Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев, L_1 – L_∞ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 5, 45–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:20:26

УДК 517.956.45

С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев

L_1 – L_∞ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными

В статье рассмотрена задача Коши для параболического вырождающегося уравнения с анизотропным p -лапласианом и двойной нелинейностью. Для растущих начальных данных получены локальные оценки L_∞ нормы решения, дающие точную характеристику предельного роста решений на бесконечности. Оценен порядок временного интервала существования решения в зависимости от начальных данных.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Целью настоящей работы является получение L_1 – L_∞ оценок решения $u(x, t)$ задачи Коши с растущими, вообще говоря, начальными данными для анизотропного вырождающегося уравнения с двойной нелинейностью:

$$\frac{\partial(|u|^{\beta-1}u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$|u|^{\beta-1}u(x, 0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Здесь N – размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $u_0(x)$ – заданная начальная функция, остальные обозначения стандартны.

Отметим, что мы рассматриваем уравнение (1) для случая так называемой медленной диффузии по всем направлениям x_i , что выражается в следующем предположении о параметрах задачи (1)–(2):

$$\beta \in (0, 1], \quad p_i > 1 + \beta, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Не ограничивая общности, с целью упрощения обозначений будем считать также, что

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_N.$$

В изотропном случае, т.е. когда все p_i равны между собой и равны p , такая задача рассмотрена в классической работе [1] (при $\beta = 1$) и в работе [2]. При этом рост начальной функции в указанных работах измеряется конечностью величины

$$\|u_0^\beta\|_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-k/d} \int_{|x| \leq \rho} u_0^\beta(x) dx < \infty,$$

где использованы обозначения

$$d = p - 1 - \beta, \quad k = N(p - 1 - \beta) + \beta p = Nd + \beta p.$$

В терминах этой характеристики в упомянутых работах получены локальные оценки слабых решений задачи Коши, дающие, в частности, точные оценки роста решений на бесконечности при $t > 0$.

Под *слабым решением задачи* (1)–(2) в $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ мы понимаем измеримую функцию $u(x, t)$, определенную в $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ и такую, что для любого ограниченного открытого множества Ω в $\mathbb{R}^N$, для любого $t \in [0, T)$ и всех $\underline{t}, \bar{t} \in (0, T)$

$$\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-1} dx d\tau < \infty, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\bar{t}}^t \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i} dx d\tau < \infty;$$

функция $|u|^{\beta-1}u$ обладает свойством

$$|u|^{\beta-1}u \in C([0, T), L_1(\Omega))$$

и при всех $t \in [0, T)$ выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u|^{\beta-1}u \varphi(x, t) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \varphi_{x_i} dx d\tau \\ &= \int_{\Omega} |u_0|^{\beta-1}u_0 \varphi(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{\beta-1}u \varphi_{\tau}(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

для любой функции $\varphi(x, t)$ такой, что

$$\varphi(x, t) \in W^{1,\infty}([0, T], L_{\infty}(\Omega)) \cap L_{\infty}([0, T], W_0^{1,\infty}(\Omega)), \quad (5)$$

где $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ – пространство функций из $W^{1,\infty}(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Отметим, что в работах [3]–[6] при различных ограничениях на данные задачи рассмотрены вопросы локальной ограниченности слабых решений краевой задачи для уравнения (1) в ограниченной области или без учета роста решений на бесконечности.

В настоящей статье для исследования задачи (1)–(2) мы применяем подход, предложенный в работах [7], [8] и являющийся заметной модификацией и упрощением метода работы [1].

Введем теперь некоторые обозначения и приведем вспомогательные сведения. Пусть здесь и далее

$$p = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right)^{-1}, \quad (6)$$

т.е. p – гармоническое среднее показателей p_i .

Мы будем пользоваться следующим вложением анизотропных пространств Соболева [9]. Пусть функция $u(x, t)$ определена в области Ω пространства $\mathbb{R}^N$, имеет там обобщенные производные в смысле Соболева первого порядка и удовлетворяет условиям

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i} dx < \infty.$$

Тогда при $p < N$

$$\|u\|_{L_{p_*}(\Omega)} \leq \frac{N-1}{N} \prod_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{1/N}, \quad (7)$$

где

$$p_* = \frac{Np}{N-p}.$$

Если же $p > N$, то

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}.$$

Из оценки (7) обычным путем следует неравенство Гальярдо–Ниренберга, используемое ниже:

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq C \left(\prod_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega)}^{1/N} \right)^\alpha \|u\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha} \leq C \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |u_{x_i}|^{p_i} dx \right)^{\alpha/p} \|u\|_{L_\varepsilon(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (8)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ и определяется из условия

$$\frac{1}{q} = \alpha \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right) + (1-\alpha) \frac{1}{\varepsilon}, \quad (9)$$

а константа C не зависит от области Ω . (Здесь и всюду в настоящей работе мы обозначаем через C все константы, зависящие только от абсолютных параметров, таких, например, как N , β , p_i .) При этом показатели q и ε связаны соотношением $0 < \varepsilon < q$, причем при $p < N$ должно выполняться

$$q < p_* = \frac{Np}{N-p}.$$

Обратимся теперь к задаче (1)–(2) и сделаем основные предположения о ее данных и параметрах. Мы предполагаем, что показатели p_i в уравнении (1) имеют не “слишком” большой разброс “сверху”, а именно,

$$p_i < p \left(1 + \frac{\beta}{N} \right), \quad i = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Отметим, что из этого предположения следует также, что $p_i < p_*$ для всех i , если $p < N$.

Определим анизотропный параллелепипед

$$B_\rho = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq \frac{\rho^{\alpha_i}}{2} \right\}, \quad \rho > 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha_i = \frac{p}{d} \frac{d_i}{p_i}, \quad d = p - 1 - \beta, \quad d_i = p_i - 1 - \beta. \quad (12)$$

Непосредственно из определения чисел α_i , p , d , d_i следует, что для суммы чисел α_i и объема $|B_\rho|$ параллелепипеда B_ρ справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = N, \quad |B_\rho| = \rho^N. \quad (13)$$

Мы предполагаем, что начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна (мы будем рассматривать только неотрицательные решения задачи (1)–(2)) и для нее конечна величина

$$\|u_0^\beta\|_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-k/d} \int_{B_\rho} u_0^\beta(x) dx < \infty, \quad r > 0, \quad (14)$$

где

$$k = N(p - 1 - \beta) + \beta p = Nd + \beta p. \quad (15)$$

Определим положительные числа

$$\varkappa_i = \frac{k - Nd_i}{pd_i} > 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (16)$$

(Положительность чисел $\varkappa_i$ следует из условия (10).) Введем строго монотонно возрастающую функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} t^{\varkappa_N}, & t \leq 1, \\ t^{\varkappa_1}, & t \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Заметим, что $\varkappa_N = \min\{\varkappa_i\}$, $\varkappa_1 = \max\{\varkappa_i\}$ и при равенстве всех p_i , $p_i = p$, справедливо $\varkappa_i = \beta/(p - 1 - \beta)$, $i = \overline{1, N}$.

Определим еще величины

$$\begin{aligned} M_\infty &= \lim_{r \rightarrow \infty} \|u_0^\beta\|_r, \\ T_r &= \omega^{-1}\left(\frac{\gamma}{\|u_0^\beta\|_r}\right), \\ T_* &= \begin{cases} \omega^{-1}\left(\frac{\gamma}{M_\infty}\right), & M_\infty \neq 0, \\ \infty, & M_\infty = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где γ – некоторая константа, которая будет определена позднее.

