Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Сачков, Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 4, 123–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:48:04

УДК 517.977

Ю. Л. Сачков

Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны

Рассматривается обобщенная задача Дидоны – модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$. Изучается множество Максвелла, т.е. геометрическое место точек пересечения геодезических равной длины. Получено общее описание стратов Максвелла, соответствующих группе симметрий экспоненциального отображения, порожденной вращениями и отражениями. Выяснен инвариантный и наглядный смысл этих стратов.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Настоящая работа посвящена исследованию оптимальности геодезических в обобщенной задаче Дидоны. Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы две точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединенные некоторой кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, число $S \in \mathbb{R}$, а также точка $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , такую, чтобы область, ограниченная парой кривых γ_0 и γ , имела заданные алгебраическую площадь S и центр масс c .

В работе [1] показано, что эта задача может быть переформулирована как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и интегральным критерием:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z, v, w) \in M = \mathbb{R}^5, & u &= (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = 0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где векторные поля при управлениях имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

С инвариантной точки зрения это – субриманова задача, заданная распределением

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad q \in M,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00703-а). Автор также благодарит за поддержку Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste, Italy), где эта работа была начата.

со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в котором поля X_1, X_2 образуют ортонормированный базис:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Алгебра Ли, порожденная полями X_1, X_2 , есть свободная нильпотентная алгебра Ли длины 3 с двумя образующими. Распределение Δ имеет флаг:

$$\Delta \subset \Delta^2 = [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = [\Delta, \Delta^2] = TM,$$

и вектор роста $(2, 3, 5) = (\dim \Delta_q, \dim \Delta_q^2, \dim \Delta_q^3)$.

Таким образом, $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть нильпотентная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$. Она является локальной квазиоднородной нильпотентной аппроксимацией произвольной субримановой структуры на 5-мерном многообразии с вектором роста $(2, 3, 5)$ (см. [2], [3], а также [4]). Как показано в работе [5], такая нильпотентная структура единственна. Обобщенная задача Дидоны есть модель нильпотентной субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5)$.

1.2. Известные результаты. Мы продолжаем исследование обобщенной задачи Дидоны, начатое в работах [1], [5], [6].

В работах [5] и [6] найдены соответственно группы непрерывных и дискретных симметрий в этой задаче: имеется двухпараметрическая непрерывная группа симметрий (вращения и дилатации), а также дискретная группа симметрий порядка 4 (отражения).

В работе [1] получена параметризация субримановых геодезических (экстремальных траекторий) эллиптическими функциями Якоби. Анормальные геодезические оптимальны до бесконечности, а нормальные – вообще говоря, на конечных отрезках времени.

1.3. Содержание работы. Точка, в которой геодезическая теряет оптимальность, называется *точкой разреза*. Известно, что нормальная геодезическая может терять оптимальность либо из-за того, что в некоторую ее точку приходит другая геодезическая с таким же значением функционала (точка Максвелла), либо из-за того, что семейство геодезических имеет огибающую (сопряженная точка). В настоящей работе мы находим точки Максвелла, соответствующие группе симметрий, сохраняющих время на геодезических (вращения и отражения). А именно, мы отыскиваем две гиперповерхности в пространстве состояний M , содержащие все такие точки Максвелла. Компьютерные вычисления показывают, что геодезические теряют оптимальность именно на этих гиперповерхностях. Мы выясняем инвариантный смысл этих гиперповерхностей в терминах субримановой структуры, а также их наглядный смысл для эйлеровых эластик (проекций геодезических на плоскость (x, y)).

Локализация точек пересечения геодезических с найденными гиперповерхностями будет содержанием последующей работы [7]. Для этого потребуются более сложная техника эллиптических функций, которой мы избегаем в этой работе.

Сложные вычисления и иллюстрации в работе были выполнены с помощью системы Mathematica [8].

Автор выражает благодарность А. А. Аграчеву за постановку задачи и полезные обсуждения во время работы.

§ 2. Множество Максвелла

Начнем с напоминания некоторых понятий и обозначений, введенных в предыдущих работах [1], [6]. Из принципа максимума Понтрягина [9] следует, что экстремали в обобщенной задаче Дидоны суть траектории гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, $\lambda \in T^*M$, с гамильтонианом $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$. Геодезические являются проекциями экстремалей из кокасательного расслоения T^*M на пространство состояний M : $q_t = \pi(\lambda_t)$, $\lambda_t = e^{t\vec{H}}(\lambda)$. Здесь и далее $e^{t\vec{H}}$ обозначает поток гамильтонова поля $\vec{H}$ с гамильтонианом H . В силу однородности гамильтониана H достаточно рассматривать сужение гамильтонова потока на поверхность уровня $H = 1/2$ и потому брать начальные ковекторы λ в начальном цилиндре $C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^*M$. Вся информация о геодезических заключена в экспоненциальном отображении $\text{Exp}: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$, $\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q_t$.

2.1. Оптимальность нормальных геодезических. *Множество Максвелла* в прообразе экспоненциального отображения определяется следующим образом:

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid \exists \tilde{\lambda} \in C, \tilde{\lambda} \neq \lambda: \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}.$$

Включение $(\lambda, t_1) \in \text{MAX}$ означает, что две разные геодезические

$$q_s = \text{Exp}(\lambda, s) \neq \tilde{q}_s = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \quad s \in [0, t_1],$$

одинаковой субримановой длины $l = t_1$ пересекаются в точке $q_{t_1} = \tilde{q}_{t_1}$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Неоптимальность геодезической q_s после точки Максвелла q_{t_1}

Множество Максвелла тесно связано с оптимальностью геодезических: геодезическая не может быть оптимальной после пересечения с другой геодезической такой же длины. Следующее предложение доказано С. Жаке [10]. Для полноты изложения приведем его с доказательством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть q_s и $\tilde{q}_s$ суть две разные геодезические: $q_s \neq \tilde{q}_s$, $s \in [0, t_1]$. Если $q_{t_1} = \tilde{q}_{t_1}$, то для любого $t_2 > t_1$ геодезическая q_s , $s \in [0, t_2]$, не является оптимальной.

Иными словами, для любого $t_2 > t_1$ существует геодезическая $\hat{q}_s$, $s \in [0, \hat{t}]$, меньшей субримановой длины, чем q_s , $s \in [0, t_2]$, соединяющая q_0 и q_{t_2} (см. рис. 1). Поэтому любая геодезическая $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$ неоптимальна после времени Максвелла t_1 , $(\lambda, t_1) \in \text{MAX}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 2.1 проведем методом от противного. Пусть для некоторого $t_2 > t_1$ геодезическая q_s , $s \in [0, t_2]$, оптимальна. Тогда оптимальна и ломаная геодезическая

$$q'_s = \begin{cases} \tilde{q}_s, & s \in [0, t_1]; \\ q_s, & s \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Но все геодезические в обобщенной задаче Дидоны – аналитические кривые. Поэтому из тождества $q'_s \equiv q_s$, $s \in [t_1, t_2]$, следует, что $q'_s \equiv q_s$, $s \in [0, t_2]$, откуда $\tilde{q}_s \equiv q_s$, $s \in [0, t_1]$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Экспоненциальное отображение является лагранжевым отображением [11]. Из теории лагранжевых особенностей следует, что в нашей задаче нормальные геодезические теряют оптимальность в *первой* точке Максвелла (т.е. оптимальны до этой точки включительно и не оптимальны после нее). Однако найти первую точку Максвелла затруднительно. Мы будем исследовать оптимальность нормальных геодезических следующим образом:

- 1) найдем определенные подмножества множества Максвелла – страты Максвелла MAX_i , $i = 0, \dots, 3$, порожденные симметриями экспоненциального отображения, не изменяющими время (вращением $\vec{h}_0$ и отражениями ε^i);
- 2) докажем, что вдоль каждой нормальной экстремали первая сопряженная точка встречается не раньше первого пересечения со стратами Максвелла MAX_i ;
- 3) докажем, что первая точка на нормальной экстремали из стратов Максвелла MAX_i есть точка разреза (точка потери оптимальности).

