Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Шрамов, Обрыв возрастающих цепочек в множестве канонических порогов торических многообразий, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 4, 151–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:36:30

УДК 512.7

К. А. Шрамов

Обрыв возрастающих цепочек в множестве канонических порогов торических многообразий

В работе доказывается, что для множества канонических порогов пар, состоящих из торического многообразия и инвариантной линейной системы, выполнено условие обрыва возрастающих цепочек.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Многие численные инварианты, связанные с особенностями, образуют множества, обладающие одним интересным свойством, а именно, удовлетворяющие условию обрыва возрастающих цепочек. Гипотетически этим свойством обладают, например, множество индексов Фано (см. [1]), множество логканонических порогов (см. [2]) и множество минимальных дискрепантностей (см. [2]) для многообразий любой размерности. Для логканонических порогов соответствующее утверждение доказано в размерности 3 (см. [3]). Доказательство для множества логканонических порогов торических многообразий любой размерности можно найти, например, в [4], а для множества минимальных дискрепантностей торических многообразий любой размерности – в [5].

Канонические пороги естественно возникают при изучении последовательностей элементарных бирациональных отображений (линков), на которые разлагаются бирациональные отображения между расслоениями Мори (см., например, [4]). Условие обрыва возрастающих цепочек возникает при доказательстве конечности таких последовательностей. К сожалению, множество канонических порогов оказывается устроенным сложнее, чем, например, множество логканонических порогов (условие обрыва для которого также – хотя и менее естественным образом – можно применить к доказательству конечности цепочек линков, как описано, например, в [4]). В торическом случае это можно заметить, например, сравнив пример 2.6 настоящей работы с [4; предложение 14-5-4]; см. по этому поводу также [4; замечание 14-5-5]. Несмотря на это можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Множество канонических порогов пар $(X, \mathcal{H})$, где X – $\mathbb{Q}$ -факториальное n -мерное торическое многообразие с терминальными особенностями, а $\mathcal{H}$ – (непустая, но не обязательно полная) инвариантная линейная система на X , удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек.*

Доказательство этой теоремы и служит целью настоящей работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00353).

Параграф 2 посвящен введению определений и описанию простейших свойств канонических порогов, а также сведению задачи к чисто комбинаторному вопросу. Лемма 2.3 и следствие 2.4 позволяют вместо множества всех канонических порогов (для торических многообразий фиксированной размерности n) изучать более простое множество канонических порогов для n -мерных торических многообразий с фиксированным инвариантным дивизором. Лемма 2.7 сводит вопрос к изучению множества минимумов некоторой функции на некоторых конечных подмножествах множества рациональных точек n -мерного единичного куба. Параграф 3 содержит формулировки и доказательства вспомогательных утверждений. Лемма 3.7 еще более упрощает изучаемое множество, а леммы 3.8 и 3.9 и замечание 3.10 устанавливают нужные для §4 факты о подмножествах множества рациональных точек n -мерного куба. В §4 завершается доказательство теоремы 1.1; отметим, что конструкции §4 во многом аналогичны применявшимся в [5].

Автор выражает благодарность Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и внимание к работе, а также И. А. Чельцову за полезные обсуждения.

§ 2. Определение и простейшие свойства канонических порогов

В дальнейшем все многообразия предполагаются определенными над $\mathbb{C}$, нормальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными. Определение и основные свойства торических многообразий, а также относящиеся к ним стандартные обозначения описаны, например, в [6]. Определение основных классов особенностей (в частности, терминальных и канонических) содержится, например, в [4]. Всюду в дальнейшем слово “дивизор” обозначает “дивизор Вейля”. Напомним (см., например, [7; определение 4.6]), что для непустой линейной системы $\mathcal{H}$ на многообразии X дискрепантность $a(X, \mathcal{H}, E)$ определяется как $\sup\{a(X, D, E) \mid D \in H\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть X – (нормальное $\mathbb{Q}$ -факториальное) многообразие с не более чем каноническими особенностями, $D = \sum d_i D_i$ – ненулевой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X . *Каноническим порогом пары (X, D)* называется число

