Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Коробков, Е. Ю. Панов, Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 5, 99–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:11:58

УДК 517.95

М. В. Коробков, Е. Ю. Панов

Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка

Найдены условия существования нетривиальных изэнтропических решений квазилинейных законов сохранения. Даны приложения к проблеме функциональной зависимости частных производных гладкой функции двух переменных. В частности, найдены условия на функцию φ , необходимые для того, чтобы уравнение $\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ имело нетривиальные C^1 -гладкие решения.

Библиография: 13 названий.

Введение

Настоящая статья возникла в связи со следующим вопросом о функциональной зависимости частных производных гладкой функции двух переменных. Пусть $v = v(t, x)$ — C^1 -гладкая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, отличная от линейной, и

$$v_t = \varphi(v_x) \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(u)$ — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Спрашивается, что можно сказать о свойствах $\varphi(u)$? Производные v_t , v_x лишь непрерывны, и, как может показаться сначала, соотношение (1) не может дать ничего большего, чем естественное свойство непрерывности $\varphi(u)$. Оказалось, что функция $\varphi(u)$ должна удовлетворять следующему достаточно жесткому свойству:

(*) найдется замкнутое относительно интервала $(a, b) = \text{Int } v_x(\Omega)$ множество F нулевой меры такое, что $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица локально на $U = (a, b) \setminus F$ и производная $\varphi'(u)$ имеет локально ограниченную вариацию на U

(см. теорему 7 ниже). В частности, $\varphi(u)$ дважды (!) дифференцируема для почти всех $u \in (a, b)$. Здесь вторая производная $\varphi''(u)$ понимается в смысле обычного предела разностного отношения

$$\lim_{s \rightarrow u} \frac{\varphi'(s) - \varphi'(u)}{s - u},$$

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-01009, 05-01-00482), Программой Президента РФ поддержки молодых российских ученых (грант № МК-3778.2004.1) и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-311.2003.1). Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 03-01-00444) и Программой “Университеты России” (грант № УР.04.01.184).

но рассматриваемого не на всем интервале (a, b) (как в классическом анализе), а на множестве существования первой производной $\varphi'(s)$, которое имеет полную меру Лебега.

Для решения указанной проблемы оказались полезными результаты теории изэнтропических решений квазилинейных уравнений первого порядка, введенных в диссертации [1]. Эти результаты излагаются ниже в §§ 1, 2 и по мнению авторов представляют также и самостоятельный интерес.

Напомним, прежде всего, некоторые понятия теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad u = u(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad 0 < T \leq +\infty,$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Предполагается, что вектор потока $\varphi(u)$ лишь непрерывен: $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (С. Н. Кружков [2], [3]). Ограниченная измеримая функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ называется *обобщенным энтропийным решением* (коротко – *о.э.р.*) задачи Коши (2), (3), если

а) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] \leq 0 \quad (4)$$

в смысле распределений на Π_T (в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$);

б) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0, T)$ полной меры Лебега такое, что $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \rightarrow 0+$, $t \in \mathcal{E}$.

Условие (4) означает, что для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f \geq 0$,

$$\int_{\Pi_T} \{|u - k|f_t + \operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f)\} dt dx \geq 0.$$

Здесь и ниже $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное умножение в $\mathbb{R}^n$. Мы будем также использовать обозначение $|\cdot|$ для евклидовой нормы конечномерного вектора.

Положив в (4) $k = \pm \|u\|_\infty$, легко вывести, что $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$ и $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2) в смысле распределений, т.е. действительно является обобщенным решением (о.р.).

Как показано в [4], условия а), б) могут быть описаны одним интегральным неравенством, а именно (см. [4; предложение 1]) $u = u(t, x)$ – о.э.р. задачи (2), (3) тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{R}$ и для любой $f = f(t, x) \in C_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} \{|u - k|f_t + \operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f)\} dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k|f(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно (см. [1]–[7]), что о.э.р. задачи (2), (3) всегда существует, но в рассматриваемом случае, когда вектор потока лишь непрерывен, может быть не

единственным, если число пространственных переменных $n > 1$. Соответствующие примеры были впервые построены в работах [1], [5], [6]. Там же найдены некоторые достаточные условия единственности о.э.р. (из которых, в частности, следует, что о.э.р. всегда единственно при $n = 1$). Заметим также, что для непрерывного по Липшицу потока единственность о.э.р. хорошо известна (см. [2], [3]).

Мы рассматриваем здесь лишь ограниченные о.э.р. (в отличие от изэнтропических решений ниже), поскольку в более широком классе локально ограниченных о.э.р. постановка задачи Коши оказывается некорректной (см., например, [8]).

§ 1. Изэнтропические решения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – открытое связное подмножество (область).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [1]). Функция $u(t, x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ называется *изэнтропическим решением* (далее *и.р.*) уравнения (2) в области Ω , если $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (6)$$

т.е. энтропийное условие (4) выполняется в $\mathcal{D}'(\Omega)$ со знаком равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения и.р. легко следует, что $u = u(t, x)$ является и.р. уравнения (2) в области Ω тогда и только тогда, когда $-u$ – и.р. в Ω уравнения $u_t - \operatorname{div}_x \varphi(-u) = 0$.

Отметим, что в [1] рассмотрены более общие изэнтропические мерозначные решения.

Условие (6) может быть переписано в более удобной форме. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Условие (6) эквивалентно любому из следующих условий:

- 1) $\forall k \in \mathbb{R} \quad \max(u, k)_t + \operatorname{div}_x \varphi(\max(u, k)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega);$
- 2) $\forall k \in \mathbb{R} \quad \min(u, k)_t + \operatorname{div}_x \varphi(\min(u, k)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} 2 \max(u, k) &= |u - k| + (u + k), \\ 2\varphi(\max(u, k)) &= (\varphi(u) - \varphi(k)) \operatorname{sign}(u - k) + (\varphi(u) + \varphi(k)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 2 \min(u, k) &= -|u - k| + (u + k), \\ 2\varphi(\min(u, k)) &= -(\varphi(u) - \varphi(k)) \operatorname{sign}(u - k) + (\varphi(u) + \varphi(k)). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, равенство

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega)$$

является следствием как условия (6), так и любого из условий 1), 2) (при $k \rightarrow \pm\infty$). Это вместе с равенствами (7), (8) доказывает эквивалентность условия (6) и условий 1), 2). Предложение доказано.

Предложение 1 является частным случаем следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. Если $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ – и.р. уравнения (2) в области Ω , то функции $\max(u_1, u_2)$, $\min(u_1, u_2)$ также являются и.р. этого уравнения в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию 1) из предложения 1 для любого $k \in \mathbb{R}$

$$\max(u, k)_t + \operatorname{div}_x \varphi(\max(u, k)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (9)$$

Применим метод “удвоения переменных”, развитый С. Н. Кружковым в работах [2], [3]. Рассмотрим интегральное равенство, соответствующее (9) для $u = u_1(t, x)$ с пробной функцией $f(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ и $k = \max(u_2(\tau, y), c)$, $c \in \mathbb{R}$. Интегрируя это равенство на $\Omega(\tau, y)$, мы получаем, что

$$v_t + \operatorname{div}_x \varphi(v) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega), \quad (10)$$

$v = v(t, x; \tau, y) = \max(u_1(t, x), u_2(\tau, y), c)$. Меняя ролями функции u_1 и u_2 и переменные (t, x) и (τ, y) , выводим аналогичное равенство:

$$v_\tau + \operatorname{div}_y \varphi(v) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega). \quad (11)$$

Складывая (10) и (11), получаем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) v + (\operatorname{div}_x + \operatorname{div}_y) \varphi(v) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega). \quad (12)$$

Выберем функцию

$$\beta(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \beta(t, x) \geq 0, \quad \int \beta(t, x) dt dx = 1,$$

и положим $\delta_\nu(t, x) = \nu^{n+1} \beta(\nu t, \nu x)$ при $\nu \in \mathbb{N}$. Понятно, что последовательность $\delta_\nu(t, x)$ сходится к δ -мере Дирака в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Пусть $f(t, x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Положим $g(t, x; \tau, y) = f(t, x) \delta_\nu(t - \tau, x - y)$. Очевидно, при достаточно больших $\nu \in \mathbb{N}$ функция $g(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ и $\operatorname{supp} g \subset K \times K$, где $K \subset \Omega$ – некоторый компакт. Применяя равенство (12) к пробной функции g , получаем интегральное равенство

$$\int_{\Omega(t, x)} \int_{\Omega(\tau, y)} \{v f_t + (\varphi(v), \nabla_x f)\} \delta_\nu(t - \tau, x - y) d\tau dy dt dx = 0. \quad (13)$$

Пусть $w = w(t, x) = v(t, x; t, x) = \max(u_1(t, x), u_2(t, x), c)$,

$$\begin{aligned} I_\nu(t, x) &= \int_{\Omega(\tau, y)} \{v f_t + (\varphi(v), \nabla_x f)\} \delta_\nu(t - \tau, x - y) d\tau dy, \\ I(t, x) &= w(t, x) f_t(t, x) + (\varphi(w(t, x)), \nabla_x f(t, x)) \\ &= \int_{\Omega(\tau, y)} \{w f_t + (\varphi(w), \nabla_x f)\} \delta_\nu(t - \tau, x - y) d\tau dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|v(t, x; \tau, y) - w(t, x)| \leq |u_2(\tau, y) - u_2(t, x)|$ и для п.в. $(t, x, \tau, y) \in K \times K$

$$|\varphi(v(t, x; \tau, y)) - \varphi(w(t, x))| \leq \omega(|u_2(\tau, y) - u_2(t, x)|),$$

где $\omega(r) = \sup\{|\varphi(u) - \varphi(v)| : u, v \in [-M, M], |u - v| < r\}$ – модуль непрерывности вектора $\varphi(u)$ на отрезке $[-M, M]$ с $M = \max(\|u_1\|_{L^\infty(K)}, \|u_2\|_{L^\infty(K)})$, получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_\nu(t, x) - I(t, x)| &\leq C_f \int_{\Omega} [|u_2(\tau, y) - u_2(t, x)| + \omega(|u_2(\tau, y) - u_2(t, x)|)] \\ &\quad \times \delta_\nu(t - \tau, x - y) d\tau dy, \quad C_f = \text{const}, \end{aligned}$$

из которой следует, что $I_\nu(t, x) \rightarrow I(t, x)$ при $\nu \rightarrow \infty$ на множестве полной меры точек Лебега функции $u_2(t, x)$. Ввиду ограниченности u_1, u_2 на компакте K также $\|I_\nu\|_\infty \leq \text{const}$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла тогда справедливо соотношение

$$\int_{\Omega} I_\nu(t, x) dt dx \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} I(t, x) dt dx,$$

и так как $\int_{\Omega} I_\nu(t, x) dt dx = 0$ ввиду (13), то $\int_{\Omega} I(t, x) dt dx = 0$ или, расписав,

$$\int_{\Omega} [w(t, x)f_t(t, x) + (\varphi(w(t, x)), \nabla_x f(t, x))] dt dx = 0.$$

Последнее ввиду произвольности $f \in C_0^\infty(\Omega)$ означает, что $w_t + \text{div}_x \varphi(w) = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, т.е. при $p = p(t, x) = \max(u_1, u_2)$

$$\max(p, c)_t + \text{div}_x \varphi(\max(p, c)) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

По предложению 1 $p = \max(u_1, u_2)$ – и.р. уравнения (2) в Ω . Наконец, с учетом равенства $\min(u_1, u_2) = -\max(-u_1, -u_2)$ и замечания 1 $\min(u_1, u_2)$ также является и.р. уравнения (2). Теорема доказана.

