Общероссийский математический портал

С. В. Гонченко, Модули Ω -сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:38:41

УДК 517.9

С. В. Гонченко

Модули Ω -сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром

В статье рассмотрены двумерные диффеоморфизмы, имеющие негрубый гетероклинический контур, составленный из двух седловых неподвижных точек и двух гетероклинических траекторий: грубой и негрубой. Такие диффеоморфизмы делятся на три класса, в зависимости от структуры множества N траекторий, целиком лежащих в окрестности контура. В случае диффеоморфизмов первого и второго классов N допускает полное описание. Показано, что диффеоморфизмы третьего класса имеют Ω -модули – непрерывные инварианты топологической сопряженности на множестве неблуждающих траекторий. Указаны явно два таких модуля: θ и τ_0 , рассмотрены достаточные условия Ω -сопряженности при рациональном θ , а также доказано, что на бифуркационной поверхности диффеоморфизмов третьего класса плотны системы со счетным множеством Ω -модулей.

Библиография: 18 названий.

Введение

Одним из важных результатов, полученных в качественной теории дифференциальных уравнений за последнее время, является открытие у негрубых многомерных систем *модулей* – локально непостоянных непрерывных функционалов, значениями которых системы разбиваются на континуум классов топологической или Ω -эквивалентности (топологической эквивалентности на множестве неблуждающих траекторий). Точное определение модуля см. в §3.

Модули топологической эквивалентности в системах с простой динамикой открыл Пэлис [1]. Он обнаружил, что такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией (т.е. такие диффеоморфизмы, у которых инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание). Системы с негрубой гомоклинической траекторией (т.е. касаются инвариантные многообразия одной и той же седловой неподвижной точки) имеют также аналогичный модуль. Но ситуация здесь оказывается более сложной. Как показано в [2]–[4], у определенного класса систем с негрубой гомоклинической траекторией существуют модули Ω -эквивалентности, и более того, на бифуркационных поверхностях таких систем плотны системы со счетным множеством Ω -модулей [5], [6]. Отметим, что изменение значения Ω -модуля ведет к бифуркациям неблуждающих траекторий (в частности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1787), а также Международного научного фонда (грант № 98300).

периодических и гомоклинических). Существование же счетного множества таких модулей свидетельствует, что независимое изменение их значений (как управляющих параметров) может приводить к сколь угодно вырожденным бифуркациям [5], [6].

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании Ω -модулей у двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, т.е. таких диффеоморфизмов, которые имеют две грубые седловые неподвижные точки, одна пара инвариантных многообразий которых имеет квадратичное касание, а другая — трансверсальное пересечение. Аналогично случаю систем с негрубой гомоклинической траекторией [7], данные диффеоморфизмы разбиваются на три класса в зависимости от структуры множества N траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гетероклинического контура. При этом показывается, что N описывается полностью в случае диффеоморфизмов первого и второго классов. Но, если для диффеоморфизмов первого класса множество N имеет тривиальную структуру (теорема 2), то в случае диффеоморфизмов второго класса N сопряжено некоторой нетривиальной фактор-системе топологической схемы Бернулли из четырех символов (теорема 3). В случае диффеоморфизмов третьего класса в множестве N содержатся нетривиальные гиперболические подмножества (теоремы 1 и 4), но N , как правило, не допускает полного описания, и более того, его структура “непрерывно” меняется при переходе от одной системы третьего класса к другой. Основная причина этого — существование у диффеоморфизмов третьего класса модулей Ω -сопряженности. В статье явно указаны два основных Ω -модуля θ и τ_0 (теоремы 5 и 6). Кроме того, установлены некоторые достаточные условия Ω -сопряженности при рациональном θ (теоремы 7 и 8), а также доказано, что на бифуркационной поверхности диффеоморфизмов третьего класса плотны системы со счетным множеством Ω -модулей (теорема 9).

§1. Постановка задачи и некоторые технические результаты

Рассмотрим C^r -гладкий ($r \geq 3$) двумерный диффеоморфизм f , имеющий две грубые седловые неподвижные точки O_1 и O_2 с собственными значениями λ_s, γ_s такими, что $|\lambda_s| < 1 < |\gamma_s|$, $s = 1, 2$. Будем предполагать, что $W^u(O_1)$ пересекается трансверсально с $W^s(O_2)$ по точкам некоторой гетероклинической траектории Γ_{12} , а $W^u(O_2)$ имеет квадратичное касание с $W^s(O_1)$ в точках некоторой гетероклинической траектории Γ_{21} (рис. 1). В этой ситуации будем говорить, что f имеет *негрубый гетероклинический контур* $C = O_1 \cup O_2 \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$.

Рассмотрим достаточно малую окрестность U контура C . Она представляет собой объединение двух малых дисков U_1 и U_2 , содержащих точки O_1 и O_2 , и некоторого конечного числа малых окрестностей находящихся вне U_1 и U_2 точек траекторий Γ_{12} и Γ_{21} .

1.1. Отображения в окрестности седловых неподвижных точек.

В [3], [4] показано, что на U_s существуют такие локальные C^{r-1} -координаты (x_s, y_s) , что отображения $T_{0s} \equiv f|_{U_s}$, $s = 1, 2$, имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_s &= \lambda_s x_s + f_s(x_s, y_s) x_s y_s, \\ \bar{y}_s &= \gamma_s y_s + g_s(x_s, y_s) x_s y_s,\end{aligned}\tag{1.1}$$

Рис. 1

где $f_s(0, y_s) \equiv 0$, $g_s(x_s, 0) \equiv 0$. Таким образом, уравнения многообразий $W_{\text{loc}}^s(O_s)$ и $W_{\text{loc}}^u(O_s)$ в данных координатах будут, соответственно, $y_s = 0$ и $x_s = 0$. Вид (1.1) удобен также тем, что в данных координатах отображение T_{0s}^k при больших k будет линейным в главном порядке. Именно, имеет место следующее представление [3], [4] отображения $T_{0s}^k: (x_s, y_s) \rightarrow (\bar{x}_s, \bar{y}_s)$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_s &= \lambda_s^k (x_s + (\tilde{\lambda}_s^k + \tilde{\gamma}_s^{-k}) \xi_{ks}(x_s, \bar{y}_s)), \\ y_s &= \gamma_s^{-k} (\bar{y}_s + (\tilde{\lambda}_s^k + \tilde{\gamma}_s^{-k}) \eta_{ks}(x_s, \bar{y}_s)),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $\tilde{\lambda}_s = |\lambda_s|$, $\tilde{\gamma}_s = |\gamma_s|$, если $|\lambda_s \gamma_s| \neq 1$, или $\tilde{\lambda}_s = |\lambda_s| + \varepsilon_k$, $\tilde{\gamma}_s = |\gamma_s| - \varepsilon_k$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, если $|\lambda_s \gamma_s| = 1$. Функции ξ_{ks} и η_{ks} равномерно ограничены по k вместе с производными до порядка $(r-2)$, а производные порядка $(r-1)$ от правых частей в (1.2) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Выберем в U_1 пару точек $M_1^+(x_1^+, 0)$ и $M_1^-(0, y_1^-)$, принадлежащих траекториям Γ_{21} и Γ_{12} , соответственно. В U_2 также рассмотрим пару точек $M_2^+(x_2^+, 0)$ и $M_2^-(0, y_2^-)$, принадлежащих траекториям Γ_{12} и Γ_{21} , соответственно. Пусть $\Pi_s^+ \subset U_s$ и $\Pi_s^- \subset U_s$ — достаточно малые прямоугольные окрестности точек M_s^+ и M_s^- . Координаты на Π_s^+ будем обозначать как (x_{0s}, y_{0s}) , а координаты на Π_s^- — как (x_{1s}, y_{1s}) .

Заметим, что все траектории множества N , за исключением O_1 и O_2 , должны пересекать окрестности Π_s^+ и Π_s^- (иначе эти траектории не будут близки к траекториям контура C). Однако, не для каждой точки на Π_s^+ какая-либо ее итерация относительно отображения f попадет в Π_s^- . Множество начальных точек на Π_s^+ , траектории которых попадают в Π_s^- , как это легко видно из (1.2), состоит из счетного множества полосок $\sigma_k^{0s} = \Pi_s^+ \cap T_{0s}^{-k} \Pi_s^-$, $k = \bar{k}_s, \bar{k}_s + 1, \dots$, накапливающихся к $W_{\text{loc}}^s(O_s)$. Соответственно, образы полосок σ_k^{0s} относительно отображений T_{0s}^k — это полоски $\sigma_k^{1s} \equiv T_{0s}^k(\sigma_k^{0s})$ на Π_s^- , которые накапливаются к $W_{\text{loc}}^u(O_s)$.

