d_i)$. Множество K_1 замкнуто, нигде не плотно. Компоненты связности множества $\bigcup_{m \geq 0, k=1, \dots, n} \check{t}^{-m}(c_k, d_k)$ представляют собой интервалы J , концевые точки которых являются прообразами q . Точки p_i^+ и p_i^- принадлежат K_1 и не являются граничными точками компонент связности множества $\bigcup_{m \geq 0, k=1, \dots, n} \check{t}^{-m}(c_k, d_k)$, поэтому в любой окрестности точек p_i^+ и p_i^- имеется бесконечное количество точек из множества K_1 .

Поменяем отображение $\check{t}$ в окрестностях точек $\{s_i\}_{i=1, \dots, n}$, 0 и 1 так, чтобы образы этих точек попали на траекторию периодической точки q .

Покажем, как изменить отображение, например, в правой окрестности точки s_i такой, что $p_i^+ \neq 0$ и $p_i^+ \neq 1$. В любой окрестности точки p_i^+ есть точки множества K_1 . Пусть ε настолько мало, что $(s_i, s_i + \varepsilon) \subset (s_i, d_i)$, $N > 1 -$

Рис. 29

Рис. 30

произвольное число. Выберем $\eta \in K_1$ в интервале $(p_i^+, p_i^+ + \varepsilon/N)$ так, чтобы $\check{t}^k \eta = q$.

Траектория точки η не возвращается больше в (s_i, d_i) . Изменим отображение в $(s_i, s_i + \varepsilon)$ так, чтобы $\tilde{t}(s_i^+) = \eta$ (см. рис. 29). Величина $\|\tilde{t} - \check{t}\|_{C^1}$ может быть сделана сколь угодно малой. Изменение $\check{t}$ в (s_i, d_i) не влияет на поведение остальных образов точек разрыва и не влияет на дальнейшую траекторию точки $\tilde{t}(s_i^+) = \eta$, так как эта траектория не возвращается в (s_i, d_i) .

Аналогично поменяем отображение $\check{t}$ в окрестностях оставшихся точек разрыва, за исключением точек $s_{i_0}^+$ (или $s_{i_0}^-$) и $s_{j_0}^+$ (или $s_{j_0}^-$), отображающихся соответственно в 0 и 1. Коррекции траекторий точек s_{i_0} и s_{j_0} получатся за счет изменения отображения t в окрестностях 0 и 1. В результате все точки p_i^+ и p_i^- будут прообразами периодической точки q .

Таким образом, построено отображение t_1 , имеющее следующие свойства:

- i) все точки p_i^+ и p_i^- являются прообразами периодической точки q ;
- ii) точки p_i^+ и p_i^- , $i = 1, \dots, n$, $t_1(0)$ и $t_1(1)$ не совпадают;
- iii) существуют единственные i_0 и j_0 такие, что $t_1 s_{i_0}^+ = 0$ (или $t_1 s_{i_0}^- = 0$) и $t_1 s_{j_0}^+ = 1$ (или $t_1 s_{j_0}^- = 1$).

Отображение t_1 со свойствами, заявленными в формулировке леммы 4.1, построено.

4) Покажем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют точки a_i и b_i , расположенные в сколь угодно малой окрестности точки s_i слева и справа от s_i , такие, что

$$\text{для всех } k \geq 1 \quad t_1^k(a_i), t_1^k(b_i) \notin \bigcup_{m=1, \dots, n} [a_m, b_m],$$