Этот метод исследования оптимальности был успешно применен при решении нескольких задач субримановой геометрии [12], [13]. В настоящей работе мы решаем задачу 1).

Как указано в книге [11], термин *множество Максвелла* возникает “в связи с правилом Максвелла теории Ван дер Ваальса, согласно которому фазовый переход совершается при таком значении параметра, при котором два максимума некоторой гладкой функции равны между собой”.

2.2. Страты Максвелла, порожденные вращениями и отражениями. В работе [6] были определены и исследованы отражения ε^i , $i = 1, 2, 3$, – дискретные симметрии экспоненциального отображения $\varepsilon^i: N \rightarrow N$, $\varepsilon^i: M \rightarrow M$, $\text{Exp} \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \text{Exp}$. Мы обозначаем $\nu = (\lambda, t) \in N = C \times \mathbb{R}_+$, $\nu^i = \varepsilon^i(\nu)$. Наряду с дискретной группой симметрий $D_2 = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ экспоненциальное отображение имеет непрерывную двухпараметрическую группу симметрий

$G_{\vec{h}_0, Z} = e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$ (см. [1]), где

$$\begin{aligned} h_0(\lambda) &= \langle \lambda, X_0(q) \rangle, & X_0 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}, \\ Z &= \vec{h}_Y + e, & h_Y(\lambda) &= \langle \lambda, Y(q) \rangle, \\ Y &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w}, & e &= \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}. \end{aligned}$$

Определим *страты* Максвелла, порожденные вращениями $\vec{h}_0$ и отражениями ε^i :

$$\begin{aligned} \text{MAX}_0 &= \{ \nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R}: \tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu) \}, \\ \text{MAX}_i &= \{ \nu \in N \mid \exists \sigma \in \mathbb{R}: \tilde{\nu} = e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu) \}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

По определению множества Максвелла

$$\text{MAX}_i \subset \text{MAX}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь мы дадим общее описание множеств MAX_i , а подробное описание этих множеств будет получено в последующей работе [7].

С более общей точки зрения, мы будем исследовать множество Максвелла, соответствующее группе симметрий, порожденной вращениями и отражениями. Пусть G – некоторая группа, действующая в прообразе и образе экспоненциального отображения:

$$g: N \rightarrow N, \quad g: M \rightarrow M, \quad g \in G.$$

Группа G называется *группой симметрий экспоненциального отображения*, если для любого $g \in G$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ M & \xrightarrow{g} & M, \end{array}$$

т.е. $\text{Exp} \circ g = g \circ \text{Exp}$. Предположим, что группа G сохраняет время:

$$g(\lambda, t) = (\lambda', t), \quad (\lambda, t) \in N, \quad g \in G.$$

Множеством Максвелла, соответствующим группе G , назовем множество

$$\text{MAX}_G = \{ \nu \in N \mid \exists g \in G: \tilde{\nu} = g(\nu) \neq \nu, \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu) \}.$$

Очевидно, что $\text{MAX}_G \subset \text{MAX}$ для любой группы симметрий экспоненциального отображения, сохраняющей время. (Можно определить множество Максвелла для группы, действующей только в прообразе экспоненциального отображения; однако если действие группы не определено в образе экспоненциального отображения, то нахождение этого множества кажется затруднительным.)

В нашей задаче группа, порожденная вращениями и отражениями,

$$G = G_{\vec{h}_0, \varepsilon} = \langle e^{s\vec{h}_0}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \rangle$$

есть группа симметрий экспоненциального отображения, сохраняющая время. В силу правил коммутирования в группе $G_{\vec{h}_0, \varepsilon}$ [6; предложение 3.2] любой элемент этой группы имеет вид $g = e^{s\vec{h}_0}$ или $g = e^{s\vec{h}_0} \circ \varepsilon^i$, поэтому

$$\text{MAX}_{G_{\vec{h}_0, \varepsilon}} = \bigcup_{i=0}^3 \text{MAX}_i.$$

2.3. Факторизация стратов Максвелла. Страты MAX_i факторизуются по действию группы $G_{\vec{h}_0, Z} = e^{\mathbb{R}\vec{h}_0} \circ e^{\mathbb{R}Z}$, так же как и все множество Максвелла:

$$\begin{array}{ccccc} \text{MAX}_i & \xrightarrow{\text{Id}} & N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow \pi''_0 & & \downarrow \pi''_0 & & \downarrow \pi''_1 \\ \text{MAX}''_i & \xrightarrow{\text{Id}} & N'' & \xrightarrow{\text{Exp}'} & M''. \end{array}$$

Это вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Страты Максвелла MAX_i инвариантны относительно вращений и дилатаций:

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\text{MAX}_i) = \text{MAX}_i, \quad i = 0, \dots, 3, \quad s, r, \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $i = 0$ утверждение очевидно следует из правил коммутирования непрерывных симметрий и экспоненциального отображения [6; предложение 3.1].

Рассмотрим случай $i = 2$ (как видно из [6; предложение 3.1], случаи $i = 1, 3$ проще этого). Пусть $\nu \in \text{MAX}_2$, тогда для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$ выполняются условия

$$\tilde{\nu} = e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) \neq \nu, \quad \text{Exp}(\tilde{\nu}) = \text{Exp}(\nu).$$

Легко видеть, что тогда для $\nu_1 = e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\nu)$ и $\sigma_1 = \sigma + 2s$ выполняются условия

$$\tilde{\nu}_1 = e^{\sigma_1\vec{h}_0}(\nu_1^2) \neq \nu_1, \quad \text{Exp}(\tilde{\nu}_1) = \text{Exp}(\nu_1),$$

т.е. $\nu_1 = e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ}(\nu) \in \text{MAX}_2$.

§ 3. Кратные точки экспоненциального отображения

Каждый страт Максвелла MAX_i состоит из кратных точек экспоненциального отображения, не являющихся неподвижными для соответствующей непрерывной или дискретной симметрии. В этом и следующем параграфах мы находим соответственно кратные точки экспоненциального отображения и неподвижные точки симметрий.

Определим важную для дальнейшего исследования функцию на пространстве состояний:

$$V = xv + yw - z \frac{r^2}{2}.$$

Происхождение этой функции объяснено в работе [6] (см. замечание в конце п. 5.2). Эта функция инвариантна относительно вращений и однородна порядка 4 относительно дилатаций:

$$X_0 V = 0, \quad YV = 4V. \quad (1)$$

Из [6; предложение 2.5] следует, что с точностью до знака функция V сохраняется отражениями:

$$V \circ \varepsilon^1 = V, \quad V \circ \varepsilon^2 = -V, \quad V \circ \varepsilon^3 = -V.$$

Отметим, что аналогичными свойствами обладает и функция z :

$$\begin{aligned} X_0 z &= 0, & Yz &= 2z, \\ z \circ \varepsilon^1 &= -z, & z \circ \varepsilon^2 &= z, & z \circ \varepsilon^3 &= -z. \end{aligned} \quad (2)$$

3.1. Вывод уравнений для кратных точек. Напомним [6], что мы обозначаем $q^i = \varepsilon^i(q)$, $q, q^i \in M$. В плоскостях (x, y) и (v, w) будем использовать полярные координаты: $x = r \cos \chi$, $y = r \sin \chi$, $v = \rho \cos \omega$, $w = \rho \sin \omega$.

В следующем утверждении мы получаем уравнения гиперповерхностей, содержащих страты Максвелла MAX_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Справедливо следующее:*

$$\begin{aligned} 1) \quad e^{\sigma X_0}(q^1) = q & \Leftrightarrow z = 0, & \begin{cases} \sigma = 0 & \text{при } r^2 + \rho^2 > 0; \\ \forall \sigma & \text{при } r^2 + \rho^2 = 0, \end{cases} \\ 2) \quad e^{\sigma X_0}(q^2) = q & \Leftrightarrow V = 0, & \begin{cases} \sigma = 2\chi & \text{при } r > 0; \\ \sigma = 2\omega - \pi & \text{при } r = 0, \rho > 0; \\ \forall \sigma & \text{при } r = \rho = 0, \end{cases} \\ 3) \quad e^{\sigma X_0}(q^3) = q & \Leftrightarrow z = V = 0, & \begin{cases} \sigma = 2\chi & \text{при } r > 0; \\ \sigma = 2\omega - \pi & \text{при } r = 0, \rho > 0; \\ \forall \sigma & \text{при } r = \rho = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать формулы для действия отражений в координатах на M (см. [6; предложение 2.5]).