1.2. Отображения в окрестности гетероклинических орбит. Очевидно, существуют такие натуральные числа n_1 и n_2 , что $f^{n_1}(M_1^-) = M_2^+$, $f^{n_2}(M_2^-) = M_1^+$.

Рассмотрим отображения $T_{12} \equiv f^{n_1}: \Pi_1^- \rightarrow U_2$ и $T_{21} \equiv f^{n_2}: \Pi_2^- \rightarrow U_1$ по траекториям, близким к Γ_{12} и Γ_{21} , соответственно.

Поскольку $T_{12}(M_1^-) = M_2^+$, то T_{12} может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_{02} - x_2^+ &= F_{12}(x_{11}, y_{11} - y_1^-) \equiv a_{12}x_{11} + b_{12}(y_{11} - y_1^-) + \dots, \\ \bar{y}_{02} &= G_{12}(x_{11}, y_{11} - y_1^-) \equiv c_{12}x_{11} + d_{12}(y_{11} - y_1^-) + \dots,\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $F_{12}(0, 0) = 0$, $G_{12}(0, 0) = 0$. Поскольку отображение T_{12} — диффеоморфизм, то его якобиан, вычисленный в точке M_1^- , отличен от нуля, т.е. $a_{12}d_{12} - b_{12}c_{12} \neq 0$. Так как $W^u(O_1)$ пересекает $W^s(O_2)$ в точке M_2^+ трансверсально, то $d_{12} \neq 0$.

Поскольку $T_{21}(M_2^-) = M_1^+$, то T_{21} можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_{01} - x_1^+ &= F_{21}(x_{12}, y_{12} - y_2^-) \equiv a_{21}x_{12} + b_{21}(y_{12} - y_2^-) + \dots, \\ \bar{y}_{01} &= G_{21}(x_{12}, y_{12} - y_2^-) \equiv c_{21}x_{12} + d_{21}(y_{12} - y_2^-)^2 + \dots,\end{aligned}\quad (1.4)$$

где $F_{21}(0, 0) = 0$, $G_{21}(0, 0) = \partial G_{21}(0, 0)/\partial y_{12} = 0$. Поскольку касание $W^u(O_2)$ и $W^s(O_1)$ в точке M_1^+ квадратичное, то $d_{21} \neq 0$. Кроме того, так как T_{21} диффеоморфизм, то $b_{21}c_{21} \neq 0$.

1.3. Специальная окрестность гетероклинического контура. В качестве окрестности гетероклинического контура удобно выбрать *специальную окрестность* (по аналогии со специальной окрестностью негрубой гомоклинической траектории [8], [9]). Именно, выберем достаточно большие целые $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ и ограничимся рассмотрением только тех траекторий, которые попадают из Π_s^+ в Π_s^- не менее, чем за $\bar{k}_s$ итераций отображения f . В частности, это означает, что Π_s^+ и Π_s^- содержат целиком полосы σ_k^{0s} и σ_k^{1s} с номерами $k \geq \bar{k}_s$ и не содержат полосок с номерами, меньшими $\bar{k}_s$. Более того, без ограничения общности, Π_s^+ и Π_s^- могут быть выбраны так, что

$$\begin{aligned}\Pi_1^+ &= \{(x_{01}, y_{01}) \mid |x_{01} - x_1^+| \leq \rho_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}, |y_{01}| \leq |\gamma_1|^{-\bar{k}_1}(y_1^- + \nu_{\bar{k}_1, \bar{k}_2})\}, \\ \Pi_2^+ &= \{(x_{02}, y_{02}) \mid |x_{02} - x_2^+| \leq \nu_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}, |y_{02}| \leq |\gamma_2|^{-\bar{k}_2}(y_2^- + \rho_{\bar{k}_1, \bar{k}_2})\}, \\ \Pi_1^- &= \{(x_{11}, y_{11}) \mid |x_{11}| \leq |\lambda_1|^{\bar{k}_1}(x_1^+ + \rho_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}), |y_{11} - y_1^-| \leq \nu_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}\}, \\ \Pi_2^- &= \{(x_{12}, y_{12}) \mid |x_{12}| \leq |\lambda_2|^{\bar{k}_2}(x_2^+ + \nu_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}), |y_{12} - y_2^-| \leq \rho_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}\},\end{aligned}\quad (1.5)$$

где

$$\rho_{\bar{k}_1, \bar{k}_2} = L_1 \sqrt{|\gamma_1|^{-\bar{k}_1} + |\lambda_2|^{\bar{k}_2}}, \quad \nu_{\bar{k}_1, \bar{k}_2} = L_2 (|\gamma_2|^{-\bar{k}_2} + |\lambda_1|^{\bar{k}_1}),$$

а L_1 и L_2 — положительные константы, не зависящие от $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$.

Чтобы показать, что выбор именно таких окрестностей не ограничивает общности, возьмем, для определенности, в качестве первоначальных окрестностей Π_s^+ и Π_s^- малые квадраты с центром в точках M_s^+ и M_s^- , соответственно, и со стороной длины $2\varepsilon_0$. В силу того, что специальные окрестности не должны содержать точек, которые за меньшее, чем $\bar{k}_s$, число итераций отображения f попадают из

Π_s^+ в Π_s^- , из (1.2) получаем, что при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ окрестности Π_s^+ могут быть ужаты по координате y , а Π_s^- – по координате x так, что

$$\begin{aligned} |y_{01}| &\leq |\gamma_1|^{-\bar{k}_1}(y_1^- + \varepsilon_0), & |x_{11}| &\leq |\lambda_1|^{\bar{k}_1}(x_1^+ + \varepsilon_0), \\ |y_{02}| &\leq |\gamma_2|^{-\bar{k}_2}(y_2^- + \varepsilon_0), & |x_{12}| &\leq |\lambda_2|^{\bar{k}_2}(x_2^+ + \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Так как в силу (1.3) $\bar{y}_{02} = c_{12}x_{11} + d_{12}(y_{11} - y_1^-) + \dots$, а для координат x_{11} и $\bar{y}_{02}$ требуется выполнение оценок (1.6), то окрестность Π_1^- можно сузить так, чтобы координата y_{11} удовлетворяла неравенству

$$|y_{11} - y_1^-| \leq \max \left\{ \frac{1}{|d_{12}|} (|\bar{y}_{02}| + |c_{12}||x_{11}|) \right\} \leq C_1 (|\gamma_2|^{-\bar{k}_2} + |\lambda_1|^{\bar{k}_1}). \quad (1.7)$$

В силу (1.4) $\bar{y}_{01} = c_{21}x_{12} + d_{21}(y_{12} - y_2^-)^2 + \dots$. Так как $d_{21} \neq 0$, то в силу (1.6) окрестность Π_2^- можно, в свою очередь, сузить так, чтобы координата y_{12} удовлетворяла бы неравенству

$$|y_{12} - y_2^-| \leq C_2 \sqrt{|\gamma_1|^{-\bar{k}_1} + |\lambda_2|^{\bar{k}_2}}. \quad (1.8)$$

Теперь, в силу (1.3), (1.4) и (1.6)–(1.8) окрестности Π_1^+ и Π_2^+ можно еще сузить так, чтобы для координат x_{01} и x_{02} выполнялись оценки

$$|x_{01} - x_1^+| \leq C_3 \sqrt{|\gamma_1|^{-\bar{k}_1} + |\lambda_2|^{\bar{k}_2}}, \quad |x_{02} - x_2^+| \leq C_4 (|\gamma_2|^{-\bar{k}_2} + |\lambda_1|^{\bar{k}_1}). \quad (1.9)$$

Если с полученными окрестностями гетероклинических точек провести еще раз такую же операцию, то получим соотношения (1.5).

Окрестности, определяемые формулой (1.5), будем называть *специальными окрестностями точек* M_1^+ , M_2^+ , M_1^- и M_2^- и именно их и будем рассматривать. Соответствующую специальную окрестность гетероклинического контура будем обозначать либо просто как U , либо как $U(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, если хотим подчеркнуть зависимость ее размеров от номеров полосок. Аналогично, и множество N , если необходимо, будем обозначать как $N(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$.

1.4. Условия пересечений подков и полосок. Так как Γ_{12} – траектория трансверсального пересечения многообразий $W^u(O_1)$ и $W^s(O_2)$, то пересечения любых полосок $T_{12}\sigma_k^{11}$ с любыми полосками σ_j^{02} при достаточно больших k и j будут состоять из одной компоненты связности. Образы $T_{21}(\sigma_j^{12})$ полосок σ_j^{12} имеют вид подков, накапливающихся при $j \rightarrow \infty$ к “параболе” $T_{21}(W_{\text{loc}}^u(O_2)) \subset W^u(O_2) \cap \Pi_1^+$ (рис. 2). Очевидно, траектории множества N должны пересекать окрестность Π_1^+ в точках пересечения подков $T_{21}(\sigma_j^{12})$ и полосок σ_i^{01} для всевозможных $i \geq \bar{k}_1$ и $j \geq \bar{k}_2$. Следовательно, структура множества N существенно зависит от геометрических свойств таких пересечений.