Сформулируем теперь основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для задачи (1)–(2) выполнены предположения (3), (10), (14), $u_0(x) \geq 0$. Тогда существует положительная постоянная $\gamma = \gamma(p_i, N, \beta)$ такая, что для существующего на интервале $[0, T_*]$ неотрицательного слабого решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2) справедливы оценки

$$\|u^\beta(\cdot, t)\|_r \leq C \|u_0^\beta\|_r, \quad (19)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_r} \leq C r^{p/d} t^{-N/k} \|u_0^\beta\|_r^{p/k} \quad (20)$$

для всех $t \in (0, T_*)$,

$$\sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_r} |u_{x_i}|^{p_i-1} dx d\tau < C(r, t), \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\bar{t}}^t \int_{B_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx d\tau < C(r, t, \bar{t}), \quad 0 < \bar{t} < t, \quad (22)$$

для всех $t, \bar{t} \in (0, T_*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в частном случае, когда масса начальной функции конечна, т.е. когда

$$\mu \equiv \int_{\mathbb{R}^N} u_0^\beta(x) dx < \infty,$$

как легко проверить, $r^{p/d} \|u_0^\beta\|_r^{p/k} \leq \mu^{p/k}$ при любом $r > 0$. И, таким образом, в этом случае из (20) легко следует оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_r} \leq C t^{-N/k} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0^\beta(x) dx \right)^{p/k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $p_i = p$, $i = \overline{1, N}$, оценки (19)–(22) и величина интервала $[0, T_*]$ совпадают с соответствующими оценками работ [1], [2] для изотропного уравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим два важных, вытекающих из теоремы 1 отличия в поведении решений в рассматриваемом случае от случая изотропного уравнения.

Во-первых, порядок роста решения на бесконечности различен в направлении различных координатных осей.

Во-вторых, время существования решения определяется не некоей усредненной по показателям величиной, а максимальным показателем p_N при больших начальных массах $\|u_0^\beta\|_r$ и наименьшим показателем p_1 при малых значениях $\|u_0^\beta\|_r$. Эти два отличия подтверждаются следующим примером.

Пусть

$$d_i(x_i, t; T_i) = B_i \frac{|x_i|^{p_i/(p_i-2)}}{(T_i - t)^{1/(p_i-2)}}, \quad B_i = B_i(p_i) > 0, \quad p_i > 2,$$

– решение уравнения

$$d_t - (|d_{x_i}|^{p_i-2} d_{x_i})_{x_i} = 0, \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0.$$

Тогда функция

$$D(x, t) = \sum_{i=1}^N d_i(x_i, t; \theta^{p_i-2}) = \sum_{i=1}^N B_i \frac{|x_i|^{p_i/(p_i-2)}}{(\theta^{p_i-2} - t)^{1/(p_i-2)}}$$

является решением анизотропного уравнения (1) с $\beta = 1$. Непосредственное интегрирование по определенным выше параллелепипедам B_ρ показывает, что

$$\psi_0 = \| \| D(x, 0) \| \|_r = \sup_{\rho \geq r} \sum_{i=1}^N \rho^{-k/d} \int_{B_\rho} d_i(x_i, 0; \theta^{p_i-2}) dx = \frac{\gamma_0}{\theta}$$

не зависит от r , где $\gamma_0 = \gamma_0(B_i, p_i)$ – некоторая константа. Таким образом,

$$D(x, t) = \sum_{i=1}^N B_i \frac{|x_i|^{p_i/(p_i-2)}}{((\gamma_0/\psi_0)^{p_i-2} - t)^{1/(p_i-2)}} \quad (23)$$

и мы видим, что при $\psi_0 > \gamma_0$ время жизни решения $D(x, t)$ определяется максимальным показателем p_i , а при $\psi_0 < \gamma_0$ – минимальным показателем.

Кроме того, отметим, что рост решения $D(x, t)$ в направлении координатной оси x_i в точности совпадает с ростом, который ввиду определения параллелепипеда B_ρ предписывается теоремой 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Что касается единственности решения задачи (1)–(2), то она известна в случае гладких интегрируемых начальных данных (см. работы [1], [2], [10] и имеющуюся там библиографию). В нашей же постановке задачи с двойной нелинейностью и растущими начальными данными единственность решения представляет собой открытую проблему даже для случая изотропного уравнения, когда все показатели p_i равны между собой (см. по этому поводу работу [2]). Отметим, что в частном случае отсутствия двойной нелинейности ($\beta = 1$) единственность решения задачи Коши для изотропного уравнения (1) с растущими начальными данными доказана в работе [1].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Предметом настоящей статьи являются, по существу, оценки (19)–(22), и мы, не останавливаясь подробно на вопросе существования решения, отсылаем читателя к работе [10] (см. также [2]), где рассмотрены как изотропный, так и анизотропный случаи задачи (1)–(2). При этом при наличии оценок (19)–(22) решение задачи (1)–(2) получается как предел решений $u_n(x, t)$ задач Дирихле в расширяющихся областях с гладкими начальными данными, приближающимися начальную функцию $u_0(x)$. Понятно, что оценки (19)–(22) могут быть получены на регулярных решениях задачи (1)–(2) с гладкими и финитными начальными данными с последующим предельным переходом. Ввиду этого при доказательстве оценок (19)–(22) мы можем считать начальную функцию в задаче (1)–(2) и решение $u(x, t)$ ограниченными и неотрицательными. Кроме того, мы будем рассматривать слабое решение задачи (1)–(2) (с гладкими финитными начальными данными) как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабых решений $v_\varepsilon(x, t) \equiv v(x, t)$ (мы опускаем индекс $\varepsilon > 0$ для краткости) задач Коши с теми же начальными данными для регуляризованного уравнения

$$\frac{\partial(v + \varepsilon)^\beta}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (24)$$

выполнение которого мы понимаем в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v + \varepsilon)^\beta \varphi(x, t) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Omega} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} \varphi_{x_i} dx d\tau \\ = \int_{\Omega} (u_0(x) + \varepsilon)^\beta \varphi(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (v + \varepsilon)^\beta \varphi_\tau(x, \tau) dx d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

для любой функции $\varphi(x, t)$, удовлетворяющей (5). При этом, как следует из результатов работы [10], для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0, T]$ производные $(v_\varepsilon(x, t))_{x_i}$ сходятся к производным решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2) (функциям $u_{x_i}(x, t)$) слабо в $L_{p_i}(K)$. Более того, из результатов работы [5] следует, что решения v_ε задачи (25) равностепенно по $\varepsilon \geq 0$ непрерывны на любом упомянутом компакте и равномерно ограничены (во всем $\mathbb{R}^N$ при гладких финитных начальных данных). Поэтому можно считать (не ограничивая общности), что v_ε равномерно сходятся к $u(x, t)$ на любом компакте указанного вида. В частности, решение $u(x, t)$ также непрерывно и, следовательно, непрерывны определенные ниже в соотношениях (51) и (52) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Переходя к доказательству оценок (19)–(22), заметим следующее. При получении этих оценок мы для простоты изложения интегрируем по частям в уравнении (1), умноженном на различные тестирующие функции. Оправдание получающихся при этом интегральных соотношений вполне стандартно (см., например, [11], [12]) и основывается на использовании сглаживания с помощью стекловских усреднений и выборе сглаженных функций в качестве тестирующих с последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном интегральном соотношении. Тем не менее при доказательстве леммы 1 ниже все эти вычисления проделаны явно.