1) Утверждение следует из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: (x, y, z, v, w) &\mapsto (x, y, -z, v - xz, w - yz), \\ e^{sX_0}: (x, y, z, v, w) &\mapsto (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, z, \\ &\quad v \cos s - w \sin s, v \sin s + w \cos s). \end{aligned} \quad (3)$$

2) Напомним, что

$$\varepsilon^2: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v + xz, w - yz).$$

Пусть $r > 0$. Тогда равенство $(x, y) = (x \cos s + y \sin s, x \sin s - y \cos s)$ означает, что $s = 2\chi$, т.е.

$$\cos s = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin s = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Но тогда система уравнений

$$(-v + xz) \cos s - (w - yz) \sin s = v, \quad (-v + xz) \sin s + (w - yz) \cos s = w$$

переписывается в виде

$$xV = 0, \quad yV = 0,$$

что равносильно равенству $V = 0$.

Пусть $r = 0$, $\rho > 0$. В этом случае равенство

$$(v, w) = (-v \cos s + w \sin s, -v \sin s + w \cos s)$$

означает, что $s = 2\omega - \pi$. Более того, из равенства $r = 0$ следует $V = 0$.

Наконец, в случае $r = \rho = 0$ выполняются оба равенства $e^{sX_0}(q^2) = q$ при любом σ , а также $V = 0$.

3) Напомним, что

$$\varepsilon^3: (x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w).$$

Утверждение следует из п. 2) в силу того, что отражения ε^3 и ε^2 совпадают при условии $z = 0$, необходимом для выполнения равенства $e^{sX_0}(q^3) = q$.

Для описания страта Максвелла MAX_0 нам понадобится следующее утверждение, очевидно вытекающее из формулы (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $s \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$e^{\sigma X_0}(q) = q \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + \rho^2 = 0.$$

3.2. Наглядный смысл кратных точек для эйлеровых эластиков. Как показано в работе [1], в обобщенной задаче Дидоны проекции нормальных геодезических q_s на плоскость (x, y) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \cos \theta_s, \\ \dot{y}_s &= \sin \theta_s, \end{aligned}$$

где угол θ_s в свою очередь есть решение уравнения маятника

$$\ddot{\theta}_s = -\alpha \sin(\theta_s - \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (4)$$

Такие кривые (x_s, y_s) называются *эйлеровыми эластиками*, они были открыты Эйлером как стационарные профили упругого стержня. Эластики суть экстремали функционала $\frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2(s) ds$ для плоских кривых, где κ – кривизна кривой γ (см., например, [14], [15]). Эйлеровы эластики (решения обобщенной

задачи Дидоны) образуют с точностью до поворотов и растяжений однопараметрическое семейство кривых, соединяющее прямую и окружность (решения классической задачи Дидоны [16]). В зависимости от величины энергии $E = c^2/2 - \alpha \cos(\theta - \beta)$ маятника (4) эластике могут быть инфлекссионными (с точками перегиба) при $E < \alpha$ (колебания маятника с малой энергией) и неинфлекссионными при $E > \alpha$ (вращения маятника с большой энергией); критическому значению энергии $E = \alpha$ соответствует критическая неинфлекссионная эластика (при $\theta - \beta \neq \pi$, неперiodическое движение маятника по сепаратрисе) и прямая (при $\theta - \beta = \pi$, неустойчивое положение равновесия маятника); наконец, минимуму энергии $E = -\alpha$ также соответствует элатика-прямая (устойчивое положение равновесия маятника). Эскизы эластик различных типов приведены в работе [1].

Функции z , V и уравнения $z = 0$, $V = 0$, а также уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$ имеют наглядный смысл для эйлеровых эластик.

Рис. 2. $z = +S_1 - S_2 + S_3 - \dots$

Дополним дугу эластике с началом O и концом R до замкнутой кривой, проведя отрезок RO (см. рис. 2). Тогда функция z в точке R равна алгебраической площади ориентированной области, ограниченной дугой эластике OR и ее хордой RO , т.е. алгебраической сумме площадей связных компонент этой области (площадь компоненты берется со знаком “+”, если обход осуществляется в положительном направлении, и со знаком “-”, если обход осуществляется в отрицательном направлении). Действительно, вдоль эластик

$$z = \frac{1}{2} \int x dy - y dx = \frac{1}{2} \int r^2 d\chi = \sum \pm S_i.$$

Равенство $z = 0$ означает, что дуга эластике и ее хорда ограничивают область нулевой алгебраической площади. Это равенство тривиально выполняется для дуг эластик, центрированных в ее точках перегиба (см. п. 4.2, рис. 5). Такие эластики являются неподвижными точками отражения $\varepsilon^1: N_1 \mapsto N_1$. Для отыскания точек Максвелла важно найти нетривиальные решения уравнения $z = 0$, именно такая дуга эластике изображена на рис. 2: для этой дуги $z = S_1 - S_2 + S_3 = 0$.

Выясним наглядный смысл переменной V . Воспользовавшись формулами для координат центра масс сегмента элаستي при $z \neq 0$ (см. [1])

$$c_x = \frac{1}{z} \left(v - \frac{r^2}{6} y \right), \quad c_y = \frac{1}{z} \left(w + \frac{r^2}{6} x \right), \quad (5)$$

получим разложение на множители

$$V = xv + yw - z \frac{r^2}{2} = z \left(xc_x + yc_y - \frac{r^2}{2} \right) = z \left\langle \vec{r}, \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2} \right\rangle = zr \left\langle \vec{e}_r, \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2} \right\rangle.$$

Здесь $\vec{r} = (x, y)$ – радиус-вектор конца элаستي, $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, а $\vec{c} = (c_x, c_y)$ – радиус-вектор центра масс сегмента элаستي. На рис. 3 имеем

$$\overrightarrow{OR} = \vec{r}, \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{r}}{2}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{MC} = \vec{c} - \frac{\vec{r}}{2},$$

$MP = l^\perp$ есть серединный перпендикуляр к хорде OR , а P – проекция центра масс C на серединный перпендикуляр $l^\perp$. Поэтому $PC = \langle \vec{e}_r, \vec{c} - \vec{r}/2 \rangle$ есть расстояние от центра масс C до серединного перпендикуляра MP . Следовательно, при $z \neq 0$ равенство $V = 0$ означает, что центр масс сегмента элаستي лежит на серединном перпендикуляре к хорде. Это равенство тривиально выполняется для эластик, центрированных в вершине (см. пп. 4.3, 4.4, рис. 7, 9, 11, 13). Такие эластики являются неподвижными точками отражений $\varepsilon^2: N_i \mapsto N_i$, $i = 1, 2, 3$.

Рис. 3. $V = zr \langle \vec{e}_r, \vec{c} - \vec{r}/2 \rangle$

Выясним наглядный смысл уравнения $r^2 + \rho^2 = 0$. Уравнение $r^2 = 0$ означает, что эластика есть замкнутая кривая (начало совпадает с концом, причем касательные в начале и конце, вообще говоря, разные). Далее, воспользуемся выражениями (5) для центра масс сегмента элаستي. Из этих выражений легко видеть, что при $z \neq 0$ уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$ означает, что $c_x = c_y = 0$. Иными словами, центр масс сегмента элаستي совпадает с ее началом. Таким образом, уравнение $r^2 + \rho^2 = 0$ означает (при $z \neq 0$), что эластика замкнута, а центр масс ее сегмента совпадает с ее началом и концом. Назовем такую эластику *замечательной*. Мы покажем [7], что существуют только неинфлексионные замечательные эластики (при $\lambda \in C_2$).