Будем говорить, что подкова $T_{21}(\sigma_j^{12})$ имеет *правильное пересечение* с полоской σ_i^{01} , если: 1) множество $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01}$ непусто и состоит из двух компонент

Рис. 2

Рис. 3

связности; 2) отображения $T_{21}^{(1)}T_{02}^j$ и $T_{21}^{(2)}T_{02}^j$, определенные на σ_j^{02} и имеющие области значений на соответствующих компонентах пересечений $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01}$, являются седловыми в смысле [10] (грубо говоря, эти отображения являются растягивающими по координате y_{02} и сжимающими по координате x_{02} в Π_2^+).

Различные типы пересечений подковы $T_{21}(\sigma_j^{12})$ с полосками на Π_1^+ показаны на рис. 3. Подкова имеет правильное пересечение с полоской σ_i^{01} , неправильное — с полоской σ_k^{01} , и пустое — с полоской σ_s^{01} .

Аналогично [7], [8] доказывается следующая

ЛЕММА 1. *Существуют положительная константа S_1 и достаточно*

большие целые $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ такие, что если $i \geq \bar{k}_1$, $j \geq \bar{k}_2$ и

1) если выполнено неравенство

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) > S_{ij}(\bar{k}_1, \bar{k}_2), \quad (1.10)$$

где $S_{ij} = S_1(|\gamma_1|^{-i} + |\lambda_2|^j) \rho(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ и $\rho(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \rightarrow 0$ при $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \rightarrow \infty$, то пересечение подковы $T_{21}(\sigma_j^{12})$ с полоской σ_i^{01} будет правильным;

2) если выполнено неравенство

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) < -S_{ij}(\bar{k}_1, \bar{k}_2), \quad (1.11)$$

то $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01} = \emptyset$.

Из (1.10) и (1.11) вытекает, что неравенство

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) \geq -S_{ij}(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \quad (1.12)$$

необходимо для того, чтобы подкова $T_{21}(\sigma_j^{12})$ имела непустое (возможно и неправильное) пересечение с полоской σ_i^{01} .

Неравенства (1.10)–(1.12) имеют весьма простой геометрический смысл. В силу (1.2) полоска σ_i^{01} представляет собой узкий горизонтальный прямоугольник с “центральной” линией $y_{01} = \gamma_1^{-i} y_1^-$. Полоска σ_j^{12} – это узкий вертикальный прямоугольник с “центральной” линией $x_{12} = \lambda_2^j x_2^+$. В силу (1.4) полоска σ_j^{12} отображается относительно T_{21} в подкову $T_{21}(\sigma_j^{12})$, у которой парабола

$$y_{01} = c_{21} \lambda_2^j x_2^+ + \frac{d_{21}}{b_{21}^2} (x_{01} - x_1^+)^2$$

является “центральной” линией. При выполнении неравенства

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) > 0$$

прямая $y_{01} = \gamma_1^{-i} y_1^-$ и парабола пересекаются в двух точках. При

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) < 0$$

они не имеют пересечений, а при

$$d_{21}(\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+) = 0$$

касаются. Коэффициент $S_{ij}(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ в (1.10)–(1.12) учитывает ненулевую толщину полоски и подковы.

§ 2. Кодировки и нетривиальные гиперболические подмножества

Удобный способ описания структуры множества N состоит в построении кодировок его траекторий. Множества полосок σ_k^{01} на Π_1^+ , σ_k^{11} на Π_1^- , σ_k^{02} на Π_2^+ и σ_k^{12} на Π_2^- обозначим, соответственно, через σ_{01} , σ_{11} , σ_{02} и σ_{12} . Пусть $\Lambda \in N$. Предположим, что траектория Λ не является асимптотической к O_1 и O_2 . Тогда она пересекает окрестности Π_1^+ , Π_1^- , Π_2^+ и Π_2^- только по точкам, принадлежащим полоскам из множеств σ_{01} , σ_{11} , σ_{02} и σ_{12} , соответственно. Пусть $(\dots, M_{\alpha\beta}^{-s}, \dots, M_{\alpha\beta}^s, \dots)$, $\alpha = 0, 1$, $\beta = 1, 2$, — последовательные точки пересечения траектории Λ с полосками из множеств $\sigma_{\alpha\beta}$. Очевидно, для этих точек должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} M_{01}^s &\in \sigma_{k_s(1)}^{01} \subset \Pi_1^+, \\ M_{11}^s &= T_{01}^{k_s(1)}(M_{01}^s) \in \sigma_{k_s(1)}^{11} \subset \Pi_1^-, \\ M_{02}^s &= T_{12}(M_{11}^s) \equiv f^{n_1}(M_{11}^s) \in \sigma_{k_s(2)}^{02} \subset \Pi_2^+, \\ M_{12}^s &= T_{02}^{k_s(2)}(M_{02}^s) \in \sigma_{k_s(2)}^{12} \subset \Pi_2^-, \\ M_{01}^{s+1} &= T_{21}(M_{12}^s) \equiv f^{n_2}(M_{12}^s) \in \sigma_{k_{s+1}(1)}^{01} \subset \Pi_1^+, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$s = 0, \pm 1, \dots$, где, напомним, n_1 и n_2 такие натуральные числа, что $f^{n_1}(M_1^-) = M_2^+$, $f^{n_2}(M_2^-) = M_1^+$.

В соответствии с (2.1) *кодировку траектории* Λ определим как бесконечную последовательность из двух символов $\{1, 2\}$

$$(\dots, \underbrace{2, 2, 1, 1, \dots, 1}_{k_s(1)+n_1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{k_s(2)+n_2}, 1, 1, \dots), \quad (2.2)$$

в которой длины следующих друг за другом полных отрезков, составленных из символов “1” и “2”, равны, соответственно, $(k_s(1) + n_1)$ и $(k_s(2) + n_2)$. Другими словами, если точка траектории Λ попала в окрестность Π_1^+ , то в последовательности (2.2) этой точке будет отвечать символ “1”. Далее символ “1” будет отвечать каждой последующей точке траектории Λ до тех пор, пока очередная ее точка не попадет в окрестность Π_2^+ . Этой последней точке поставим в соответствие уже символ “2”. Точкам последующих итераций будем ставить в соответствие символ “2” до тех пор, когда очередная точка траектории Λ снова попадет в окрестность Π_1^+ . Этой последней точке поставим в соответствие символ “1” и т. д.

Кодировки вида (2.2) можно распространить и на асимптотические к O_1 и O_2 траектории из N . При этом траектория O_1 будет иметь кодировку $(\dots, 1, \dots, 1, \dots)$, траектория O_2 — кодировку $(\dots, 2, \dots, 2, \dots)$, траектория Γ_{12} — кодировку $(\dots, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots)$, траектория Γ_{21} — кодировку $(\dots, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, \dots)$. Траектории, α -предельной (соответственно, ω -предельной) к O_1 , будет отвечать кодировка вида (2.2), имеющая бесконечную последовательность из символов “1”, стоящую на левом (соответственно, на правом) конце. Аналогично, $\alpha(\omega)$ -предельной к O_2 траектории из N будет отвечать кодировка вида (2.2), имеющая бесконечную последовательность из символов “2”, стоящую на левом (правом) конце.

Если бы Γ_{21} была грубой гетероклинической траекторией (т.е. многообразия $W^u(O_2)$ и $W^s(O_1)$ пересекались бы по ней трансверсально), то мы имели бы взаимно однозначное соответствие между множеством траекторий N (которые все были бы в этом случае седлового типа) и множеством указанных кодировок [10]. В нашем случае, когда Γ_{21} – негрубая гетероклиническая траектория, это уже не так.