2.1. Оценка L_∞ нормы решения через “массу”. Доказательство оценок (19)–(22) разобьем на несколько лемм, обозначая всюду ниже через $u(x, t)$ слабое решение задачи (1)–(2), и используем также следующее обозначение:

$$(A)_+ \equiv \max\{A, 0\}.$$

Леммы 1–3 аналогичны соответствующим леммам из [7].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < h_2 < h_1$, $0 < t_2 < t_1$, $0 < r_{1,i} < r_{2,i}$, $i = \overline{1, N}$,

$$P_{r_1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq r_{1,i}\},$$

$$P_{r_2} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq r_{2,i}\},$$

$$P_{r_k}(t) = P_{r_k} \times \{t\}.$$

Тогда для слабого решения $u(x, t)$ задачи (1)–(2) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t_1 < \tau < t} \int_{P_{r_1}(\tau)} (u - h_1)_+^{1+\beta} dx + \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^t \int_{P_{r_1}} |(u - h_1)_{+x_i}|^{p_i} dx d\tau \\ \leq C \left(\frac{h_1}{h_1 - h_2} \right)^{1-\beta} \left\{ (t_1 - t_2)^{-1} \int_{t_2}^t \int_{P_{r_2}} (u - h_2)_+^{1+\beta} dx d\tau \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^N (r_{2,i} - r_{1,i})^{-p_i} \int_{t_2}^t \int_{P_{r_2}} (u - h_2)_+^{p_i} dx d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = (h_1 + h_2)/2$, $s > p_N$, $\zeta(x, t)$ – срезающая функция класса C^∞ такая, что $\zeta = 1$ на $P_{r_1} \times [t_1, t]$ и $\zeta = 0$ вне P_{r_2} и при $t \leq t_2$. Кроме того, $|\zeta_t| \leq C(t_1 - t_2)^{-1}$, $|\zeta_{x_i}| \leq C(r_{2,i} - r_{1,i})^{-1}$. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ фиксировано. Мы получим сейчас из уравнения (24) (а затем предельным переходом из (1)) некоторые интегральные соотношения, смысл которых состоит в умножении обеих частей (24) на функцию $(v + \varepsilon - h)_+ \zeta^s$ и интегрировании по частям. Для любой функции $f(x, t)$ и достаточно малого числа $\delta > 0$ через

$$(f)_\delta(x, t) \equiv \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} f(x, \tau) d\tau, \quad (f)_{-\delta}(x, t) \equiv \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t f(x, \tau) d\tau$$

обозначим стекловские усреднения по переменной t функции $f(x, t)$. Выберем в интегральном тождестве (25) в качестве пробной функции $\varphi(x, t)$ функцию $\xi(x, t)$:

$$\xi(x, t) \equiv (\eta)_{-\delta}(x, t), \quad \eta(x, t) \equiv (w^{1/\beta}(x, t) - h)_+ \zeta^s(x, t),$$

где $w(x, t) \equiv ((v + \varepsilon)^\beta)_\delta(x, t)$, а δ достаточно мало, $\delta < t_2/2$. Отметим, что, так как $\zeta \equiv 0$ при $t \leq t_2$, функция $\xi(x, t)$ корректно определена и удовлетворяет условиям (5). Пользуясь легко проверяемым тождеством для функций $f(t)$ и $g(t)$ таких, что $g(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$,

$$\int_0^t f(\tau)(g'_\tau)_{-\delta}(\tau) d\tau = \int_0^{t-\delta} (f)_\delta(\tau)g'_\tau(\tau) d\tau + \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t f(\tau)[g(t) - g(\tau)] d\tau,$$

запишем тождество (25) с указанной пробной функцией $\xi(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (v(x, t) + \varepsilon)^\beta \xi(x, t) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} \xi_{x_i} dx d\tau \\ = \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbb{R}^N} ((v + \varepsilon)^\beta)_\delta \eta_\tau(x, \tau) dx d\tau + R_1(\delta, t), \end{aligned} \quad (27)$$

где использовано обозначение

$$R_1(\delta, t) \equiv \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^N} (v(x, \tau) + \varepsilon)^\beta [\eta(x, t) - \eta(x, \tau)] dx.$$

Интегрируя по частям по τ в первом слагаемом в правой части соотношения (27), получаем в силу определения функции $\eta(x, t)$

$$\int_0^{t-\delta} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(w)_\tau \zeta^s dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} \xi_{x_i} dx d\tau = R_1(\delta, t) + R_2(\delta, t), \quad (28)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(w(x, t)) &\equiv \int_{h^\beta}^{w(x, t)} (\omega^{1/\beta} - h)_+ d\omega, \\ R_2(\delta, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} ((v + \varepsilon)^\beta)_\delta(x, t - \delta) \eta(x, t - \delta) dx - \int_{\mathbb{R}^N} (v(x, t) + \varepsilon)^\beta \xi(x, t) dx, \end{aligned}$$

а функция $w(x, t)$ определена выше. Интегрируя еще раз по частям по τ в (28), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(w(x, t - \delta)) \zeta^s dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} \xi_{x_i} dx d\tau \\ &= s \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(w(x, \tau)) \zeta^{s-1} \zeta_\tau(x, \tau) dx d\tau + R_1(\delta, t) + R_2(\delta, t). \end{aligned} \quad (29)$$

Перейдем теперь к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в последнем равенстве. При этом ввиду непрерывности $v(x, t)$ и в силу определения функций $w(x, t)$, $\eta(x, t)$ и $\xi(x, t)$ выражения $R_1(\delta, t)$ и $R_2(\delta, t)$, как легко проверить, стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, в силу определения $\xi(x, t)$, свойств функций $v(x, t)$, $\zeta(x, t)$ и хорошо известных свойств стекловских усреднений производные ξ_{x_i} сходятся к $((v + \varepsilon - h)_+ \zeta^s)_{x_i}$ в $L_{p_i}(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0, T]$. Функция же $\Phi(w(x, t))$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится равномерно на компактах указанного выше вида к функции

$$\Phi(v + \varepsilon)(x, t) \equiv \int_{h^\beta}^{(v(x, t) + \varepsilon)^\beta} (\omega^{1/\beta} - h)_+ d\omega = \beta \int_h^{v + \varepsilon} z^{\beta-1} (z - h)_+ dz = \varphi(v + \varepsilon),$$

где

$$\varphi(u) = \beta \int_0^{(u-h)_+} (y + h)^{\beta-1} y dy.$$

Таким образом, обозначая $u \equiv u_\varepsilon \equiv v + \varepsilon$ и опуская для краткости индекс ε в обозначении u_ε , после перехода к пределу в (29) при $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{P_{r_2}} \varphi(u(x, t)) \zeta^s dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{P_{r_2}} |(u - h)_{+x_i}|^{p_i} \zeta^s dx d\tau \\ &= s \int_0^t \int_{P_{r_2}} \varphi(u) \zeta^{s-1} \zeta_t dx d\tau \\ &\quad - s \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{P_{r_2}} |(u - h)_{+x_i}|^{p_i-2} (u - h)_{+x_i} (u - h)_+ \zeta^{s-1} \zeta_{x_i} dx d\tau, \end{aligned} \quad (30)$$

или для краткости

$$I_1 + \sum_{i=1}^N J_{1,i} = I_2 + \sum_{i=1}^N J_{2,i}.$$

Рассмотрим интеграл I_1 и заметим, что

$$I_1 \geq \int_{P_{r_1} \cap \{u \geq h_1\}} \varphi(u(x, t)) dx.$$

На множестве, где $u > h_1$, для функции $\varphi(u)$ справедливы следующие неравенства. При $(u - h)_+ > 2h$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq C \int_h^{(u-h)_+} (y + h)^{\beta-1} y dy \geq C \int_h^{(u-h)_+} y^\beta dy \\ &\geq C \int_{(u-h)_+/2}^{(u-h)_+} y^\beta dy = C(u - h)_+^{1+\beta} \geq C(u - h_1)_+^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Если же $(u - h)_+ < 2h$, то