причем a_i и b_i – прообразы периодической точки q . Выберем произвольное $\varepsilon_2 > 0$ такое, что траектории точек $p_i^\pm$ не попадают в $U_{\varepsilon_2}(s_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. В каждом $U_{\varepsilon_2}(s_i)$ выберем по два прообраза точки q слева и справа от s_i . Так же, как в предыдущих случаях, обозначим эти точки c_i и d_i . Обозначим $K_2 = [0, 1] \setminus \bigcup_{i,k} t_1^{-k}(c_i, d_i)$. Множество K_2 замкнуто, нигде не плотно. Точки p_i^+ и p_i^- принадлежат K_2 . В любой окрестности точек p_i^+ и p_i^- слева и справа от них имеются точки множества K_2 . Обозначим через a_i и b_i прообразы t^{-1} этих точек, расположенные по разные стороны от точки s_i (точнее,

a_i и b_i суть прообразы границ компонент связности $\bigcup_{k=1, \dots, n, m \geq 1} t_1^{-m}(c_k, d_k)$, лежащих в окрестности p_i^+ и p_i^- , см. рис. 30). Траектории точек a_i и b_i не возвращаются в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (c_k, d_k)$, поэтому

$$\text{для любых } k \geq 1 \quad t_1^k(a_i), t_1^k(b_i) \notin \bigcup_{m=1, \dots, n} [a_m, b_m]. \quad (4)$$

5) Покажем, что

$$K = [0, 1] \setminus \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n \\ m \geq 0}} t_1^{-m}(a_i, b_i)$$

– канторово совершенное множество. Действительно, $t_1^{-k}(a_i, b_i)$ представляет собой набор интервалов $J_1^k, J_2^k, \dots, J_{m_k}^k$ таких, что $t_1(J_j^k) = (a_i, b_i)$. Любые два интервала из совокупности $\{J_i^k\}_{k \geq 0, i=1, \dots, m_k}$ либо не пересекаются и не имеют общих граничных точек (за счет условия (4)), либо один вложен в другой. А также они заполняют плотным образом весь интервал $I = [0, 1]$, так как прообразы точек разрыва всюду плотны. Лемма 4.1 доказана.

В результате возмущения, построенного в лемме 4.1, остались единственные i_0 и j_0 такие, что $t_1 s_{i_0}^+ = 0$ (или $t_1 s_{i_0}^- = 0$) и $t_1 s_{j_0}^+ = 1$ (или $t_1 s_{j_0}^- = 1$). Обозначим $\theta_2 = t_1(a_{i_0}, s_{i_0})$, $\theta_1 = t_1(a_{j_0}, s_{j_0})$, $B = K \setminus (\theta_1 \cup \theta_2)$, $\{J_i\}_{i \geq 1}$ – компоненты связности множества $\bigcup_{k=1, \dots, n, m \geq 1} t_1^{-m}(a_k, a_k)$, не лежащие в θ_1, θ_2 и в $\bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. 1) Так как K – канторово множество, то B тоже канторово.

Рис. 31

2) Покажем, что можно выбрать a_i и b_i , $i = 1, \dots, n$, так, чтобы в любой окрестности любой точки из множества K нашелся бы свободный прообраз J_k для любого $k \geq 1$. Пусть q – периодическая точка, прообразами которой являются все p_i^+ и p_i^- . Пусть P – период точки q . Обозначим через U интервал, содержащий q , такой, что

$$U \cap \bigcup_{\substack{m=1, \dots, n \\ 0 \leq i \leq P}} t_1^{-i} s_m.$$

При первых P итерациях отображения t_1 интервал U не разбивается на части. Пусть интервал U достаточно мал, чтобы интервалы $t_1^i U$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, P-1\}$, не пересекались и не содержали точек $\{p_k^+, p_k^-\}_{k=1, \dots, n}$ и их образов (кроме $t_1^i q$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, P-1\}$). Очевидно, $t_1^P U \supset U$. Обозначим $U^* = \bigcup_{i=0, \dots, P} t_1^i U$. На рис. 31 движение точек и интервалов изображено в виде графа, где круги соответствуют точкам, а прямоугольники – интервалам. Пусть $R_1 = \max_{i=1, \dots, n} \{k \mid t_1^k s_i^+ = q, t_1^k s_i^- = q\}$, здесь k есть момент *первого* попадания траектории s_i^+ (s_i^-) в точку q . Пусть $R_2 = \max\{R_1, P, W\}$. Здесь W – такое число, что $\bigcup_{k=0}^W t_1^k U = (0, 1)$. Существование такого числа W следует из условия полного растяжения. Рассмотрим s_i^+ . Тогда существует такое число m , что если $0 \leq k < m$, то $t_1^k s_i^+ \notin \bigcup_{r=0, \dots, P} t_1^r q$ и $t_1^k s_i^+ \in \bigcup_{r=0, \dots, P} t_1^r q$ для всех $k \geq m$.