Во-первых, заметим, что в N не может быть траекторий с такими кодировками, у которых для некоторого s числа $j = k_s(2)$ и $i = k_{s+1}(1)$ удовлетворяют неравенству (1.11), поскольку в этом случае $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01} = \emptyset$ в силу леммы 1. Во-вторых, даже если мы ограничимся только такими кодировками, у которых для всех $s = 0, \pm 1, \dots$, числа $k_s(2)$ и $k_{s+1}(1)$ удовлетворяют неравенству (1.10) с $j = k_s(2)$, $i = k_{s+1}(1)$, то взаимно однозначного соответствия, как в грубом случае, не будет. Точнее, здесь имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольной кодировки вида (2.2), в которой $\infty > k_s(1) \geq \bar{k}_1$, $\infty > k_s(2) \geq \bar{k}_2$, и для любого $s = 0, \pm 1, \dots$ числа $k_s(2)$ и $k_{s+1}(1)$ удовлетворяют неравенству (1.10) с $j = k_s(2)$, $i = k_{s+1}(1)$, в N существует континуум траекторий седлового типа, каждая из которых имеет данную кодировку. Множество таких траекторий находится во взаимно однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из двух символов.*

Эта теорема доказывается аналогично [7], [8] и имеет простое геометрическое объяснение. Именно, неравенство (1.10) гарантирует, что пересечение подковы $T_{21}\sigma_j^{12}$ и полосы σ_i^{01} правильное и состоит из двух компонент связности, которые обозначим как Δ_{ij}^3 и Δ_{ij}^4 . Ясно, что траектории из N с одной и той же кодировкой вида (2.2), но имеющие точки пересечения с разными такими компонентами связности, нужно различать. Именно, более точную по сравнению с (2.2) кодировку будет представлять следующая бесконечная в обе стороны последовательность

$$(\dots, 1, 1, \overbrace{2, 2, \dots, 2}^{k_s(2)+n_2}, \alpha_s, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{k_{s+1}(1)+n_1}, \overbrace{2, 2, \dots, 2}^{k_{s+1}(2)+n_2}, \alpha_{s+1}, 1, 1, \dots), \quad (2.3)$$

составленная уже из четырех символов {“1”, “2”, “3”, “4”}, где символ α_s – это либо “3”, либо “4”, в зависимости от того, принадлежит компоненте Δ_{ij}^3 или компоненте Δ_{ij}^4 полосы σ_i^{01} соответствующая точка траектории из N (здесь $i = k_{s+1}(1)$, $j = k_s(2)$).

Отображение $T_{21}T_{02}^j: \sigma_j^{02} \rightarrow \Delta_{ij}^\alpha \subset \sigma_i^{01}$ является седловым по определению правильного пересечения. Седловым будет также отображение $T_{12}T_{01}^i: \Delta_{ij}^\alpha \rightarrow \sigma_k^{02}$ для любого $k \geq \bar{k}_2$, поскольку Γ_{12} – грубая гетероклиническая траектория. Зафиксируем последовательность $\{\alpha_s\}$, $s = 0, \pm 1, \dots$, составленную из символов “3” и “4”. Тогда по лемме о седловой неподвижной точке в счетном произведении пространств [10] бесконечной последовательности таких отображений, строящейся в соответствии с (2.3), будет отвечать единственная траектория, не покидающая окрестность U контура C . Множество таких траекторий, отвечающих различным последовательностям $\{\alpha_s\}$, будет иметь мощность континуум.

§ 3. Классы двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром

Заметим, что координаты на U_1 и U_2 всегда можно выбрать так, что x_2^+ и y_1^- будут положительны. Тогда структура множеств решений неравенств (1.10)–(1.12) будет зависеть, в первую очередь, от знаков величин λ_2 , γ_1 , c_{21} и d_{21} . На рис. 4 в случае $\lambda_s > 0$, $\gamma_s > 0$, $s = 1, 2$, представлено четыре типа негрубых гетероклинических контуров.

Рис. 4

Наиболее простая структура множества решений неравенств (1.10)–(1.12) будет в случае диффеоморфизмов, представленных на рис. 4а) и 4б) и отвечающих следующей комбинации знаков: $\lambda_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_{21} < 0$.

Диффеоморфизмы, у которых при этом $d_{21} < 0$ (рис. 4а), отнесем к первому классу. Легко видеть, что в этом случае для любых $i \geq \bar{k}_1$, $j \geq \bar{k}_2$ всегда будет выполняться неравенство (1.11), т.е. $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01} = \emptyset$ при всех достаточно больших i и j . Более того, подковы $T_{21}(\sigma_j^{12})$ и полосы σ_i^{01} будут лежать на Π_1^+ по разные стороны от $W_{\text{loc}}^s(O_1)$. Здесь справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2 [11]. Пусть f – диффеоморфизм первого класса. Тогда существует такая окрестность U гетероклинического контура C , что множество N траекторий, не покидающих U , имеет тривиальную структуру: $N = O_1 \cup O_2 \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$.

Диффеоморфизмы с негрубым гетероклиническим контуром, у которых $\lambda_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_{21} < 0$, $d_{21} > 0$ (рис. 4б), отнесем ко второму классу. Заметим, что

здесь при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ всегда будет выполняться уже неравенство (1.10), т.е. полосы σ_i^{01} и подковы $T_{21}(\sigma_j^{12})$ при любых $i \geq \bar{k}_1$ и $j \geq \bar{k}_2$ будут иметь правильные пересечения. Тогда по теореме 1 все траектории множества N , за исключением Γ_{21} , будут седловыми. При этом утверждение теоремы 1 здесь можно усилить, указав топологически сопряженную $f|_N$ систему.

Рассмотрим топологическую схему Бернулли из четырех символов $\{1, 2, 3, 4\}$ и отождествим в ней траектории

$$(\dots, 2, \dots, 2, 3, 1, \dots, 1, \dots) \text{ и } (\dots, 2, \dots, 2, 4, 1, \dots, 1, \dots)$$

в одну, которую обозначим через $\tilde{\omega}$. У полученной фактор-системы рассмотрим подсистему Ω траекторий, удовлетворяющих следующим условиям:

- 2.1) Ω содержит траектории $(\dots, 1, \dots, 1, \dots)$, $(\dots, 2, \dots, 2, \dots)$ и $\tilde{\omega}$;
- 2.2) за символом “1” не может идти символ “3” или “4”, а за символом “2” — символ “1”; за символом “3” или “4” обязательно идет символ “1”;
- 2.3) длина любого полного отрезка, составленного из символа “1”, не меньше чем $\bar{k}_1 + n_1$, а из символа “2” — не меньше чем $\bar{k}_2 + n_2 - 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть f — диффеоморфизм второго класса. Тогда существуют такие $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, n_1 и n_2 , что $f|_N$ будет сопряжено с дискретной динамической системой Ω .

Остальные диффеоморфизмы с негрубым гетероклиническим контуром отнесем к третьему классу (такowymi являются, например, диффеоморфизмы, представленные на рис. 4в) и 4г)). У таких диффеоморфизмов в силу теоремы 1 существуют нетривиальные гиперболические подмножества, структуру которых можно также описать в терминах топологической сопряженности. Именно, рассмотрим подсистему $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, удовлетворяющую условиям 2.1)–2.3) и условию

- 2.4) Пусть $k_s(2) + n_2 - 1$ и $k_{s+1}(1) + n_1 - 1$ — длины следующих друг за другом полных отрезков, составленных из символов “2” и “1”. Тогда для любого s числа $j = k_s(2)$ и $i = k_{s+1}(1)$ удовлетворяют неравенству (1.10).

Аналогично [7], [8], из теоремы 1 выводится следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть f — диффеоморфизм третьего класса. Тогда в N можно указать подсистему $\tilde{N}$ такую, что, во-первых, $f|_{\tilde{N}}$ сопряжена с $\tilde{\Omega}$, и, во-вторых, все траектории подсистемы $\tilde{N}$, за исключением Γ_{21} , седлового типа.

§ 4. Модули Ω -сопряженности

Из теорем 2 и 3 вытекает, что для диффеоморфизмов первого и второго классов структура множества N не меняется при переходе от одной системы к другой на соответствующей бифуркационной поверхности диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром. Для диффеоморфизмов третьего класса это будет уже не так. Обозначим через H_3 локально связную бифуркационную поверхность коразмерности один в пространстве динамических систем, отвечающую диффеоморфизмам третьего класса. Мы покажем, что для систем в H_3 существуют непрерывные инварианты (модули) Ω -сопряженности.

Напомним определение модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4], [5]. Будем говорить, что система f имеет *модуль*, если в пространстве динамических систем f лежит в некотором банаховом многообразии $\mathcal{M}$, на котором определен непрерывный локально непостоянный функционал h со следующим свойством: если $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ и f_1 и f_2 эквивалентны, то $h(f_1) = h(f_2)$. Система f имеет t модулей, если f лежит в некотором банаховом многообразии, на котором существует t независимых модулей. Наконец, говорят, что f имеет *счетное множество модулей*, если f имеет t модулей для любого наперед заданного t .

В теории динамических систем наиболее употребительны модули топологической и Ω -эквивалентности (топологической эквивалентности на множестве неблуждающих траекторий).