Ниже, при доказательстве теоремы 4, нам понадобится следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $u(t, x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Pi_T)$ – и.р. уравнения (2), $-\infty \leq m = \text{ess inf } u(t, x)$, $\text{ess sup } u(t, x) = M \leq +\infty$. Тогда существует множество полной меры $E \subset (0, T)$ такое, что на этом множестве отображение $t \mapsto u(t, \cdot)$ непрерывно в топологии $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ и $\forall t \in E$

$$\text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^n} u(t, x) = m, \quad \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} u(t, x) = M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда и.р. $u(t, x)$ ограничено: $u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$. Выберем, как в доказательстве теоремы 1, функцию $\beta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ так, что

$$\text{supp } \beta \subset [0, 1], \quad \beta(t) \geq 0, \quad \int \beta(t) dt = 1,$$

и положим при $\nu \in \mathbb{N}$

$$\delta_\nu(t) = \nu \beta(\nu t), \quad \theta_\nu(t) = \int_0^t \delta_\nu(s) ds,$$

так что $\theta'_\nu(t) = \delta_\nu(t)$. Ясно, что последовательность $\delta_\nu(t)$ сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к δ -мере Дирака в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_\nu(t)$ поточечно сходится к функции Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Пусть $t_0 \in (0, T)$, $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$. Применяя соотношение (6) к пробной функции $f\theta_\nu(t - t_0)$, после элементарных преобразований получаем, что $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| f(t, x) dx \right) \delta_\nu(t - t_0) dt \\ & + \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) \} \theta_\nu(t - t_0) dt dx = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $S \subset C_0^\infty(\Pi_T)$ – счетное всюду плотное (относительно стандартной локально выпуклой топологии $C_0^\infty(\Pi_T)$) множество и $E \subset (0, T)$ – множество общих точек Лебега функций

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - k| f(t, x) dx$$

при $f \in S$ и рациональных $k \in \mathbb{Q}$. Учитывая, что множества S и $\mathbb{Q}$ счетны, заключаем, что E имеет полную меру Лебега на $(0, T)$. Для $t_0 \in E$ из (14) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u(t_0, x) - k| f(t_0, x) dx \\ & + \int_{\Pi_T} \{ |u - k| f_t + \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f) \} \theta(t - t_0) dt dx = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как множества $S \subset C_0^\infty(\Pi_T)$ и $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ плотны, а интегралы в (15) непрерывно зависят от f и k , то соотношение (15) справедливо для всех $f \in C_0^\infty(\Pi_T)$ и $k \in \mathbb{R}$. В частности, $u(t, x)$ удовлетворяет условию (5) с заменой Π_T на $(t_0, T) \times \mathbb{R}^n$, а $u_0(x)$ – на $u(t_0, x)$. Поэтому $u(t, x)$ является о.э.р. задачи Коши в этом слое с начальной функцией $u(t_0, x)$ и по начальному условию b)

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow t_0+} u(t, \cdot) = u(t_0, \cdot) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n). \quad (16)$$

Далее, поменяем направление “времени” и рассмотрим функцию $u(T - t, -x)$. Легко видеть, что эта функция также является и.р. уравнения (2) и, значит, для нее справедливо соотношение вида (16), которое означает, что при $t_0 \in E$

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow t_0-} u(t, \cdot) = u(t_0, \cdot) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Итак, $\forall t_0 \in E$

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow t_0} u(t, \cdot) = u(t_0, \cdot) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n). \quad (17)$$

Из (17) легко следует, что $\forall t_0 \in E$

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \in E} u(t, \cdot) = u(t_0, \cdot) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$$

и отображение $t \mapsto u(t, \cdot)$ непрерывно в топологии $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Далее, при $t_0 \in E$ функции $u_+(t, x) = u(t + t_0, x)$ и $u_-(t, x) = u(t_0 - t, -x)$ являются ограниченными и.р. (а значит, и о.э.р.) задачи (2), (3) в слоях Π_{T-t_0} и Π_{t_0} соответственно с начальными данными $u(t_0, x)$ и $u(t_0, -x)$. Обозначим

$$m_0 = \text{ess} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(t_0, x) = \text{ess} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(t_0, -x),$$

$$M_0 = \text{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(t_0, x) = \text{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(t_0, -x).$$

Тогда по принципу максимума (см. [4], [7]) $m_0 \leq u_+(t, x) \leq M_0$ и $m_0 \leq u_-(t, x) \leq M_0$ п.в. в Π_{T-t_0} и Π_{t_0} соответственно, т.е. $m_0 \leq u(t, x) \leq M_0$ п.в. в Π_T . Поэтому

$$m_0 \leq m = \operatorname{ess\,inf} u(t, x) \leq \operatorname{ess\,sup} u(t, x) = M \leq M_0$$

и так как обратные неравенства $m \leq m_0$, $M_0 \leq M$ очевидны (с учетом непрерывности $u(t, \cdot)$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \in E$), то $\forall t_0 \in E$

$$m_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} u(t, x) = m, \quad M_0 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} u(t, x) = M,$$

что и требовалось доказать. Предложение в случае ограниченного $u(t, x)$ доказано.

В общем случае $u(t, x) \in L^\infty_{\operatorname{loc}}(\Pi_T)$ рассмотрим “срезки”

$$u_r(t, x) = \max(-r, \min(u(t, x), r)), \quad r \in \mathbb{N}.$$

По теореме 1 функции $u_r(t, x)$ являются и.р. уравнения (2), и поскольку эти и.р. ограничены, то для них утверждения предложения 2 уже доказаны и выполнены на множествах полной меры E_r . Для завершения доказательства остается лишь положить $E = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} E_r$ и устремить r к бесконечности. Предложение полностью доказано.

В линейном случае, когда $\varphi(u) = (c, u)$, $c \in \mathbb{R}^n$, любое обобщенное решение уравнения (2) является изэнтропическим. Это легко следует из условия постоянства обобщенного решения на характеристиках $x - ct = \operatorname{const}$. Для нелинейного уравнения (2) существование нетривиального и.р. налагает довольно жесткие ограничения на характер нелинейности (см. § 2 ниже).

В случае, когда функции потока непрерывны по Липшицу, и.р. задачи Коши для уравнения (2) допускают простое описание. Точнее, предположим, что $u_0(x) \in [a, b]$ п.в. в открытом шаре $V_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $0 < r \leq \infty$, и

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq N|u - v| \quad \forall u, v \in [a, b], \quad (18)$$

$\Omega = \Omega_r$ – конус $\{(t, x) \in \Pi_T : |x| + Nt < r\}$ (заметим, что $\Omega = \Pi_T$ при $r = \infty$). Поскольку вектор потока удовлетворяет условию Липшица (18), вектор обобщенных производных $\varphi'(u)$ лежит в $L^\infty([a, b])$ и $|\varphi'(u)| \leq N$. Определим при $(t, x) \in \Omega$ функции

$$u^+(t, x) = \inf\{u \in [a, b] : v > u_0(x - \varphi'(v)t) \text{ для п.в. } v \in (u, b)\},$$

$$u^-(t, x) = \sup\{u \in [a, b] : v < u_0(x - \varphi'(v)t) \text{ для п.в. } v \in (a, u)\}.$$

Заметим, что $x - \varphi'(v)t \in V_r$ при $(t, x) \in \Omega$ ввиду оценки $|\varphi'(v)| \leq N$. Пусть функция $u(t, x) \in L^\infty(\Omega)$ такова, что $u(t, x) \in [a, b]$ п.в. на Ω и $u(0, x) = u_0(x)$ в смысле соотношения

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0} \int_{|x| < r - Nt} |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0. \quad (19)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Функция $u(t, x)$ является и.р. уравнения (2) в области Ω тогда и только тогда, когда $u^+(t, x) = u^-(t, x) = u(t, x)$ п.в. в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим при $(t, x, v) \in \Omega \times (a, b)$

$$U(t, x, v) = \theta(v - u(t, x)), \quad U_0(x, v) = \theta(v - u_0(x)), \quad \theta(v) = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ \frac{1}{2}, & v = 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Легко проверяется, что при $k \in \mathbb{R}$, $u = u(t, x) \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |u - k| &= - \int_a^b \text{sign}(v - k) U(t, x, v) dv + |b - k|, \\ \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k)) &= - \int_a^b \text{sign}(v - k) \varphi'(v) U(t, x, v) dv \\ &\quad + \text{sign}(b - k)(\varphi(b) - \varphi(k)). \end{aligned}$$

Поэтому при $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [|u - k| f_t + \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k), \nabla_x f)] dt dx \\ &= - \int_a^b \text{sign}(v - k) \left(\int_{\Omega} U(t, x, v) [f_t + (\varphi'(v), \nabla_x f)] dt dx \right) dv. \end{aligned} \quad (20)$$

Мы учли, что величины $c_0 = |b - k|$ и $c = \text{sign}(b - k)(\varphi(b) - \varphi(k)) \in \mathbb{R}^n$ не зависят от (t, x) и поэтому

$$\int_{\Omega} [c_0 f_t + (c, \nabla_x f)] dt dx = 0.$$

Кроме того, из (19) следует, что

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \int_{|x| < r - Nt} |U(t, x, v) - U_0(x, v)| dx dv = 0. \quad (21)$$

При

$$I_f(v) = \int_{\Omega} U(t, x, v) [f_t + (\varphi'(v), \nabla_x f)] dt dx$$

соотношение (20) показывает, что $u(t, x)$ является и.р. уравнения (2) в Ω тогда и только тогда, когда $\forall k \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_a^b \text{sign}(v - k) I_f(v) dv = 0,$$

т.е. $I_f(v) = 0$ п.в. на (a, b) . Выберем счетное всюду плотное (относительно стандартной локально выпуклой топологии на $C_0^\infty(\Omega)$) подмножество $S \subset C_0^\infty(\Omega)$. Тогда множество $E = \{v \in (a, b) : I_f(v) = 0 \forall f \in S\}$ имеет полную меру. Поскольку S плотно в $C_0^\infty(\Omega)$ и при фиксированном $v \in E$ соответствие $f \rightarrow I_f(v)$ непрерывно на $C_0^\infty(\Omega)$, то $I_f(v) = 0 \forall f \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е. при $v \in E$

$$U_t + (\varphi'(v), \nabla_x U) = 0 \quad (22)$$

в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Поэтому $U(t, x, v)$ – о.р. линейного уравнения (22) и, значит, оно постоянно на характеристиках $x - \varphi'(v)t = \text{const}$. Последнее означает, что $U(t, x, v) = g(x - \varphi'(v)t, v)$ для п.в. $(t, x) \in \Omega$, где $g(\cdot, v)$ – некоторая измеримая ограниченная функция на V_r . Далее, из предельного соотношения (21) следует, что $g(x, v) = U_0(x, v)$ п.в. на $V_r \times (a, b)$ и, значит,

$$U(t, x, v) = U_0(x - \varphi'(v)t, v) = \theta(v - u_0(x - \varphi'(v)t)) \quad \text{п.в. на } \Omega \times (a, b). \quad (23)$$

Итак, требование, что $u(t, x)$ является и.р., эквивалентно выполнению равенства (23). Последнее означает, в свою очередь, что для п.в. $(t, x) \in \Omega$

$$\begin{aligned} v &> u_0(x - \varphi'(v)t) \quad \text{при п.в. } v > u(t, x), \\ v &< u_0(x - \varphi'(v)t) \quad \text{при п.в. } v < u(t, x), \end{aligned}$$

т.е. $u^+(t, x) = u^-(t, x) = u(t, x)$ п.в. в Ω . Теорема доказана.