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq Ch^{\beta-1} \int_0^{(u-h)_+} y dy = Ch^{\beta-1} (u-h)_+^2 \\ &\geq Ch^{\beta-1} (h_1 - h)^{1-\beta} (u-h)_+^{1+\beta} \geq C \left(\frac{h_1 - h}{h} \right)^{1-\beta} (u-h)_+^{1+\beta} \\ &\geq C \left(\frac{h_1 - h_2}{h_1} \right)^{1-\beta} (u-h_1)_+^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1 \geq C \left(\frac{h_1 - h_2}{h_2} \right)^{1-\beta} \int_{P_{r_1}(t)} (u-h_1)_+^{1+\beta} dx. \quad (31)$$

Для оценки интеграла I_2 заметим, что

$$\varphi(u) \leq C \int_0^{(u-h)_+} y^\beta dy = C(u-h_2)_+^{1+\beta},$$

поэтому

$$|I_2| \leq C \int_0^t \int_{P_{r_2}} (u-h_2)_+^{1+\beta} |\zeta_t| dx d\tau \leq C(t_1 - t_2)^{-1} \int_{t_2}^t \int_{P_{r_2}} (u-h_2)_+^{1+\beta} dx d\tau. \quad (32)$$

Далее, оценивая $J_{2,i}$ по неравенству Юнга с ε_i , получаем

$$|J_{2,i}| \leq \varepsilon_i \int_0^t \int_{P_{r_2}} |(u-h)_{+x_i}|^{p_i} \zeta^s dx d\tau + C_{\varepsilon_i} \int_0^t \int_{P_{r_2}} (u-h)_+^{p_i} \zeta^{s-p_i} |\zeta_{x_i}|^{p_i} dx d\tau. \quad (33)$$

Выбирая ε_i достаточно малыми, переносим слагаемые с ε_i в левую часть (30) и используя (31)–(33), с учетом свойств функции ζ получаем неравенство (26) для функции $u_\varepsilon = v + \varepsilon$.

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом равномерной сходимости $v = v_\varepsilon$ к решению задачи (1)–(2) на компактах и с учетом того, что норма слабого предела производных $(u-h)_{+x_i}$ не превосходит нижнего предела норм $(v + \varepsilon - h)_{+x_i}$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $a_1 > a_2 > 0$, $\tau_1 > \tau_2 > 0$, $0 < R_{1,i} < R_{2,i}$, $i = \overline{1, N}$, P_{R_1} , $P_{R_1}(\tau)$ и P_{R_2} , $P_{R_2}(\tau)$ определены точно так же, как в лемме 1 с заменой $r_{k,i}$ на $R_{k,i}$, $\beta \leq \nu < 1 + \beta$.

Тогда

$$\sup_{\tau_1 < \tau < t} \int_{P_{R_1}(\tau)} (u-a_1)_+^{1+\beta} dx \leq C \sum_{l=0}^N F_l \left(\sup_{\tau_2 < \tau < t} \int_{P_{R_2}(\tau)} (u-a_2)_+^\nu dx \right)^{M_l}, \quad (34)$$

где использованы следующие обозначения:

$$F_0 = (t - \tau_2) \left[\frac{C(a_1, a_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right]^{1/(1-s_0)}, \quad (35)$$

$$F_i = (t - \tau_2) \left[\frac{C(a_1, a_2)}{(R_{2,i} - R_{1,i})^{p_i}} \right]^{1/(1-s_i)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (36)$$

$$C(a_1, a_2) = \left(\frac{a_1}{a_1 - a_2} \right)^{1-\beta}, \quad M_l = \frac{f_l}{1 - s_l}, \quad l = \overline{0, N},$$

$$s_0 = \sigma(1 + \beta)\omega_0, \quad \sigma = \frac{1}{p}, \quad f_0 = \frac{(1 + \beta)}{\nu}(1 - \omega_0),$$

$$s_i = \sigma p_i \omega_i, \quad f_i = \frac{(1 - \omega_i)}{\nu} p_i, \quad i = \overline{1, N},$$

а числа ω_l , $l = \overline{0, N}$, определяются равенствами

$$\omega_0 = \frac{1/\nu - 1/(\beta + 1)}{1/\nu - (a - 1)/N}, \quad \omega_i = \frac{1/\nu - 1/p_i}{1/\nu - (a - 1)/N}.$$

Здесь

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = \frac{N}{p}.$$

Заметим, что при выполнении (10) и при $\beta \leq \nu < 1 + \beta$ введенные выше величины удовлетворяют условиям

$$s_l, \omega_l \in (0, 1), \quad M_l > 1, \quad l = \overline{0, N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $n = 0, 1, \dots$

$$\rho_{n,i} = R_{2,i} - (R_{2,i} - R_{1,i})2^{-n}, \quad \theta_n = \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)2^{-n}, \quad k_n = a_2 + (a_1 - a_2)2^{-n}.$$

Заметим, что

$$\rho_{n+1,i} > \rho_{n,i}, \quad k_{n+1} < k_n, \quad \theta_{n+1} < \theta_n,$$

так что, обозначая $E_n = P_{\rho_n} \times (\theta_n, t)$, видим, что $E_n \subset E_{n+1}$ и при этом $E_0 = P_{R_1} \times (\tau_1, t)$, $E_\infty = P_{R_2} \times (\tau_2, t)$.

Применим неравенство (26) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} h_1 &= k_{2n+1}, & h_2 &= k_{2n+2}, \\ r_{1,i} &= \rho_{2n+1,i}, & r_{2,i} &= \rho_{2n+2,i}, \\ t_1 &= \theta_{2n+1}, & t_2 &= \theta_{2n+2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$C(k_{2n+1}, k_{2n+2}) \leq C\left(\frac{a_1}{a_1 - a_2}\right)^{1-\beta} 2^{2(1-\beta)n},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta_{2n+1} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} (u - k_{2n+1})_+^{1+\beta} dx + \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+1}} |(u - k_{2n+1})_{+x_i}|^{p_i} dx d\tau \\ & \leq C \left(\frac{a_1}{a_1 - a_2} \right) 2^{2(1-\beta)n} \left\{ \frac{2^{2n}}{\tau_1 - \tau_2} \int_{E_{2n+2}} (u - k_{2n+2})_+^{1+\beta} dx d\tau \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^N \frac{2^{2np_i}}{(R_{2,i} - R_{1,i})^{p_i}} \int_{E_{2n+2}} (u - k_{2n+2})_+^{p_i} dx d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим функцию $v_n = (u - k_{2n})_+ z_n(x, t)$, где функция $z_n(x, t)$ обладает свойствами: $0 \leq z_n \leq 1$, $z_n = 1$ на E_{2n} , $z_n = 0$ вне E_{2n+1} ,

$$|z_{nx_i}| \leq C(R_{2,i} - R_{1,i})^{-1} 2^{2n}, \quad |z_{nt}| \leq C(\tau_1 - \tau_2)^{-1} 2^{2n}.$$

Для первого интеграла в левой части (37) имеем

$$\int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} (u - k_{2n+1})_+^{1+\beta} dx \geq \int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} (u - k_{2n})_+^{1+\beta} z_n^{1+\beta} dx = \int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} v_n^{1+\beta} dx.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} & \int_{E_{2n+1}} |[(u - k_{2n})_+ z_n]_{x_i}|^{p_i} dx d\tau \leq \int_{E_{2n+1}} |(u - k_{2n})_{+x_i}|^{p_i} dx d\tau \\ & \quad + C \frac{2^{2np_i}}{(R_{2,i} - R_{1,i})^{p_i}} \int_{E_{2n+1}} (u - k_{2n})_+^{p_i} dx d\tau \\ & \leq \int_{E_{2n+1}} |(u - k_{2n+1})_{+x_i}|^{p_i} dx d\tau \\ & \quad + C \frac{2^{2np_i}}{(R_{2,i} - R_{1,i})^{p_i}} \int_{E_{2n+3}} (u - k_{2n+2})_+^{p_i} z_{n+1}^{p_i} dx d\tau, \end{aligned}$$