Как мы отмечали, топологические модули для систем с негрубыми гетероклиническими траекториями ввел Пэлис [1]. Аналогичные модули имеют место и для систем с негрубыми гомоклиническими траекториями. Но ситуация здесь оказывается более сложной. Именно, как показано в [3], [4], диффеоморфизмы третьего класса [7] с негрубой гомоклинической траекторией обладают уже модулями Ω -сопряженности, и более того, на бифуркационной поверхности таких систем плотны системы со счетным множеством Ω -модулей [5], [6].¹ В некотором смысле аналогичная ситуация будет иметь место и для систем с негрубым гетероклиническим контуром, что мы покажем ниже.

Из [1] непосредственно вытекает, что инвариант

$$\theta = -\frac{\ln |\lambda_2|}{\ln |\gamma_1|}$$

является модулем топологической сопряженности для диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром. Однако, если ограничиться только рассмотрением условий Ω -сопряженности, то диффеоморфизмы первого и второго классов в силу теорем 2 и 3 на соответствующих бифуркационных поверхностях оказываются грубыми. В то же время, диффеоморфизмы третьего класса будут обладать модулями Ω -сопряженности.

Пусть U и U' — некоторые окрестности гетероклинических контуров C и C' диффеоморфизмов f и f' . Пусть $\Omega(f)$ и $\Omega(f')$ — множества неблуждающих траекторий, целиком лежащих в U и U' , соответственно. Заметим, что $\Omega(f)$ не всегда совпадает с N (именно, $\Omega(f) \subseteq N$), но во всяком случае нетривиальное множество $\tilde{N}$ (из теоремы 4) содержится в $\Omega(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что f и f' — Ω -сопряжены, если существует гомеоморфизм $h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(f')$ такой, что $h(O_s) = O'_s$, $s = 1, 2$, $h(\Gamma_{12}) = \Gamma'_{12}$,

¹Отметим также, что для систем с гомоклинической петлей состояния равновесия типа седло-фокус величина ρ (седловой индекс), введенная в [12], является топологическим модулем. Для трехмерных систем это установлено в [13], [14]. Но, как следует из [16], [17], в случае, когда в окрестности гомоклинической петли имеет место сложное поведение траекторий [12], [15], инвариант ρ является уже модулем Ω -эквивалентности.

$h(\Gamma_{21}) = \Gamma'_{21}$ и следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f} & \Omega(f) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Omega(f') & \xrightarrow{f'} & \Omega(f') \end{array}$$

коммутативна.

Прежде всего укажем некоторые свойства Ω -сопряженных диффеоморфизмов f и f' , вытекающие из данного определения.

ЛЕММА 2. Пусть $f, f' \in H_3$, и f и f' — Ω -сопряжены в некоторых окрестностях U и U' гетероклинических контуров C и C' , и h — сопрягающий гомеоморфизм. Тогда существуют такие специальные окрестности $V \subseteq U$ и $V' \subseteq U'$, что

- 1) $h(V \cap \Omega(f)) = V' \cap \Omega(f')$;
- 2) гомеоморфизм $h: \Omega(f|_V) \rightarrow \Omega(f'|_{V'})$ сохраняет кодировки вида (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть гетероклинические точки M_s^+ , M_s^- и $M_s'^+$, $M_s'^-$, $s = 1, 2$, выбраны так, что

$$h(M_s^+) = M_s'^+, h(M_s^-) = M_s'^-. \quad (4.1)$$

Такие точки будем называть *сопряженными*. Для диффеоморфизма f рассмотрим специальную окрестность $V \equiv V(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$. В силу непрерывности h и условия (4.1) при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ мы получаем, что $h(\Omega(f|_V)) \subset U'$. В силу коммутативности диаграммы и опять же условия (4.1) можно выбрать такую специальную окрестность $V' \equiv V'(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \subseteq U'$, что $h(\Omega(f|_V)) \subset V'$. Наконец, гомеоморфизм $h: \Omega(f|_V) \rightarrow \Omega(f'|_{V'})$ сохраняет кодировки вида (2.2) в силу коммутативности диаграммы. Это завершает доказательство леммы.

Далее будем считать, что $U \equiv V$, $U' \equiv V'$. В силу леммы 2 кодировки вида 2.2 соответствующих траекторий из $\Omega(f)$ и $\Omega(f')$ должны совпадать. В частности, поскольку $\tilde{N} \subset \Omega(f)$, то в $\Omega(f')$ должно содержаться множество траекторий, кодировки которых совпадают с кодировками траекторий из $\tilde{N}$. Очевидно также, что не могут быть Ω -сопряжены диффеоморфизм, представленный на рис. 4в), и диффеоморфизм, представленный на рис. 4г). Например, это следует из того, что любой диффеоморфизм такого типа, как на рис. 4в), не имеет траекторий, гомоклинических к O_1 , тогда как очевидно, что у диффеоморфизма такого типа, как на рис. 4г), таких траекторий счетное множество.²

Далее будем изучать условия Ω -сопряженности, связанные с модулями. Для определенности, все дальнейшие доказательства будем проводить для случая диффеоморфизмов такого же типа, как на рис. 4в), т.е. будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $c_{21} > 0$, $d_{21} > 0$. Доказательства представленных ниже утверждений в остальных случаях диффеоморфизмов третьего класса проводятся вполне аналогично.

Прежде всего установим, что величина θ является модулем Ω -сопряженности диффеоморфизмов третьего класса, т.е. имеет место следующая

² Более подробно об условиях Ω -сопряженности см., например, в [3], [18].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f, f' \in H_3$, и f и f' — Ω -сопряжены в некоторых окрестностях U и U' гетероклинических контуров C и C' . Тогда $\theta = \theta'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что f и f' — Ω -сопряжены в некоторых окрестностях U и U' гетероклинических контуров, но $\theta > \theta'$. Пусть M_s^+ , M_s^- и $M_s'^+$, $M_s'^-$, $s = 1, 2$, — пары сопряженных гетероклинических точек.

Для f рассмотрим множество пар (i, j) натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству (1.10), т.е. таких i и j , что подкова $T_{21}(\sigma_j^{12})$ пересекает полосу σ_i^{01} правильно. Если прологарифмировать неравенство (1.10), то получим следующее:

$$i < j\theta - \tau - S_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2), \quad (4.2)$$

где $S_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \rightarrow 0$ при $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \rightarrow \infty$, и

$$\tau = \frac{1}{\ln |\gamma_1|} \ln \frac{|c_{21}x_2^+|}{|y_1^-|}. \quad (4.3)$$

Для f' рассмотрим множество пар (i, j) натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству (1.12), т.е. такому

$$i \leq j\theta' - \tau' + S_2'(\bar{k}_1, \bar{k}_2). \quad (4.4)$$

Заметим, что неравенству (4.4) удовлетворяют, во всяком случае, все такие числа i и j , для которых $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01} \neq \emptyset$.

Наконец, рассмотрим множество пар (i, j) натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству (4.2), но не удовлетворяющих неравенству (4.4). Для таких i и j выполнено неравенство

$$j\theta' - \tau' + \dots < i < j\theta - \tau + \dots, \quad (4.5)$$

где многоточиями обозначены члены, стремящиеся к нулю при $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \rightarrow \infty$. Неравенство (4.5) при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ имеет счетное множество целочисленных решений, поскольку $\theta > \theta'$ по предположению. Пусть $i = i^*$, $j = j^*$ — одно из таких решений. Тогда, поскольку $i = i^*$, $j = j^*$ удовлетворяют неравенству (4.2), то у диффеоморфизма f в силу теоремы 1 существуют неблуждающие траектории (седлового типа), имеющие кодировки вида (2.2), в которых $k_s(2) = j^*$, $k_{s+1}(1) = i^*$ для некоторого s . В частности, такой кодировкой обладает необходимая периодическая траектория, имеющая по одной точке пересечения с полосками $\sigma_{i^*}^{01}$ и $\sigma_{j^*}^{02}$. При этом ее точка пересечения с полоской $\sigma_{i^*}^{01}$ является неподвижной для отображения $T_{21}T_{02}^{j^*}T_{12}T_{01}^{i^*}: \sigma_{i^*}^{01} \rightarrow \sigma_{i^*}^{01}$, которое в данном случае аналогично известному отображению подковы Смейла. С другой стороны, числа $i = i^*$, $j = j^*$ не удовлетворяют неравенству (4.4), и поэтому для f' имеем, что $T_{21}'(\sigma_{j^*}^{12}) \cap \sigma_{i^*}^{01} = \emptyset$. Таким образом, у f' вообще не может быть траекторий с кодировкой, в которой были бы соседние символы $k_s(2) = j^*$, $k_{s+1}(1) = i^*$. Следовательно, f и f' не могут быть Ω -сопряжены. Получили противоречие с первоначальным предположением, что $\theta > \theta'$. Случай $\theta < \theta'$ рассматривается аналогично, здесь достаточно поменять местами f и f' . Тем самым, теорема доказана.

