Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горькавый, Аналог грассманова образа для подмногообразий в сфере, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 25–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:59:28

УДК 514

В. А. Горькавый

Аналог грассманова образа для подмногообразий в сфере

В статье изучается аналог грассманова образа для подмногообразий в сфере, построенный Обатой, и исследуется задача восстановления подмногообразия в сфере по заданному грассманову образу.

Библиография: 2 названия.

Введение

Пусть $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$ является C^1 -гладким погружением области $D^n \subset \mathbb{R}^n$ в сферу единичного радиуса S^{n+m} . Поставим в соответствие каждой точке $v \in D^n$ однозначно определенную n -мерную вполне геодезическую сферу $S_v^n \subset S^{n+m}$, проходящую через точку $\varphi(v)$ и удовлетворяющую “тангенциальному условию”: под действием дифференциала $d\varphi$ отображения φ касательное пространство $T_v D^n$ переходит в касательное пространство $T_{\varphi(v)} S_v^n$, т.е.

$$d\varphi(T_v D^n) = T_{\varphi(v)} S_v^n.$$

Такое соответствие задает отображение области D^n в многообразие Грассмана $GS(n, n+m)$ n -мерных вполне геодезических сфер $(n+m)$ -мерной сферы [1]. Мы называем это отображение *сферическим отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ* , и обозначаем его $\hat{\Phi}: D^n \rightarrow GS(n, n+m)$.

Существует представление многообразия $GS(n, n+m)$ в виде многообразия Грассмана $G(m, n+1+m)$ m -мерных подпространств $(n+1+m)$ -мерного евклидова пространства E^{n+1+m} (см. [1], [2]). А именно, будем считать, что S^{n+m} вложена изометрически в E^{n+1+m} в виде гиперсферы с радиусом 1 с центром в начале координат. Каждой n -мерной вполне геодезической сфере $S^n \subset S^{n+m}$ соответствует единственное подпространство $E^{n+1} \subset E^{n+1+m}$ такое, что $S^n = E^{n+1} \cap S^{n+m}$. Ставя в соответствие каждому $E^{n+1} \subset E^{n+1+m}$ его ортогональное дополнение $E^m \subset E^{n+1+m}$, мы получаем представление $GS(n, n+m)$ в виде многообразия $G(m, n+1+m)$. Любому отображению $\hat{\Phi}: D^n \rightarrow GS(n, n+m)$ отвечает в виду такого представления некоторое отображение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$. Если $\hat{\Phi}$ является сферическим отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ , то соответствующее отображение Φ мы назовем просто *отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ* . В общем случае, отображение Грассмана–Обаты, индуцированное C^r -гладким погружением, является C^{r-1} -гладким погружением, хотя в отдельных случаях ранг отображения Грассмана–Обаты в некоторых точках в D^n , а иногда и во всей области D^n , может быть меньше n .

Настоящая работа посвящена проблеме восстановления погружения $D^n \rightarrow S^{n+m}$ по заданному отображению Грассмана–Обаты. Аналогичная проблематика, связанная с вопросами восстановления регулярных подмногообразий в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу, исследовалась достаточно плодотворно рядом авторов (Ю. А. Аминовым, А. А. Борисенко, Д. Хоффманном и Р. Оссерманом, Дж. Вайнером; см. обзор [2]). Основным инструментом наших исследований являются вложения многообразия $G(l, k + l)$ в многообразие $G(m, n + 1 + m)$ в виде kl -мерных вполне геодезических подмногообразий $\Lambda(l, k + l)$; каждое из $\Lambda(l, k + l)$ образовано m -мерными подпространствами $E^m \subset E^{n+m+1}$, содержащими фиксированное $(m - l)$ -мерное подпространство $E^{m-l} \subset E^{n+m+1}$ и ортогональными фиксированному $(n + 1 - k)$ -мерному подпространству $E^{n+1-k} \subset E^{n+m+1}$. Такие “стандартные” подмногообразия образуют хотя и широкий, но достаточно специфический класс подмногообразий на многообразии Грассмана.

Доказывается общее необходимое условие на отображение Грассмана–Обаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным C^2 -гладким погружением $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$.

I. Для произвольной точки $\hat{v} \in D^n$ ранг отображения Φ в этой точке равен k тогда и только тогда, когда

- а) через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda(m, k + m)$ такое, что выполнено “условие касания”: $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(m, k + m)$ содержит k -мерное подпространство, являющееся образом $T_{\hat{v}}D^n$ при отображении $d\Phi$, т.е.

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(m, k + m);$$

- б) через точку $\Phi(\hat{v})$ не проходит $\Lambda(m, k_1 + m)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее “условию касания”.

II. Для произвольной точки $\hat{v} \in D^n$ точечная коразмерность отображения φ в этой точке равна l тогда и только тогда, когда

- а) через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda(l, n + 1 + l)$ такое, что выполнено “условие касания”: $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(l, n + 1 + l)$ содержит подпространство, являющееся образом $T_{\hat{v}}D^n$ при отображении $d\Phi$, т.е.

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda(l, n + 1 + l);$$

- б) через точку $\Phi(\hat{v})$ не проходит $\Lambda(l_1, n + 1 + l_1)$ при $l_1 < l$, удовлетворяющее “условию касания”.

(Под точечной коразмерностью мы понимаем размерность пространства вторых квадратичных форм.)

Основной результат статьи представляют два нижеследующие утверждения единственности и существования.

Обозначим через $w: S^{n+m} \rightarrow S^{n+m}$ отображение, которое каждой точке на сфере ставит в соответствие диаметрально противоположную ей точку.

ТЕОРЕМА 2. Пусть C^2 -гладкие погружения $\varphi_1, \varphi_2: D^n \rightarrow S^{n+m}$ индуцируют одно и то же отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, являющееся погружением. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$, либо φ_1 совпадает с композицией φ_2 и w .

Обозначим через $\eta(*, *)$ векторзначную вторую квадратичную форму погружения Φ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано C^r -гладкое погружение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$. Существует C^{r-1} -гладкое погружение $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, индуцирующее отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, тогда и только тогда, когда Φ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для любой точки $v \in D^n$ существует $\Lambda(m, n+m)$, которое проходит через точку $\Phi(v)$ так, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)} \Lambda(m, n+m),$$

и не проходит $\Lambda(m, k+m)$ при $k < n$, удовлетворяющее “условию касания”;

- 2) для любой точки $v \in D^n$ и для любого вектора $\tau \in T_v D^n$ существует вектор $\theta \in T_v D^n$ такой, что вектор $\eta(\tau, \theta)$ не лежит в касательном пространстве $T_{\Phi(v)} \Lambda(m, n+m)$ указанного в пункте 1 подмногообразия $\Lambda(m, n+m)$.