где мы использовали определение функций z_n и убывание уровней k_n . Учитывая теперь определение функций v_n , из двух последних неравенств и (37) получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta_{2n+1} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} v_n^{1+\beta} dx + \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+1}} |v_{nx_i}|^{p_i} dx d\tau \\ & \leq C \left(\frac{a_1}{a_1 - a_2} \right)^{1-\beta} 2^{2n(1-\beta)} \left\{ \frac{2^{2n}}{\tau_1 - \tau_2} \int_{E_{2n+3}} v_{n+1}^{1+\beta} dx d\tau \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^N \frac{2^{2np_i}}{(R_{2,i} - R_{1,i})^{p_i}} \int_{E_{2n+3}} v_{n+1}^{p_i} dx d\tau \right\} = I_0 + \sum_{i=1}^N I_i. \end{aligned} \quad (38)$$

Для оценки интегралов в правой части (38) воспользуемся неравенством (8), примененным к v_{n+1} , $\Omega = P_{\rho_{2n+3}}$. В первом двойном интеграле справа в (38) имеем при фиксированном τ

$$\int_{P_{\rho_{2n+3}}} v_{n+1}^{1+\beta} dx \leq C \left(\sum_{i=1}^N \int_{P_{\rho_{2n+3}}} |v_{n+1x_i}|^{p_i} dx \right)^{\sigma(1+\beta)\omega_0} \|v_{n+1}\|_{\nu, P_{\rho_{2n+3}}}^{(1-\omega_0)(1+\beta)},$$

где σ и ω_0 определены в условии леммы. Интегрируя последнее неравенство по времени и используя неравенство Гёльдера, с учетом определения s_0 и f_0 получаем

$$\begin{aligned} \int_{E_{2n+3}} v_{n+1}^{1+\beta} dx d\tau &\leq C(t - \theta_{2n+3})^{1-s_0} \left(\sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+3}} |v_{n+1x_i}|^{p_i} dx d\tau \right)^{s_0} \\ &\quad \times \left(\sup_{\theta_{2n+3} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+3}}(\tau)} v_{n+1}^\nu dx \right)^{f_0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Применяя теперь последовательно сначала неравенство (39), а затем неравенство Юнга с $\delta/(N+1)$, получаем

$$\begin{aligned} I_0 &= C(a_1, a_2) 2^{2n(1-\beta)} \frac{2^{2n}}{\tau_1 - \tau_2} \int_{E_{2n+3}} v_{n+1}^{1+\beta} dx d\tau \\ &\leq \frac{\delta}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+3}} |v_{n+1x_i}|^{p_i} dx d\tau \right) + C_\delta b_0^n (t - \theta_{2n+3}) \left[\frac{C(a_1, a_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right]^{1/(1-s_0)} \\ &\quad \times \left(\sup_{\theta_{2n+3} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+3}}(\tau)} v_{n+1}^\nu dx \right)^{M_0}, \end{aligned} \quad (40)$$

где M_0 определено в условии леммы, а $b_0 = 2^{2(2-\beta)/(1-s_0)}$.

Совершенно аналогичные оценки остальных слагаемых в правой части (38) дают

$$\begin{aligned} I_l &\leq \frac{\delta}{N+1} \left(\sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+3}} |v_{n+1x_i}|^{p_i} dx d\tau \right) + C_\delta b_l^n (t - \theta_{2n+3}) \left[\frac{C(a_1, a_2)}{(R_{2,l} - R_{1,l})^{p_l}} \right]^{1/(1-s_l)} \\ &\quad \times \left(\sup_{\theta_{2n+3} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+3}}(\tau)} v_{n+1}^\nu dx \right)^{M_l}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $b_l = 2^{2(1+p_l-\beta)/(1-s_l)}$.

Складывая оценки (40), (41) и используя (38), получаем

$$\begin{aligned} &\sup_{\theta_{2n+1} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+1}}(\tau)} v_n^{1+\beta}(\tau) dx + \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+1}} |v_{nx_i}|^{p_i} dx d\tau \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+3}} |v_{n+1x_i}|^{p_i} dx d\tau \\ &\quad + C_\delta \sum_{k=0}^N b_k^n F_k \left(\sup_{\theta_{2n+3} < \tau < t} \int_{P_{\rho_{2n+3}}(\tau)} v_{n+1}^\nu dx \right)^{M_k}. \end{aligned} \quad (42)$$

Обозначим

$$y_n = \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+1}} |v_{nx_i}|^{p_i} dx d\tau.$$

Тогда из последнего неравенства следует, что

$$y_n \leq \delta y_{n+1} + \sum_{k=0}^N b_k^n B_{k,\delta}, \quad (43)$$

где

$$B_{k,\delta} = C_\delta F_k \left(\sup_{\tau_2 < \tau < t} \int_{P_{R_2}(\tau)} (u - a_2)_+^\nu dx \right)^{M_k}.$$

Итерируя неравенство (43), легко получаем, что

$$y_1 \leq \delta^n y_{n+1} + \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{n-1} (\delta b_k)^l b_k B_{k,\delta}.$$

Заметим теперь, что

$$y_{n+1} \leq C \sum_{i=1}^N \int_{E_{2n+3}} (|u_{x_i}|^{p_i} + 2^{2np_i} |u|^{p_i}) dx d\tau \leq C(u, R_2, \tau_2) 2^{2np_N},$$

откуда следует, что при достаточно малом δ таком, что $\delta 2^{2p_N} < 1$ и $\delta b_k < 1$, $k = \overline{0, N}$, справедливо неравенство

$$y_1 \leq C \sum_{k=0}^N F_k \left(\sup_{\tau_2 < \tau < t} \int_{P_{R_2}(\tau)} (u - a_2)_+^\nu dx \right)^{M_k}.$$

Отсюда и из оценки (42) с $n = 0$ следует утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < d_{1,i} < d_{2,i}$, $0 < T_2 < T_1 < t$, и пусть константы ν , s_l , f_l , M_l , ω_l и параллелепипеды P_{d_1} , P_{d_2} определены, как в леммах 1, 2.

Тогда

$$\|u\|_{\infty, P_{d_1} \times [T_1, t]} \leq C \left\{ \sum_{l=0}^N H_l \left(\sup_{T_2 < \tau < t} \int_{P_{d_2}(\tau)} u^\nu dx \right)^{M_l-1} \right\}^{1/(1+\beta-\nu)}, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} H_0 &= (t - T_2)(T_1 - T_2)^{-1/(1-s_0)}, \\ H_i &= (t - T_2)(d_{2,i} - d_{1,i})^{-p_i/(1-s_i)}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим систему вложенных уменьшающихся цилиндров, введя величины

$$r_{n,i} = d_{1,i} + (d_{2,i} - d_{1,i})2^{-n}, \quad t_n = T_1 - (T_1 - T_2)2^{-n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

P_{r_n} — как и выше, параллелепипед со сторонами $r_{n,i}$:

$$P_{r_n} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq r_{n,i}\}.$$

Кроме того, для заданного $k > 0$, которое будет выбрано позднее, определим возрастающую последовательность уровней:

$$h_n = k(1 - 2^{-n-1}), \quad \bar{h}_n = \frac{h_n + h_{n+1}}{2} > h_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Применим теперь оценку (34) с $a_1 = \bar{h}_n$, $a_2 = h_n$ и с параметрами

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_{n+1}, & \tau_2 &= t_n, & P_{R_1} &= P_{r_{n+1}}, & P_{R_2} &= P_{r_n}, \\ P_{r_{n+1}} \times [t_{n+1}, t] &\subset P_{r_n} \times [t_n, t]. \end{aligned}$$

При этом величины F_l из неравенства (34) оценим следующим образом. Величина F_0 :

$$\begin{aligned} F_0 &\leq C(t - t_n) \left[\frac{C(\bar{h}_n, h_n)}{t_n - t_{n+1}} \right]^{1/(1-s_0)} \\ &\leq C(t - t_n) 2^{(2-\beta)n/(1-s_0)} \left[\frac{1}{T_1 - T_2} \right]^{1/(1-s_0)} \\ &\leq C\bar{b}_0^n (t - T_2)(T_1 - T_2)^{-1/(1-s_0)} = C\bar{b}_0^n H_0, \end{aligned}$$

где $\bar{b}_0 = 2^{(2-\beta)(1-s_0)}$.