$$c(X, D) = \sup\{c \mid \text{пара } (X, cD) \text{ канонична}\}.$$

Если $\mathcal{H}$ – (непустая) линейная система, то *каноническим порогом пары $(X, \mathcal{H})$* называется число

$$c(X, \mathcal{H}) = \sup\{c \mid \text{пара } (X, c\mathcal{H}) \text{ канонична}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Для $n \in \mathbb{N}$, $d = (d_1, \dots, d_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, $d \neq 0$, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{CT}_n = \{ & c(X, \mathcal{H}) \mid X - (\mathbb{Q}\text{-факториальное}) \ n\text{-мерное} \\ & \text{торическое многообразие с терминальными особенностями,} \\ & \mathcal{H} - (\text{непустая, но не обязательно полная}) \\ & \text{инвариантная линейная система на } X \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{CT}_{n,d} = \{ & c(X, D) \mid X - (\mathbb{Q}\text{-факториальное}) \ \text{аффинное } n\text{-мерное} \\ & \text{торическое многообразие} \\ & \text{с неприводимыми инвариантными дивизорами } D_i, \ D = \sum d_i D_i \}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.3 (ср. [4; предложение 14-5-4], [7; определение 4.6]). Если X – ($\mathbb{Q}$ -факториальное) торическое многообразие, $\mathcal{H}$ – инвариантная линейная система, то канонический порог $c(X, \mathcal{H}) = c(X(\sigma), D)$, где $X(\sigma) \subset X$ – некоторое ($\mathbb{Q}$ -факториальное) аффинное торическое многообразие, D – инвариантный дивизор на $X(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В общем (не обязательно торическом) случае $c(X, \mathcal{H}) = c(U, D)$ для некоторого $D \in \mathcal{H}$ и некоторого аффинного открытого подмножества $U \in X$; в торическом случае подмножество U можно считать инвариантным. Дивизор D , вообще говоря, нельзя выбрать инвариантным, но можно доказать, что $c(U, D) = c(U, \bar{D})$ для некоторого инвариантного дивизора $\bar{D}$ (быть может, уже никак не связанного с системой $\mathcal{H}$). Действительно, так как инвариантная система порождается инвариантными сечениями, то нужное утверждение следует из того, что если на U даны дивизоры D' и D'' , то для общего дивизора D из пучка, порожденного D' и D'' , и любого исключительного дивизора E выполнено $a(X, D, E) = \max\{a(X, D', E), a(X, D'', E)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Условие обрыва возрастающих цепочек выполнено для $\mathcal{CT}_n$ тогда и только тогда, когда оно выполнено для всех $\mathcal{CT}_{n,d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 условие достаточно проверять для ($\mathbb{Q}$ -факториальных) аффинных торических многообразий и инвариантных дивизоров на них, т.е. если оно не выполнено для $\mathcal{CT}_n$, то найдется возрастающая последовательность

$$\{c_k = c(X_k, D_k) \in \mathcal{CT}_{n,d_k}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Предположим, что из этой последовательности нельзя выбрать подпоследовательность $\{c_{k_j}\}$ с одинаковыми d_{k_j} . Тогда среди $d_k = (d_1^k, \dots, d_n^k)$ есть бесконечно много различных и, следовательно, встречаются d_k со сколь угодно большим $\max\{d_i^k \mid 1 \leq i \leq n\}$. Но для дивизора $D = \sum d_i^k D_i$

$$c(X, D) \leq \frac{1}{\max\{d_i^k \mid 1 \leq i \leq n\}},$$

поэтому последнее предположение противоречит тому, что последовательность $\{c_k\}$ возрастает.

Из леммы 2.3 видно, что следующий пример описывает общую ситуацию.