§ 1.

На многообразии Грассмана $G(m, n+1+m)$ можно ввести естественные локальные координаты. А именно, зафиксируем некоторую точку $P \in G(m, n+1+m)$ и соответствующее ей подпространство $E_0^m \subset E^{n+1+m}$; введем в E^{n+1+m} декартовы координаты $x^0, \dots, x^{n+m}$, задав ортонормированный базис векторов $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{n+m}$ так, что $E_0^m = \text{span}(\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m})$. Любое m -мерное подпространство $E^m \subset E^{n+1+m}$, проектирующееся на $E_0^m \subset E^{n+1+m}$ без вырождения, обладает однозначно определенным базисом из векторов

$$\vec{e}_\sigma = \|z_\sigma^0, \dots, z_\sigma^n, \delta_\sigma^1, \dots, \delta_\sigma^m\|, \quad \sigma = \overline{1, m}, \quad (1.1)$$

и задается в виде

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^n & \dots & z_m^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \vdots \\ x^{n+m} \end{pmatrix}.$$

Множество всех m -мерных подпространств в E^{n+m+1} , проектирующихся без вырождения на E_0^m , образует в $G(m, n+1+m)$ окрестность подпространства $E_0^m \subset E^{n+1+m}$, и величины z_σ^i , $i = \overline{0, n}$, $\sigma = \overline{1, m}$, являются координатами в указанной окрестности [2]. Мы будем называть такие z_σ^i *естественными координатами с центром в точке* $P \in G(m, n+1+m)$ (или *с центром в* $E_0^m \subset E^{n+1+m}$). В дальнейшем мы будем представлять точку из $G(m, n+1+m)$ матрицей z размером $(n+1) \times m$ с элементами z_σ^i ; аналогичного соглашения

мы будем придерживаться в отношении векторов из касательного пространства $T_z G(m, n+1+m)$ к многообразию Грассмана в точке z .

С каждой парой взаимноортогональных подпространств $\pi = \{E_0^{n+1-k}, E_0^{m-l}\}$ из E^{n+1+m} при $0 < k \leq n+1$, $0 < l \leq m$, можно связать отображение специального вида

$$\text{st}_\pi : G(l, k+l) \rightarrow G(m, n+1+m),$$

определяемое следующим образом. Будем рассматривать E^{k+l} вложенным в E^{n+1+m} в виде подпространства, ортогонального E_0^{n+1-k} и E_0^{m-l} ; отображение st_π ставит в соответствие каждому подпространству $E^l \subset E^{k+l}$ подпространство $E^m \subset E^{n+1+m}$, натянутое на E^l и E_0^{m-l} . Отображение st_π является аналитическим вложением, а образ $G(l, k+l)$ является вполне геодезическое подмногообразие в $G(m, n+1+m)$ [2]. Мы будем называть такие подмногообразия *стандартными* и обозначать $\Lambda_\pi(l, k+l)$; пару $\pi = \{E_0^{n+1-k}, E_0^{m-l}\}$ мы будем называть *представляющей парой стандартного* $\Lambda_\pi(l, k+l)$. Отметим, что $\Lambda_\pi(l, k+l)$ в $G(m, n+1+m)$ можно рассматривать как множество m -мерных подпространств $E^m \subset E^{n+1+m}$, содержащих фиксированное подпространство $E_0^{m-l} \subset E^{n+1+m}$ и ортогональных фиксированному $E_0^{n-k} \subset E^{n+1+m}$.

Описанная конструкция распространяется на случай $k = 0$ либо $l = 0$. А именно, $\Lambda_\pi(l, l)$ с представляющей парой $\pi = \{E_0^{n+1}, E_0^{m-l}\}$ есть просто точка в $G(m, n+1+m)$, соответствующее которой подпространство $E^m \subset E^{n+1+m}$ ортогонально E_0^{n+1} . Аналогично, $\Lambda_\pi(0, k)$ с представляющей парой $\pi = \{E_0^{n+1-k}, E_0^m\}$ — это точка в $G(m, n+1+m)$, соответствующая $E_0^m \subset E^{n+1+m}$.

Элементарные свойства стандартных подмногообразий описывают два ниже следующих утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть имеются $\Lambda_{\pi_i}(l_i, k_i + l_i)$, $i = 1, 2$, с представляющими парами $\pi_i = \{E^{n-k_i}, E^{m-l_i}\}$. Если

- а) E^{n-k_i} ортогонально E^{m-l_j} при всех i, j ;
- б) $k = k_1 + k_2 + \dim\{E^{n-k_1} \cap E^{n-k_2}\} - n \geq 0$;
- в) $l = l_1 + l_2 + \dim\{E^{m-l_1} \cap E^{m-l_2}\} - m \geq 0$,

то пересечение рассматриваемых стандартных подмногообразий в $G(m, n+1+m)$ представляет собой $\Lambda_\pi(l, k+l)$. Если же хотя бы одно из условий а), б), в) не выполнено, то пересечение пусто.

ЛЕММА 2. Пусть в $G(m, n+1+m)$ задано произвольное $\Lambda_{\pi_1}(l_1, k_1 + l_1)$. Для любых $k_1 \leq k \leq n+1$, $l_1 \leq l \leq m$ в $G(m, n+1+m)$ существует $\Lambda_\pi(l, k+l)$, содержащее $\Lambda_{\pi_1}(l_1, k_1 + l_1)$ как подмногообразие.

Стандартные подмногообразия на многообразии Грассмана описываются достаточно просто в естественных координатах z^i . А именно, пусть в $G(m, n+1+m)$ задано стандартное $\Lambda_\pi(l, k+l)$ с представляющей парой $\pi = \{E_0^{n+1-k}, E_0^{m-l}\}$. Предположим, что E_0^{n+1-k} натянуто на векторы

$$\vec{a}_\alpha = \|a_\alpha^0, \dots, a_\alpha^{n+m}\|, \quad \alpha = \overline{k+1, n+1},$$

а E_0^{m-l} — на векторы

$$\vec{b}_\beta = \|b_\beta^0, \dots, b_\beta^{n+m}\|, \quad \beta = \overline{l+1, m}.$$