Совершенно аналогично для F_i , $i = \overline{1, N}$:

$$F_i \leq C\bar{b}_i^n H_i,$$

где $\bar{b}_i = 2^{(1+p_i-\beta)(1-s_i)}$.

Таким образом, в нашем случае неравенство (34) дает

$$\sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{P_{r_{n+1}}(\tau)} (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta} dx \leq C \sum_{l=0}^N \bar{b}_l^n H_l \left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{P_{r_n}(\tau)} (u - h_n)_+^\nu dx \right)^{M_l}. \quad (46)$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства. На $P_{r_{n+1}} \cap \{u > h_{n+1}\}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{P_{r_{n+1}}(\tau)} (u - h_{n+1})_+^\nu dx &= \int_{P_{r_{n+1}}(\tau) \cap \{u > h_{n+1}\}} (u - h_{n+1})_+^\nu dx \\ &= \int_{P_{r_{n+1}}(\tau) \cap \{u > h_{n+1}\}} \frac{(u - h_{n+1})_+^\nu (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta-\nu}}{(u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta-\nu}} dx \\ &\leq \int_{P_{r_{n+1}}(\tau)} \frac{(u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta}}{(h_{n+1} - \bar{h}_n)_+^{1+\beta-\nu}} dx \\ &\leq Ck^{-(1+\beta-\nu)} 2^{n(1+\beta-\nu)} \int_{P_{r_{n+1}}(\tau)} (u - \bar{h}_n)_+^{1+\beta} dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая соотношение (47) и используя неравенство (46), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{t_{n+1} < \tau < t} \int_{P_{r_{n+1}}(\tau)} (u - h_{n+1})_+^\nu dx \\ \leq Ck^{-(1+\beta-\nu)} \sum_{l=0}^N b_l^n H_l \left(\sup_{t_n < \tau < t} \int_{P_{r_n}(\tau)} (u - h_n)_+^\nu dx \right)^{M_l}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $b_l = \bar{b}_l 2^{(1+\beta-\nu)}$.

Введя теперь обозначение

$$Y_n = \sup_{t_n < \tau < t} \int_{P_{r_n}(\tau)} (u - h_n)_+^\nu dx,$$

запишем неравенство (48) в виде

$$Y_{n+1} \leq k^{-(1+\beta-\nu)} \sum_{l=0}^N b_l^n C H_l Y_n^{M_l}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Совершенно аналогично доказательству леммы 5.6 из [11] легко проверить, что последовательность Y_n будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, если для достаточно малого γ_0 выполнено неравенство

$$k^{-(1+\beta-\nu)} \sum_{l=0}^N C H_l Y_0^{M_l-1} \leq \gamma_0,$$

где величина γ_0 достаточно мала, $\gamma_0 = \gamma_0(b_0, b_1, \dots, b_N)$. Последнее же неравенство будет тем более выполнено, если будет выполнено равенство

$$k^{-(1+\beta-\nu)} C \left\{ \sum_{l=0}^N H_l \left(\sup_{T_2 < \tau < t} \int_{P_{d_2}(\tau)} u^\nu dx \right)^{M_l-1} \right\} = \gamma_0.$$

Поэтому, выбирая k из условия

$$k^{(1+\beta-\nu)} = \frac{C}{\gamma_0} \sum_{l=0}^N H_l \left(\sup_{T_2 < \tau < t} \int_{P_{d_2}(\tau)} u^\nu dx \right)^{M_l-1},$$

видим, что $Y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу определения величин Y_n , h_n и цилиндров $P_{r_n} \times [t_n, t]$ получаем, что $u \leq k$ на $P_{d_1} \times [T_1, t]$.

Лемма 3 доказана.

Ниже мы будем применять лемму 3 и неравенство (44) с $\nu = \beta$ и со следующими параметрами:

$$T_1 = \frac{t}{2}, \quad T_2 = \frac{t}{4}, \quad d_{1,i} = r_i, \quad d_{2,i} = 2r_i,$$

используя параллелепипеды

$$P_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq r_i\}, \quad P_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq 2r_i\},$$

так что $\int_{P_r} u^\beta dx$ имеет смысл массы, сосредоточенной внутри параллелепипеда P_r со сторонами r_i .

В этом случае оценка (44) принимает вид

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, P_r \times [t/2, t]} &\leq C \left\{ t^{-N/k} \left(\sup_{t/4 < \tau < t} \int_{P_{2r}(\tau)} u^\beta dx \right)^{p/k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N t r_i^{-p_i(k+N)/(N(p-p_i)+\beta p)} \left(\sup_{t/4 < \tau < t} \int_{P_{2r}(\tau)} u^\beta dx \right)^{p(p_i-\beta)/(N(p-p_i)+\beta p)} \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

где, напомним, p – среднее гармоническое показателей p_i , $k = Nd + \beta p$, $d = p - 1 - \beta$ и мы упростили выражения $s_0/(1 - s_0)$, $p_i/(1 - s_i)$ и $M_l - 1$, используя определения соответствующих величин.

Мы применим полученное неравенство (49) к введенному выше “стандартному анизотропному” параллелепипеду B_ρ , т.е. положим $r_i = \rho^{\alpha_i}$, где α_i определены в (12). При этом разделим еще обе части (49) на $\rho^{p/d}$, умножим на $t^{N/k}$ и внесем $\rho^{-k/d}$ в каждые круглые скобки в оценке (49). Элементарный подсчет всех степеней ρ показывает, что (49) при этом примет вид

$$t^{N/k} \rho^{-p/d} \|u\|_{\infty, B_\rho \times [t/2, t]} \leq C \left\{ \left(\sup_{t/4 < \tau < t} \rho^{-k/d} \int_{B_{2\rho}(\tau)} u^\beta dx \right)^{p/k} + \sum_{i=1}^N t^{1+N/k} \left(\sup_{t/4 < \tau < t} \rho^{-k/d} \int_{B_{2\rho}(\tau)} u^\beta dx \right)^{G_i} \right\}, \quad (50)$$

где мы для краткости обозначили через G_i соответствующие показатели степеней из (49), т.е.

$$G_i = \frac{p(p_i - \beta)}{N(p - p_i) + \beta p}.$$

Пусть $r > 0$ фиксировано. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\varphi(t) = \varphi_r(t) = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} \tau^{N/k} \rho^{-p/d} \|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_\rho}, \quad (51)$$

$$\psi(t) = \psi_r(t) = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} \rho^{-k/d} \int_{B_\rho} u^\beta dx = \sup_{0 < \tau < t} \|u^\beta(\cdot, \tau)\|_r. \quad (52)$$

Возьмем в оценке (50) $\sup$ от обеих частей сначала по ρ , а затем по t , в результате придем к следующему неравенству для функций φ и ψ :

$$\varphi(t) \leq C \left\{ \psi^{p/k}(t) + \sum_{i=1}^N t^{1+N/k} \psi^{G_i}(t) \right\}. \quad (53)$$

Оценка (53) показывает, что L_∞ норма функции $u(x, t)$ по параллелепипеду B_ρ оценивается в терминах функции $\psi(t)$. Запишем оценку (53) в следующем виде:

$$\varphi(t) \leq C \psi^{p/k}(t) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \left(t \psi^{1/\varkappa_i} \right)^{1+N/k} \right\}, \quad (54)$$

где числа $\varkappa_i$ введены в (16),

$$\frac{1}{\varkappa_i} = \frac{G_i - p/k}{1 + N/k} = \frac{pd_i}{k - Nd_i}.$$

Пусть $t_1 > 0$ выбрано так, что при $0 < t < t_1$ выполнено условие

$$\omega(t) \psi(t) \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (55)$$

где ε_1 достаточно мало и будет выбрано ниже. В силу определения $\omega(t)$ легко видеть, что при выполнении условия (55) с $\varepsilon_1 < 1$ для всех $i = \overline{1, N}$

$$t \psi^{1/\varkappa_i} \leq C, \quad (56)$$

и, следовательно, в силу оценки (54)

$$\varphi(t) \leq C\psi^{p/k}(t). \quad (57)$$

Перейдем теперь к оценке функции $\psi(t)$, предполагая условия (55)–(57) выполненными.