ПРИМЕР 2.5. Пусть $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ – рациональный симплицальный конус, соответствующий аффинному торическому многообразию $X = X(\sigma)$ с терминальными особенностями. Пусть D_i , $i = 1, \dots, n$, – неприводимые инвариантные дивизоры многообразия X , соответствующие лучам с примитивными векторами e_i , и выбран инвариантный дивизор $D = \sum d_i D_i$. Пусть

$$V = (\sigma \cap N) \setminus \{0, e_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

$V_p \subset V$ – подмножество примитивных векторов. Пусть $\varphi: Y \rightarrow X$ – стягивание дивизора E , соответствующего вектору $v = \sum v_i e_i \in V_p$ (для вычисления канонического порога достаточно рассматривать только торические морфизмы, так как пара (X, cD) не является канонической тогда и только тогда, когда

найдется торическое логразрешение с дискрепантностью меньше 0). Положим

$$f_D(w) = \frac{(\sum w_i) - 1}{\sum d_i w_i}.$$

Тогда

$$K_Y + \varphi_*^{-1}(cD) = \varphi^*(K_X + cD) + a_c(v)E,$$

где

$$a_c(v) = -1 + \sum v_i - \sum c d_i v_i.$$

По определению

$$\begin{aligned} c(X, D) &= \sup\{c \mid \forall v \in V_p \quad a_c(v) \geq 0\} \\ &= \sup\left\{c \mid \forall v \in V_p \quad -1 + \sum v_i \geq c \sum d_i v_i\right\} \\ &= \sup\{c \mid \forall v \in V_p \quad c \leq f_D(v)\} \\ &= \inf\{f_D(v) \mid v \in V_p\} = \inf\{f_D(v) \mid v \in V\}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.6. Пусть $X = \mathbb{A}^4/\mathbb{Z}_4(3, 1, 1, 1)$. Тогда X – аффинное торическое многообразие с терминальными особенностями. Пусть D – инвариантный дивизор, соответствующий вектору e_1 . Воспользовавшись результатами примера 2.5, нетрудно показать, что $c(X, D) = 2/3$.

В дальнейшем нас будут интересовать канонические пороги именно в случае торических многообразий, и мы будем придерживаться обозначений примера 2.5.

ЛЕММА 2.7. Либо $c(X, D) = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, либо $c(X, D) = \min\{f_D(v) \mid v \in V_p, 0 \leq v_i < 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующее вычисление показывает, что если хотя бы одну координату точки $v' \in V$ можно уменьшить (разумеется, не выходя за пределы множества V), то либо значение $f_D(v')$ при этом не увеличится, либо $c(X, D) \in \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим точку $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, а также точку $v' = (v'_1, \dots, v'_n) = (v_1 + 1, v_2, \dots, v_n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta(v, v') &= f_D(v) - f_D(v') = \frac{(\sum v_i) - 1}{\sum d_i v_i} - \frac{\sum v_i}{(\sum d_i v_i) + d_1} \\ &= \frac{d_1 \sum v_i - \sum d_i v_i - d_1}{(\sum d_i v_i)(\sum d_i v_i + d_1)}. \end{aligned}$$

Эта разность не меньше нуля лишь в том случае, если выполнено $d_1 \sum v_i \geq \sum d_i v_i + d_1$. Но тогда

$$\frac{(\sum v'_i) - 1}{\sum d_i v'_i} = \frac{1}{d_1} \frac{d_1 \sum v_i}{\sum d_i v_i + d_1} \geq \frac{1}{d_1}.$$

Заметим, что $c(X, D) \leq 1/d_1$. Если $c(X, D) = 1/d_1$, то доказывать нечего. Если же $c(X, D) < 1/d_1$, то рассмотрим множества

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= \{w \mid \exists v \in V, w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 + 1, v_2, \dots, v_n), \Delta(v, w) \leq 0\}, \\ \tilde{V}_2 &= \left\{ w \mid \exists v \in V, \right. \\ &\quad \left. w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 + 1, v_2, \dots, v_n), \Delta(v, w) > 0, f_D(w) \geq \frac{1}{d_1} \right\}, \\ \tilde{V} &= V_p \setminus (\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2).\end{aligned}$$