§ 2. Случай одной пространственной переменной

Рассмотрим случай, когда размерность $n = 1$ и уравнение (2) имеет вид

$$u_t + \varphi(u)_x = 0, \quad (24)$$

$u = u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

В этом случае справедливо следующее достаточное условие изэнтропичности решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(t, x) \in C(\Omega)$ – непрерывное о.р. уравнения (24) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $u(t, x)$ – изэнтропическое решение.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая простая техническая

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi(u) \in C([a, b])$ – функция, непрерывная и нелинейная на отрезке $[a, b]$. Тогда найдется $c \in \mathbb{R}$ и $u_0 \in (a, b)$ – точка строгого экстремума $\varphi(u) - cu$ на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h(c, u) = \varphi(u) - cu$, $c^* = (\varphi(b) - \varphi(a))/(b - a)$. Тогда по условию нелинейности $h(c^*, u)$ отлично от константы $h(c^*, a) = h(c^*, b)$. Пусть для определенности $\exists u \in (a, b)$: $h(c^*, u) < h(c^*, a) = h(c^*, b)$. По непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\min_{u \in [a, b]} h(c, u) < \min(h(c, a), h(c, b)) \quad \forall c \in (c^* - \delta, c^* + \delta). \quad (25)$$

Заметим далее, что условие $h(c, u_0) = \min_{u \in [a, b]} h(c, u)$ переписывается в виде $\varphi(u) \geq l(u) = c(u - u_0) + \varphi(u_0) \quad \forall u \in [a, b]$, откуда следует, что $\varphi^*(u) \geq c(u - u_0) + \varphi(u_0) \geq c(u - u_0) + \varphi^*(u_0) \quad \forall u \in [a, b]$, где $\varphi^*(u)$ – выпуклая оболочка функции $\varphi(u)$ на отрезке $[a, b]$. В частности, при $u = u_0$ получаем, что $\varphi(u_0) = \varphi^*(u_0)$. Итак, мы видим, что из условия

$$\varphi(u_0) - cu_0 = \min_{u \in [a, b]} (\varphi(u) - cu) \quad (26)$$

следует, что

$$\varphi^*(u_0) - cu_0 = \min_{u \in [a, b]} (\varphi^*(u) - cu).$$

Поэтому если u_1, u_2 – точки минимума функции $\varphi(u) - cu$, $u_1 < u_2$, то эти точки являются также точками минимума $\varphi^*(u) - cu$, а поскольку функция $\varphi^*(u)$ выпукла, то множество точек минимума функции $\varphi^*(u) - cu$ содержит отрезок $[u_1, u_2]$. Это означает, что функция $\varphi^*(u)$ линейна на (u_1, u_2) с угловым коэффициентом c . Ясно, что указанные интервалы (u_1, u_2) при разных значениях c не пересекаются и, следовательно, их множество не более чем счетно. Значит, то же верно для соответствующего множества угловых коэффициентов S , состоящего из значений $c \in \mathbb{R}$, для которых функция $\varphi(u) - cu$ достигает минимума для более чем одного значения аргумента. Следовательно, найдется значение $c \in (c^* - \delta, c^* + \delta) \setminus S$ и этому значению соответствует единственная точка $u_0 \in [a, b]$, для которой выполнено (26). При этом, как следует из (25), $u_0 \neq a$, $u_0 \neq b$ и $u_0 \in (a, b)$. По построению $\varphi(u) - cu > \varphi(u_0) - cu_0 \forall u \in [a, b]$, $u \neq u_0$, и u_0 – точка строгого минимума функции $\varphi(u) - cu$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По определению изэнтропичности и предположению 1 требуется доказать, что $\forall k \in \mathbb{R}$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\max(u, k)_t + \varphi(\max(u, k))_x = 0. \quad (27)$$

Очевидно, достаточно проверить выполнение соотношения (27) для всюду плотного множества значений k . Рассмотрим два удобных для работы множества, объединение которых всюду плотно:

- K_1 состоит из точек k , в окрестности которых функция $\varphi(u)$ линейна, т.е. $\exists \delta > 0, c \in \mathbb{R}$: $\varphi(u) \equiv \varphi(k) + c(u - k)$ при $|u - k| < \delta$;
- K_2 состоит из точек k , для которых найдутся значения $c \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ такие, что k является точкой строгого экстремума функции $\varphi(u) - cu$ на интервале $|u - k| < \delta$.

Как непосредственно следует из леммы 1, объединение $K_1 \cup K_2$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Зафиксируем k , принадлежащее одному из указанных множеств. Добавляя к функциям u и $\varphi(u)$ соответствующие константы, можем без потери общности считать, что

$$k = \varphi(k) = 0.$$

Далее, после линейной замены $x \rightarrow x - ct$ в уравнении (24) функция потока $\varphi(u)$ заменится на $\varphi(u) - cu$, при этом соответствующее отображение $u(t, x) \rightarrow u(t, x - ct)$, очевидно, сохраняет классы обобщенных и изэнтропических решений. Поэтому мы можем считать, что угловым коэффициентом c , входящий в определение $k \in K_1 \cup K_2$, равен нулю.

Достаточно проверить выполнение условия (27) локально, т.е. что для любой точки $w = (t_0, x_0) \in \Omega$ существует окрестность $U(w)$ такая, что равенство (27) выполнено в $\mathcal{D}'(U(w))$. Если $u(w) \neq 0$, то по непрерывности это свойство сохраняется и в достаточно малой окрестности $U = U(w)$ точки w . Тогда либо $\max(u, 0) = u$, либо $\max(u, 0) = 0$ на U , и в любом из этих случаев $\max(u, k)_t + \varphi(\max(u, k))_x = 0$ в $\mathcal{D}'(U)$, т.е. условие (27) выполнено в окрестности U . Остается исследовать случай $u(w) = 0$, $w = (t_0, x_0) \in \Omega$. Ввиду

локальности нашей задачи мы можем заменить область Ω на достаточно малую окрестность точки w и считать, что $|u(t, x)| < \delta$, $|\varphi(u(t, x))| < \delta$ для всех $(t, x) \in \Omega$, где δ – параметр из определения множеств K_1 и K_2 . Наконец, учитывая инвариантность классов обобщенных и изэнтропических решений относительно преобразований подобия $t' = \lambda(t - t_0)$, $x' = \lambda(x - x_0)$, $\lambda \neq 0$, будем отныне считать, что область Ω является квадратом, скажем $\Omega = (0, 1)^2$ и $u(t, x) \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \text{Cl } \Omega = [0, 1]^2$.

Случай, соответствующий множеству K_1 , совершенно тривиален, так как тогда $\varphi(u) \equiv \text{const}$ на множестве значений $u(t, x)$ (напомним, что $c = 0$) и уравнение (24) имеет форму $u_t = 0$.

Рассмотрим случай $k \in K_2$. Для определенности будем считать, что $k = 0$ есть точка строгого локального максимума функции $\varphi(u)$, т.е. $\varphi(u) < \varphi(0) = 0$ при $0 < |u| < \delta$. Вследствие равенства (24) существует непрерывно дифференцируемая функция $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (потенциал), $v \in C^1(\bar{\Omega})$, такая, что $v_x(t, x) = u(t, x)$, $v_t(t, x) = -\varphi(u(t, x))$ при $(t, x) \in \bar{\Omega}$. По условию

$$v_t(t, x) = -\varphi(u(t, x)) \geq 0 \quad \text{на } \Omega \quad (28)$$

и функция $v(t, x)$ не убывает по координате t .

Нам понадобится одно следствие из формулы коплощади (coarea formula, см., например, [9; теорема 3.2.11]).

ТЕОРЕМА (формула коплощади). Пусть $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ есть липшицева функция в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ – борелевское множество. Тогда для почти всех значений $y \in \mathbb{R}$ прообраз $v^{-1}(y)$ есть 1-σ-прямолинейное множество (т.е. множество $v^{-1}(y)$ можно покрыть счетным набором липшицевых кривых), причем длина $\mathcal{H}^1(v^{-1}(y)) \neq \infty$ (т.е. одномерная мера Хаусдорфа множества $v^{-1}(y)$ конечна) и

$$\int_B |\nabla v(t, x)| dt dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(v^{-1}(y) \cap B) dy.$$

В частности, для множества $S = \{(t, x) \in \Omega : v_x(t, x) = v_t(t, x) = 0\}$ и для почти всех значений $y \in \mathbb{R}$ справедливо следующее утверждение: длина прообраза $v^{-1}(y)$ конечна, а длина пересечения $S \cap v^{-1}(y)$ равна нулю, т.е.

$$\mathcal{H}^1(v^{-1}(y)) < \infty, \quad \mathcal{H}^1(v^{-1}(y) \cap S) = 0. \quad (29)$$

Кроме того, как следует из классической теоремы Морса–Сарда (см., например, [10; теорема 1.3]) и эквивалентности условий $v_x(t, x) = 0$ и $v_t(t, x) = 0$, почти все $y \in \mathbb{R}$ являются регулярными (в классическом смысле) значениями $v(t, x)$ на границе $\partial\Omega$, т.е. $v^{-1}(y)$ не содержит вершин квадрата $\bar{\Omega}$ и

$$v_x(t, x) \neq 0, \quad v_t(t, x) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in \partial\Omega \cap v^{-1}(y). \quad (30)$$

Значения y , для которых выполнены условия (29), (30), будем называть *регулярными*. Множество регулярных значений y таких, что $v^{-1}(y) \neq \emptyset$, будем обозначать через Y . Из сформулированной теоремы о коплощади следует, что мера разности $v(\Omega) \setminus Y$ равна 0. Если $y \in Y$, то при фиксированном x множество $\{t : v(t, x) = y\}$ не может содержать более одной точки. Действительно, если $v(t_1, x) = v(t_2, x) = y$, $t_1 < t_2$, то в силу монотонности $v(t, x)$ по переменной t $v(t, x) = y$ и $v_t(t, x) = -\varphi(u(t, x)) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$. Так как $\varphi(u) = 0$

только при $u = 0$, то также $v_x(t, x) = 0 \forall t \in [t_1, t_2]$. Мы видим, что множество $S \cap v^{-1}(y)$ содержит отрезок $[t_1, t_2] \times \{x\}$ и $\mathcal{H}^1(v^{-1}(y) \cap S) > 0$, что противоречит регулярности значения y .