Тогда легко видеть, учитывая (1.1), что указанное стандартное $\Lambda_\pi(l, k+l)$ задается в $G(m, n+1+m)$ в виде

$$- \begin{vmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1^0 & \dots & z_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^n & \dots & z_m^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k+1}^{n+1} & \dots & a_{k+1}^{n+m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^{n+1} & \dots & a_{n+1}^{n+m} \end{vmatrix}; \quad (1.2)$$

$$\begin{vmatrix} b_{l+1}^0 & \dots & b_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^n & \dots & b_m^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1^0 & \dots & z_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^n & \dots & z_m^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m} \end{vmatrix}; \quad (1.3)$$

при этом, выбирая соответствующим образом центр естественных координат, мы можем считать, что

$$\text{rank} \begin{vmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = n+1-k, \quad (1.4)$$

$$\text{rank} \begin{vmatrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m} \end{vmatrix} = m-l. \quad (1.5)$$

Любые стандартные подмногообразия в $G(m, n+1+m)$ и только такие подмногообразия задаются уравнениями (1.2), (1.3), дополненными в общем случае условиями вида (1.4), (1.5). Касательное пространство $T_z \Lambda_\pi(l, k+l)$ подмногообразия $\Lambda_\pi(l, k+l)$, заданного в $G(m, n+1+m)$ в виде (1.2), (1.3), определяется в $T_z G(m, n+1+m)$ следующим образом: вектор $T \in T_z G(m, n+1+m)$ принадлежит $T_z \Lambda_\pi(l, k+l)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} T_1^0 & \dots & T_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_m^n \end{vmatrix} = 0, \quad (1.6)$$

$$\begin{vmatrix} T_1^0 & \dots & T_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_m^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{l+1}^{n+1} & \dots & b_m^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l+1}^{n+m} & \dots & b_m^{n+m} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

Учитывая вполне геодезичность стандартных подмногообразий, не составляет труда средствами элементарной линейной алгебры показать следующий факт:

ЛЕММА 3. Пусть q -мерное пространство $\Omega \subset T_z G(m, n+1+t)$ натянуто на касательные векторы $T(1), \dots, T(q)$. Пусть T^* – матрица размера $(n+1) \times tq$, составленная из столбцов, а T_* – матрица размера $(n+1)q \times t$, составленная из строк матриц $T(1), \dots, T(q)$.

- 1) Ранг матрицы T^* не превосходит $k \leq n+1$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda_\pi(m, k+t)$ такое, что

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(m, k+t).$$

- 2) Ранг матрицы T_* не превосходит $l \leq t$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda_\pi(l, n+1+l)$ такое, что

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(l, n+1+l).$$

Из лемм 1, 2, 3 не сложно получить

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Ранг матрицы T^* равен $k \leq n+1$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит $\Lambda_\pi(m, k+t)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(m, k+t),$$

и не проходит $\Lambda(m, k_1+t)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее “условию касания”.

- 2) Ранг матрицы T_* равен $l \leq t$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит $\Lambda_\pi(l, n+1+l)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(l, n+1+l),$$

и не проходит $\Lambda(l_1, n+1+l_1)$ при $l_1 < l$, удовлетворяющее “условию касания”.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Ранг матрицы T^* не превосходит $k \leq n+1$ и ранг матрицы T_* не превосходит $l \leq t$ тогда и только тогда, когда через точку z проходит стандартное $\Lambda_\pi(l, k+l)$ такое, что

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(l, k+l).$$

- 2) Ранг матрицы T^* равен k , $0 < k \leq n+1$, и ранг матрицы T_* равен l , $0 < l \leq t$, тогда и только тогда, когда через точку z проходит $\Lambda_\pi(l, k+l)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$\Omega \subset T_z \Lambda_\pi(l, k+l),$$

и не проходит $\Lambda(l_1, k_1+l_1)$ при $k_1 \leq k$, $l_1 \leq l$, $(k-k_1)^2 + (l-l_1)^2 > 0$, удовлетворяющее “условию касания”.

§ 2.

Пусть $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$ является C^1 -гладким погружением области $D^n \subset \mathbb{R}^n$ в сферу единичного радиуса S^{n+m} (под сферой единичного радиуса мы понимаем полное односвязное риманово пространство постоянной кривизны равной 1). Поставим в соответствие каждой точке $v \in D^n$ однозначно определенную n -мерную вполне геодезическую сферу $S_v^n \subset S^{n+m}$, проходящую через точку $\varphi(v)$ так, что

$$d\varphi(T_v D^n) = T_{\varphi(v)} S_v^n.$$

Такое соответствие задает отображение области D^n в многообразии Грассмана $GS(n, n+m)$ n -мерных вполне геодезических сфер $(n+m)$ -мерной сферы. Это отображение будем называть *сферическим отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ* , и обозначать его $\hat{\Phi}: D^n \rightarrow GS(n, n+m)$.

Мы используем представление многообразия $GS(n, n+m)$ в виде многообразия Грассмана $G(m, n+1+m)$ (см. [1], [2]). А именно, будем считать, что S^{n+m} вложена изометрически в E^{n+1+m} в виде гипersферы с радиусом 1 с центром в начале координат. Каждой n -мерной вполне геодезической сфере $S^n \subset S^{n+m}$ соответствует единственное подпространство $E^{n+1} \subset E^{n+1+m}$ такое, что $S^n = E^{n+1} \cap S^{n+m}$. Ставя в соответствие каждому $E^{n+1} \subset E^{n+1+m}$ его ортогональное дополнение $E^m \subset E^{n+1+m}$, мы и получаем представление $GS(n, n+m)$ в виде многообразия $G(m, n+1+m)$ (строго говоря, построенные соответствия определяют аналитический диффеоморфизм $GS(n, n+m)$ и $G(m, n+1+m)$, а если при этом на многообразиях Грассмана введена естественная риманова структура симметрического пространства, то построенное отображение является изометрией). Любому отображению $\hat{\Phi}: D^n \rightarrow GS(n, n+m)$ отвечает некоторое отображение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$. Если $\hat{\Phi}$ является сферическим отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ , то соответствующее отображение Φ мы назовем просто отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением φ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если погружение φ является C^r -гладким, то индуцированное им отображение Грассмана–Обаты Φ , равно как и сферическое отображение Грассмана–Обаты $\hat{\Phi}$, является C^{r-1} -гладким отображением.

Так как мы рассматриваем S^{n+m} в виде гипersферы в E^{n+1+m} , то $\Phi(v)$ есть в точности нормальное пространство $N_{\varphi(v)} \subset T_{\varphi(v)} S^{n+m}$ погружения φ в точке v , рассматриваемое как подпространство в E^{n+1+m} . Погружению $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$ отвечает погружение $\tilde{\varphi}: D^n \rightarrow E^{n+1+m}$ того же класса гладкости, и если рассматривать нормальное пространство $N_{\tilde{\varphi}(v)}$ погружения $\tilde{\varphi}$ в точке v как подпространство в E^{n+1+m} , то мы можем трактовать $\Phi(v)$ как m -мерное подпространство в $N_{\tilde{\varphi}(v)}$, ортогональное радиус-вектору точки $\tilde{\varphi}(v)$.