Тогда если $0 \leq k < m$, то $t_1^k s_i^+ \notin U^*$ и $t_1^k s_i^+ \in U^*$ для всех $k \geq m$. Пусть $l_i^+ = (s_i, s_i + \delta)$ такой интервал, что

- i) для любых $j \in \{0, \dots, R_2\}$ и для всех $k = 1, \dots, n$ $t_1^j l_i^+ \cap s_k = \emptyset$;
- ii) для любых $j \in \{0, \dots, m-1\}$ $t_1^j l_i^+ \cap U^* = \emptyset$, для любых $j \in \{m, \dots, R_2\}$ $t_1^j l_i^+ \subset U^*$.

Построим аналогичные интервалы l_i^+ и $l_i^- = (s_i - \delta, s_i)$ для всех точек разрыва. Добавим условие

- iii) для любых $j \in \{1, \dots, R_2\}$ $t_1^j l_i^\pm \cap l_k^\pm = \emptyset$ и $l_i^\pm \cap l_k^\pm = \emptyset$, если $i \neq k$.

Это условие легко выполнить, уменьшив δ . Обозначим $l_i = l_i^+ \cup l_i^- \cup s_i$.

Точки a_i и b_i выбираем таким образом, чтобы $(a_i, b_i) \subset l_i$ (см. лемму 4.1). Отображение t_1 в лемме 4.1 было построено так, что точки $t(0), t(1), p_1^-, p_1^+, \dots, p_n^-, p_n^+$ не совпадают. За счет этого для каждого $p_i^+ \neq 0, \neq 1$ ($p_i^- \neq 0, \neq 1$) существует $x \notin \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ такое, что $t_1 x = p_i^+$ ($t_1 x = p_i^-$). Если выбирать a_i и b_i достаточно близко к s_i , то можно добиться выполнения следующего условия (см. рис. 32):

$$\text{для каждого интервала } J \subset \bigcup_{i \neq i_0, j_0} t_1(a_i, s_i) \cup \bigcup_i t_1(s_i, b_i) \cup t_1 \theta_1 \cup t_1 \theta_2$$

найдется интервал I' такой, что $t_1(I') = J$, причем

$$I' \cap \bigcup_{i=1, \dots, n} (a_i, b_i) \cup \theta_1 \cup \theta_2 = \emptyset. \quad (5)$$

Пусть

$$K = [0, 1] \setminus \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \geq 0}} t_1^{-j}(a_i, b_i).$$

Пусть J_n – произвольная компонента связности множества

$$\bigcup_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \geq 0}} t_1^{-j}(a_i, b_i),$$

не лежащая в θ_1, θ_2 . Покажем, что для любой точки $z \in K$ в любой окрестности этой точки есть свободный прообраз J_n .

Рис. 32

Сначала докажем это свойство для периодической точки q . Будем рассматривать интервалы $\{I_m\}_{m \geq 1}$ такие, что $t_1 I_m = I_{m-1}$, $t_1 I_1 = J_n$ и $I_m \cap \bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k) \cup \theta_1 \cup \theta_2 = \emptyset$. Докажем, что для каждого J_n такая последовательность интервалов существует. Рассмотрим интервал I_1 такой, что $t_1 I_1 = J_n$. Имеем $I_1 \not\subset (a_{i_0}, s_{i_0}) \cup (a_{j_0}, s_{j_0})$, иначе $J_n = t_1 I \subset \theta_1 \cup \theta_2$. Есть две возможности:

- а) $I_1 \subset \bigcup_{i \neq i_0, j_0} (a_i, s_i) \cup \bigcup_i (s_i, b_i) \cup \theta_1 \cup \theta_2$;
- б) $I_1 \cap \bigcup_i (s_i, b_i) \cup \theta_1 \cup \theta_2 = \emptyset$.