Другими словами, если $w \in V_p \setminus \tilde{V}$, то либо найдется $v \in V$, а значит, и $v \in V_p$, для которого $f_D(v) < f_D(w)$, либо $f_D(w) \geq 1/d_1$. Это значит, что

$$c(X, D) = \inf \left\{ \frac{(\sum v_i) - 1}{\sum d_i v_i} \mid v \in \tilde{V} \right\}.$$

Рассматривая пары $v, v'' = (v_1, v_2 + 1, \dots, v_n)$ и т.д., приходим к выводу, что в случае $c(X, D) \notin \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$ можно вычислять $c(X, D)$ по тем точкам v , ни одну из координат которых нельзя уменьшить на 1, оставаясь в V . Последнее условие значит, что при уменьшении на 1 любой из координат v либо она становится отрицательной (если это условие выполнено для всех координат v_i , то $0 \leq v_i < 1$), либо соответствующий вектор становится равен одному из примитивных векторов e_j (в этом случае $v = e_i + e_j$ для некоторых i и j). Таким образом, минимум $f_D(v)$ достигается либо на множестве $\{v \mid v \in V_p, 0 \leq v_i < 1\}$, либо на множестве $\{v \mid v = e_i + e_j\}$. Во втором случае $c(X, D) = 1/(d_i + d_j)$ для некоторых i и j .

Пример 2.6 показывает, что множество канонических порогов торических многообразий размерности больше 3 устроено сложнее, чем множество их лог-канонических порогов. Однако для размерности 3 можно доказать следующее несложное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. *Справедливо следующее: $\mathcal{CT}_3 = \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 достаточно доказать это утверждение для пар, состоящих из аффинного торического многообразия и инвариантного дивизора на нем. В размерности 3 торические терминальные особенности являются циклическими факторособенностями, а все терминальные циклические факторособенности имеют тип $\frac{1}{a}(1, r, a - r)$ (см., например, [8]).

Пусть X имеет факторособенность типа $\frac{1}{a}(1, r, a - r)$, $(a, r) = 1$. Пусть

$$V' = \{v' \mid v' = av, v \in V, v_i < 1\}.$$

Тогда $V' = \{(t, \overline{rt}, a - \overline{rt}) \mid 1 \leq t < a\}$, где $\overline{rt}$ обозначает остаток rt по модулю a . Предположим, что выполнено $d_2 \geq d_3$.

По лемме 2.7 либо $c(X, D) \in \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$, либо

$$\begin{aligned} c(X, D) &= \inf \left\{ \frac{(\sum_{i=1}^3 v'_i) - a}{\sum_{i=1}^3 d_i v'_i} \mid v' \in V' \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{t + \overline{rt} + a - \overline{rt} - a}{d_1 t + d_3 a + (d_2 - d_3) \overline{rt}} \mid 1 \leq t < a \right\} \\ &= \left(\sup \left\{ d_1 + d_3 a \frac{1}{t} + (d_2 - d_3) \frac{\overline{rt}}{t} \mid 1 \leq t < a \right\} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $1/t$ – убывающая, а $\overline{rt}/t$ – невозрастающая функции t , то супремум достигается при $t = 1$ и