Ясно, что множество D_y тех x , для которых $\exists t(x): v(t(x), x) = y$, замкнуто как проекция компакта $v^{-1}(y) \subset \bar{\Omega}$ на ось x . Так как при $y \in Y$ отображение проекции инъективно на компакте $v^{-1}(y)$, оно является гомеоморфизмом компакта $v^{-1}(y)$ на D_y . Легко видеть, что для регулярного y компоненты связности множества D_y являются невырожденными отрезками. Действительно, пусть $x_0 \in D_y$ и $t_0 = t(x_0) \in [0, 1]$ – единственное значение такое, что $v(t_0, x_0) = y$. Если $t_0 \in (0, 1)$, то с учетом монотонности $v(\cdot, x_0)$ $v(0, x_0) < y < v(1, x_0)$. По непрерывности $v(0, x) < y < v(1, x)$ для всех x из достаточно малой окрестности U точки x_0 . Но тогда для всех $x \in U$ найдется такое $t(x) \in (0, 1)$, что $v(t(x), x) = y$, следовательно, $U \subset D_y$. Если же $t_0 \in \{0, 1\}$, то точка $(t_0, x_0) \in \partial\Omega$ и по определению регулярного значения выполнены свойства: $x_0 \in (0, 1)$ (иначе (t_0, x_0) является вершиной квадрата $\bar{\Omega}$), $v_t(t_0, x_0) \neq 0$, $v_x(t_0, x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $t_0 = 0$, $v_x(t_0, x_0) < 0$ (остальные случаи разбираются аналогично). Ясно, что $v(1, x_0) > v(0, x_0) = y$. Отсюда и из условия $v_x(0, x_0) < 0$ следует, что $v(0, x) < y < v(1, x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + h]$ при достаточно малом $h > 0$. Но тогда $[x_0, x_0 + h] \in D_y$. Итак, в любом из рассмотренных случаев точка x_0 входит в D_y вместе с некоторым отрезком положительной длины. В частности, компоненты связности множества D_y не могут состоять лишь из одной точки, т.е. являются невырожденными отрезками (ввиду их связности и компактности), что и утверждалось.

Если $[a, b]$ – один из таких отрезков, то кривая $C_y = \{(t(x), x) : x \in [a, b]\}$ является компонентой связности прообраза $v^{-1}(y)$, при этом отображение $\gamma(x) = (t(x), x)$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[a, b]$ на C_y и концевые точки $\gamma(a), \gamma(b) \in \partial\Omega$ (последнее легко следует из рассуждений выше). Заметим также, что по регулярности y для п.в. $x \in [a, b]$ $(t(x), x) \notin S$ и функция $t(x)$ имеет производную

$$t'(x) = -\frac{v_x(t, x)}{v_t(t, x)} = \frac{u(t, x)}{\varphi(u(t, x))}, \quad t = t(x). \quad (31)$$

Покажем, что функция $t(x)$ строго монотонна. Предположим противное. Тогда найдутся значения $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, такие, что $t(x_1) = t(x_2) = \tau$. Далее, $t(x)$ не равно тождественно τ на $[x_1, x_2]$. В противном случае $t'(x) = 0$ на (x_1, x_2) , а это означает, что $v_t = v_x = 0$ на соответствующем отрезке $\{\tau\} \times [x_1, x_2] \in C_y$. Поскольку $\mathcal{H}^1$ -мера этого отрезка положительна, это противоречит регулярности y .

Итак, в точке экстремума $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ функции $t(x)$ имеем $t(\bar{x}) \neq \tau$, пусть для определенности $t(\bar{x}) > \tau$.

Ясно, что участок кривой C_y , соответствующий $x \in [x_1, x_2]$, лежит в Ω (иначе $(t(\bar{x}), \bar{x}) \in \partial\Omega$ и, как нетрудно проверить, в этом случае $v_t = v_x = 0$ в точке $(t(\bar{x}), \bar{x})$, а это противоречит регулярности y). Поэтому найдется достаточно малое $h > 0$ такое, что $h < t(\bar{x}) - \tau$ и $(t(x) + h, x) \in \Omega$ при $x \in [x_1, x_2]$.

Тогда $\alpha = \min_{x \in [x_1, x_2]} v(t(x) + h, x) - y > 0$ и для любого $z \in (y, y + \alpha) \cap Y$ найдется кривая уровня $C_z = \{(t_z(x), x) : x \in [x_1, x_2]\} \subset v^{-1}(z)$, причем $t(x) < t_z(x) < t(x) + h$.

Зададим функцию

$$g: Y \cap (y, y + \alpha) \ni z \mapsto \max_{x \in [x_1, x_2]} t_z(x).$$

Из условия $h < t(\bar{x}) - \tau$ следует, что для произвольного $z \in Y \cap (y, y + \alpha)$ справедливы неравенства $\max_{x \in [x_1, x_2]} t_z(x) > t(\bar{x}) > \tau + h > \max(t_z(x_1), t_z(x_2))$ и максимум в определении функции g достигается в некоторой внутренней точке $x_0 \in (x_1, x_2)$, так что $g(z) = t_z(x_0)$. Ясно, что $v_x(t_0, x_0) = 0$, где $t_0 = t_z(x_0)$ (иначе $t_z(x)$ строго монотонна в окрестности x_0). Тогда также и $v_t(t_0, x_0) = 0$. Отсюда легко вычисляется, что правосторонняя производная $g'_+(z) = +\infty$, т.е.

$$\frac{g(z_1) - g(z)}{z_1 - z} \rightarrow +\infty \quad \text{при } z_1 \in Y \cap (y, y + \alpha), \quad z_1 > z_0.$$

Действительно, если $\Delta t > 0$ таково, что $z_1 = v(t_0 + \Delta t, x_0) \in Y \cap (y, y + \alpha)$, то $g(z_1) \geq t_0 + \Delta t$, откуда $g(z_1) - g(z) \geq \Delta t$. Учитывая также, что $z_1 - z = v(t_0 + \Delta t, x_0) - v(t_0, x_0) > 0$, получаем соотношение

$$\frac{g(z_1) - g(z)}{z_1 - z} \geq \left(\frac{v(t_0 + \Delta t, x_0) - v(t_0, x_0)}{\Delta t} \right)^{-1} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} +\infty$$

ввиду условия $v_t(t_0, x_0) = 0$. Поэтому $g'_+(z) = +\infty \quad \forall z \in Y \cap (y, y + \alpha)$, что и утверждалось. Однако функция g строго возрастает в силу своего определения и, значит, почти всюду дифференцируема (мы можем продолжить $g(z)$ по монотонности на весь интервал $(y, y + \alpha)$ и воспользоваться классической теоремой Лебега). Полученное противоречие завершает доказательство свойства строгой монотонности функции $t(x)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{(t, x) \in \Omega : v_x(t, x) > 0\}, \\ \Omega_{+0} &= \text{Int}\{(t, x) \in \Omega : v_x(t, x) \geq 0\}, \\ \Omega_- &= \{(t, x) \in \Omega : v_x(t, x) < 0\}, \\ S_0 &= \text{Cl} \Omega_+ \cap \text{Cl} \Omega_- \end{aligned}$$

(замыкания берутся относительно Ω). Очевидно, $\Omega_+ \subset \Omega_{+0}$, $S_0 \subset S$. Докажем, что справедливо свойство

$$v^{-1}(y) \cap S_0 = \emptyset \quad \forall y \in Y. \quad (\text{P})$$

В противном случае найдется кривая $C_y = \{(t(x), x) : x \in [a, b]\}$ такая, что $C_y \cap S_0 \neq \emptyset$. Как установлено выше, функция $t(x)$ строго монотонна. Предположим для определенности, что $t(x)$ строго убывает. В частности, $\tau_2 = t(b) < \tau_1 = t(a)$. Так как $C_y \cap S_0 \neq \emptyset$, то найдется точка $(t_1, x_1) \in (\tau_2, \tau_1) \times (a, b)$ такая, что $v_x(t_1, x_1) < 0$, $v(t_1, x_1) = z \in Y$ и $z \neq y$. Пусть $C_z = \{(t_z(x), x) : x \in [a_1, b_1]\}$ – компонента связности $v^{-1}(z)$, содержащая точку (t_1, x_1) . Тогда, как следует из (31) и строгой монотонности функции $t_z(x)$, $t_z(x)$ строго возрастает. Заметим также, что $(t_z(a_1), a_1), (t_z(b_1), b_1) \in \partial\Omega$. Из указанных свойств кривых C_y, C_z легко вывести, что эти кривые должны пересекаться, а это невозможно. Полученное противоречие доказывает свойство (P).

Перейдем к доказательству основного соотношения (27), которое при $k = 0$ означает, что $\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} [u^+ f_t + \varphi(u^+) f_x] dt dx = 0. \quad (32)$$

Пусть $f(t, x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $K = \text{supp } f$. Рассмотрим компакт $K_0 = K \cap S_0$ и положим $B = v(K_0)$, $A = v^{-1}(B) \cap \Omega_+$. Ввиду свойства (P) $Y \cap v(A) = \emptyset$ и $v(A)$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда по формуле коплощади

$$\int_A |\nabla v(t, x)| dt dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^1(v^{-1}(y) \cap A) dy = \int_{v(A)} \mathcal{H}^1(v^{-1}(y) \cap A) dy = 0.$$

Так как $|\nabla v(t, x)| > 0$ на Ω_+ , то $\text{meas}(A) = 0$, где $\text{meas}(A)$ обозначает меру Лебега измеримого множества A (мы используем общее обозначение $\text{meas}(A)$ для всех размерностей).

Пусть при $r > 0$

$$B_r = \{y \in \mathbb{R} : \text{dist}(y, B) = \inf_{z \in B} |y - z| < r\}$$

— r -окрестность множества B , $A_r = v^{-1}(B_r) \cap \Omega_+$. Множество B замкнуто (как непрерывный образ компакта) и, значит, $B = \bigcap_{r>0} B_r$, откуда и $A = \bigcap_{r>0} A_r$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\text{meas}(A) = 0$, то $\exists r > 0$: $\text{meas}(A_r) < \varepsilon$. Следует подчеркнуть, что при $S_0 = \emptyset$ множества B_r , A_r пусты при всех $r > 0$.