В случае а) из (5) следует, что найдется интервал I' такой, что $t_1 I' = J_n$ и $I' \cap \bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k) \cup \theta_1 \cup \theta_2 = \emptyset$, обозначим в этом случае $I_1 := I'$.

Далее, аналогично получаем интервал I_2 такой, что $t_1 I_2 = I_1$ и $I_2 \cap \bigcup_i (a_i, b_i) \cup \theta_1 \cup \theta_2 = \emptyset$.

Таким образом строится вся последовательность $\{I_m\}_{m \geq 1}$. Все интервалы I_m – свободные прообразы J_n .

Пусть x – точка накопления интервалов $\{I_m\}_{m \geq 1}$. Возможны случаи:

- i') $x \in U^*$;
- ii') $x \in \bigcup_{k=1, \dots, n} \bigcup_{i=0, \dots, R_2} t_1^i(l_k)$ и $x \notin U^*$;
- iii') $x \notin U^*$ и $x \notin \bigcup_{k=1, \dots, n} \bigcup_{i=0, \dots, R_2} t_1^i(l_k)$.

В случае i') в U^* содержится свободный прообраз J_n , отрицательную полутраекторию этого прообраза можно “намотать” на траекторию q , следовательно, сколь угодно приблизить к q . Получится, что в любой окрестности точки q есть свободный прообраз J_n .

В случае ii') пусть $x \in t_1^i(l_k)$. Тогда существует $0 < j \leq R_2 - 1$ такое, что $t_1^j x \in U^*$. Покажем, что для всех $m \in 0, \dots, j$ $t_1^m x \notin \bigcup_{r=1, \dots, n} l_r$. Действительно, в противном случае имеем, что $\exists m \leq j$ такое, что $t_1^m x \in l_r \Rightarrow t_1^{i+m}(l_k) \cap l_r \neq \emptyset$, что противоречит свойству iii) интервалов l_i (здесь $i+m \leq i+j \leq R_2$). Таким образом, $t_1^m x \notin \bigcup_{r=1, \dots, n} (a_i, b_i)$ для всех $m \in 0, \dots, j$. Выделим маленькую окрестность x , которая вместе с x на j -й итерации попадает в U^* . Почти все прообразы J_n , содержащиеся в ней, имеют степень больше

чем j , следовательно, через j итераций они остаются свободными прообразами J_n , содержащимися в U^* . Далее рассуждения такие же, как в случае i').

В случае iii') из полного растяжения следует, что существуют число $N \leq R_2$ и точка $z \in U$ такие, что $t_1^N z = x$. Покажем, что $t_1^k z \notin \bigcup_{m=1, \dots, n} l_m$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Действительно, в противном случае имеем: $t_1^k z \in l_m \Rightarrow x = t_1^N z \in t_1^{N-k} l_m$, что противоречит свойству iii'). Таким образом, $t_1^k z \notin \bigcup_{m=1, \dots, n} (a_m, b_m)$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим $u = u(z)$ – маленькую окрестность точки z . Если $u(z)$ достаточно мала, то $t_1^k u(z) \cap (a_i, b_i) = \emptyset$, $k = 0, \dots, N$, $i = 1, \dots, n$, и $x \in t_1^N u(z)$. В интервале $t_1^N u(z)$ содержатся свободные прообразы J_n . Тогда в интервале $u(z)$ содержатся интервалы I такие, что $t_1^N I = J_n$, причем для $i = 0, \dots, N$ $t_1^i I \cap \bigcup_{k=1, \dots, n} (a_k, b_k) = \emptyset$. Таким образом, в U содержатся свободные прообразы J_n . Далее рассуждения, как в случае i').