$$c(X, D) = \frac{1}{d_1 + d_3 a + (d_2 - d_3) r} \in \left\{ \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Случай $d_2 < d_3$ сводится к уже рассмотренному переобозначением $r' = a - r$. Таким образом, $\mathcal{CT}_3 \subset \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$. При $d_2 = d_3 = 0$ получаем $c(X, D) = 1/d_1$, т.е. $\mathcal{CT}_3 = \{1/m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Структура множества кратных точки из I^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 (см. [5]). Пусть $I^n \subset \mathbb{R}^n$ – единичный куб, и пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in I^n$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha^{(m)} \in I^n$ – это точка $(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})$, где $a_i = ma_i - (\lfloor ma_i \rfloor - \lfloor a_i \rfloor)$ (т.е. $a_i^{(m)} = 1$, если $a_i = 1$, и $a_i^{(m)} = \{ma_i\}$ в противном случае).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть I' – внутренность некоторой грани $I \subset I^n$ (например, внутренность I^n) и $\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)} \in I'$. Если $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} \in I'$, то $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(i+j)}$. Если $\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} \in I'$ и $i - j > 0$, то $\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = \alpha^{(i-j)}$. Эти свойства последовательности $\{\alpha^{(m)}\}$ будут использоваться повсеместно без комментариев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Если $A \subset I^n$, то $A^{(\mathbb{N})}$ определяется как $\{\alpha^{(m)} \mid \alpha \in A, m \in \mathbb{N}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Будем называть *рациональным подпространством* в $\mathbb{R}^n$ аффинное подпространство, заданное уравнениями с рациональными коэффициентами, а *рациональным полиэдром* – пересечение рационального подпространства с I^n . Прочие аффинные подпространства будем называть *иррациональными подпространствами*, а их пересечения с I^n – *иррациональными полиэдрами*.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\alpha \in I^n$, $A = \{\alpha\}^{(\mathbb{N})}$, $\overline{A}$ – замыкание множества A . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\overline{A}$ является объединением конечного числа рациональных полиэдров одинаковой размерности d , являющихся пересечениями параллельных d -мерных аффинных подпространств с I^n ;

- 2) если L – рациональный полиэдр и $\alpha \in L$ – общая (не лежащая в рациональных полиэдрах меньшей размерности) точка L , то L является компонентой $\bar{A}$;
- 3) пусть $U \subset \bar{A}$ открыто в $\bar{A}$, тогда существует $M = M(U, \alpha)$ такое, что для любого $m_0 \in \mathbb{N}$ среди точек $\alpha^{(m_0+1)}, \dots, \alpha^{(m_0+M)}$ найдется точка, принадлежащая U .

3.2. Прочие вспомогательные утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Для $d = (d_1, \dots, d_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ и $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$f_d(\alpha) = \frac{(\sum a_i) - 1}{\sum d_i a_i}.$$

Пусть $d_1 \neq 0, \dots, d_{i_0} \neq 0, d_{i_0+1} = \dots = d_n = 0$. Тогда $\mathcal{L}_d$ обозначает подпространство, заданное уравнениями $x_1 = \dots = x_{i_0} = 0, x_1 + \dots + x_n = 1$, а L_d – полиэдр $\mathcal{L}_d \cap I^n$. Назовем точку $\alpha \in I^n \cap \mathbb{Q}^n$ *правильной*, если $f_d(\alpha) > 0$ и минимум f_d на множестве $\{\alpha\}^{(\mathbb{N})} \setminus \{x_1 = \dots = x_{i_0} = 0\}$ достигается в точке α . Положим

$$\mathcal{CT}'_{n,d} = \{c = \min\{f_d(\alpha^{(m)}) \mid m \in \mathbb{N}\} \mid \alpha - \text{правильная точка в } I^n\}.$$

ЛЕММА 3.7. Условие обрыва возрастающих цепочек для $\mathcal{CT}'_{n,d}$ эквивалентно аналогичному условию для $\mathcal{CT}_{n,d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 2.7 видно, что либо $c(X, D) = 1/m$, либо $c(X, D)$ равен минимуму f_d на некотором (конечном) подмножестве рациональных точек $G \subset I^n$, являющемся образом множества точек $v = \sum v_i e_i \in N$ с $0 \leq v_i < 1$ при отождествлении векторов e_i с ортами в $\mathbb{R}^n \supset I^n$. В частности, вместе с каждой точкой $\alpha \in G$ множество G содержит все точки $\alpha^{(m)}$. Таким образом, если минимум достигается в точке $\alpha_0 \in G$, то α_0 – правильная точка и $c(X, D) \in \mathcal{CT}'_{n,d}$.

ЛЕММА 3.8. Пусть $B \subset \bar{A}$ и $B' \subset B^{(\mathbb{N})}$. Тогда $B' \subset \overline{A^{(\mathbb{N})}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $\alpha \in A$ близка к $\beta \in B$, то для заранее фиксированного m точка $\alpha^{(m)} \in A^{(\mathbb{N})}$ близка к $\beta^{(m)} \in B^{(\mathbb{N})}$.