Введем следующую величину

$$\tau_0 \equiv [\tau - (n_1 + n_2)] \pmod{(1 + \theta)}, \quad (4.6)$$

где n_1 — число итераций отображения f , связывающих точки M_1^- и M_2^+ траектории Γ_{12} , а n_2 — число итераций отображения f , связывающих точки M_2^- и M_1^+ траектории Γ_{21} . Ниже мы покажем, что τ_0 является модулем Ω -сопряженности диффеоморфизмов третьего класса при иррациональном θ .

Аналогично [4, лемма 1.5] доказывается, что величина τ (а следовательно, и τ_0) не зависит от гладких замен координат на U_1 и U_2 , сохраняющих вид (1.1) отображений T_{01} и T_{02} . Но величина τ зависит, вообще говоря, от того, какие пары гетероклинических точек траекторий Γ_{12} и Γ_{21} выбираются. Это уже не так для τ_0 , именно, имеет место следующая

ЛЕММА 3. *Величина τ_0 не зависит от выбора в U_1 и U_2 пар гетероклинических точек траекторий Γ_{12} и Γ_{21} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пары точек $\widetilde{M}_1^- \equiv T_{01}^{-1}M_1^-$ и M_2^+ траектории Γ_{12} , и M_2^- и M_1^+ траектории Γ_{21} . Очевидно, при таком выборе гетероклинических точек из всех параметров, входящих в формулу (4.3) для τ , изменится только координата “ y ” новой гетероклинической точки $\widetilde{M}_1^-$: она будет в силу (1.1) равна $\gamma_1^{-1}y_1^-$. Из (4.3) тогда получим для $\widetilde{\tau} \equiv \tau(M_1^+, \widetilde{M}_1^-, M_2^+, M_2^-)$ следующее значение

$$\widetilde{\tau} = \frac{1}{\ln |\gamma_1|} \ln \frac{|c_{21}x_2^+|}{|\gamma_1^{-1}y_1^-|} = \tau + 1.$$

Так как число итераций отображения f , связывающих точки $\widetilde{M}_1^-$ и M_2^+ , станет равным $(n_1 + 1)$, то из (4.6) получаем, что

$$\widetilde{\tau}_0 = [\tau + 1 - (n_1 + 1 + n_2)] \pmod{(1 + \theta)} = \tau_0.$$

Рассмотрим такие пары гетероклинических точек: $M_1^-, \widetilde{M}_2^+ = T_{02}M_2^+$ и M_2^- и M_1^+ . Координата “ x ” точки $\widetilde{M}_2^+$ в силу (1.1) равна $\lambda_2 x_2^+$, и, следовательно, из (4.3) и (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau} &= \frac{1}{\ln |\gamma_1|} \ln \left| \frac{c_{21}\lambda_2 x_2^+}{y_1^-} \right| = \tau - \theta, \\ \widetilde{\tau}_0 &= [\tau - \theta - (n_1 + 1 + n_2)] \pmod{(1 + \theta)} = \tau_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь такие пары гетероклинических точек: M_1^-, M_2^+ и $\widetilde{M}_2^- \equiv T_{02}^{-1}M_2^-, M_1^+$. В этом случае роль T_{21} будет играть отображение $T_{21}T_{02}: T_{02}^{-1}(\Pi_2^-) \rightarrow \Pi_1^+$, которое в силу (1.1) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \overline{x}_{01} - x_1^+ &= a_{21}\lambda_2 x'_{12} + b_{21}\gamma_2(y'_{12} - \gamma_2^{-1}y_2^-) + \dots, \\ \overline{y}_{01} &= c_{21}\lambda_2 x'_{21} + d_{21}\gamma_2^2(y'_{12} - \gamma_2^{-1}y_2^-)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где $(x'_{12}, y'_{12}) \in T_{02}^{-1}(\Pi_2^-)$. В силу (4.3) и (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \frac{1}{\ln |\gamma_1|} \ln \left| \frac{\lambda_2 c_{21} x_2^+}{y_1^-} \right| = \tau - \theta, \\ \tilde{\tau}_0 &= [\tau - \theta - (n_1 + n_2 + 1)] \pmod{(1 + \theta)} = \tau_0.\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, такие пары точек: M_1^-, M_2^+ и $M_2^-, \widetilde{M}_1^+ \equiv T_{01} M_1^+$. В этом случае роль T_{21} будет играть уже отображение $T_{01} T_{21}: \Pi_2^- \rightarrow T_{01}(\Pi_1^+)$, которое в силу (1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}'_{01} - \lambda_1 x_1^+ &= a_{21} \lambda_1 x_{12} + b_{21} \lambda_1 (y_{12} - y_2^-) + \dots, \\ \bar{y}'_{01} &= \gamma_1 c_{21} x_{21} + d_{21} \gamma_1 (y_{12} - y_2^-)^2 + \dots.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \frac{1}{\ln |\gamma_1|} \ln \left| \frac{\gamma_1 c_{21} x_2^+}{y_1^-} \right| = \tau + 1, \\ \tilde{\tau}_0 &= [\tau + 1 - (n_1 + n_2 + 1)] \pmod{(1 + \theta)} = \tau_0.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что любую из пар гетероклинических точек траекторий Γ_{12} и Γ_{21} можно получить из исходной путем конечного числа элементарных переходов к такой паре, в которой одна из точек заменяется на ее итерацию отображения f . Поскольку, как мы показали, при каждом таком элементарном переходе к очередной паре точек величина τ_0 не меняется, то она будет одной и той же и для любой пары гетероклинических точек. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 3 нетрудно вывести по индукции формулу, позволяющую найти величину τ для произвольно выбранных пар гетероклинических точек на U_1 и U_2 . Именно, рассмотрим следующие гетероклинические точки $T_{01}^{s_1} M_1^+, T_{01}^{-s_2} M_1^-, T_{02}^{s_3} M_2^+$ и $T_{02}^{-s_4} M_2^-$, где s_1, s_2, s_3 и s_4 — некоторые целые числа. Тогда новое значение τ , которое обозначим как $\tilde{\tau}$, будет связано с $\tau \equiv \tau(M_1^+, M_1^-, M_2^+, M_2^-)$ следующим образом:

$$\tilde{\tau} = \tau + (s_1 + s_2) - \theta(s_3 + s_4). \quad (4.7)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f, f' \in H_3$ и f и f' — Ω -сопряжены, $\theta = \theta'$ и θ иррационально. Тогда $\tau_0 = \tau'_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_s^+, M_s^- и $M_s'^+, M_s'^-, s = 1, 2$, — пары сопряженных гетероклинических точек. Покажем сначала, что величины τ и τ' , вычисленные по этим точкам, должны совпадать. Действительно, предположим, что $\tau < \tau'$. Тогда рассмотрим следующие неравенства

$$\begin{aligned}i &< j\theta - \tau - S_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2), \\ i &\geq j\theta - \tau' + S'_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2).\end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как θ иррационально и $\tau < \tau'$, то при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ существует счетное множество натуральных чисел i и j , удовлетворяющих первому неравенству в (4.8) и не удовлетворяющих второму. Как было разъяснено при доказательстве теоремы 5, это означает, что у диффеоморфизма f в любой окрестности контура

S найдутся седловые периодические траектории (например, однообходные), имеющие такие кодировки, каких не может быть у неблуждающих траекторий диффеоморфизма f' . Последнее в силу леммы 2 противоречит тому, что мы выбрали сопряженные пары гетероклинических точек. Аналогично рассматривается случай $\tau > \tau'$, здесь достаточно поменять местами f и f' .

Теперь заметим, что равенство $\tau = \tau'$ для сопряженных гетероклинических точек возможно лишь в случае, когда $\tau_0 = \tau'_0$. Действительно, в силу коммутативности диаграммы из определения 2 должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} f^{m_1}(M_1^-) &= M_2^+, & f^{m_2}(M_2^-) &= M_1^+, \\ f'^{m_1}(M_1'^-) &= M_2'^+, & f'^{m_2}(M_2'^-) &= M_1'^+ \end{aligned} \quad (4.9)$$

для некоторых целых m_1 и m_2 . Из (4.6) и (4.9) получаем, что

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + (m_1 + m_2) + k(1 + \theta), \\ \tau' &= \tau'_0 + (m_1 + m_2) + k'(1 + \theta), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где k и k' — некоторые целые числа. Но тогда

$$\begin{aligned} [\tau - \tau'] \pmod{(1 + \theta)} &= [\tau_0 - \tau'_0 + (k - k')(1 + \theta)] \pmod{(1 + \theta)} \\ &= [\tau_0 - \tau'_0] \pmod{(1 + \theta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\tau_0 \neq \tau'_0$, то и $\tau \neq \tau'$. Это завершает доказательство теоремы.