Выберем далее функцию $\rho(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \rho(y) \leq 1$, $\text{supp } \rho \subset B_r$, $\rho = 1$ в окрестности $B_{r/2}$ множества B , и положим

$$g = g(t, x) = f(t, x) \rho(v(t, x)), \quad h = h(t, x) = f(t, x) [1 - \rho(v(t, x))].$$

Ясно, что $g, h \in C_0^1(\Omega)$, $f = g + h$ (и $g = 0$ при $S_0 = \emptyset$). Поэтому интеграл в левой части (32) переписывается в виде

$$I = \int_{\Omega} [u^+ f_t + \varphi(u^+) f_x] dt dx = I_1 + I_2,$$

где $u^+ = \max(u, 0)$ и

$$I_1 = \int_{\Omega_+} [u g_t + \varphi(u) g_x] dt dx, \quad I_2 = \int_{\Omega_{+0}} [u h_t + \varphi(u) h_x] dt dx.$$

Заметим, что

$$K_1 = (K \cap \text{Cl } \Omega_+) \setminus v^{-1}(B_{r/2}) \subset \text{Cl } \Omega_+ \setminus S_0 = \text{Cl } \Omega_+ \setminus \text{Cl } \Omega_- \subset \Omega \setminus \text{Cl } \Omega_- = \Omega_{+0},$$

откуда следует, что существует функция $\eta(t, x) \in C^1(\Omega)$ такая, что $\eta(t, x) = 1$ на компакте K_1 и $\text{supp } \eta \subset \Omega_{+0}$. Положим $h_1(t, x) = h(t, x) \eta(t, x)$, $h_2(t, x) = h(t, x) (1 - \eta(t, x))$. Тогда $h = h_1 + h_2$ и $I_2 = I_3 + I_4$, где

$$I_3 = \int_{\Omega_{+0}} [u(h_1)_t + \varphi(u)(h_1)_x] dt dx, \quad I_4 = \int_{\Omega_{+0}} [u(h_2)_t + \varphi(u)(h_2)_x] dt dx.$$

Так как $h_1(t, x) \in C_0^1(\Omega_{+0})$, а $u(t, x)$ — о.р. уравнения (24) в Ω_{+0} , то первый интеграл $I_3 = 0$. Далее, как легко видеть, $\text{supp } h \cap \Omega_+ \subset K_1$, откуда следует,

что $h_2 = 0$ на Ω_+ . Поэтому также и $I_4 = 0$. Итак, $I_2 = 0$. Следует отметить, что при $S_0 = \emptyset$ интеграл $I = I_2$ и требуемое соотношение $I = 0$ доказано. В общем случае заметим, что при $v = v(t, x)$, $u = u(t, x)$

$$\begin{aligned} g_t &= f_t \rho(v) + f \rho'(v) v_t = f_t \rho(v) - f \rho'(v) \varphi(u), \\ g_x &= f_x \rho(v) + f \rho'(v) v_x = f_x \rho(v) + f \rho'(v) u. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в интеграл I_1 и учитывая, что $\rho(v) = 0$ вне A_r , получаем равенство

$$I_1 = \int_{\Omega_+} [u f_t + \varphi(u) f_x] \rho(v) dt dx = \int_{A_r} [u f_t + \varphi(u) f_x] \rho(v) dt dx.$$

Следовательно,

$$|I_1| \leq \int_{A_r} [|u| |f_t| + |\varphi(u)| |f_x|] dt dx \leq c \operatorname{meas}(A_r) < c\varepsilon,$$

где c – константа, не зависящая от ε . Тогда $|I| = |I_1| < c\varepsilon$ и с учетом произвольности $\varepsilon > 0$ $I = 0$, т.е. выполнено условие (32). Теорема доказана.

Оказывается, в случае $\Omega = \Pi_T$, $0 < T \leq \infty$, для существования и.р. необходимо, чтобы функция потока $\varphi(u)$ была непрерывна по Липшицу в области значений этого решения. Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u(t, x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Pi_T)$ является и.р. уравнения (24) в области $\Omega = \Pi_T$; $-\infty \leq m = \operatorname{ess\,inf} u(t, x)$, $M = \operatorname{ess\,sup} u(t, x) \leq +\infty$ в Ω . Тогда функция φ удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке $[a, b] \subset (m, M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что $\varphi(u)$ не удовлетворяет условию Липшица на некотором отрезке $[a, b] \subset (m, M)$. Тогда найдутся последовательности $a_n, b_n \in [a, b]$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| = \max_{u \in [a_n, b_n]} |\varphi(u) - \varphi(a_n)| > n|b_n - a_n|. \quad (33)$$

Очевидно, $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, после возможного перехода к подпоследовательности, $a_n \rightarrow \alpha$, $b_n \rightarrow \alpha$, где $\alpha \in [a, b]$. Обозначим $C_n = \varphi(b_n) - \varphi(a_n)$ и выберем “энтропии”

$$p_n(u) = \frac{|u - a_n| - |u - b_n| + b_n - a_n}{2C_n} = \begin{cases} 0, & u < a_n, \\ \frac{u - a_n}{C_n}, & u \in [a_n, b_n], \\ \frac{b_n - a_n}{C_n}, & u > b_n, \end{cases}$$

с соответствующими потоками

$$\begin{aligned} q_n(u) &= \frac{1}{2C_n} [(\varphi(u) - \varphi(a_n)) \operatorname{sign}(u - a_n) \\ &\quad - (\varphi(u) - \varphi(b_n)) \operatorname{sign}(u - b_n) + \varphi(b_n) - \varphi(a_n)] \\ &= \begin{cases} 0, & u < a_n, \\ \frac{\varphi(u) - \varphi(a_n)}{C_n}, & u \in [a_n, b_n], \\ 1, & u > b_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда из (6) следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p_n(u)_t + q_n(u)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (34)$$

Ввиду (33) имеем

$$0 \leq |p_n(u)| \leq \frac{b_n - a_n}{|C_n|} < \frac{1}{n}, \quad |q_n(u)| \leq 1.$$

После дополнительного выделения подпоследовательности мы можем считать, что $q_n(\alpha) \rightarrow \beta \in [-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $q_n(u) \rightarrow \theta(u - \alpha) \forall u \in \mathbb{R}$, где

$$\theta(v) = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ \beta, & v = 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

С учетом приведенных выше соотношений из (34) в пределе при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$\theta(u - \alpha)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Из этого соотношения следует, что для п.в. $t \in (0, T)$ $\theta(u(t, \cdot) - \alpha)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. В частности, это равенство выполнено при $t \in E$, где $E \subset (0, T)$ – множество полной меры, для которого выполнены утверждения предложения 2. По предложению 2 имеем $m = \text{ess inf } u(t, \cdot)$, $M = \text{ess sup } u(t, \cdot)$ при $t \in E$ и условие $\alpha \in (m, M)$ противоречит равенству $\theta(u(t, \cdot) - \alpha)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В предыдущей теореме существенно, что область $\Omega = \Pi_T$. Как будет показано ниже в примере, для произвольной области Ω утверждение теоремы 4 неверно. В общем случае справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $u(t, x)$ является и.р. уравнения (24) в области Ω , $m = \text{ess inf } u(t, x)$, $M = \text{ess sup } u(t, x)$ в Ω . Тогда найдется замкнутое относительно интервала (m, M) множество F нулевой меры Лебега такое, что функция φ удовлетворяет условию Липшица локально на дополнении $(m, M) \setminus F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда и.р. $u(t, x)$ постоянно, $m = M$ и утверждение теоремы тривиально. Поэтому предположим, что $m < M$, и рассмотрим множество U , состоящее из значений $u \in (m, M)$ таких, что $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки u . По построению U открыто и $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица локально на U . Положим $F = (m, M) \setminus U$. Тогда F замкнуто в (m, M) и для завершения доказательства остается показать, что F имеет нулевую меру. Пусть $E = \{v \in (m, M) : \text{meas } u^{-1}(v) = 0\}$. Поскольку график Γ функции $u(t, x)$ имеет нулевую меру, то для п.в. $v \in (m, M)$ сечения $\Gamma^v = \{(t, x) \in \Omega : (t, x, v) \in \Gamma\} = u^{-1}(v)$ имеют нулевую меру на Ω и, следовательно, E является множеством полной меры на (m, M) . Достаточно доказать, что множество $F_1 = F \cap E$ имеет нулевую меру. Последнее, в свою очередь, достаточно проверить локально, т.е. мы должны установить, что $\forall v \in F_1 \exists V$ – окрестность v такая, что $\text{meas}(F_1 \cap V) = 0$.

Итак, пусть $v_0 \in F_1$. Рассмотрим множества

$$\Omega^+ = \text{ess Cl}\{(t, x) \in \Omega : u(t, x) < v_0\}, \quad \Omega^- = \text{ess Cl}\{(t, x) \in \Omega : u(t, x) > v_0\},$$

где существенное замыкание $\text{ess Cl}(A)$ множества A состоит из точек, любая окрестность которых пересекает A по множеству положительной меры. Очевидно, $\text{ess Cl}(A)$ является замкнутым множеством. Действительно, его дополнение – это открытое множество, каждая из точек которого имеет окрестность, пересекающуюся с A по множеству нулевой меры. Учитывая, что $v_0 \in E$, получаем, что объединение $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$, в противном случае $u(t, x) = v_0$ п.в. на открытом множестве $\Omega \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-)$ и $\text{meas } u^{-1}(v_0) > 0$. Ввиду связности Ω найдется $(t_0, x_0) \in \Omega^+ \cap \Omega^-$. Тогда в любой окрестности V точки (t_0, x_0) множества

$$\{(t, x) \in \Omega : u(t, x) < v_0\}, \quad \{(t, x) \in \Omega : u(t, x) > v_0\}$$

имеют положительную меру. Выберем квадратную окрестность $V = V_t \times V_x$, где $V_t = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $V_x = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало, так что $V \subset \Omega$ и $u(t, x) \in L^\infty(V)$. Положим $m_1 = \text{ess inf}_V u(t, x)$, $M_1 = \text{ess sup}_V u(t, x)$. Тогда $m \leq m_1 < v_0 < M_1 \leq M$ и $I = (m_1, M_1)$ является окрестностью точки v_0 . Покажем, что $\text{meas}(F_1 \cap I) = 0$. Пусть $\rho(x) \in C_0^\infty(V_x)$, $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x_0) > 0$. Положим

$$F(t) = \frac{1}{A} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} u(t, x) \rho(x) dx, \quad G(t) = \frac{1}{A} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \varphi(u(t, x)) \rho'(x) dx,$$

где

$$A = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \rho(x) dx > 0.$$

Функции $F(t)$, $G(t)$ определены почти всюду на интервале V_t . В частности, эти функции определены на множестве полной меры $J \subset V_t$ значений t таких, что для п.в. $x \in V_x$ (t, x) – точка Лебега $u(t, x)$. Ясно, что значения $t \in J$ являются также точками Лебега функций $F(t)$, $G(t)$. Из равенства $u_t + \varphi(u)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(V)$ следует, что $F'(t) = G(t) \in L^\infty$ в $\mathcal{D}'(V_t)$. В частности, $F(t)$ удовлетворяет условию Липшица на V_t (после возможной коррекции на множестве нулевой меры). Кроме того, ясно, что при $t \in J$ существует классическая производная $F'(t) = G(t)$. Поскольку $F(t)$ удовлетворяет условию Липшица, образ $\mathcal{E} = F(V_t \setminus J)$ имеет нулевую меру. Это непосредственно следует из формулы площади (см. [9; теорема 3.2.3])

$$0 = \int_{V_t \setminus J} |F'(t)| dt = \int \mathcal{H}_0(F^{-1}(v) \cap (V_t \setminus J)) dv \geq \text{meas}(\mathcal{E}).$$

Здесь $\mathcal{H}_0$ – нульмерная мера Хаусдорфа (т.е. считающая мера).