3.3. Инвариантный смысл кратных точек. Выясним инвариантный смысл гиперповерхностей $z = 0$ и $V = 0$ и кривой $r^2 + \rho^2 = 0$ для субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что нильпотентная субриманова структура $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ с вектором роста $(2, 3, 5)$, заданная ортонормированным базисом (X_1, X_2) , определяет сами левоинвариантные базисные поля (X_1, X_2) на группе Ли M однозначно с точностью до ортогональных преобразований в плоскости Δ . Поэтому векторные поля $(X_1, \dots, X_5)$ определяются субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ однозначно с точностью до поворотов

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto (\cos \varphi X_1 + \sin \varphi X_2, -\sin \varphi X_1 + \cos \varphi X_2, X_3, \\ \cos \varphi X_4 + \sin \varphi X_5, -\sin \varphi X_4 + \cos \varphi X_5)$$

и отражений

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto (X_1, -X_2, -X_3, -X_4, X_5).$$

3.3.1. *Инвариантное описание гиперповерхности $z = 0$.* Многообразие

$$S_z = \{q \in M \mid z = 0\}$$

допускает инвариантное описание в терминах центра группы Ли M

$$Z = Z(M) = \{q \in M \mid q \cdot q' = q' \cdot q \quad \forall q' \in M\} = e^{\mathbb{R}X_4} \cdot e^{\mathbb{R}X_5} \\ = \{(x = 0, y = 0, z = 0, v, w) \mid v, w \in \mathbb{R}\}$$

и подмножества в M , заполненного однопараметрическими подгруппами, касающимися распределения Δ

$$e^{\mathbb{R}\Delta} = \{e^{tX} \mid X \in \Delta, t \in \mathbb{R}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Справедливо следующее: $S_z = Z \cdot e^{\mathbb{R}\Delta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения Δ , можно описать либо как аномальные геодезические, либо как нормальные геодезические для $\lambda \in C_4, C_5, C_7$ (см. [1]), поэтому

$$e^{\mathbb{R}\Delta} = \left\{ \left(t \cos \varphi, t \sin \varphi, 0, \frac{t^3}{6} \sin \varphi, -\frac{t^3}{6} \cos \varphi \right) \mid t \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1 \right\},$$

следовательно,

$$Z \cdot e^{\mathbb{R}\Delta} = \left\{ \left(t \cos \varphi, t \sin \varphi, 0, \frac{t^3}{6} \sin \varphi + v, -\frac{t^3}{6} \cos \varphi + w \right) \right\} = \{z = 0\} = S_z.$$

Таким образом, поверхность S_z является некоторым расширением множества $e^{\mathbb{R}\Delta}$, заполненного аномальными геодезическими – прямыми в плоскости (x, y) . Наглядным указанием на это служит то, что прямые заматают область нулевой площади: вдоль аномальных геодезических $z \equiv 0$.

3.3.2. Инвариантное описание гиперповерхности $V = 0$. Гиперповерхность

$$S_V = \{q \in M \mid V = 0\}$$

можно описать как некоторое расширение подмножества в M , заполненного нормальными геодезическими, соответствующими случаю Гейзенберга [17] ($\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_6$), прямыми и окружностями в плоскости (x, y) . Наглядным указанием на это является то, что центр масс кругового сегмента лежит на серединном перпендикуляре к хорде: вдоль геодезических, соответствующих $\lambda \in C_6$, справедливо тождество $V \equiv 0$.

Определим следующие подмножества M :

$$\begin{aligned} S_V^1 &= \{q \in M \mid V = 0, r \neq 0\}, \\ S_V^0 &= \{q \in M \mid V = 0, r = 0\} = \{q \in M \mid r = 0\}, \\ K &= \{q_t \mid \dot{q}_t = \cos \theta_t X_1(q_t) + \sin \theta_t X_2(q_t), \ddot{\theta}_t = 0, q_0 = \text{Id}\}, \\ K^1 &= K \setminus S_V^0, \end{aligned}$$

векторные поля в M :

$$\begin{aligned} X_6 &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial w} = X_3 - \frac{x}{2} X_4 - \frac{y}{2} X_5, \\ X_7 &= y \frac{\partial}{\partial v} - x \frac{\partial}{\partial w} = y X_4 - x X_5, \end{aligned}$$

и распределение на M :

$$L_V(q) = \text{span}(X_0(q), Y(q), X_6(q), X_7(q)) \subset T_q M, \quad q \in M.$$

Мы докажем, что распределение L_V инвариантно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, а множество S_V есть замыкание орбиты (максимального интегрального многообразия) этого распределения, проходящего через любую точку множества K^1 , очевидно, инвариантно определенного структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

ЛЕММА 3.1. *Распределение L_V инволютивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное вычисление показывает, что распределение L_V замкнуто относительно скобки Ли:

$$\begin{aligned} [X_0, Y] &= 0, & [X_0, X_6] &= 0, & [X_0, X_7] &= 0, \\ [Y, X_6] &= -2X_6, & [Y, X_7] &= -2X_7, & [X_6, X_7] &= 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.2. *Если $q \in S_V^1$, то $\dim L_V(q) = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем базисные векторы распределения L_V по столбцам в базисе $\partial/\partial x, \dots, \partial/\partial w$:

$$M_V(q) := (X_0(q), Y(q), X_6(q), X_7(q)) = \begin{pmatrix} -y & x & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 1 & 0 \\ -v & 3v & \frac{x}{2} & y \\ w & 3w & \frac{y}{2} & -x \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rank } M_V(q) = 4$ при $x^2 + y^2 \neq 0$.

ЛЕММА 3.3. *Векторное поле $W = X_6$ однозначно определяется по векторным полям $X_1, \dots, X_5$ следующими условиями:*

- 1) $W \in \text{span}(X_3, X_4, X_5)$;
- 2) $[W, X_1] = -\frac{1}{2} X_4$, $[W, X_2] = -\frac{1}{2} X_5$;
- 3) $W(\text{Id}) = X_3(\text{Id})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что условия 1)–3) выполняются для поля $W = X_6$. Покажем, что других полей, удовлетворяющих этим условиям, не существует.

Распишем условие 1):

$$W = aX_3 + bX_4 + cX_5, \quad a, b, c \in C^\infty(M).$$

С помощью тождества Якоби получаем из условий 2) равенства $[W, X_3] = [W, X_4] = [W, X_5] = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} [W, X_4] &= -a_v X_3 - b_v X_4 - c_v X_5 = 0, \\ [W, X_5] &= -a_w X_3 - b_w X_4 - c_w X_5 = 0, \end{aligned}$$

откуда $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$, $c = c(x, y, z)$. Далее,

$$[W, X_3] = -a_z X_3 - b_z X_4 - c_z X_5 = 0,$$

следовательно, $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$. Наконец,

$$\begin{aligned} [W, X_1] &= -aX_4 - a_x X_3 - b_x X_4 - c_x X_5 = -\frac{1}{2} X_4, \\ [W, X_2] &= -aX_5 - a_y X_3 - b_y X_4 - c_y X_5 = -\frac{1}{2} X_5, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a + b_x &= \frac{1}{2}, & c_x &= 0, \\ a_y &= 0, & b_y &= 0, & c_y + a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

А из условия 3) получаем

$$a(0) = 1, \quad b(0) = c(0) = 0.$$

Следовательно,

$$a \equiv 1, \quad b = -\frac{1}{2} x, \quad c = -\frac{1}{2} y,$$

т.е. $W = X_6$.

ЛЕММА 3.4. *Векторное поле $W = X_7$ однозначно определяется по векторным полям $X_1, \dots, X_5$ следующими условиями:*

- 1) $W \in \text{span}(X_4, X_5)$;
- 2) $[W, X_1] = X_5$, $[W, X_2] = -X_4$;
- 3) $W(\text{Id}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что поле $W = X_7$ удовлетворяет условиям 1)–3).