§ 5. Достаточные условия Ω -сопряженности при рациональном θ

Вопрос о достаточных условиях Ω -сопряженности диффеоморфизмов третьего класса при иррациональном θ является весьма сложным и, вообще говоря, неразрешимым в полном объеме. Это связано с тем, что при иррациональном θ у таких диффеоморфизмов, помимо θ и τ_0 , существуют и другие модули Ω -сопряженности и более того, как мы покажем ниже в § 5, в H_3 будут плотны системы со счетным множеством модулей Ω -сопряженности.

При рациональном θ ситуация совершенно другая. Здесь, аналогично случаю систем с негрубой гомоклинической траекторией [3], [4], можно показать, что почти все системы на H_3 допускают полное описание множества N траекторий, целиком лежащих в некоторой достаточно малой окрестности U гомоклинического контура. Правда, размеры этой окрестности будут зависеть от θ . Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in H_3$ и $\theta = p/q$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Пусть также $\tau_0 q \notin \mathbb{Z}$. Тогда существуют такие $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, зависящие от p , q и τ_0 ($\bar{k}_1, \bar{k}_2 \rightarrow \infty$, если $q \rightarrow \infty$ или $\tau_0 q \rightarrow k \in \mathbb{Z}$), и специальная окрестность $U(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, что все траектории множества $N(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \setminus \Gamma_{21}$ имеют седловой тип, и $f|_N$ сопряжено с символической динамической системой $\tilde{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В N нет траекторий, которые пересекали бы последовательно полосы σ_j^{12} и σ_i^{01} такие, что i и j удовлетворяют неравенству (1.11), поскольку в этом случае $T_{21}(\sigma_j^{12}) \cap \sigma_i^{01} = \emptyset$. С другой стороны, траектории, пересекающие последовательно полосы σ_j^{12} и σ_i^{01} только для таких i и j , для которых выполнено неравенство (1.10), будут седловыми (теоремы 1 и 4). Таким образом, если в N есть траектория неседлового типа, то она имеет хотя бы две последовательные точки пересечения с полосками σ_j^{12} и σ_i^{01} , номера i и j которых удовлетворяют неравенству

$$|\gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+| \leq |S_{ij}(\bar{k}_1, \bar{k}_2)/d_{21}|. \quad (5.1)$$

Очевидно, это неравенство может иметь решения только лишь тогда, когда числа γ_1^{-i} и $c_{21} \lambda_2^j$ одного знака (координаты на U_1 и U_2 введены так, что $y_1^- > 0$, $x_2^+ > 0$). В этом случае неравенство (5.1), очевидно, можно переписать в виде

$$|i - j\theta + \tau| \leq S_3(\bar{k}_1, \bar{k}_2), \quad (5.2)$$

где $S_3(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \rightarrow 0$ при $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \rightarrow \infty$.

Если бы θ было иррациональным, то неравенство (5.2) при любом τ и любых $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ имело бы счетное множество целочисленных решений. Но при θ рациональном, $\theta = p/q$, и при $\tau q \notin \mathbb{Z}$ неравенство (5.2) при достаточно больших k_1 и k_2 , зависящих, вообще говоря, от θ и от того, насколько число τq близко к целому, вообще не будет иметь целочисленных решений. Эта ситуация как раз и имеет место при выполнении условий теоремы. Действительно, число τq будет целым тогда и только тогда, когда является целым число $\tau_0 q$. Это вытекает из того, что в силу (4.6) τ и τ_0 связаны соотношением

$$\tau q = (n_1 + n_2)q + m_0(q + p) + \tau_0 q,$$

где m_0 – некоторое целое число.

Итак, в предположении теоремы 7 неравенство (5.2), а вместе с ним и (5.1), при достаточно больших $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ не имеет целочисленных решений. Геометрический смысл этого факта состоит в том, что вершины подков $T_{21}(\sigma_j^{12})$, $j = \bar{k}_2, \bar{k}_2 + 1, \dots$, попадают в промежутки между полосками σ_i^{01} и σ_{i+1}^{01} , $i = \bar{k}_1, \bar{k}_1 + 1, \dots$, и таким образом организуются только правильные и пустые пересечения. В этом случае $N(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ совпадает с $\tilde{N}(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, и в силу теоремы 4 $f|_N$ сопряжено с $\tilde{\Omega}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые достаточные условия Ω -сопряженности двух диффеоморфизмов третьего класса, значение инварианта θ у которых одинаково и рационально. При этом мы ограничимся случаем, когда мультипликаторы точек O_1 , O_2 и O'_1, O'_2 – положительные,³ т.е. будем рассматривать условия Ω -сопряженности диффеоморфизмов, представленных на рис. 4в) или 4г), соответственно. Здесь имеет место следующая

³Случаи, когда мультипликаторы λ_1 или γ_2 отрицательны, рассматриваются, в принципе, аналогично, но также и включают некоторые специфические исследования свойств целочисленных решений неравенств (1.10)–(1.12), см., например, [4].

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f, f' \in H_3$ и $\theta = \theta' = p/q$. Предположим, что для некоторого целого s точки $\tau_0 q$ и $\tau'_0 q$ лежат в интервале $(s, s+1)$. Тогда существуют такие специальные окрестности V и V' гомоклинических контуров C и C' , что $f|_{N(f)}$ сопряжено с $f'|_{N(f')}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, для определенности, опять случай, когда f и f' — диффеоморфизмы такого же типа, как на рис. 4в), т.е. будем считать, что $\lambda_s > 0$, $\gamma_s > 0$, $c_{21} > 0$, $d_{21} > 0$. Для диффеоморфизма f выберем гетероклинические точки M_1^-, M_2^+ траектории Γ_{12} и M_2^-, M_1^+ траектории Γ_{12} . Пусть m_1 и m_2 такие целые числа, что $f^{m_1}(M_1^-) = M_2^+$, $f^{m_2}(M_2^-) = M_1^+$. Кроме того, в силу (4.6) существует такое целое k , что

$$\tau = \tau_0 + (m_1 + m_2) + k(1 + \theta). \quad (5.3)$$

Так как $\theta = p/q$ и $\tau_0 = (s + \alpha)/q$, где $0 < \alpha < 1$, то неравенство (5.4) можно переписать в виде

$$i - j \frac{p}{q} + (m_1 + m_2 + k) + \frac{s + kp}{q} + \frac{\alpha}{q} < S_3(\bar{k}_1, \bar{k}_2). \quad (5.4)$$

Очевидно, существуют такие достаточно большие $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, что неравенство (5.4) эквивалентно такому

$$i - j \frac{p}{q} + (m_1 + m_2 + k) + \frac{s + kp}{q} + \frac{1}{2q} < 0. \quad (5.5)$$

У диффеоморфизма f' возьмем какие-либо гетероклинические точки $\widetilde{M}_1^-, \widetilde{M}_2^+$ траектории Γ'_{12} и $\widetilde{M}_2^-, \widetilde{M}_1^+$ траектории Γ'_{12} , но так, чтобы для тех же самых целых чисел m_1 и m_2 , что и для f , выполнялись бы соотношения: $f'^{m_1}(\widetilde{M}_1^-) = \widetilde{M}_2^+$, $f'^{m_2}(\widetilde{M}_2^-) = \widetilde{M}_1^+$. В силу (4.6) существует такое целое k' , что

$$\widetilde{\tau}' = \tau'_0 + (m_1 + m_2) + k'(1 + \theta), \quad (5.6)$$

где $\widetilde{\tau}'$ — значение величины τ' , вычисленной по выбранным гетероклиническим точкам диффеоморфизма f' .

Рассмотрим следующие гетероклинические точки:

$$\begin{aligned} M_1'^- &\equiv T_{01}'^{(k-k')}(\widetilde{M}_1^-), & M_2'^+ &\equiv T_{01}'^{(k-k')}(\widetilde{M}_2^+), \\ M_2'^- &\equiv \widetilde{M}_2^-, & M_1'^+ &\equiv \widetilde{M}_1^+. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из формулы (4.7) (в которой нужно положить $s_1 = 0$, $s_2 = -(k - k')$, $s_3 = k - k'$, $s_4 = 0$) получаем, что для величины τ' , вычисленной по точкам (5.7), имеет место следующее выражение

$$\tau' = \widetilde{\tau}' - (k - k') - \theta(k - k') = \widetilde{\tau}' - (k - k')(1 + \theta).$$

В силу (5.6) тогда получаем, что

$$\tau' = \tau'_0 + (m_1 + m_2) + k(1 + \theta). \quad (5.8)$$

Так как $\theta = p/q$ и $\tau'_0 = (s + \alpha')/q$, где $0 < \alpha' < 1$, то неравенство (1.10) для диффеоморфизма f' можно переписать в виде

$$i - j \frac{p}{q} + (m_1 + m_2 + k) + \frac{s + kp}{q} + \frac{\alpha'}{q} < S'_3(\bar{k}'_1, \bar{k}'_2). \quad (5.9)$$

Очевидно, существуют такие $\bar{k}'_1$ и $\bar{k}'_2$, что неравенство (5.9) будет эквивалентно неравенству (5.5).