Пусть $I_1 = I \setminus \mathcal{E}$. Если $c \in F_1 \cap I_1$, то функция $\varphi(u)$ не удовлетворяет условию Липшица ни в какой окрестности точки c и, значит, найдутся последовательности $a_n, b_n \in [a, b]$, $a_n < b_n$, такие, что $a_n, b_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)| = \max_{u \in [a_n, b_n]} |\varphi(u) - \varphi(a_n)| > n|b_n - a_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим последовательность энтропий $p_n(u)$ и соответствующую последовательность потоков $q_n(u)$ так же, как в доказательстве теоремы 4, и перейдем в энтропийном соотношении вида (34) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим, что

$$\theta(v - c)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(V),$$

где функция $\theta(v)$ определена так же, как в доказательстве теоремы 4. Из этого соотношения следует, что для $t \in J$ выполнено одно из следующих соотношений:

- 1) $u(t, x) \geq c$ п.в. на V_x ;
- 2) $u(t, x) \leq c$ п.в. на V_x .

Заметим, что эти соотношения эквивалентны неравенствам $F(t) \geq c$, $F(t) \leq c$ соответственно. Оба замкнутых множества, на которых выполнены эти неравенства, непусты, в противном случае $c \notin I$. Следовательно, найдется значение $\bar{t} \in V_t$, для которого $F(\bar{t}) = c$. Из условия $c \notin \mathcal{E}$ следует, что $\bar{t} \in J$. Тогда $u(\bar{t}, x) = c$ п.в. на V_x и

$$F'(\bar{t}) = G(\bar{t}) = \text{const} \int \rho'(x) dx = 0.$$

Поэтому любое значение $c \in F_1 \cap I_1$ является критическим для $F(t)$, т.е. при $J_0 = J \cap G^{-1}(0)$ пересечение $F^{-1}(c) \cap J_0 \neq \emptyset$. Кроме того, $F'(t) = G(t) = 0$ при $t \in J_0$ и по формуле площади

$$0 = \int_{J_0} |F'(t)| dt = \int \mathcal{H}_0(F^{-1}(c) \cap J_0) dc \geq \text{meas}(F_1 \cap I_1).$$

Итак, $\text{meas}(F_1 \cap I) = \text{meas}(F_1 \cap I_1) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 5 точна в том смысле, что множество $F \subset (m, M)$ “плохих” точек может быть произвольным замкнутым множеством нулевой меры. Подтвердим это следующим примером, в котором соответствующее и.р. определено и непрерывно на замыкании прямоугольной области $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$.

ПРИМЕР. Пусть $m < M$ и $F \subset (m, M)$ – замкнутое множество нулевой меры. Построим сначала функцию потока $\varphi(u) \in C(\mathbb{R})$, для которой F является множеством “плохих” точек на (m, M) , т.е. F – минимальное замкнутое в (m, M) множество такое, что на его дополнении $U = (m, M) \setminus F$ функция $\varphi(u)$ удовлетворяет локально условию Липшица. Множество U является объединением не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов. Рассмотрим более сложный случай, когда это семейство счетно: $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i)$. Случай конечного набора интервалов (a_i, b_i) соответствует конечному множеству F и разбирается аналогично с очевидными упрощениями. Положим $h_i = b_i - a_i$, $c_i = (a_i + b_i)/2$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} h_i = M - m < +\infty$, откуда легко следует существование убывающей последовательности $\alpha_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, такой, что $\alpha_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и

$$T = 8 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\alpha_i} < +\infty. \quad (35)$$

Рассмотрим при $i \in \mathbb{N}$ неотрицательные непрерывные функции

$$\varphi_i(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2h_i}} \min(\sqrt{u - a_i}, \sqrt{b_i - u}), & u \in (a_i, b_i), \\ 0, & u \notin (a_i, b_i). \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_i(u)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности любой точки, за исключением точек a_i, b_i . Кроме того, очевидно, что $\max \varphi_i(u) = \varphi_i(c_i) = \frac{1}{2}$.

Положим $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(u)$, так что $\varphi(u) = \alpha_i \varphi_i(u)$ на интервалах (a_i, b_i) и $\varphi(u) = 0$ на $\mathbb{R} \setminus U$. Очевидно,

$$0 \leq \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(u) \leq \frac{\alpha_m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Поэтому ряд, определяющий функцию $\varphi(u)$, сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и, значит, эта функция непрерывна. Кроме того, ясно, что $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица локально на U , а все точки множества F являются “плохими”. Последнее следует из того факта, что любая окрестность V точки $u \in F$ пересекается с множеством $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{a_i, b_i\}$ (в противном случае $V \subset F$, а это противоречит требованию $\text{meas}(F) = 0$) и, следовательно, $\varphi(u)$ не может удовлетворять условию Липшица на V . Итак, множество “плохих” точек функции $\varphi(u)$ на интервале (m, M) совпадает с F .

Перейдем к построению решения $u(t, x)$. Рассмотрим ступенчатую функцию $\rho(u)$ на (m, M) , равную $8/\alpha_i$ на интервалах (a_i, b_i) и нулю на множестве F . Положим

$$g(u) = \int_m^u \rho(v) dv.$$

Ясно, что $g(u)$ абсолютно непрерывна (так как по условию (35) $\int_m^M \rho(v) dv = T < +\infty$) и строго возрастает на отрезке $[m, M]$, $g(m) = 0$, $g(M) = T$. Обозначим $A_i = g(a_i)$, $B_i = g(b_i)$. Ясно, что $B_i - A_i = H_i = 8h_i/\alpha_i$. Непосредственно проверяется (с учетом равенств $\alpha_i H_i = 8h_i$), что функции

$$v_i(t, x) = a_i + \frac{\alpha_i(t - A_i)^2}{H_i(x+1)^2}, \quad w_i(t, x) = b_i - \frac{\alpha_i(B_i - t)^2}{H_i(x+1)^2}$$

являются гладкими автомодельными решениями уравнений

$$u_t + \frac{\alpha_i}{\sqrt{2h_i}}(\sqrt{u - a_i})_x = 0, \quad u_t + \frac{\alpha_i}{\sqrt{2h_i}}(\sqrt{b_i - u})_x = 0$$

соответственно в замкнутых областях

$$P_i^- = \left\{ (t, x) : x \in [0, 1], A_i \leq t \leq A_i + \frac{(x+1)H_i}{4} \right\},$$

$$P_i^+ = \left\{ (t, x) : x \in [0, 1], B_i - \frac{(x+1)H_i}{4} \leq t \leq B_i \right\},$$

причем $v_i(t, x) \in [a_i, c_i]$ на P_i^- , $v_i(A_i, x) = a_i$, $v_i(t, x) = c_i$ при $t = A_i + (x+1) \times H_i/4$, а $w_i(t, x) \in [c_i, b_i]$ на P_i^+ , $w_i(B_i, x) = b_i$, $w_i(t, x) = c_i$ при $t = B_i - (x+1) \times H_i/4$. Учитывая, что по построению

$$\varphi(u) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2h_i}} \sqrt{u - a_i} \quad \text{при } u \in [a_i, c_i],$$

$$\varphi(u) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2h_i}} \sqrt{b_i - u} \quad \text{при } u \in [c_i, b_i],$$

закключаем, что $v_i(t, x)$, $w_i(t, x)$ – гладкие решения уравнения (24).

Рассмотрим функцию $u_i(t, x) \in [a_i, b_i]$, заданную на замыкании прямоугольной области $P_i = (A_i, B_i) \times (0, 1)$ равенством

$$u_i(t, x) = \begin{cases} v_i(t, x), & (t, x) \in P_i^-, \\ w_i(t, x), & (t, x) \in P_i^+, \\ c_i, & (t, x) \in P_i \setminus (P_i^- \cup P_i^+). \end{cases} \quad (36)$$

Заметим, что $P_i \setminus (P_i^- \cup P_i^+)$ является треугольником:

$$P_i \setminus (P_i^- \cup P_i^+) = \left\{ (t, x) : x \in [0, 1], A_i + \frac{(x+1)H_i}{4} < t < B_i - \frac{(x+1)H_i}{4} \right\}.$$

Равенство (36) определяет кусочно гладкое и непрерывное вплоть до границы области P_i и.р. уравнения (24). Искомое и.р. $u(t, x)$ в целом прямоугольнике Ω строится склеиванием решений $u_i(t, x)$. А именно положим

$$u(t, x) = \begin{cases} u_i(t, x), & t \in (A_i, B_i), \\ g^{-1}(t), & t \in g(F). \end{cases} \quad (37)$$

Заметим, что обратная функция $g^{-1} : [0, T] \mapsto [m, M]$ определена и непрерывна. Кроме того, множество $E = g(F)$ является компактным подмножеством нулевой меры. Действительно, ввиду абсолютной непрерывности $g(u)$

$$\text{meas}(E) = \int_F \rho(u) du = 0.$$

Ясно, что $(0, T) = E \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i, B_i)$ и равенство (37) корректно определяет функцию $u(t, x)$ на Ω . Покажем, что эта функция непрерывна. Пусть $h(t) = g^{-1}(t)$. Тогда $u_i(A_i, x) = h(A_i) = a_i$, $u_i(B_i, x) = h(B_i) = b_i$, откуда следуют оценки $|u_i(t, x) - h(t)| \leq b_i - a_i = h_i$, $t \in [A_i, B_i]$. Тогда при

$$p_m(t, x) = \begin{cases} u_i(t, x), & t \in (A_i, B_i), 1 \leq i \leq m, \\ h(t), & t \in [0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^m (A_i, B_i), \end{cases}$$

имеем

$$|u(t, x) - p_m(t, x)| \leq \max_{i > m} h_i \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