Аналогично доказательству леммы 3.3 распишем условие 1):

$$W = aX_4 + bX_5, \quad a, b \in C^\infty(M),$$

а из условия 2) получим $[W, X_3] = [W, X_4] = [W, X_5] = 0$, откуда $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$. Далее, из условия 2) следует, что

$$a_x = 0, \quad a_y = 1, \quad b_x = -1, \quad b_y = 0,$$

а из условия 3) – что $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$. Поэтому $a = y$, $b = -x$, т.е. $W = X_7$.

ЛЕММА 3.5. Векторное поле $W = Y$ однозначно определяется по векторным полям $X_1, \dots, X_5$ следующими условиями:

- 1) $W \in \text{Sym}(\Delta)$;
- 2) $[W, X_1] = -X_1$, $[W, X_2] = -X_2$;
- 3) $W(\text{Id}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами работы [5], в которой вычислена 14-мерная алгебра Ли $\text{Sym}(\Delta) = \mathfrak{g}_2$ инфинитезимальных симметрий плоского нильпотентного распределения с вектором роста $(2, 3, 5)$:

$$W \in \text{Sym}(\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad W = \sum_{i=1}^{14} a_i Y_i, \quad a_i = \text{const},$$

где базисные поля Y_i описаны в [5; теорема 6]. В силу того что $Y_i(\text{Id}) = 0$, $i = 6, \dots, 14$, из условия 3) получаем

$$a_1 = \dots = a_5 = 0.$$

Далее, из формул коммутирования полей Y_i с базисными полями субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ [5; конец доказательства леммы 5.2] получаем

$$\begin{aligned} [W, X_1] = -X_1 \quad \Leftrightarrow \quad & a_6(-4xy^2 + 4yz) + a_7(24xy - 12z) + a_8(-432xz + 324v) \\ & - 36xa_9 - \frac{1}{3}ya_{10} + a_{13} + a_{14} \equiv -1, \\ & a_6(-2y^3) + a_718y^2 + a_8(-648u) + a_9(-54y) + 54a_{11} \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a_6 = \dots = a_{11} = 0, \quad a_{13} + a_{14} = -1.$$

Далее,

$$[W, X_2] = -X_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{12} \left(-\frac{1}{54} \right) = 0, \quad a_{14} = 1,$$

следовательно,

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = -2, \quad a_{14} = 1,$$

поэтому поле $W = -2Y_{13} + Y_{14}$ определяется условиями 1)–3) однозначно.

Легко видеть, что поля $\pm X_6$, X_7 , Y однозначно определяются субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. В [1; утверждение 4.1] показано, что и генератор вращений X_0 однозначно определяется этой структурой.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Распределение L_V однозначно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

ЛЕММА 3.6. *Справедливо следующее:*

- 1) S_V^1 есть гладкое 4-мерное подмногообразие в M ;
- 2) для любого $q \in S_V^1$ справедливо равенство $T_q S_V^1 = L_V(q)$;
- 3) многообразие S_V^1 связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) следует из того, что

$$\text{grad } V = \left(v - zx, w - zy, -\frac{r^2}{2}, x, y \right) \neq 0 \quad \text{при } r^2 \neq 0.$$

- 2) Поля из L_V касаются многообразия S_V^1 , так как

$$X_0 V = X_6 V = X_7 V = 0, \quad Y V = 4V,$$

и равенство $T_q S_V^1 = L_V(q)$ следует из леммы 3.2.

3) Действием вращений X_0 и дилатаций Y любая точка $q \in S_V^1$ переводится в точку $q' = (x', y', z', v', w')$, где $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 2v'$, причем таким образом заполняется вся плоскость $\{x = 1, y = 0, z = 2v\}$. Поэтому связность многообразия S_V^1 следует из связности этой плоскости.

Будем обозначать через $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q)$ орбиту точки $q \in M$ под действием потоков векторных полей семейства $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q) = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q) \mid f_i \in \mathcal{F}, t_i \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}\},$$

а через $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(N)$ – орбиту множества $N \subset M$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(N) = \bigcup_{q \in N} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(q)$$

(см. описание основных свойств орбиты в книгах [9], [15]). Через $\text{cl}(N)$ будем обозначать топологическое замыкание множества $N \subset M$.

Теперь мы можем дать инвариантное описание многообразия S_V^1 и множества S_V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Справедливо следующее:*

- 1) $S_V^1 = \mathcal{O}_{L_V}(q)$ для любой точки $q \in K^1$;
- 2) $S_V^1 = \mathcal{O}_{L_V}(K^1)$;
- 3) $S_V = \text{cl}(S_V^1)$;
- 4) $S_V = \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(K))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $q = (x, y, z, v, w)$ – любая точка из K^1 . Тогда q принадлежит геодезической, соответствующей ковектору $\lambda \in C_6 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_7$, и, как показано в работе [1], с точностью до вращений и дилатаций

$$\begin{aligned} x &= \sin t, & y &= 1 - \cos t, & z &= \frac{t - \sin t}{2}, \\ v &= \frac{\cos 2t - 4 \cos t + 3}{4}, & w &= \frac{\sin 2t - 4 \sin t + 2t}{4} \end{aligned}$$

или

$$x = t, \quad y = z = v = 0, \quad w = -\frac{t^3}{6}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $V(q) = 0$, поэтому $q \in S_V^1$.

Включение $S_V^1 \subset \mathcal{O}_{L_V}(q)$ следует из связности S_V^1 и равенства $T_q S_V^1 = L_V(q)$.

Докажем обратное включение $\mathcal{O}_{L_V}(q) \subset S_V^1$. От противного, пусть существует точка $q_1 \in \mathcal{O}_{L_V}(q) \setminus S_V^1$. Тогда либо $q_1 \in S_V^0$, либо $V(q_1) \neq 0$. Включение $q_1 \in S_V^0$ невозможно, так как множество S_V^0 инвариантно относительно потоков полей из L_V . А неравенство $V(q_1) \neq 0$ невозможно, так как поверхность уровня $\{V(q) = 0\}$ также инвариантна относительно полей из L_V . Включение $\mathcal{O}_{L_V}(q) \subset S_V^1$, а потому и равенство $\mathcal{O}_{L_V}(q) = S_V^1$ доказаны.

Пункт 2) следует непосредственно из п. 1).

3) Из включения $S_V^1 \subset S_V$ следует $\text{cl}(S_V^1) \subset \text{cl}(S_V) = S_V$. Докажем обратное включение $S_V \subset \text{cl}(S_V^1)$. В силу разложения $S_V = S_V^1 \cup S_V^0$ достаточно доказать включение $S_V^0 \subset \text{cl}(S_V^1)$.

Пусть $q = (0, 0, z, v, w) \in S_V^0$. Если $\rho^2 = v^2 + w^2 \neq 0$, то последовательность точек вида

$$(x', y', z', v', w'), \quad x' = r' \cos \chi', \quad y' = r' \sin \chi', \quad \cos(\chi' - \omega) = \frac{z}{2\rho} r', \quad r' \rightarrow 0,$$

сходится к точке q и принадлежит многообразию S_V^1 . Если же $\rho^2 = 0$, то в качестве таких точек можно взять точки вида

$$(x', 0, z, v', 0), \quad v' = \frac{z}{2} x', \quad x' \rightarrow 0.$$

Доказаны включения $S_V^0 \subset \text{cl}(S_V^1)$, $S_V \subset \text{cl}(S_V^1)$ и равенство $S_V^1 = \text{cl}(S_V)$.

4) Из предыдущих пунктов получаем равенства

$$\begin{aligned} S_V &= \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(q)) \quad \forall q \in K^1, \\ S_V &= \text{cl}(K^1). \end{aligned}$$

Но $K = K^1 \cup S_V^0$, поэтому

$$\mathcal{O}_{L_V}(K) = \mathcal{O}_{L_V}(K^1) \cup \mathcal{O}_{L_V}(S_V^0) = \mathcal{O}_{L_V}(K^1) \cup S_V^0.$$

Из включения $S_V^0 \subset S_V$ следует, что $S_V = \text{cl}(\mathcal{O}_{L_V}(K))$.