Выясним необходимые и достаточные условия того, что отображение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$. Зафиксируем некоторую точку $\hat{v}$ и введем в E^{n+1+m} декартовы координаты $x^0, \dots, x^{n+m}$, выбрав векторы $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{n+m}$ ортонормированного базиса следующим образом: вектор $\vec{e}_0$ зададим направляющим вектором подпространства $E_{\hat{v}}^1 \subset E^{n+1+m}$, содержащего точку $\tilde{\varphi}(\hat{v})$; векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

положим лежащими в $E_0^n = d\tilde{\varphi}(T_{\hat{v}}D^n)$; векторы $\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m}$ определим принадлежащими подпространству $E_0^m = \Phi(\hat{v}) \subset E^{n+1+m}$. В $G(m, n+1+m)$ введем естественные координаты z_σ^i с центром в E_0^m . Уменьшив область D^n , в ней можно задать C^r -гладкие координаты $v^1, \dots, v^n$ так, что

$$\vec{e}_i = d\tilde{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial v^i}(\hat{v})\right), \quad i = \overline{1, n};$$

отображение $\tilde{\varphi}$ при этом задается C^r -гладкой вектор-функцией $\vec{x} = \vec{x}(v^1, \dots, v^n)$, а отображение Φ – в виде $z = \xi(v^1, \dots, v^n)$, где матричнозначная функция $\xi(v^1, \dots, v^n)$ является C^{r-1} -гладкой. В точке $\hat{v}$ мы имеем:

$$\vec{x}(\hat{v}) = \vec{e}_0, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v^i}(\hat{v}) = \vec{e}_i, \quad \xi(\hat{v}) = 0.$$

Касательные векторы $d\Phi(\partial/\partial v^i)$, представленные в виде $\partial\xi/\partial v^i$, имеют наглядное описание посредством внешнегеометрических характеристик погружения $\tilde{\varphi}$. А именно, обозначим через $\Pi^\sigma = \sum_{i,j=1}^n L_{ij}^\sigma dv^i dv^j$ вторые квадратичные формы погружения $\tilde{\varphi}$ в точке $\hat{v}$ относительно нормалей $\vec{n}_\sigma = \vec{e}_{n+\sigma}$, $\sigma = \overline{1, m}$, а через $\Pi^0 = \sum_{i,j=1}^n L_{ij}^0 dv^i dv^j$ – относительно нормали $\vec{n}_0 = \vec{e}_0$. Тогда в точке $\hat{v}$ имеет место

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial v^i \partial v^j} = \text{lin}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} + \sum_{\sigma=1}^m L_{ij}^\sigma \vec{n}_\sigma + L_{ij}^0 \vec{n}_0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где lin обозначает линейную комбинацию векторов. В каждом $\Phi(v) \subset E^{n+1+m}$ существует базис из векторов

$$\vec{\eta}_\sigma = \|\xi_\sigma^0, \dots, \xi_\sigma^n, \delta_\sigma^1, \dots, \delta_\sigma^m\|, \quad \sigma = \overline{1, m},$$

которые в точке $\hat{v}$ принимают значения $\vec{\eta}_\sigma = \vec{n}_\sigma$. Вследствие (2.1) и вида векторных полей $\vec{\eta}_\sigma$ мы имеем в точке $\hat{v}$

$$\frac{\partial \vec{\eta}_\sigma}{\partial v^i} = h_{\sigma i} \vec{e}_0 + \sum_{j=1}^n L_{ij}^\sigma \vec{e}_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Так как $(\vec{\eta}_\sigma, \vec{x}) \equiv 0$, то $(\partial \vec{\eta}_\sigma / \partial v^i, \vec{x}) = \partial(\vec{\eta}_\sigma, \vec{x}) / \partial v^i - (\vec{\eta}_\sigma, \partial \vec{x} / \partial v^i) = 0$, и поэтому все $h_{\sigma i}$ равны нулю. Таким образом, из (2.2) следует, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ L_{i1}^1 & \dots & L_{i1}^m \\ \vdots & & \vdots \\ L_{in}^1 & \dots & L_{in}^m \end{array} \right\|. \quad (2.3)$$

Отметим, что представляя $\vec{n}_\sigma$ как вектор в $T_{\varphi(\hat{v})}S^{n+m}$, мы можем рассматривать $\Pi = \sum_{\sigma=1}^m \Pi^\sigma \vec{n}_\sigma$ как вторую квадратичную форму погружения φ в точке $\hat{v}$.

ЛЕММА 4. Пусть C^1 -гладкое погружение $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$ индуцирует отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$. Пусть $\Lambda_{\pi_0}(m, n+m)$ – стандартное подмногообразие в $G(m, n+1+m)$ с представляющей парой $\pi_0 = \{E_0^1, E_0^0\}$, где $E_0^1 \subset E^{n+m}$ содержит точку $\tilde{\varphi}(\hat{v})$. Тогда $\Lambda_{\pi_0}(m, n+m)$ проходит через точку $\Phi(\hat{v})$, и при этом

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, n+m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую произвольную точку $\hat{v}$ и не уменьшая общности будем считать, что в E^{n+1+m} , $G(m, n+1+m)$, D^n введены рассмотренные выше координаты и имеет место (2.3) для матричнозначной функции $\xi(v^1, \dots, v^n)$, задающей отображение Φ . Вследствие выбора координат подпространство E_0^1 натянуто на $\vec{e}_0$; $\Lambda_{\pi_0}(m, n+m)$ задается в виде

$$-\|1, 0, \dots, 0\| \cdot z = \|0, \dots, 0\|,$$

а $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, n+m)$ определяется в $T_{\Phi(\hat{v})}G(m, n+1+m)$ условием

$$\|1, 0, \dots, 0\| \cdot T = \|0, \dots, 0\|. \quad (2.4)$$

Так как $\xi(\hat{v}) = 0$, то $\Lambda_{\pi_0}(m, n+m)$ проходит через точку $\Phi(\hat{v})$; легко видеть, принимая во внимание (2.3) и (2.4), что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, n+m).$$

Лемма доказана.