2.2. Оценки функции $\psi(t)$. Для получения оценок функции $\psi(t)$ в терминах величины $\psi_0 \equiv \psi(0) = \|u_0^\beta\|_r$ используем уравнение (1). Пусть $\zeta(x)$ – срезающая функция параллелепипеда $B_{2\rho}$, равная 1 на B_ρ , и $s > p_N$. Умножая уравнение (1) на $\zeta^s(x)$ и интегрируя по частям по $B_{2\rho} \times [0, t]$, с учетом свойств $\zeta(x)$ приходим к неравенству

$$\int_{B_\rho} u^\beta(x, t) dx \leq \int_{B_{2\rho}} u_0^\beta(x) dx + C \sum_{i=1}^N \rho^{-\alpha_i} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |u_{x_i}|^{p_i-1} \zeta^{s-1}(x) dx d\tau.$$

Разделим обе части полученного соотношения на $\rho^{k/d}$ и возьмем $\sup$ сначала по $\rho \geq r$, а затем по t . В результате получим ($\psi_0 = \|u_0^\beta\|_r$)

$$\psi(t) \leq C\psi_0 + C \sum_{i=1}^N \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} A_i(\rho, t), \quad (58)$$

где использовано обозначение

$$A_i(\rho, t) = \rho^{-\alpha_i - k/d} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |u_{x_i}|^{p_i-1} dx d\tau. \quad (59)$$

Рассмотрим интегралы, определенные в (59). Следуя [1], мы используем уравнение (1) для оценки интегралов $A_i(\rho, t)$. При этом, чтобы в дальнейшем избежать громоздких вычислений, связанных с подсчетом степеней ρ в возникающих выражениях, заметим следующее.

Пусть функция $u_\rho(x, t)$ связана с $u(x, t)$ соотношением

$$u(x, t) = \rho^{p/d} u_\rho(\dots, \rho^{-\alpha_i} x_i, \dots, t). \quad (60)$$

Тогда, сделав замену $x_i = \rho^{\alpha_i} y_i$, легко видеть, что

$$\varphi(t) = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} \tau^{N/k} \|u_\rho(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_1}, \quad (61)$$

$$\psi(t) = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} \int_{B_1} u_\rho^\beta(y, \tau) dy, \quad (62)$$

$$\sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} A_i(\rho, \tau) = C \sup_{0 < \tau < t} \sup_{\rho \geq r} \int_0^\tau \int_{B_2} |u_{\rho y_i}|^{p_i-1} dy d\theta. \quad (63)$$

Кроме того, все функции $u_\rho(t, y)$ удовлетворяют уравнению (1). Итак, опуская для простоты обозначений индекс ρ , обозначим функцию $u_\rho(x, t)$ через $v(x, t)$ и рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t \int_{B_2} |v_{x_j}|^{p_j-1} dx d\tau,$$

где функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Аналогично [1] в нижеследующих оценках интеграла I фигурирует функция v в отрицательной степени. Это оправдывается окончательными оценками, опять таки аналогично [1], путем использования функции $v+\varepsilon$ вместо v с последующим предельным переходом. Мы для простоты опускаем промежуточные выкладки. Оценим I следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \int_{B_2} (|v_{x_j}|^{p_j-1} \tau^{(1/p_j)(p_j-1)/p_j} v^{-(1+\beta)/p_j(p_j-1)/p_j}) \\ &\quad \times (\tau^{(-1/p_j)(p_j-1)/p_j} v^{((1+\beta)/p_j)(p_j-1)/p_j}) dx d\tau \\ &\leq \left(\int_0^t \int_{B_2} |v_{x_j}|^{p_j} \tau^{1/p_j} v^{-(1+\beta)/p_j} dx d\tau \right)^{(p_j-1)/p_j} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \int_{B_2} \tau^{-(p_j-1)/p_j} v^{(1+\beta)(p_j-1)/p_j} dx d\tau \right)^{1/p_j} \\ &= (J_1^j(t))^{(p_j-1)/p_j} (J_2^j(t))^{1/p_j}. \end{aligned} \quad (64)$$

Рассмотрим сначала $J_2^j(t)$. Для этого заметим, что справедливы следующие неравенства.

Пусть $\gamma > 1$. Тогда при выполнении условия (55)

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{\infty, B_\gamma} &\leq \sup_{\rho \geq r} \|u_\rho(\cdot, t)\|_{\infty, B_\gamma} = \sup_{\rho \geq \gamma r} \rho^{-p/d} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_\rho} \\ &\leq C_\gamma t^{-N/k} \varphi(t) \leq C_\gamma t^{-N/k} \psi^{p/k}(t). \end{aligned} \quad (65)$$

И, аналогично,

$$\int_{B_\gamma} v^\beta(x, t) dx \leq C_\gamma \psi(t). \quad (66)$$

Пользуясь неравенствами (65), (66), имеем

$$\begin{aligned} J_2^j(t) &\leq \int_0^t \tau^{1/p_j-1} d\tau \|v(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_2}^{(1+\beta)(1-1/p_j)-\beta} \int_{B_2} v^\beta(x, \tau) dx \\ &\leq C \psi(t)^{[(1+\beta)(1-1/p_j)-\beta]p/k} \left(\int_0^t \tau^{-N[(1+\beta)(1-1/p_j)-\beta]/k+1/p_j-1} d\tau \right) \psi(t) \\ &= C \psi(t)^{[(1+\beta)(1-1/p_j)-\beta]p/k} t^{-N[(1+\beta)(1-1/p_j)-\beta]/k+1/p_j} \psi(t) \\ &= C [t \psi(t)^{d_j p/(k-Nd_j)}]^{(k-Nd_j)/(kp_j)} \psi(t) = C [t^{\varkappa_j} \psi(t)]^{d_j p/(kp_j)} \psi(t) \\ &\leq C [\omega(t) \psi(t)]^{d_j p/(kp_j)} \psi(t). \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия (55)

$$J_2^j(t) \leq C \varepsilon_1^{d_j p/(kp_j)} \psi(t). \quad (67)$$

Обратимся теперь к интегралу $J_1^j(t)$. Для его оценки воспользуемся уравнением (1). Пусть $\zeta(x)$ – срезающая функция для B_3 , равная тождественно

единице на B_2 . Умножим уравнение на $t^{1/p_j} v^{1-(1+\beta)/p_j} \zeta^s(x)$, $s \geq p_N$, и проинтегрируем по $\mathbb{R}^N \times [0, t]$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{(1+\beta)(1-1/p_j)} \int_{B_3} v^{(1+\beta)(1-1/p_j)}(x, t) t^{1/p_j} \zeta^s(x) dx \\
& + \left(1 - \frac{1+\beta}{p_j}\right) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_3} |v_{x_i}|^{p_i} v^{-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} \zeta^s(x) dx d\tau \\
& = \int_0^t \int_{B_3} \tau^{1/p_j-1} v^{(1+\beta)(1-1/p_j)}(x, \tau) \zeta^s(x) dx d\tau \\
& - s \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_3} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} v^{1-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} \zeta^{s-1}(x) \zeta_{x_i}(x) dx d\tau. \quad (68)
\end{aligned}$$