3.3.3. *Инвариантное описание кривой $r^2 + \rho^2 = 0$. Кривая*

$$S_{r^2+\rho^2} = \{q \in M \mid r^2 + \rho^2 = 0\}$$

допускает следующее простое инвариантное описание как траектория поля

$$X_3 = [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w},$$

проходящая через начальную точку q_0 – единичный элемент Id группы Ли M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Справедливо равенство $S_{r^2+\rho^2} = e^{\mathbb{R}X_3}(\text{Id})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того что $X_3|_{S_{r^2+\rho^2}} = \partial/\partial z$, поле X_3 касается кривой $S_{r^2+\rho^2}$ и

$$e^{\mathbb{R}X_3}(\text{Id}) = \{(0, 0, z, 0, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = S_{r^2+\rho^2}.$$

Из замечания в начале п. 3.3 следует, что кривая $S_{r^2+\rho^2}$ инвариантно определяется субримановой структурой $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

§ 4. Неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения

4.1. Неподвижные точки вращений в N . Очевидно, что вращения

$$e^{s\vec{h}_0} : (\theta, c, \alpha, \beta, t) \mapsto (\theta + s, c, \alpha, \beta + s, t) \quad (6)$$

не имеют неподвижных точек в N при $s \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Неподвижные точки отражений в N_1 . Будем использовать эллиптические координаты k , φ и ψ , а также полярные координаты α , β в начальном цилиндре C (см. [1], [6]). Для этого нам понадобятся эллиптические функции Якоби cn , sn (см. [18], [19]).

Пусть $\nu = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) \in N_1$, тогда согласно [6; предложение 4.1]

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_1.$$

Неподвижные точки отражений в области N_1 выражаются через следующий инвариант двухпараметрической группы симметрий $G_{\vec{h}_0, Z}$:

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\varphi + \varphi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\varphi + \frac{\delta}{2}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\nu \in N_1$. Справедливо следующее:*

- 1) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^1) = \nu \Leftrightarrow \text{cn } \tau = 0, \sigma = 0$;
- 2) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) = \nu \Leftrightarrow \text{sn } \tau = 0, \sigma = 2\beta$;
- 3) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В эллиптических координатах равенство $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) = \nu$ принимает вид

$$e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) = (k, \varphi^i, \alpha, \beta^i + \sigma, t) = (k, \varphi, \alpha, \beta, t) = \nu,$$

что равносильно равенствам

$$\varphi^i = \varphi, \quad \beta^i + \sigma = \beta. \quad (7)$$

Пункт 1). Согласно [6; предложение 4.1] равенства (7) можно переписать в виде

$$\varphi + \varphi_t = \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \left(\bmod \frac{4K}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad \sigma = 0,$$

где K – полный эллиптический интеграл второго рода [18], [19], что равносильно

$$\tau = K \pmod{2K}, \quad \sigma = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 0.$$

Пункт 1) предложения доказан, остальные два пункта доказываются аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^i: N_1 \rightarrow N_1$ для стандартного маятника в плоскости (θ, c) и инфлекссионных эйлеровых эластик в плоскости (x, y) .

1) Равенство $\operatorname{cn} \tau = 0$ равносильно равенству $c = 0$ – это точки перегиба эластик (нули кривизны c). См. рис. 4, 5.

2) Равенство $\operatorname{sn} \tau = 0$ равносильно равенству $\theta = 0$ – это вершины эластик (экстремумы кривизны c). См. рис. 6, 7.

4.3. Неподвижные точки отражений в N_2 . Пусть $\nu = (k, \psi, \alpha, \beta, t) \in N_2$, тогда согласно [6; предложение 4.1]

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (k, \psi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_2.$$

В области N_2 рассмотрим следующий инвариант группы $G_{\vec{h}_0, Z}$:

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\psi + \psi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\psi + \frac{\delta}{2k}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\nu \in N_2$. Справедливо следующее:

- 1) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^1) = \nu$ невозможно;
- 2) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu \Leftrightarrow \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 2\beta;$
- 3) $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ невозможно.

Рис. 4. $\operatorname{sn} \tau = 0$, $\nu \in N_1$

Рис. 5. Инфлекссионная эластика с центром в точке перегиба

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала пп. 1), 3). Если $i = 1, 3$, то из [6; предложение 4.1] получаем

$$\nu \in N_2^\pm \Rightarrow \nu^i, e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^i) \in N_2^\mp,$$

поэтому равенство $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu_i) = \nu$ невозможно.

Пункт 2). Имеем

$$\nu \in N_2^\pm \Rightarrow \nu^2, e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) \in N_2^\pm$$

и равенство $e^{\sigma \vec{h}_0}(\nu^2) = \nu$ принимает в эллиптических координатах вид

$$\psi + \psi_t = 0 \left(\bmod \frac{2K}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad \sigma = 2\beta,$$

что равносильно

$$\tau = 0 \pmod{K}, \quad \sigma = 2\beta,$$

т.е.

$$\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0, \quad \sigma = 2\beta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^2: N_2 \rightarrow N_2$. Равенство $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0$ равносильно равенствам $\theta = 0 \pmod{\pi}$, $|c| = \max, \min$ – это вершины неинфлекссионных эластик (экстремумы кривизны c). См. рис. 8–11.

Рис. 6. $\operatorname{sn} \tau = 0, \nu \in N_1$

Рис. 7. Инфлекссионная эластика с центром в вершине

Рис. 8. $\operatorname{sn} \tau = 0, |c| = \max, \nu \in N_2$

Рис. 9. Неинфлекссионная эластика с центром в вершине

Рис. 10. $\sin \tau = 0$, $|c| = \min$, $\nu \in N_2$

Рис. 11. Неинфлексионная эластика с центром в вершине

Рис. 12. $\tau = 0$, $\nu \in N_3$

Рис. 13. Критическая эластика с центром в вершине

Неподвижных точек $\varepsilon^1: N_2 \rightarrow N_2$ не существует, так как эластики, соответствующие N_2 , не имеют точек перегиба, поэтому они и называются неинфлексионными.

4.4. Неподвижные точки отражений в N_3 . Пусть $\nu = (\varphi, \alpha, \beta, t) \in N_3$, тогда

$$\nu^i = \varepsilon^i(\nu) = (\varphi^i, \alpha, \beta^i, t) \in N_3.$$

На множестве N_3 инвариант τ получается предельным переходом $k \rightarrow 1 - 0$ из обеих областей N_1, N_2 :

$$\tau = \frac{\sqrt{\alpha}(\varphi + \varphi_t)}{2} = \sqrt{\alpha}\varphi + \frac{\delta}{2}.$$

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\nu \in N_3$. Справедливо следующее:

- 1) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^1) = \nu$ невозможно;
- 2) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) = \nu \Leftrightarrow \tau = 0, \sigma = 2\beta$;
- 3) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наглядный смысл неподвижных точек отражений $\varepsilon^2: N_3 \rightarrow N_3$: равенство $\tau = 0$ означает, что $\theta = 0$, $|c| = \max$ – это вершины критических эластик (экстремумы кривизны c). См. рис. 12, 13.

Неподвижных точек $\varepsilon^1: N_3 \rightarrow N_3$ не существует, так как критические эластики не имеют точек перегиба.

4.5. Неподвижные точки отражений в N_6 .

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\nu = (\theta, c, \alpha, \beta, t) \in N_6$. Справедливо следующее:

- 1) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^1) = \nu$ невозможно;
- 2) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) = \nu \Leftrightarrow \sigma = 2\theta + ct \pmod{2\pi}$;
- 3) $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^3) = \nu$ невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu = (\theta, c, \alpha, \beta, t) \in N_6$. Если $i = 1, 3$, то

$$\nu \in C_6^\pm \Rightarrow \nu^i, e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^i) \in C_6^\mp,$$

поэтому равенство $e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu_i) = \nu$ невозможно. Далее,

$$\nu \in C_6^\pm \Rightarrow \nu^2, e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) \in C_6^\pm$$

и равенство

$$e^{\sigma\vec{h}_0}(\nu^2) = e^{\sigma\vec{h}_0}(-\theta_t, c_t, t) = (\sigma - \theta - ct, c, t) = (\theta, c, t) = \nu$$

равносильно равенству $\sigma = 2\theta + ct$.