ЛЕММА 3.9. Пусть $\mathcal{L}$ – рациональное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и полиэдр $L = \mathcal{L} \cap I^n$ содержится в замыкании множества A , причем $A \cap L = \emptyset$. Тогда найдется подпространство $\mathcal{L}' \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\dim \mathcal{L}' = \dim \mathcal{L} + 1$, $L' = \mathcal{L}' \cap I^n \supset L$ и $L' \subset A^{(\mathbb{N})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как L рационален, то по лемме 3.5, 2) можно выбрать точку $\beta \in L$ такую, что L является компонентой $\{\beta\}^{(\mathbb{N})}$. Рассмотрим последовательность $\{\alpha_i\} \subset A$, для которой $\lim \alpha_i = \beta$. Пусть l_i – прямая, содержащая α_i и перпендикулярная L , λ_i – единичный вектор, параллельный l_i , λ – единичный вектор, являющийся предельной точкой последовательности $\{\lambda_i\}$. Пусть аффинное подпространство $\mathcal{L}'$ порождено L и сдвигом L на λ и $L' = \mathcal{L}' \cap I^n$. Докажем, что $L' \subset \{\alpha_i\}^{(\mathbb{N})}$.

Пусть $\gamma \in L'$ и $U' \ni \gamma$ открыто в I^n . Построим точку из $\{\alpha_i\}^{(\mathbb{N})}$, лежащую в U' . Пусть $\tilde{U}'$ – проекция U' на L . Пусть V – достаточно малая окрестность λ

на единичной сфере, а U – достаточно малое открытое в L подмножество $\tilde{U}'$ такие, что для всех $v \in V$ и для всех $u \in U$ имеем $u + \mathbb{R}v \cap U' \neq \emptyset$. Уменьшив, если потребуется, V , U' и U , можно считать, что каждая прямая $u + \mathbb{R}v$ пересекается с U' по интервалу и найдутся такие не зависящие от u и v числа K , D_1 и D_2 , что длина каждого интервала, получающегося в качестве такого пересечения, заключена между числами $0.9D_1$ и D_1 , расстояние от точки u до ближайшей точки пересечения $u + \mathbb{R}v$ с $\tilde{U}'$ заключено между числами K и $K + 0.1D_1$, а минимум расстояний от точек средней трети каждого интервала до $I^n \setminus U'$ не меньше D_2 . Пусть $M = M(U, \beta)$ (см. лемму 3.5, 3)).

Для точки α_k выберем такую точку $\beta^{(m)} \in L$, что выполнено

$$\frac{\alpha_k - \beta^{(m)}}{|\alpha_k - \beta^{(m)}|} \in V.$$

Это возможно, так как $\{\beta\}^{(\mathbb{N})}$ плотно в L . Пусть при этом $|\alpha_k - \beta^{(m)}| < 0.1D_1$ и $M|\alpha_k - \beta| < D_2$ (это выполнено, если k достаточно велико). Пусть M_1 – наименьшее целое число, для которого $M_1|\alpha_k - \beta^{(m)}| > K + 0.35D_1$. Тогда $M_1|\alpha_k - \beta^{(m)}| < K + 0.45D_1$. Пусть $M_2 < M$ таково, что $\beta^{(mM_1+M_2)} \in U$. Тогда $\alpha_k^{(M_1+M_2)} = \beta^{(mM_1+M_2)} + M_1(\alpha_k - \beta^{(m)}) + M_2(\alpha_k - \beta) \in U'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Пусть в условиях леммы 3.8 (соответственно леммы 3.9) выполнено $B, B' \subset L_d$ (соответственно $L \subset L_d$) и $A = \{\alpha_i\}$ состоит из правильных точек. Тогда можно выбрать $A' = \{\alpha'_i\} \subset A^{(\mathbb{N})}$ такое, что $B' \subset \bar{A}'$, все точки α'_i правильные и $f_d(\alpha'_i) = f_d(\alpha_i)$. Действительно, в доказательствах лемм 3.8 и 3.9 строятся подмножества $A^{(\mathbb{N})}$, содержащие в своем замыкании B' (соответственно L') и состоящие из точек α'_i таких, что $\alpha'_i = \beta_{j_i} + m_i(\alpha_i - \beta_{k_i})$ для некоторых $\beta_{j_i}, \beta_{k_i} \in L_d$. Таким образом, $f_d(\alpha'_i) = f_d(\alpha_i)$. Так как кроме этого $\alpha'_i = \alpha_i^{n_i}$, то $f_d(\alpha'_i) = \min\{f_d(\alpha_i^{(m)})\}$ и α'_i – правильная точка.