Дополняя лемму 4, докажем следующее общее необходимое условие на отображение Грассмана–Обаты:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным C^2 -гладким погружением $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$. Для произвольной точки $\hat{v}$ имеет место:

- а) ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ равен k тогда и только тогда, когда через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(m, k+m)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, k+m),$$

и не проходит $\Lambda(m, k_1+m)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее “условию касания”;

- б) точечная коразмерность отображения φ в точке $\hat{v}$ равна l тогда и только тогда, когда через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l),$$

и не проходит $\Lambda(l_1, n+1+l_1)$ при $l_1 < l$, удовлетворяющее “условию касания”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности будем считать, что в E^{n+1+m} , $G(m, n+1+m)$, D^n введены координаты, описанные выше, и для функции $\xi(v^1, \dots, v^n)$, задающей отображение Φ , имеет место (2.3).

а) Предположим, что через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(m, k+m)$ такое, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, k+m).$$

Так как $\xi(\hat{v}) = 0$, то это стандартное подмногообразие задается в виде

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix} \right\| \cdot z = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\|, \quad (2.5)$$

и при этом

$$\text{rank} \left\| \begin{pmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix} \right\| = n+1-k. \quad (2.6)$$

Его касательное пространство определяется в $T_{\Phi(\hat{v})}G(m, n+1+m)$ условием

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{k+1}^0 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^0 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix} \right\| \cdot T = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\|. \quad (2.7)$$

Ввиду предположения из (2.3), (2.7) получаем

$$\sum_{j=1}^n a_i^j L_{pj}^\sigma = 0, \quad i = \overline{k+1, n+1}, \quad p = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, m}. \quad (2.8)$$

Вследствие симметричности коэффициентов вторых квадратичных форм по нижним индексам, равенство (2.8) может быть переписано с учетом (2.3) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial v^j}(\hat{v}) = 0, \quad i = \overline{k+1, n+1}. \quad (2.9)$$

Кроме того, из (2.6) следует, что

$$\text{rank} \left\| \begin{pmatrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix} \right\| = n+1-k \text{ либо } n-k. \quad (2.10)$$

Но условия (2.9), (2.10) и означают, что ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ не превосходит k .

Предположим, что ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ равен k . Тогда существуют постоянные a_i^j , $i = \overline{k+1, n}$, $j = \overline{1, n}$, такие, что

$$\sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial v^j}(\hat{v}) = 0, \quad i = \overline{k+1, n},$$

и при этом

$$\text{rank} \begin{vmatrix} a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = n - k. \quad (2.11)$$

Учитывая (2.3), получаем тогда

$$\sum_{j=1}^n a_i^j L_{pj}^\sigma = 0, \quad i = \overline{k, n}, \quad p = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, m},$$

откуда ввиду симметричности коэффициентов вторых квадратичных форм по нижним индексам следует

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.11), рассмотрим подмногообразие $\Lambda_{\pi_0}(m, k+m)$, заданное в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot z = 0.$$

Очевидно, что указанное подмногообразие проходит через точку $\Phi(\hat{v})$. При этом, так как $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, k+m)$ задается в $T_{\Phi(\hat{v})}G(m, n+1+m)$ условием

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{k+1}^1 & \dots & a_{k+1}^n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot T = 0, \quad (2.13)$$

то из (2.12), (2.13) получаем, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, k+m).$$

Если через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_\pi(m, k_1 + m)$ при некотором $k_1 < k$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_\pi(m, k_1 + m),$$

то тогда, по доказанному выше, ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ не превосходит $k_1 < k$, что противоречит предположению.

Предположим, что через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(m, k + m)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(m, k + m),$$

и не проходит $\Lambda(m, k_1 + m)$ при $k_1 < k$, удовлетворяющее “условию касания”. По доказанному выше, ранг отображения Φ в точке $\hat{v}$ не превосходит k . Если ранг равен $k_1 < k$, то через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_\pi(m, k_1 + m)$ такое, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_\pi(m, k_1 + m),$$

а это противоречит предположению. Таким образом, часть а) теоремы 1 доказана.

б) Предположим, что через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(l, n + 1 + l)$ такое, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n + 1 + l).$$

Пусть $\pi_0 = \{E^0, E_0^{m-l}\}$ есть представляющая пара этого стандартного подмногообразия. Так как $\Phi(\hat{v}) \in \Lambda_{\pi_0}(l, n + 1 + l)$, то $E_0^{m-l} \subset E^{n+1+m}$ принадлежит подпространству векторов $\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m}$. Специализируем выбор этих векторов в $E_0^m \subset E^{n+1+m}$ так, чтобы $\vec{e}_{n+l+1}, \dots, \vec{e}_{n+m}$ лежали в E_0^{m-l} . Тогда рассматриваемое $\Lambda_{\pi_0}(l, n + 1 + l)$ задается в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = z \cdot \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|}_l; \quad (2.14)$$

следовательно, $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n + 1 + l)$ определяется в $T_{\Phi(\hat{v})}G(m, n + 1 + m)$ условием

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| = T \cdot \underbrace{\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|}_l. \quad (2.15)$$

Так как

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l),$$

то, принимая во внимание (2.3), получаем из (2.15), что

$$L_{ij}^\sigma = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{l+1, m};$$

отсюда непосредственно следует, что точечная коразмерность погружения φ в точке $\hat{v}$ не превосходит l .

Предположим, что точечная коразмерность погружения φ в точке $\hat{v}$ равна l . Тогда мы можем специализировать выбор векторов $\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m}$ в $\Phi(\hat{v}) \subset E^{n+1+m}$ таким образом, чтобы вторые квадратичные формы погружения φ в точке $\hat{v}$ относительно нормалей $\vec{n}_\sigma = \vec{e}_{n+\sigma}$, $\sigma = \overline{l+1, m}$, были равны нулю. Учитывая (2.3), получаем, что в точке $\hat{v}$ имеет место

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\partial \xi}{\partial v^i}(\hat{v}) \cdot \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\|}_l; \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко видеть, что $\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l)$, задаваемое в виде (2.14), проходит через точку $\Phi(\hat{v})$ так, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l).$$

Если через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_\pi(l_1, n+1+l_1)$, $l_1 < l$, такое, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_\pi(l_1, n+1+l_1),$$

то тогда, по доказанному выше, точечная коразмерность погружения φ в точке $\hat{v}$ не превосходит $l_1 < l$, что противоречит предположению.