§ 5. Общее описание стратов Максвелла MAX_i

Подведем итог исследования страт Максвелла, соответствующих вращениям и отражениям. Из результатов §§ 3, 4 получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_0 \quad \Leftrightarrow \quad r_t = \rho_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предложения 3.2 в силу того, что вращения (6) не имеют неподвижных точек в N .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu \in \text{MAX}_1 \quad \Leftrightarrow \quad & \text{а) } z_t = 0, \quad \text{сн } \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2} \\ & \text{или} \\ & \text{б) } q_t = q_0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В последующей работе [7] мы докажем, что случай б) теоремы 5.2 не реализуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1, \beta = 0$. Напомним, что по определению страта Максвелла включение $\nu = (\lambda, t) \in \text{MAX}_1$ означает, что для некоторого $\sigma \in \mathbb{R}$

$$e^{\sigma \tilde{h}_0}(\nu^1) \neq \nu, \quad e^{\sigma X_0}(q_t^1) = q_t.$$

Условия, при которых выполняются эти неравенство и равенство, были найдены в предложении 3.1 и теореме 4.1.

Пусть сначала $r_t^2 + \rho_t^2 > 0$. Предположим, что $\nu \in \text{MAX}_1$. Тогда $z_t = 0$ и $\sigma = 0$ (см. теорему 4.1). По предложению 3.1 имеем $\text{сн } \tau \neq 0$. Обратно, если $z_t = 0$ и $\text{сн } \tau \neq 0$, выбираем $\sigma = 0$ и получаем $\nu \in \text{MAX}_1$.

Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 = 0$. Если $\nu \in \text{MAX}_1$, то по теореме 4.1 получаем $z_t = 0$, поэтому $q_t = 0 = q_0$. Обратно, если $z_t = 0$, то берем любое $\sigma \neq 0$ и получаем $\nu \in \text{MAX}_1$.

В общем случае утверждение следует из частного случая $\alpha = 1, \beta = 0$ благодаря инвариантности страта Максвелла MAX_1 относительно вращений и дилатаций.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu \in \text{MAX}_2 \quad \Leftrightarrow \quad & \text{а) } V_t = 0, \quad \text{сн } \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2} \\ & \text{или} \\ & \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей теореме, достаточно рассмотреть только случай $\alpha = 1, \beta = 0$, а в этом случае воспользоваться предложением 3.1 и теоремой 4.1.

Необходимость. Пусть $\nu \in \text{MAX}_2$. Тогда $V_t = 0$. Докажем, что $\text{сн } \tau \neq 0$ или $r_t = \rho_t = 0$.

Пусть $r_t > 0$, докажем, что $\operatorname{sn} \tau \neq 0$. От противного, пусть $\operatorname{sn} \tau = 0$. Тогда из параметризации геодезических [1] получаем $y_t = 0$, поэтому $\chi_t = 0 \pmod{\pi}$, следовательно, $\sigma = 2\chi_t = 0 \pmod{2\pi} = 2\beta$. Но тогда $\operatorname{sn} \tau \neq 0$, противоречие.

Пусть $r_t = 0$, $\rho_t > 0$, тогда $\sigma = 2\omega_t - \pi$. Если $\operatorname{sn} \tau = 0$, то из явных формул для геодезических [1] получаем $x_t|_{\operatorname{sn} \tau=0} = 2(2E(p) - p) = 0$, где $E(p)$ – эллиптическая функция Якоби, а $p = t/2$, и $v_t = 0$. Это значит, что $\omega_t = \pi/2 \pmod{\pi}$, поэтому $\sigma = 0 \pmod{2\pi} = 2\beta$. Следовательно, опять $\operatorname{sn} \tau \neq 0$, противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$, $V_t = 0$, $\operatorname{sn} \tau \neq 0$. Тогда, выбирая $\sigma = 2\chi_t$ (при $r_t > 0$) или $\sigma = 2\omega_t - \pi$ (при $r_t = 0$, $\rho_t > 0$), убеждаемся, что $\nu \in \operatorname{MAX}_2$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_1$. Тогда

$$\nu \in \operatorname{MAX}_3 \cap N_1 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предложения 3.1, теоремы 4.1 и инвариантности страта Максвелла MAX_3 относительно группы $G_{\vec{h}_0, Z}$.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\nu \in \operatorname{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 5.4.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu \in \operatorname{MAX}_2 \quad \Leftrightarrow \quad & \begin{aligned} & \text{а) } V_t = 0, \quad \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\psi + \psi_t}{2} \\ & \text{или} \\ & \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, рассматриваем только случай $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Пусть $r_t > 0$.

Необходимость: если $\nu \in \operatorname{MAX}_2$, то $V_t = 0$ и $\sigma = 2\chi_t$. Если $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0$, то $y_t = 0$, поэтому $\chi_t = \pi n$ и $\sigma = 2\pi n = 2\beta \pmod{2\pi}$, противоречие.

Достаточность: если $V_t = 0$, $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \neq 0$, то выбираем $\sigma = 2\chi_t$ и получаем $\nu \in \operatorname{MAX}_2$.

Пусть $r_t = 0$, $\rho_t > 0$.

Необходимость: если $\nu \in \operatorname{MAX}_2$, то $V_t = 0$ и $\sigma = 2\omega_t - \pi$. Если $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0$, то $v_t = 0$, поэтому $\omega_t = \pi/2 \pmod{\pi}$ и $\sigma = 0 \pmod{2\pi}$, противоречие.

Достаточность: если $V_t = 0$, $\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \neq 0$, то полагаем $\sigma = 2\omega_t - \pi$ и получаем $\nu \in \operatorname{MAX}_2$.

Пусть $r_t = \rho_t = 0$. Тогда $V_t = 0$ и, выбирая любое $\sigma \neq 0$, получаем $\nu \in \operatorname{MAX}_2$.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_2$. Тогда

$$\nu \in \operatorname{MAX}_3 \Leftrightarrow z_t = V_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 5.4.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\nu \in \operatorname{MAX}_1 \Leftrightarrow z_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 5.4.

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \nu \in \text{MAX}_2 \quad \Leftrightarrow \quad & \text{а) } V_t = 0, \quad \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2} \\ & \text{или} \\ & \text{б) } r_t = \rho_t = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 5.6.

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть $\nu = (\lambda, t) \in N_3$. Тогда

$$\nu \in \text{MAX}_3 \quad \Leftrightarrow \quad z_t = V_t = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 5.4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим наглядный смысл описания стратов Максвелла в теоремах 5.1–5.10.

Равенства $r_t = \rho_t = 0$, задающие страт MAX_0 (теорема 5.1), означают, что эластика замкнута ($x_t = y_t = 0$), а центр масс ее сегмента совпадает с началом ($c_x = c_y = 0$). Поворот такой элаستيку на любой угол $s \neq 2\pi n$ дает новую эластику с теми же концом, площадью и центром масс.

По модулю вращений отражение ε^2 элаستيку в серединном перпендикуляре к хорде $l^\perp$ действует на ее конец (x, y) , площадь z и центр масс (c_x, c_y) следующим образом:

$$\varepsilon^2: (x, y, z, c_x, c_y) \mapsto (x, y, z, c_x^2, c_y^2), \quad (8)$$

где $\varepsilon^2: (c_x, c_y) \mapsto (c_x^2, c_y^2)$ – отражение центра масс в серединном перпендикуляре $l^\perp$. Напомним, что равенство $V = 0$ означает, что $(c_x, c_y) \in l^\perp$, т.е. $(c_x^2, c_y^2) = (c_x, c_y)$; а равенства $\sin \tau = 0$, $\nu \in N_1$; $\sin \tau \cos \tau = 0$, $\nu \in N_2$; $\tau = 0$, $\nu \in N_3$, означают тривиальное выполнение равенства $V = 0$, когда эластика центрирована в вершине. Поэтому условие п. а) теорем 5.3, 5.6, 5.9 означает, что центр масс сегмента элаستيку лежит на серединном перпендикуляре к хорде, а эластика центрирована не в вершине. Очевидно, что при отражении в серединном перпендикуляре такая эластика перейдет в другую, с теми же началом и концом, площадью и центром масс (отображение (8) становится тождественным), это точка страта MAX_2 . Условие п. б) теорем 5.3, 5.6, 5.9 определяет точку страта MAX_0 .