§ 4. Обрыв возрастающих цепочек

Теперь мы применим результаты §3 к изучению множества $\mathcal{CT}'_{n,d}$. Следующие рассуждения во многом аналогичны проводившимся в [5].

ЛЕММА 4.1. Пусть $\{\alpha_i\} \subset I^n$ – последовательность правильных точек, сходящаяся к точке $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \notin L_d$. Тогда числовая последовательность $\{f_d(\alpha_i)\}$ не является строго возрастающей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что эта последовательность является строго возрастающей. Заметим, что в этом случае из $\alpha \notin L_d$ следует, что f_d определена в α , так как $\{f_d(\alpha_i)\}$ не может быть бесконечно возрастающей.

Можно выбрать $m > 0$, для которого $\alpha^{(m)}$ достаточно близко к α и $f_d(\alpha^{(m)}) \leq f_d(\alpha)$. Действительно, по соображениям компактности можно выбрать такие $m_2 > m_1$, что $\alpha^{(m_2)}$ достаточно близко к $\alpha^{(m_1)}$ и, следовательно, $\alpha^{(m_2-m_1+1)}$ достаточно близко к α . Если при этом $f_d(\alpha^{(m_2-m_1+1)}) \leq f_d(\alpha)$, то желаемое достигнуто; если же $f_d(\alpha^{(m_2-m_1+1)}) > f_d(\alpha)$, то выполнено $f_d(\alpha^{(m_1-m_2+1)}) < f_d(\alpha)$, так как f_d монотонна вдоль отрезков прямых, лежащих в ее области определения, и можно затем выбрать $m_4 \gg m_3$, для которых $m = m_4 - m_3 + m_2 - m_1 + 1 > 0$ и $\alpha^{(m_4-m_3+m_2-m_1+1)}$ все еще обладает требуемыми свойствами.

Если найдется выбранное согласно описанной выше процедуре число m , для которого $f_d(\alpha^{(m)}) < f_d(\alpha)$, то, так как при больших k точка $\alpha_k^{(m)}$ близка к $\alpha^{(m)}$, а точка α_k — к α , имеем $f_d(\alpha_k^{(m)}) < f_d(\alpha_k)$, противоречие с правильностью α_k . Если же для сколь угодно больших m выполняется $f_d(\alpha^{(m)}) = f_d(\alpha)$, то выберем m так, чтобы $0 < \sum d_i a_i^{(m)} < 2 \sum d_i a_i$. Положим $s = \sum d_i a_i^{(m)} / \sum d_i a_i$, $\gamma(k) = (c_1(k), \dots, c_n(k)) = \alpha_k - \alpha$. Пусть k столь велико, что $(\alpha + \gamma(k))^{(m)} = \alpha^{(m)} + m\gamma(k)$ и $\sum d_i a_i^{(m)} + m \sum d_i c_i(k) > 0$. Тогда $f_d(\alpha^{(m)} + s\gamma(k)) = f_d(\alpha + \gamma(k))$, что получается прямым вычислением с использованием равенства $f_d(\alpha^{(m)}) = f_d(\alpha)$. Далее, имеем неравенство $f_d(\alpha^{(m)} + \gamma(k)) < f_d(\alpha^{(m)})$, которое следует из этого равенства и неравенства $f_d(\alpha + \gamma(k)) < f_d(\alpha)$. Так как f_d монотонна вдоль отрезков прямых в области определения, а весь отрезок от $\alpha^{(m)}$ до $\alpha^{(m)} + m\gamma(k)$ лежит в области определения f_d , то отсюда следует

$$f_d(\alpha^{(m)} + m\gamma(k)) < f_d(\alpha^{(m)} + s\gamma(k)).$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} f_d(\alpha_k) &= f_d(\alpha + \gamma(k)) = f_d(\alpha^{(m)} + s\gamma(k)) > f_d(\alpha^{(m)} + m\gamma(k)) \\ &= f_d((\alpha + \gamma(k))^{(m)}) = f_d(\alpha_k^{(m)}), \end{aligned}$$