Предположим, что через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l)$ такое, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_0}(l, n+1+l),$$

и не проходит $\Lambda(l_1, n+1+l_1)$ при $l_1 < l$, удовлетворяющее “условию касания”. Тогда точечная коразмерность погружения φ в точке $\hat{v}$ не превосходит l . Если она равна $l_1 < l$, то через точку $\Phi(\hat{v})$ проходит $\Lambda_\pi(l_1, n+1+l_1)$ такое, что

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_\pi(l_1, n+1+l_1);$$

но это противоречит предположению, поэтому точечная коразмерность в точности равна l . Часть b) теоремы 1 доказана.

§ 3.

Предположим, что задано два C^2 -гладких погружения $\varphi_1, \varphi_2: D^n \rightarrow S^{n+m}$. Предположим, что отображения Грассмана–Обаты $\Phi_1, \Phi_2: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, индуцированные погружениями φ_1, φ_2 , удовлетворяют в некоторой точке $\hat{v} \in D^n$ следующим условиям:

- i) $\Phi_1(\hat{v}) = \Phi_2(\hat{v})$,
- ii) ранг отображений Φ_1, Φ_2 в точке $\hat{v}$ равен n , и при этом

$$d\Phi_1(T_{\hat{v}}D^n) = d\Phi_2(T_{\hat{v}}D^n).$$

Обозначим через $w: S^{n+m} \rightarrow S^{n+m}$ отображение, ставящее в соответствие каждой точке сферы ее диаметрально противоположную точку.

ЛЕММА 5. *В сделанных предположениях*

$$\varphi_1(\hat{v}) = \varphi_2(\hat{v}) \quad \text{или} \quad w \circ \varphi_1(\hat{v}) = w \circ \varphi_2(\hat{v}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_i^1 \subset E^{n+1+m}$ – подпространство, проходящее через точку $\tilde{\varphi}_i(\hat{v})$, $i = 1, 2$. Вследствие леммы 4 подмногообразие $\Lambda_{\pi_i}(m, n+m)$ с представляющей парой $\pi_i = \{E_i^1, E^0\}$ проходит через точку $\Phi_i(\hat{v})$ так, что

$$d\Phi_i(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi_i(\hat{v})}\Lambda_{\pi_i}(m, n+m).$$

Обозначим $P = \Phi_1(\hat{v}) = \Phi_2(\hat{v})$ и $\Omega = d\Phi_1(T_{\hat{v}}D^n) = d\Phi_2(T_{\hat{v}}D^n)$. Предположим, что $\Lambda_{\pi_1}(m, n+m)$ и $\Lambda_{\pi_2}(m, n+m)$ различны. Применяя лемму 1, получаем, что существует $\Lambda_{\pi}(m, k+m)$, $k < n$, являющееся пересечением подмногообразий $\Lambda_{\pi_1}(m, n+m)$ и $\Lambda_{\pi_2}(m, n+m)$, такое, что $P \in \Lambda_{\pi}(m, k+m)$ и

$$\Omega \subset T_P\Lambda_{\pi}(m, k+m).$$

Применяя часть а) теоремы 1 получаем, что ранг отображений Φ_1, Φ_2 в точке $\hat{v}$ не превосходит $k < n$, а это противоречит предположению. Поэтому $\Lambda_{\pi_1}(m, n+m)$ совпадает с $\Lambda_{\pi_2}(m, n+m)$, т.е. $E_1^1 = E_2^1$, откуда следует утверждение доказываемой леммы.

Непосредственным следствием леммы 5 является утверждение об однозначной определенности погружения $D^n \rightarrow S^{n+m}$ индуцированным им отображением Грассмана–Обаты.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть C^2 -гладкие погружения $\varphi_1, \varphi_2: D^n \rightarrow S^{n+m}$ индуцируют одно и то же отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, являющееся погружением. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$ либо φ_1 совпадает с композицией φ_2 и w .*

§ 4.

Рассмотрим “проблему существования”: существует ли для заданного отображения $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ погружение $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, индуцирующее отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$?

Пусть задано C^r -гладкое отображение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, $r \geq 3$. Вследствие леммы 4 будем предполагать отображение Φ удовлетворяющим следующему условию: для любой точки $v \in D^n$ существует $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$, которое проходит через точку $\Phi(v)$, и при этом

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)} \Lambda_{\pi_v}(m, n+m).$$

Пусть $\pi_v = \{E_v^1, E^0\}$ – представляющая пара подмногообразия $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$. Сопоставляя точке v подпространство $E_v^1 \subset E^{n+1+m}$, мы получаем отображение Φ^* области D^n в многообразие $G(1, n+1+m)$. Многообразие Грассмана $G(1, n+1+m)$ представляет собой $(n+m)$ -мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^{n+m}$. Если отображение Φ^* непрерывно, то мы можем поднять его до отображения $\Psi: D^n \rightarrow S^{n+m}$ используя стандартное накрытие $S^{n+m} \rightarrow \mathbb{RP}^{n+m}$. Отображение Ψ мы будем называть отображением, *сопутствующим отображению* Φ . Лемму 4 можно переформулировать следующим образом:

ЛЕММА 4*. *Если $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным C^r -гладким погружением $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, $r \geq 2$, то существует C^r -гладкое погружение $\Psi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, сопутствующее Φ . А именно, за Ψ мы можем взять погружение φ .*

Мы докажем обратное утверждение:

ЛЕММА 6. *Пусть для C^1 -гладкого отображения $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ существует сопутствующее отображение $\Psi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, являющееся C^r -гладким погружением, $r \geq 3$. Тогда Φ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным некоторым погружением $\varphi: D^n \rightarrow S^{n+m}$. А именно, за φ мы можем принять само сопутствующее отображение Ψ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что Φ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением Ψ . Предположив существование C^r -гладкого сопутствующего отображения Ψ , мы тем самым предполагаем, что для любой точки $v \in D^n$ существует $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$, которое проходит через точку $\Phi(v)$, и при этом

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)} \Lambda_{\pi_v}(m, n+m).$$

Пусть $\pi_v = \{E_v^1, E^0\}$ – представляющая пара подмногообразия $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$.