откуда следует равномерная сходимость последовательности непрерывных на $\text{Cl } \Omega$ функций $p_m(t, x)$ к функции $u(t, x)$. Поэтому $u(t, x)$ непрерывна на Ω (и продолжается до непрерывной функции на $\text{Cl } \Omega$). Осталось показать, что $u(t, x)$ является и.р. нашего уравнения. Для этого фиксируем $k \in \mathbb{R}$ и обозначим $\eta(u) = |u - k|$, $\psi(u) = \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))$. Тогда для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx &= \int_{\Omega \setminus E} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_i} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая, что $u = u(t, x)$ – кусочно гладкое и.р. на P_i , откуда $\eta(u)_t + \psi(u)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(P_i)$, выводим равенство

$$\begin{aligned} \int_{P_i} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx &= \int_0^1 \eta(u(B_i, x))f(B_i, x) dx - \int_0^1 \eta(u(A_i, x))f(A_i, x) dx \\ &= \eta(b_i)q(B_i) - \eta(a_i)q(A_i), \end{aligned}$$

где

$$q(t) = \int_0^1 f(t, x) dx \in C_0^\infty((0, T)).$$

Тогда из формулы (38) с учетом абсолютной непрерывности функции $g(u)$ и условия $\text{meas}(F) = 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx &= \sum_{i=1}^{\infty} (\eta(b_i)q(B_i) - \eta(a_i)q(A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} (\eta(u)q(g(u)))' du = \int_{(m, M) \setminus F} (\eta(u)q(g(u)))' du \\ &= \int_m^M (\eta(u)q(g(u)))' du = \eta(M)q(T) - \eta(m)q(0) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} [\eta(u)f_t + \psi(u)f_x] dt dx = 0,$$

т.е. $\eta(u)_t + \psi(u)_x = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Последнее ввиду произвольности $k \in \mathbb{R}$ означает, что $u(t, x)$ – и.р. уравнения (24), что и требовалось установить.

Перейдем к исследованию более тонких свойств функции потока $\varphi(u)$, вытекающих из условия существования нетривиального непрерывного и.р. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Пусть $f(y)$ – функция на отрезке $[a, b]$,

$$y(x) \in C([\alpha, \beta]), \quad y([\alpha, \beta]) = [a, b]$$

и $E \subset [a, b]$. Предположим, что композиция $g(x) = f(y(x))$ имеет ограниченную вариацию на $D = [\alpha, \beta] \cap y^{-1}(E)$. Тогда $f(y)$ – функция ограниченной вариации на E , причем $\text{Var}_E f(y) \leq \text{Var}_D g(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем значения $\alpha_1, \beta_1 \in [\alpha, \beta]$ так, чтобы $y(\alpha_1) = a$, $y(\beta_1) = b$, и предположим для определенности, что $\alpha_1 < \beta_1$ (случай $\alpha_1 > \beta_1$ сводится к рассматриваемому случаю при замене функции $y(x)$ на $y(\alpha + \beta - x)$). Пусть $y_i \in E$, $i = 1, \dots, m$, – набор точек, $y_i > y_{i-1}$, $i = 2, \dots, m$. Положим $x_i = \max\{x \in [\alpha_1, \beta_1] : y(x) = y_i\}$. Заметим, что по непрерывности $y(x)$ при $i > 1$ $y_i \in (y_{i-1}, b] \subset y((x_{i-1}, \beta_1])$ и, значит, $x_i > x_{i-1}$, $i = 2, \dots, m$. По построению $x_i \in D$. Тогда

$$\sum_{i=2}^m |f(y_i) - f(y_{i-1})| = \sum_{i=2}^m |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq \text{Var}_D g(x).$$

Переходя в последней оценке к точной верхней грани по всем конечным подмножествам $\{y_i\}$ множества E , получаем, что $\text{Var}_E f(y) \leq \text{Var}_D g(x)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $n = 1$, $r > 0$, $u_0(x) \in C((-r, r))$ и образ $u_0((-r, r))$ содержит интервал (a, b) . Предположим также, что функция потока $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица (18) и существует непрерывное и.р. $u = u(t, x)$ задачи Коши для уравнения (24) в трапеции $\Omega = \Omega_r = \{(t, x) \in \Pi_T : |x| + Nt < r\}$ с начальным условием (19). Тогда производная $\varphi'(u)$ имеет (после возможного “исправления” на множестве нулевой меры) ограниченную вариацию на любом замкнутом отрезке в (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя $u(t, x)$ и $u_0(x)$ на

$$\min(b, \max(u(t, x), a)) \quad \text{и} \quad \min(b, \max(u_0(x), a))$$

соответственно (по теореме 1 после такой замены $u = u(t, x)$ останется непрерывным и.р. уравнения (24) с начальной функцией $u_0(x)$), будем считать, что $u_0(x), u(t, x) \in [a, b]$.

Пусть $E \subset (a, b)$ – множество полной меры точек Лебега функции $\varphi'(u)$ и $[c, d] \subset (a, b)$. С учетом непрерывности функции $u_0(x)$ существует отрезок $J = [\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ такой, что $u_0(J) \supset [c, d]$. Далее, при некотором $h > 0$ множество $\{(t, x) : \alpha - Nt \leq x \leq \beta + Nt, 0 < t \leq h\} \subset \Omega$. Покажем, что функция $f(y) = y + \varphi'(u_0(y))h$ возрастает на множестве $J \cap u_0^{-1}(E)$. Предполагая противное, найдем значения $y_1, y_2 \in (\alpha, \beta)$, $y_1 < y_2$, такие, что $u_1 = u_0(y_1)$, $u_2 = u_0(y_2) \in E$ и $f(y_1) > f(y_2)$. Последнее означает, что характеристики $x_2(t) = y_2 + \varphi'(u_2)t$ и $x_1(t) = y_1 + \varphi'(u_1)t$ пересекаются при $t = t_0$, где

$$t_0 = \frac{[y_2 - y_1]}{[\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)]} \in (0, h). \quad (39)$$

При этом будем считать, что функция $u_0(y)$ не постоянна ни в каких окрестностях точек y_1, y_2 . Последнего всегда можно добиться, заменив y_1, y_2 на y'_1, y'_2 , где значения y'_1, y'_2 определяются условием, что отрезки $[y_1, y'_1], [y'_2, y_2]$ – максимальные среди отрезков вида $[y_1, z_1], [z_2, y_2]$, на которых функция $u_0(y)$ принимает постоянные значения, равные u_1 и u_2 соответственно. При такой замене числитель дроби, определяющей t_0 в равенстве (39), может только уменьшиться при неизменном знаменателе. Поэтому условие пересечения характеристик $t_0 \in (0, h)$ остается выполненным.

“Пошевелив” значения y_1 и y_2 , мы можем также добиться выполнения того условия, что в любых окрестностях точек y_1 и y_2 функции $u_0(y) - u_1$ и $u_0(y) - u_2$ меняют знак. Действительно, выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\alpha < y_1 - \delta < y_1 + \delta < y_2 - \delta < y_2 + \delta < \beta$ и

$$\frac{[y_2 - y_1 + 2\delta]}{[\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2) - 2\delta]} \in (0, h). \quad (40)$$

Так как функция $u_0(y)$ непрерывна и не постоянна на интервале $I = (y_1 - \delta, y_1 + \delta)$, то внутренность ее образа $V = \text{Int } u_0(I)$ является невырожденным интервалом. Поскольку график $\{u = u_0(y)\}$ имеет нулевую меру на плоскости, то для п.в. $u \in V$ прообраз $u_0^{-1}(u)$ является множеством нулевой меры Лебега

на I . Учитывая также, что $u_1 \in E$ – точка Лебега функции $\varphi'(u)$, мы можем найти значение $\bar{u}_1 \in V \cap E$ такое, что множество $I_0 = u_0^{-1}(\bar{u}_1)$ имеет нулевую меру и $|\varphi'(\bar{u}_1) - \varphi'(u_1)| < \delta$.

Далее, множества $I_-, I_+ \subset I$, на которых соответственно

$$u_0(y) < \bar{u}_1 \quad \text{и} \quad u_0(y) > \bar{u}_1,$$

открыты, непусты и их замыкания покрывают I : $I = \text{Cl } I_- \cup \text{Cl } I_+$ (в противном случае $u_0(y) = \bar{u}_1$ на невырожденном интервале). По связности I $\exists \bar{y}_1 \in \text{Cl } I_- \cap \text{Cl } I_+$. Тогда $u_0(\bar{y}_1) = \bar{u}_1$, и поскольку $\bar{y}_1$ – предельная точка множеств I_-, I_+ , то функция $u_0(y) - \bar{u}_1$ меняет знак в любой окрестности $\bar{y}_1$. Аналогично доказывается существование точки $\bar{y}_2 \in (y_2 - \delta, y_2 + \delta)$ такой, что $\bar{u}_2 = u_0(\bar{y}_2) \in E$, $|\varphi'(\bar{u}_2) - \varphi'(u_2)| < \delta$ и функция $u_0(y) - \bar{u}_2$ меняет знак в любой окрестности точки $\bar{y}_2$. Положим

$$\bar{t}_0 = \frac{[\bar{y}_2 - \bar{y}_1]}{[\varphi'(\bar{u}_1) - \varphi'(\bar{u}_2)]}.$$

Тогда с учетом (40) $\bar{t}_0 > 0$ и $\bar{t}_0 < [y_2 - y_1 + 2\delta]/[\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2) - 2\delta] < h$. Поэтому характеристики $x = \bar{y}_2 + \varphi'(\bar{u}_2)t$ и $x = \bar{y}_1 + \varphi'(\bar{u}_1)t$ пересекаются в точке $(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$, где $\bar{x}_0 = \bar{y}_1 + \varphi'(\bar{u}_1)\bar{t}_0$. Так как $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$, то одно из этих значений отлично от $u(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$. Пусть для определенности $u(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \neq \bar{u}_1$. Тогда возможны два случая: $u(\bar{t}_0, \bar{x}_0) > \bar{u}_1$ или $u(\bar{t}_0, \bar{x}_0) < \bar{u}_1$. Будем считать, что $u(\bar{t}_0, \bar{x}_0) > \bar{u}_1$, случай противоположного неравенства разбирается аналогично. По непрерывности $u(\bar{t}_0, x) > \bar{u}_1$ для всех x из достаточно малой окрестности $W = (\bar{x}_0 - \varepsilon, \bar{x}_0 + \varepsilon)$ точки $\bar{x}_0$.