Итак, для любого n в любой окрестности точки q содержится свободный прообраз J_n . Покажем теперь, что для любой точки множества K верно то же самое. По построению K получается из $[0, 1]$ вырезанием счетного множества непересекающихся и не имеющих общих концевых точек интервалов $\tilde{I}$ таких, что

$$\exists i, k \quad t_1^k \tilde{I} = (a_i, b_i) \quad \text{и для} \quad 0 \leq m < k \quad t_1^m \tilde{I} \cap (a_i, b_i) = \emptyset.$$

Пусть $\gamma = \inf \tilde{I}$ – концевая точка интервала $\tilde{I}$. Тогда $\exists m \quad t_1^m \gamma = q$, причем $t_1^i \gamma \notin \bigcup_{g=1, \dots, n} [a_g, b_g] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$. При достаточно малом ε интервал $(\gamma - \varepsilon, \gamma)$ за m итераций попадает в окрестность точки q , не пересекая на своем пути $\bigcup_{g=1, \dots, n} [a_g, b_g]$. В этой окрестности q содержатся свободные прообразы J_n . Тогда в $(\gamma - \varepsilon, \gamma)$ тоже содержатся свободные прообразы J_n . Так как к любой точке из множества K можно приблизиться концевыми точками вырезаемых интервалов $\tilde{I}$, то в любой окрестности любой точки из K есть свободный прообраз J_n .

Список литературы

- [1] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmospheric Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [2] J. B. McLaughlin, P. C. Martin, "Transition to turbulence of statically stressed fluids", *Phys. Rev. Lett.*, **39**:20 (1974), 1189–1192.
- [3] J. A. Yorke, E. D. Yorke, "Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model", *J. Stat. Phys.*, **21**:3 (1979), 263–377.
- [4] M. Viana, "What's new on Lorenz strange attractors?", *Math. Intelligencer*, **22**:3 (2000), 6–19.
- [5] В. С. Афраимович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, "О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца", *Труды ММО*, 1982, № 44, 150–212.
- [6] J. E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications. Part 12. J. Guckenheimer. The strange, strange attractor*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [7] J. Guckenheimer, R. F. Williams, "Structural stability of Lorenz attractors", *Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math.*, **50** (1979), 59–72.
- [8] Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Труды МИАН, **90**, Наука, М., 1967.
- [9] C. Pugh, M. Shub, "Ergodic attractors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **312**:1 (1989), 1–54.

- [10] A. B. Katok, J. M. Strelcyn, F. Ledrappier, F. Przytycki, *Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities*, Lecture Notes in Math., **1222**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [11] R. F. Williams, “The structure of Lorenz attractors”, *Turbulence seminar* (Univ. Calif., Berkeley, CA, 1976/77), Lecture Notes in Math., **615**, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 94–112.
- [12] R. F. Williams, “The structure of Lorenz attractors”, *Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math.*, **50** (1979), 73–99.
- [13] W. Tucker, “A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem”, *Found. Comput. Math.*, **2**:1 (2002), 53–117.
- [14] N. E. Klinshpont, “The topological invariant of the Lorenz’s type attractors. Appendix to R. V. Plykin, A. Ju. Zhirov, Some problems of attractors of dynamical systems”, *Topology Appl.*, **54**:1–3 (1993), 39–46.
- [15] Н. Э. Клиншпонт, “Топологический инвариант аттрактора Лоренца”, *УМН*, **47**:2 (1992), 195–196.
- [16] Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии*, Физматгиз, М., 1958.

Н. Э. Клиншпонт (N. É. Klinshpont)

Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики
E-mail: vitklin@obninsk.ru

Поступила в редакцию
02.07.2004 и 27.10.2005