Предположим не уменьшая общности, что область D^n достаточно мала. Введем в E^{n+1+m} декартовы координаты $x^0, \dots, x^{n+m}$, задав ортонормированный базис векторов $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{n+m}$; в $G(m, n+1+m)$ введем естественные координаты z_σ^i с центром в $E_0^m = \text{span}(\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m})$; в D^n выберем C^r -гладкие координаты $v^1, \dots, v^n$. Тогда отображение Φ задается C^1 -гладкими функциями $z_\sigma^i = \xi_\sigma^i(v^1, \dots, v^n)$. Если представлять S^{n+m} как единичную гиперсферу в E^{n+m+1} , то Ψ можно считать заданным гладкими функциями $x^i = y^i(v^1, \dots, v^n)$

такими, что $\sum_{i=0}^{n+m} (y^i(v^1, \dots, v^n))^2 \equiv 1$. При фиксированных $v^1, \dots, v^n$ подмногообразии $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$ задается в виде

$$-\|y^0(v) \dots y^n(v)\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} z_1^0 & \dots & z_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^n & \dots & z_m^n \end{pmatrix} \right\| = \|y^{n+1}(v) \dots y^{n+m}(v)\|, \quad (4.1)$$

а его касательное пространство определяется в $T_{\Phi(v)}G(m, n+1+m)$ условием

$$\|y^0(v) \dots y^n(v)\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} T_1^0 & \dots & T_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^n & \dots & T_m^n \end{pmatrix} \right\| = \|0 \dots 0\|. \quad (4.2)$$

Так как $\Phi(v) \in \Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$, то вследствие (4.1) мы имеем

$$-\|y^0 \dots y^n\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix} \right\| = \|y^{n+1} \dots y^{n+m}\|. \quad (4.3)$$

Так как

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)}\Lambda_{\pi_v}(m, n+m),$$

то ввиду (4.2) получаем

$$\|y^0 \dots y^n\| \cdot \frac{\partial}{\partial v^i} \left\| \begin{pmatrix} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix} \right\| \equiv \|0 \dots 0\|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Предположим, что (4.3) выполнено. Дифференцируя это соотношение, находим, что (4.4) эквивалентно условию

$$-\frac{\partial}{\partial v^i} \|y^0 \dots y^n\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{pmatrix} \right\| = \frac{\partial}{\partial v^i} \|y^{n+1} \dots y^{n+m}\|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4^*)$$

Но (4.3) и (4.4*) и означают, что Φ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным погружением Ψ . Лемма доказана.

Таким образом, отображение $D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является отображением Грассмана–Обаты, индуцированным C^r -гладким погружением $D^n \rightarrow S^{n+m}$, тогда и только тогда, когда существует C^r -гладкое сопутствующее погружение $D^n \rightarrow S^{n+m}$.

Пусть C^r -гладкое отображение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$ является погружением, $r \geq 3$. Ввиду теоремы 1 будем предполагать отображение Φ удовлетворяющим следующему условию: для любой точки $v \in D^n$ существует единственное

$\Lambda_{\pi_v}(m, n + m)$, которое проходит через точку $\Phi(v)$ так, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)} \Lambda_{\pi_v}(m, n + m),$$

и не проходит $\Lambda(m, k + m)$ при $k < n$, удовлетворяющее “условию касания”. Это-му распределению стандартных подмногообразий соответствует сопутствующее отображение $\Psi: D^n \rightarrow S^{n+m}$, которое определено однозначно с точностью до w .

Обозначим через η векторзначную вторую квадратичную форму погружения Φ . Будем говорить, что отображение Φ *квазиасимптотично в точке* $\hat{v} \in D^n$ в направлении вектора $\theta \in T_{\hat{v}} D^n$, если для любого вектора $\tau \in T_{\hat{v}} D^n$ имеет место:

$$\eta(\tau, \theta) \in T_{\Phi(\hat{v})} \Lambda_{\pi_{\hat{v}}}(m, n + m).$$

ЛЕММА 7. *Пусть Φ удовлетворяет сделанным выше предположениям. Тогда:*

- 1) Ψ является C^{r-1} -гладким отображением;
- 2) Ψ имеет в точке $\hat{v}$ ранг меньше n тогда и только тогда, когда Φ квазиасимптотично в этой точке в направлении некоторого ненулевого вектора из $T_{\hat{v}} D^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $\hat{v} \in D^n$ и, не уменьшая общности, введем в $G(m, n + 1 + m)$ естественные координаты z_σ^i с центром в $\Phi(\hat{v})$; при этом зададим декартовы координаты $x^0, \dots, x^{n+m}$ в E^{n+1+m} определив ортонормированный базис векторов $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{n+m}$ так, что $\Phi(\hat{v}) = \text{span}(\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+m})$. Выберем в D^n произвольные C^r -гладкие координаты $v^1, \dots, v^n$. Не уменьшая общности, можно считать, что отображение Φ задается в виде $z_\sigma^i = \xi_\sigma^i(v^1, \dots, v^n) \in C^r(D^n)$, а отображение Ψ – в виде $x^i = y^i(v^1, \dots, v^n)$, где $\sum_{i=0}^{n+m} (y^i(v^1, \dots, v^n))^2 \equiv 1$. Вследствие сделанных предположений выполняются равенства (4.3) и (4.4). Обозначим через Ξ матрицу размер $(n + 1) \times mn$, составленную из столбцов матриц $\partial \xi / \partial v^i, i = \overline{1, n}$. Равенство (4.4) можно переписать следующим образом:

$$\|y^0 \dots y^n\| \cdot \Xi = \|0 \dots 0\|. \quad (4.5)$$

Применяя следствие 1 леммы 3, получаем, что ранг матрицы Ξ равен n тождественно в D^n . Тогда из (4.5) и (4.3) следует, что функции $y^i(v^1, \dots, v^n), i = \overline{0, n + m}$, задающие отображение Ψ , являются C^{r-1} -гладкими.

Предположим, что ранг отображения Ψ в точке $\hat{v}$ меньше n , т.е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \partial y^0 / \partial v^1 & \dots & \partial y^{n+m} / \partial v^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial y^0 / \partial v^1 & \dots & \partial y^{n+m} / \partial v^1 \end{pmatrix} (\hat{v}) < n.$$

Ввиду (4.3), (4.4*) и вследствие того, что $\sum_{i=0}^{n+m} (y^i)^2 \equiv 1$, это условие можно записать следующим образом:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} y^0 & \dots & y^n \\ \partial y^0 / \partial v^1 & \dots & \partial y^n / \partial v^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial y^0 / \partial v^1 & \dots & \partial y^n / \partial v^1 \end{pmatrix} (\hat{v}) = 0. \quad (4.6)$$

Равенство (4.6) имеет место тогда и только тогда, когда существуют постоянные $a^0, a^1, \dots, a^n$ такие, что

$$\begin{aligned} a^0 \cdot \|y^0 \dots y^{n+m}\|(\hat{v}) + \sum_{i=1}^n a^i \cdot \frac{\partial}{\partial v^i} \|y^0 \dots y^n\|(\hat{v}) &= 0, \\ \sum_{i=0}^n (a^i)^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.6^*)$$