Отражение ε^1 элаستيку в центре хорды l действует на ее конец (x, y) и площадь z следующим образом:

$$\varepsilon^1: (x, y, z) \mapsto (x, y, -z),$$

поэтому равенство $z_t = 0$ (теоремы 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.8, 5.10) должно обязательно выполняться в точках стратов MAX_1 , MAX_3 . Дополнить это рассуждение анализом расположения центра масс (как выше для стратов MAX_0 , MAX_2) не удастся, так как при $z = 0$ сегмент элаستيку не имеет конечного центра масс – в этом случае центр масс уходит на бесконечность или вообще не определен.

ТЕОРЕМА 5.11. Справедливо $\text{MAX}_i \cap N_j = \emptyset$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геодезические $q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$, соответствующие $\lambda \in C_4 \cup C_5 \cup C_7$, оптимальны на всем луче $s \in [0, +\infty)$ (см. [1]), поэтому они не содержат точек Максвелла.

ТЕОРЕМА 5.12. *Справедливо $\text{MAX}_i \cap N_6 = \emptyset$, $i = 0, 1, 2, 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу инвариантности стратов Максвелла относительно действия группы $G_{\tilde{h}_0, Z}$ достаточно рассмотреть только случай $c = 1$, $\theta = 0$. Тогда геодезическая параметризована следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} x_t &= \sin t, & y_t &= 1 - \cos t, & z_t &= \frac{t - \sin t}{2}, \\ v_t &= \frac{\cos 2t - 4 \cos t + 3}{4}, & w_t &= \frac{\sin 2t - 4 \cos t + 2t}{4}. \end{aligned}$$

0) Пусть $t > 0$, докажем, что $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$. Если $r_t^2 = 0$, то $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $w_t = \pi n \neq 0$. Итак, $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$, поэтому $\text{MAX}_0 \cap N_6 = \emptyset$.

1) Имеем $z_t \neq 0$ при $t > 0$, следовательно, $\text{MAX}_1 \cap N_6 = \emptyset$.

2.а) Пусть $\nu \in \text{MAX}_2 \cap N_6$ и $r_t^2 > 0$, тогда $\sigma = 2\chi_t = t$. Однако из неравенства $e^{\sigma \tilde{h}_0}(\nu^2) \neq \nu$ получаем $\sigma \neq 2\theta + ct = t$, противоречие.

2.б) Пусть $\nu \in \text{MAX}_2 \cap N_6$ и $r_t = 0$, $\rho_t > 0$. Тогда $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $v_t = 0$, $w_t = 0$, $\omega_t = \pi/2 \pmod{\pi}$, $\sigma = 2\omega_t - \pi = t \pmod{2\pi}$. Следовательно, $e^{\sigma \tilde{h}_0}(\nu^2) = \nu$, противоречие.

2.в) Как показано в п. 0), $r_t^2 + \rho_t^2 \neq 0$ при $\nu \in N_6$. Итак, $\text{MAX}_2 \cap N_6 = \emptyset$.

3) Имеем $z_t \neq 0$ при $t > 0$, следовательно, $\text{MAX}_3 \cap N_6 = \emptyset$.

Подведем итог настоящей работы: соберем все полученные в теоремах 5.1–5.12 результаты о стратах Максвелла.

ТЕОРЕМА 5.13. 1) Пусть $\nu \in N_1$. Тогда

$$\begin{aligned} 1.0) \quad \nu \in \text{MAX}_0 & \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0; \\ & \text{а) } z_t = 0, \quad \text{сн } \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2} \\ 1.1) \quad \nu \in \text{MAX}_1 & \Leftrightarrow \text{или} \\ & \text{б) } q_t = q_0; \\ & \text{а) } V_t = 0, \quad \text{сн } \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2} \\ 1.2) \quad \nu \in \text{MAX}_2 & \Leftrightarrow \text{или} \\ & \text{б) } r_t = \rho_t = 0; \\ 1.3) \quad \nu \in \text{MAX}_3 & \Leftrightarrow z_t = V_t = 0. \end{aligned}$$

2) Пусть $\nu \in N_2$. Тогда

$$\begin{aligned} 2.0) \quad \nu \in \text{MAX}_0 & \Leftrightarrow r_t = \rho_t = 0; \\ 2.1) \quad \nu \in \text{MAX}_1 & \Leftrightarrow z_t = 0; \\ & \text{а) } V_t = 0, \quad \text{сн } \tau \text{ сн } \tau \neq 0, \quad \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\psi + \psi_t}{2} \\ 2.2) \quad \nu \in \text{MAX}_2 & \Leftrightarrow \text{или} \\ & \text{б) } r_t = \rho_t = 0; \\ 2.3) \quad \nu \in \text{MAX}_3 & \Leftrightarrow z_t = V_t = 0. \end{aligned}$$

3) Пусть $\nu \in N_3$. Тогда

$$3.0) \quad \nu \in \text{MAX}_0 \quad \Leftrightarrow \quad r_t = \rho_t = 0;$$

$$3.1) \quad \nu \in \text{MAX}_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_t = 0;$$

$$\text{а) } V_t = 0, \tau \neq 0, \tau = \sqrt{\alpha} \frac{\varphi + \varphi_t}{2}$$

$$3.2) \quad \nu \in \text{MAX}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{или}$$

$$\text{б) } r_t = \rho_t = 0;$$

$$3.3) \quad \nu \in \text{MAX}_3 \quad \Leftrightarrow \quad z_t = V_t = 0.$$

4) Справедливо $\text{MAX}_i \cap N_j = \emptyset, i = 0, \dots, 3, j = 4, \dots, 7$.

Исследование разрешимости уравнений, задающих страты Максвелла, а также локализация их корней будут содержанием последующей работы [7].

Список литературы

- [1] Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 63–90.
- [2] А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, “Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем”, *Докл. АН СССР*, **295**:4 (1987), 771–781.
- [3] A. Bellaïche, “The tangent space in sub-Riemannian geometry”, *Sub-Riemannian geometry*, Progr. Math., **144**, eds. A. Bellaïche, J.-J. Risler, Birkhäuser, Basel, 1996, 1–78.
- [4] A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov, “An intrinsic approach to the control of rolling bodies”, *Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control* (Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999), **1**, IEEE, Piscataway, NJ, 1999, 431–435.
- [5] Yu. L. Sachkov, “Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:2 (2004), 457–494.
- [6] Ю. Л. Сачков, “Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.*, **197**:2 (2006), 95–116.
- [7] Ю. Л. Сачков, “Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны”, *Матем. сб.* (в печати).
- [8] S. Wolfram, *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- [9] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.
- [10] S. Jacquet, *Regularity of sub-Riemannian distance and cut locus*, Preprint № 35, Univ. Stud. Firenze, Firenze, Italy, 1999.
- [11] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, ФАЗИС, М., 1996.
- [12] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, “Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **2** (1997), 377–448.
- [13] О. Мясниченко, “Nilpotent (3, 6) sub-Riemannian problem”, *J. Dynam. Control Systems*, **8**:4 (2002), 573–597.
- [14] Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, Мир, М., 1986.
- [15] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **52**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

- [16] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1981.
- [17] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Неголономные динамические системы и геометрия распределений”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы*–7, **16**, ВИНТИ, М., 1986, 5–85.
- [18] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Физматлит, М., 1970.
- [19] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, УРСС, М., 2002.

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем РАН,

г. Переславль-Залесский

E-mail: sachkov@sys.botik.ru

Поступила в редакцию

28.03.2005