Применяя к каждому слагаемому в последней сумме справа неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{B_3} |v_{x_i}|^{p_i-2} v_{x_i} v^{1-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} \zeta^{s-1}(x) \zeta_{x_i}(x) dx d\tau \right| \\
& \leq \varepsilon \int_0^t \int_{B_3} |v_{x_i}|^{p_i} v^{-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} \zeta^s(x) dx d\tau \\
& + C_\varepsilon \int_0^t \int_{B_3} v^{p_i-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} \zeta^{s-p_i}(x) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Выбирая ε достаточно малым и перенося слагаемые с ε в левую часть (68), с учетом свойств $\zeta(x)$ получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{B_2} v^{(1+\beta)(1-1/p_j)}(x, t) t^{1/p_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_2} |v_{x_i}|^{p_i} v^{-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} dx d\tau \\
& \leq C \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{B_3} v^{p_i-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} dx d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t \int_{B_3} \tau^{1/p_j-1} v^{(1+\beta)(1-1/p_j)}(x, \tau) dx d\tau \right\} \\
& = C \left(\sum_{i=1}^N J_{ji}(t) + L_j(t) \right), \quad (69)
\end{aligned}$$

откуда, рассматривая слагаемое с $i = j$ в сумме из левой части (69), заключаем, что (см. (64))

$$J_1^j(t) \leq C \left(\sum_{i=1}^N J_{ji}(t) + L_j(t) \right). \quad (70)$$

Полностью аналогично оценке интеграла J_2^j из (64) выводим

$$L_j(t) \leq C \varepsilon_1^{d_j p / (k p_j)} \psi(t). \quad (71)$$

Рассмотрим интегралы $J_{ji}(t)$. Пользуясь неравенствами (65), (66), имеем

$$\begin{aligned} J_{ji}(t) &= \int_0^t \int_{B_3} v^{p_i-(1+\beta)/p_j} \tau^{1/p_j} dx d\tau \\ &\leq \int_0^t \tau^{1/p_j} \|v(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_3}^{p_i-(1+\beta)/p_j-\beta} d\tau \int_{B_3} v^\beta dx \\ &\leq C\psi(t)^{p(p_i-(1+\beta)/p_j-\beta)/k} \int_0^t \tau^{1/p_j} \tau^{-N(p_i-(1+\beta)/p_j-\beta)/k} d\tau \psi(t) \\ &= C\psi(t)^{p(p_i-(1+\beta)/p_j-\beta)/k} t^{-N(p_i-(1+\beta)/p_j-\beta)/k+1/p_j+1} \psi(t) \\ &= C[t^{\alpha\kappa_i+(1-\alpha)\kappa_j} \psi(t)]^A \psi(t), \end{aligned} \quad (72)$$

где

$$\alpha = \frac{p_j d_i}{p_j d_i + d_j} \in (0, 1), \quad A = \frac{p}{k} \frac{p_j d_i + d_j}{p_j}. \quad (73)$$

Следовательно, при выполнении условия (55)

$$J_{ji}(t) \leq C(t^{\kappa_i} \psi)^{\alpha A} (t^{\kappa_j} \psi)^{(1-\alpha)A} \psi \leq C\varepsilon_1^A \psi. \quad (74)$$

Полученные оценки (67) для J_2^j , (70) для J_1^j , (71) для L_j и (74) для J_{ji} , примененные к неравенству (58) для $\psi(t)$, показывают, что если ε_1 в условии (55) выбрано достаточно малым (этот выбор не зависит от u_0), то из (58) следует

$$\psi(t) \leq C\psi_0. \quad (75)$$

Итак, суммируя вышесказанное, заключаем, что если t_1 выбрано так, чтобы на интервале $[0, t_1]$ выполнялось условие (55) с достаточно малым ε_1 , то на этом интервале выполнены оценки (57) и (75).

Фактически отсюда следует, что если $\gamma > 0$ выбрано достаточно малым, $\gamma = \gamma(\varepsilon_1)$, и T_* выбрано так, чтобы на интервале $[0, T_*]$ выполнялось условие

$$\omega(t)\psi_0 \leq \gamma, \quad (76)$$

(т.е. фактически $T_* = \omega^{-1}(\gamma/\psi_0)$, так как $\omega(t)$ строго монотонно возрастает), то на этом же интервале $[0, T_*]$ будет выполнено условие (55).

Действительно, пусть γ задано, и пусть $t_1 \leq T_*$ (t_1 – из условия (55)), причем $[0, t_1]$ – максимально возможный интервал, т.е. $\omega(t_1)\psi(t_1) = \varepsilon_1$. Так как на всем интервале $[0, t_1]$ выполнено условие (55), а следовательно, и (57), (75), то при $t = t_1$ имеем

$$\varepsilon_1 \leq \psi(t_1)\omega(t_1) \leq C\psi_0\omega(t_1),$$

или $\omega(t_1) \geq \varepsilon_1/C\psi_0$, т.е.

$$t_1 \geq \omega^{-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{C\psi_0}\right). \quad (77)$$

Таким образом, если γ выбрано так, что $\gamma = \varepsilon_1/C$, то из (77) следует $t_1 \geq T_*$, т.е. на самом деле условие (55), а вместе с ним и (57), (75) выполнены на всем интервале $[0, T_*]$, $T_* = \omega^{-1}(\gamma/\psi_0)$.

Оценка (21) следует теперь из сказанного выше, т.е. из приведенных выше оценок $A_i(\rho, t)$ из (59).

При наличии оценок (19), (20) оценка (22) легко следует теперь из уравнения (1) с применением пробной функции $u(x, t)\zeta(x, t)$, где $\zeta(x, t)$ имеет финитный носитель на множестве $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

Это завершает доказательство теоремы 1.

Список литературы

- [1] E. Di Benedetto, M. A. Herrero, “On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**:1 (1989), 187–224.
- [2] K. Ishige, “On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, **27**:5 (1996), 1235–1260.
- [3] M. Sango, “On a doubly degenerate quasilinear anisotropic parabolic equation”, *Analysis (Munich)*, **23**:3 (2003), 249–260.
- [4] M. M. Porzio, “ L^∞ -regularity for degenerate and singular anisotropic parabolic equations”, *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7), **11**:3 (1997), 697–707.
- [5] G. Sargenti, “Local boundedness and regularity results for a class of singular anisotropic parabolic equations”, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **48**:1 (2000), 45–78.
- [6] M. Yu. X. Lian, “Boundedness of solutions of parabolic equations with anisotropic growth conditions”, *Canad. J. Math.*, **49**:4 (1997), 798–809.
- [7] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations”, *Adv. Differential Equations*, **10**:1 (2005), 89–120.
- [8] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity”, *Interfaces Free Bound.*, **3**:3 (2001), 233–264.
- [9] А. Г. Королев, “Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 1, 32–37; англ. пер.: A. G. Korolev, “Embedding theorems for anisotropic Sobolev–Orlicz spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **38**:1 (1983), 37–42.
- [10] F. Bernis, “Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 373–394.
- [11] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [12] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.

С. П. Дегтярев (S. P. Degtyarev)

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: spdegt@yahoo.com

Поступила в редакцию

10.04.2006 и 15.12.2006

А. Ф. Тедеев (A. F. Tedeev)

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: tedeev@iamm.ac.donetsk.ua