Принимая во внимание (4.4) и условие $\text{rank } \Xi(\hat{v}) = n$, получаем, что (4.6*) выполнено в том и только в том случае, когда существуют постоянные $a^1, \dots, a^n$ такие, что

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \|y^0 \dots y^n\|(\hat{v}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{array} \right\|(\hat{v}) &= 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n (a^i)^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Продифференцируем равенство (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^i} \|y^0 \dots y^n\| \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{array} \right\| \\ = \|y^0 \dots y^n\| \cdot \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{array} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что (4.7) эквивалентно тогда следующему

$$\|y^0 \dots y^n\|(\hat{v}) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{array} \right\|(\hat{v}) \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Возьмем произвольные функции $A^i(v^1, \dots, v^n) \in C^1(D^n)$, $i = \overline{1, n}$, принимающие в точке $\hat{v}$ значения $A^i(\hat{v}) = a^i$. Учитывая (4.4), мы можем записать последнее равенство в таком виде

$$\|y^0 \dots y^n\|(\hat{v}) \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} \left(\sum_{i=1}^n A^i \frac{\partial}{\partial v^i} \left\| \begin{array}{ccc} \xi_1^0 & \dots & \xi_m^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_m^n \end{array} \right\| \right)(\hat{v}) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Вследствие выбора координат z_σ^i на $G(m, n+1+m)$ все символы Кристоффеля стандартной связности многообразия Грассмана равны нулю в точке $\hat{v}$. Поэтому (4.8) эквивалентно тому, что ковариантная производная векторного поля

$\vec{A} = \sum_{i=1}^n A^i \partial \xi / \partial v^i$ вдоль любого направления из $d\Phi(T_{\hat{v}}D^n)$ является вектором, лежащим в $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_{\hat{v}}}(m, n+m)$. Но так как

$$d\Phi(T_{\hat{v}}D^n) \subset T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_{\hat{v}}}(m, n+m),$$

то (4.8) эквивалентно тому, что проекция ковариантной производной векторного поля $\vec{A}$ по любому направлению из $d\Phi(T_{\hat{v}}D^n)$ на нормальное пространство погружения Φ в точке $\Phi(\hat{v})$ лежит в $T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_{\hat{v}}}(m, n+m)$. Поэтому окончательно получаем, что отображение Ψ имеет в точке $\hat{v}$ ранг меньше n тогда и только тогда, когда существует вектор $\theta = \sum_{i=1}^n a^i \partial / \partial v^i \in T_{\hat{v}}D^n$ такой, что для любого вектора $\tau \in T_{\hat{v}}D^n$ имеет место:

$$\eta(\tau, \theta) \in T_{\Phi(\hat{v})}\Lambda_{\pi_{\hat{v}}}(m, n+m),$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 и лемм 6, 7 непосредственно получаем следующее утверждение существования.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано C^r -гладкое погружение $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$. Существует C^{r-1} -гладкое погружение $\varphi: D^n \rightarrow E^{n+1+m}$, индуцирующее отображение Грассмана–Обаты $\Phi: D^n \rightarrow G(m, n+1+m)$, тогда и только тогда, когда Φ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для любой точки $v \in D^n$ существует $\Lambda_{\pi_v}(m, n+m)$, которое проходит через точку $\Phi(v)$ так, что выполнено “условие касания”:

$$d\Phi(T_v D^n) \subset T_{\Phi(v)}\Lambda_{\pi_v}(m, n+m),$$

и не проходит $\Lambda(m, k+m)$ при $k < n$, удовлетворяющее “условию касания”;

- 2) для любой точки $v \in D^n$ и для любого вектора $\tau \in T_v D^n$ существует вектор $\theta \in T_v D^n$ такой, что

$$\eta(\tau, \theta) \notin T_{\Phi(v)}\Lambda_{\pi_v}(m, n+m).$$

§ 5.

Как иллюстрацию изложенных выше рассуждений приведем один пример. Пусть в E^5 заданы декартовы координаты $x^0, \dots, x^4$, соответствующие ортонормированному базису векторов $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_4$; в $G(2, 5)$ введем естественные координаты z_σ^i с центром в $E_0^2 = \text{спр}(\vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Рассмотрим погружение Υ области

$$D^2 = \{v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v^1)^2 + (v^2)^2 < 3, v^1 > 0, v^2 > 0\}$$

в 4-мерную сферу единичного радиуса S^4 , для которого соответствующее погружение $\tilde{\Upsilon}: D^2 \rightarrow E^5$ задается в декартовых координатах радиус-вектором следующего вида:

$$\vec{x} = \left\| \frac{v^1 v^2}{\sqrt{3}}, \frac{v^2 u}{\sqrt{3}}, \frac{v^1 u}{\sqrt{3}}, \frac{(v^1)^2 - (v^2)^2}{2\sqrt{3}}, \frac{(v^1)^2 + (v^2)^2 - 2(u)^2}{6} \right\|,$$

где $u = \sqrt{3 - (v^1)^2 + (v^2)^2}$. Образ D^2 при отображении Υ представляет собой область на поверхности Веронезе $V^2 \subset S^4$.

Отображение Грассмана $\Phi: D^2 \rightarrow G(2, 5)$, индуцированное погружением Υ , описывается следующим образом:

$$z = \left\| \begin{array}{cc} \frac{(v^2)^2 - (v^1)^2}{2v^1v^2} & \frac{-(v^1)^2 - (v^2)^2 - 2(u)^2}{2\sqrt{3}v^1v^2} \\ \frac{(v^1)^2 + (v^2)^2}{2v^1u} & \frac{(v^1)^2 - (v^2)^2 + 2(u)^2}{2\sqrt{3}v^2u} \\ \frac{-(v^1)^2 + (v^2)^2}{2v^1u} & \frac{-(v^1)^2 + (v^2)^2 + 2(u)^2}{2\sqrt{3}v^1u} \end{array} \right\|.$$

Отображение Грассмана–Обаты, индуцированное погружением Υ , является погружением и определяет само отображение Υ однозначно.

Эта работа была в большей части подготовлена во время пребывания автора в Лаборатории математической физики и геометрии Университета Париж-7. Автор хотел бы выразить благодарность Ю. А. Аминову (ФТИНТ НАНУ, Украина), плодотворные дискуссии с которым обогатили содержание данной работы, А. Буте де Монвелью (Университет Париж-7) и Л. Буте де Монвелью (Университет Париж-6) за поддержку.

Список литературы

1. *Obata*. The Gauss map of immersion of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature // J. Differential Geom. 1968. V. 2. №2. P. 217–223.
2. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46. №2. С. 41–83.

Физико-технический институт
низких температур,
Харьков
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
04.01.1996