что противоречит правильности α_k .

ЛЕММА 4.2. Пусть $\{\alpha_i\} \subset I^n$ — последовательность правильных точек, сходящаяся к точке $\alpha \in L_d$. Тогда найдется последовательность правильных точек $\{\alpha'_i\}$, сходящаяся к точке $\alpha' \notin L_d$, такая, что $f_d(\alpha_i) = f_d(\alpha'_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим последовательность полиэдров $L^0 \subset L^1 \subset \dots \subset L^s$ таких, что $\dim(L^{k+1}) > \dim(L^k)$ и для каждого L^k найдется некоторое подмножество $\tilde{A}^k \subset \{\alpha_i\}^{(\mathbb{N})}$ со свойством $L^k \subset \overline{\tilde{A}^k}$, начиная с $L^0 = \{\alpha\}$, $\tilde{A}^0 = \{\alpha_i\}$, причем $\tilde{A}^k = \{\alpha_i^k\}$ состоит из правильных точек α_i^k с $f_d(\alpha_i^k) = f_d(\alpha_i)$. Пусть построен $L^k \subset L_d$. Если L^k не рационален, то L^{k+1} строится по лемме 3.8 (при этом используется то, что для общей точки α иррационального полиэдра L^k выполнено $\dim \overline{\{\alpha\}^{(\mathbb{N})}} > \dim L^k$); в этом случае $L^{k+1} \subset L_d$, так что по замечанию 3.10 можно выбрать $\tilde{A}^{k+1} \subset (\tilde{A}^k)^{(\mathbb{N})}$ состоящим из правильных точек α_i^{k+1} с $f_d(\alpha_i^{k+1}) = f_d(\alpha_i)$. Если L^k рационален, то L^{k+1} строится по лемме 3.9, и снова по замечанию 3.10 можно считать, что $\tilde{A}^{k+1}$ состоит из правильных точек с нужными значениями f_d . Наконец, если на каком-то шаге построен $L^k \not\subset L_d$, то лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для множества $\mathcal{ET}'_{n,d}$ выполнено условие обрыва возрастающих цепочек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется последовательность правильных точек α_i такая, что последовательность $f_d(\alpha_i)$ возрастает. Выберем из нее подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\alpha \in I^n$. По лемме 4.2 можно считать, что $\alpha \notin L_d$, что приводит к противоречию с леммой 4.1.

Следствие 4.3 вместе с леммой 3.7 и следствием 2.4 завершает доказательство теоремы 1.1.

Список литературы

- [1] V. Shokurov, “Problems about Fano varieties”, *Birational geometry of algebraic varieties: open problems*, 23 International Symposium. Division of Mathematics. Taniguchi Foundation, Katata, 1988, 30–32.
- [2] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, UT, 1991), *Astérisque*, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.
- [3] J. McKernan, Yu. Prokhorov, “Threefold thresholds”, *Manuscripta Math.*, **114**:3 (2004), 281–304.
- [4] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] A. Borisov, “Minimal discrepancies of toric singularities”, [arXiv:math.AG/9403012](https://arxiv.org/abs/math/9403012).
- [6] В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–134.
- [7] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry* (Santa Cruz, CA, USA, 1995), *Proc. Symp. Pure. Math.*, **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [8] M. Reid, “Young person’s guide to canonical singularities”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **46** (1987), 345–414.

К. А. Шрамов (К. А. Shramov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: shramov@mccme.ru

Поступила в редакцию

29.04.2005