Далее, как следует из теоремы 2, для п.в. $(t, x, v) \in \Omega \times (a, b)$

$$\theta(v - u(t, x)) = \theta(v - u_0(x - \varphi'(v)t)),$$

где функция $\theta(v)$ определена в начале доказательства теоремы 2. Поэтому указанное равенство верно на множестве общих точек Лебега левой и правой частей. При $x \in W$ значения

$$y = y(x) = x - \varphi'(\bar{u}_1)\bar{t}_0 = x - \bar{x}_0 + \bar{x}_0 - \varphi'(\bar{u}_1)\bar{t}_0 = x - \bar{x}_0 + \bar{y}_1$$

“пробегают” интервал $(\bar{y}_1 - \varepsilon, \bar{y}_1 + \varepsilon)$, и так как функция $u_0(y) - \bar{u}_1$ меняет знак на этом интервале, $\exists x \in W$: $u_0(y(x)) < \bar{u}_1$.

Учитывая непрерывность функций $u(t, x)$, $u_0(y)$, то обстоятельство, что $\bar{u}_1$ – точка Лебега функции $\varphi'(v)$, а также неравенства $u(\bar{t}_0, x) > \bar{u}_1$, $u_0(y(x)) < \bar{u}_1$, заключаем, что $(t_0, x, \bar{u}_1)$ – точка Лебега функций

$$\theta(v - u(t, x)) \quad \text{и} \quad \theta(v - u_0(x - \varphi'(v)t)).$$

Поэтому

$$0 = \theta(\bar{u}_1 - u(\bar{t}_0, x)) = \theta(\bar{u}_1 - u_0(x - \varphi'(\bar{u}_1)\bar{t}_0)) = 1.$$

Получили противоречие, доказывающее, что функция $f(y) = y + \varphi'(u_0(y))h$ возрастает на множестве $J \cap u_0^{-1}(E)$. Поэтому $\varphi'(u_0(y)) = (f(y) - y)/h$ имеет ограниченную вариацию как разность монотонных функций. По лемме 2 $\varphi'(u)$ является функцией ограниченной вариации на $E \cap [c, d]$ для любого отрезка $[c, d] \subset (a, b)$. В частности, для всех $u \in (a, b)$ определены односторонние

пределы $\varphi'(u+) = \lim_{v \rightarrow u+, v \in E} \varphi'(v)$ и множество $\{u \in E : \varphi'(u) \neq \varphi'(u+)\}$ не более чем счетно. Учитывая, что E – множество полной меры на (a, b) , получаем, что $\varphi'(u) = \varphi'(u+)$ п.в. на (a, b) ; отсюда и из свойств производной липшицевой функции, в свою очередь, следует, что существует классическая производная $\varphi'(u) = \varphi'(u+)$ в каждой точке непрерывности функции $\varphi'(u+)$. Для завершения доказательства остается заметить, что $\varphi'(u+)$ является функцией ограниченной вариации на любом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ (уже без исключения множества нулевой меры). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из доказательства предложения 3, функция $\varphi'(u)$ имеет ограниченную вариацию на отрезках вида $u_0(J)$, $J = [\alpha, \beta] \subset (-r, r)$.

Результат предложения 3 легко распространяется на случай произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть $u(t, x)$ является непрерывным и.р. уравнения (24) в области Ω , $(a, b) \subset \text{Int } u(\Omega)$, функция потока φ удовлетворяет условию Липшица (18) на (a, b) . Тогда производная φ' имеет локально ограниченную вариацию на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $u \neq \text{const}$ и $a < b$, случай $a = b$ тривиален. Пусть $\bar{u} \in (a, b)$. Тогда множества

$$\Omega^- = \text{Cl}\{(t, x) \in \Omega : u(t, x) < \bar{u}\}, \quad \Omega^+ = \{(t, x) \in \Omega : u(t, x) \geq \bar{u}\}$$

замкнуты и непусты. По связности Ω найдется точка $(t_0, x_0) \in \Omega^- \cap \Omega^+$. Тогда $u(t_0, x_0) = \bar{u}$ и любая окрестность U точки (t_0, x_0) содержит точки (t, x) , для которых $u(t, x) < \bar{u}$. Выберем окрестность вида

$$U = \{(t, x) : |x - x_0| < r - N|t - t_0|\},$$

где величина $r > 0$ достаточно мала, так что $U \subset \Omega$. Положим $v_0(y) = u(t_0, x_0 + y)$, $y \in (-r, r)$. Тогда функции $v = v^+(\tau, y) = u(t_0 + \tau, x_0 + y)$, $v = v^-(\tau, y) = u(t_0 - \tau, x_0 + y)$ будут непрерывными и.р. уравнений $v_\tau + \varphi(v)_y = 0$ и $v_\tau - \varphi(v)_y = 0$ соответственно в треугольной области $\{(\tau, y) : \tau > 0, |y| < r - N\tau\}$, удовлетворяющими начальному условию $v(0, y) = v_0(y)$ в смысле соотношения (19). Если $v_0(y) \geq \bar{u} \forall y \in (-r, r)$, то, как следует из теоремы 2, $v^\pm(\tau, y) \geq \bar{u}$, откуда $u(t, x) \geq \bar{u}$ в U , что противоречит выбору точки (t_0, x_0) . Итак, $\exists y \in (-r, r) : v_0(y) < \bar{u}$, и, значит, найдутся величины $h_1 > 0$, $\delta \in (0, r)$ такие, что $[\bar{u} - h_1, \bar{u}] \subset v_0([-r + \delta, r - \delta])$. По предложению 3 с учетом замечания 2 обобщенная производная $\varphi'(u)$ имеет ограниченную вариацию на $[\bar{u} - h_1, \bar{u}]$.

Выбирая точку $(t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}^- \cap \tilde{\Omega}^+$, где замкнутые множества

$$\tilde{\Omega}^- = \{(t, x) \in \Omega : u(t, x) \leq \bar{u}\}, \quad \tilde{\Omega}^+ = \text{Cl}\{(t, x) \in \Omega : u(t, x) > \bar{u}\},$$

и используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что $\varphi'(u)$ имеет ограниченную вариацию на множестве вида $[\bar{u}, \bar{u} + h_2]$, $h_2 > 0$. Поэтому $\varphi'(u)$ имеет ограниченную вариацию на объединении множеств $[\bar{u} - h_1, \bar{u}]$ и $[\bar{u}, \bar{u} + h_2]$, т.е. на отрезке $[\bar{u} - h_1, \bar{u} + h_2]$. Из произвольности $\bar{u} \in (a, b)$ следует, что $\varphi'(u)$ имеет локально ограниченную вариацию на (a, b) . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы 6 функция потока $\varphi(u)$ дифференцируема всюду на (a, b) , за исключением не более чем счетного множества значений, и дважды дифференцируема почти всюду на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6 можно считать, что обобщенная производная $\varphi'(u)$ является функцией локально ограниченной вариации на (a, b) . Поэтому (см., например, [11]) функция $\varphi'(u)$ непрерывна на (a, b) , за исключением не более чем счетного множества точек разрыва первого рода, и дифференцируема почти всюду на (a, b) . Отсюда непосредственно вытекает утверждение следствия.

Из теорем 4–6 выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $u(t, x)$ является непрерывным о.р. уравнения (24) в области Ω , $(a, b) = \text{Int } u(\Omega)$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$. Тогда выполнено свойство (*), указанное во введении:

найдется замкнутое относительно интервала (a, b) множество F нулевой меры такое, что функция φ удовлетворяет условию Липшица локально на $U = (a, b) \setminus F$ и производная φ' имеет локально ограниченную вариацию на U .

При этом $F = \emptyset$, если Ω является полосой $(t_1, t_2) \times \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 $u(t, x)$ – и.р. уравнения (24) в Ω . Тогда по теореме 5 существует замкнутое относительно (a, b) множество $F \subset (a, b)$ нулевой меры такое, что $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица локально на $U = (a, b) \setminus F$ и, в частности, определена обобщенная производная $\varphi'(u) \in L_{\text{loc}}^\infty(U)$. При этом ввиду теоремы 4 $F = \emptyset$, если Ω является полосой $(t_1, t_2) \times \mathbb{R}$. Пусть $\bar{u} \in U$. Выберем окрестность $(c, d) \subset U$ точки $\bar{u}$ такую, что $\varphi(u)$ удовлетворяет условию Липшица на $[c, d]$. Функция $\tilde{u} = \max(\min(u(t, x), d), c)$ является непрерывным и.р. уравнения (24) в Ω (по теореме 1) и удовлетворяет предположениям теоремы 6. Тогда по теореме 6 функция $\varphi'(u)$ имеет локально ограниченную вариацию на (c, d) . Из произвольности точки $\bar{u} \in U$ следует, что $\varphi'(u)$ имеет локально ограниченную вариацию на U . Теорема доказана.

Мы готовы дать приложение теоремы 7 к проблеме о функциональной зависимости частных производных, изложенной во введении. Пусть $v = v(t, x) \in C^1$ -гладкая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, отличная от линейной и удовлетворяющая соотношению (1): $v_t = \varphi(v_x)$ в Ω , где $\varphi(u)$ – непрерывная функция. Положим $u = v_x \in C(\Omega)$. Дифференцируя соотношение (1) по переменной x в $\mathcal{D}'(\Omega)$, получаем, что

$$u_t - \varphi(u)_x = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (41)$$

т.е. $u = u(t, x)$ – непрерывное о.р. уравнения (41). Пусть $(a, b) = \text{Int } u(\Omega)$. Тогда $a < b$ (в противном случае v_t, v_x постоянны) и по теореме 7 функция $\varphi(u)$ удовлетворяет свойству (*). В частности, $\varphi(u)$ дважды дифференцируема п.в. на (a, b) .

Этот результат дает некоторую информацию об аналитических и геометрических свойствах образов производных C^1 -гладких функций двух переменных. Геометрические свойства образов производных дифференцируемых (негладких) функций в многомерном случае изучались ранее, например в работах [12], [13].

Список литературы

- [1] Е. Ю. Панов, *Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1991.
- [2] С. Н. Кружков, “Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка”, *Докл. АН СССР*, **187**:1 (1969), 29–32.
- [3] С. Н. Кружков, “Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными”, *Матем. сб.*, **81**:2 (1970), 228–255.
- [4] Е. Ю. Панов, “К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 91–136.
- [5] С. Н. Кружков, Е. Ю. Панов, “Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных”, *Докл. АН СССР*, **314**:1 (1990), 79–84.
- [6] S. N. Kruzhkov, E. Yu. Panov, “Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **40** (1996), 31–54.
- [7] Е. Ю. Панов, “О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 107–148.
- [8] А. Ю. Горицкий, Е. Ю. Панов, “О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка”, *Тр. МИАН*, **236** (2002), 120–133.
- [9] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [10] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [11] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [12] J. Malý, “The Darboux property for gradients”, *Real Anal. Exchange*, **22**:1 (1996/97), 167–173.
- [13] М. В. Коробков, “Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:1 (2000), 118–133.

М. В. Коробков (M. V. Korobkov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: korob@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

04.11.2004 и 13.05.2005

Е. Ю. Панов (E. Yu. Panov)

Новгородский государственный университет,
г. Великий Новгород
E-mail: pey@novsu.ac.ru