Возьмем теперь $\tilde{k}_1 = \max\{\bar{k}_1, \bar{k}'_1\}$, $\tilde{k}_2 = \max\{\bar{k}_2, \bar{k}'_2\}$. Тогда из наших рассуждений вытекает, что в специальных окрестностях $U \equiv U(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ и $U' \equiv U'(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ системы $f|_N$ и $f'|_{N'}$ будут сопряжены с системой $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющей условиям 2.1)–2.4) (см. §2), где $\bar{k}_1 = \tilde{k}_1$, $\bar{k}_2 = \tilde{k}_1$, а в условии 2.4) неравенство (1.10) нужно заменить на эквивалентное ему в данном случае неравенство (5.5). Теорема доказана.

§6. Существование счетного множества Ω -модулей

В этом параграфе мы распространим результаты работ [5], [6], в которых установлено существование счетного множества Ω -модулей у систем с негрубой гомоклинической траекторией, на случай систем с негрубым гетероклиническим контуром. Именно, будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 9. *В H_3 плотны системы, имеющие счетное множество модулей Ω -сопряженности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства этой теоремы лежит следующая лемма

ЛЕММА 4. *В H_3 плотно множество B такое, что любой диффеоморфизм из B имеет грубую седловую периодическую траекторию с негрубой гомоклинической орбитой.*

Эту лемму мы докажем ниже, а сейчас предположим, что она верна. Воспользуемся результатом работы [6], в которой показано, что любую систему с негрубой гомоклинической точкой можно сколь угодно мало возмутить (возмущением класса C^{r-1}) так, чтобы получить систему со счетным множеством грубых седловых периодических траекторий, каждая из которых имеет негрубую гомоклиническую орбиту. Заметим, что эти возмущения будут локализованы в малой окрестности негрубой гомоклинической траектории и, следовательно, не выводят из “пленки” H_3 диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром третьего класса.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм f^* , лежащий в H_3 и имеющий счетное число грубых седловых периодических траекторий $O_1^*, \dots, O_k^*, \dots$, каждая из которых имеет негрубую гомоклиническую орбиту, соответственно, Γ_k^* . Очевидно, f^* лежит в пересечении счетного множества гладких банаховых многообразий $\mathcal{M}_n$ таких, что любой диффеоморфизм из $\mathcal{M}_n$ имеет n близких к $O_1^*, \dots, O_n^*$ периодических траекторий $\tilde{O}_1^*, \dots, \tilde{O}_n^*$ с негрубыми гомоклиническими траекториями $\tilde{\Gamma}_1^*, \dots, \tilde{\Gamma}_n^*$. Пусть ν_k, ρ_k ($|\nu_k| < 1$, $|\rho_k| > 1$) – мультипликаторы траектории O_k^* .

В [3], [4] показано, что величины $\theta_k = -\ln |\nu_k| / \ln |\rho_k|$ являются модулями Ω -сопряженности на $\mathcal{M}_n$. Очевидно, величины θ_k , $k = 1, 2, \dots$, являются независимыми, так как при разных k выражаются через мультипликаторы разных периодических траекторий. Тогда по определению 1 диффеоморфизм f^* имеет счетное множество Ω -модулей. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь осталось только доказать лемму 4. Рассмотрим однопараметрическое семейство f_θ диффеоморфизмов на H_3 и покажем, что для любого $\theta = \theta_0$ на интервале $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ плотны значения θ^* такие, что диффеоморфизм f_{θ^*} имеет неглубокую гомоклиническую орбиту точки O_1 .

Зафиксируем $\theta = \theta_0$ и для диффеоморфизма f_{θ_0} рассмотрим множество пар (i, j) , для которых выполнено неравенство (1.10). В случае $\lambda_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $c_{21} > 0$, $d_{21} > 0$ оно принимает вид

$$i < j\theta_0 - \tau + S_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2). \quad (6.1)$$

Положим теперь $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ и рассмотрим для диффеоморфизма $f_{\theta_0 - \varepsilon}$ множество пар (i, j) , для которых выполнено неравенство (1.11), т.е.

$$i > j(\theta_0 - \tau - \varepsilon) - S_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2). \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь множество пар (i, j) , для которых выполнены одновременно неравенства (6.1) и (6.2). Множество таких пар, очевидно, счетно для любого $\varepsilon > 0$. Пусть (i^*, j^*) — одна из таких пар. Для диффеоморфизма f_{θ_0} полоска $\sigma_{i^*}^{01}$ и подкова $T_{21}(\sigma_{j^*}^{21})$ пересекаются правильно. Тогда будут пересекаться кривая

$$W_{i^*}^s \equiv T_{01}^{-i^*}(T_{12}^{-1}W_{\text{loc}}^s(O_1)) \subset W^s(O_1),$$

лежащая в полоске $\sigma_{i^*}^{01}$, и кривые

$$W_{i^*j^*}^u \equiv T_{21}T_{02}^{j^*}T_{12}T_{01}^{i^*}T_{21}(W_{\text{loc}}^u(O_1)) \subset W^u(O_1),$$

лежащие в подкове $T_{21}(\sigma_{j^*}^{21})$. Точки пересечения этих кривых — это гомоклинические точки седла O_1 . При $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ подкова $T_{21}(\sigma_{j^*}^{21})$ и полоска $\sigma_{i^*}^{01}$ не пересекаются, поэтому нет и соответствующих гомоклинических точек. Следовательно, найдется такое $\theta^* \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0)$, при котором f_{θ^*} будет иметь неглубокую гомоклиническую траекторию точки O_1 . В случае диффеоморфизма, представленного на рис. 4г), аналогично доказывается плотность значений параметра θ , при которых f_θ имеет неглубокую гомоклиническую траекторию точки O_2 .

Автор благодарит Л. П. Шильникова и Д. В. Тураева за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Palis J.* A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // *Asterisque*. 1978. V. 51. P. 335–346.
2. *Гонченко С. В.* Модули систем с негрубыми гомоклиническими траекториями (случай диффеоморфизмов и векторных полей) // *Методы качественной теории и теории бифуркаций*. Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1989. С. 34–49.
3. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Инварианты Ω -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // *Укр. матем. журн.* 1990. Т. 42. № 2. С. 153–159.
4. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1992. Т. 56. № 6. С. 1165–1197.
5. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *ДАН СССР*. 1991. Т. 320. № 2. С. 269–272.
6. *Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V.* On models with non-rough Poincare homoclinic curves // *Phys. D*. 1993. V. 62. № 1–4. P. 1–14.
7. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой, I), II) // *Матем. сб.* 1972. Т. 88. № 4. С. 475–492; 1973. Т. 90. № 1. С. 139–157.
8. *Гонченко С. В.* Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*. Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1984. С. 89–102.
9. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286. № 5. С. 1049–1053.
10. *Шильников Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // *Матем. сб.* 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 378–397.
11. *Гаврилов Н. К.* О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур // *Матем. заметки*. 1973. Т. 14. № 5. С. 687–696.
12. *Шильников Л. П.* Об одном случае существования счетного множества периодических движений // *ДАН СССР*. 1965. Т. 160. № 3. С. 558–561.
13. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильясенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // *Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления*. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
14. *Togawa Y.* A modulus of 3-dimensional vector fields // *Dynamical System Ergodic Theory*. 1987. V. 7. P. 295–303.
15. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // *Матем. сб.* 1970. Т. 81 (123). № 1. С. 92–103.
16. *Овсянников И. М., Шильников Л. П.* О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса // *Матем. сб.* 1986. Т. 130 (172). № 4. С. 552–570.
17. *Овсянников И. М., Шильников Л. П.* Системы с гомоклинической кривой многомерно-го седло-фокуса и спиральный хаос // *Матем. сб.* 1991. Т. 140 (182). № 7. С. 1043–1073.
18. *Гонченко С. В.* К вопросу об условиях сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // *Методы качественной теории и теории бифуркаций*. Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1990. С. 5–19.

Научно исследовательский институт
 прикладной математики и кибернетики
 при Нижегородском государственном университете (НИИ ПМК)
E-mail: gonchenko@focus.nnov.su

Поступила в редакцию
 11.01.1996